Prof. L. KARASIŃSKI

Odkształcenia płaskich ustrojów prętowych

1. Zbiór środków przekrojów poprzecznych płaskich pręta nieodkształconego stanowi jego oś pierwotną — nieodkształconą. Pręt płaski[1]) ma tę oś prostą, lub — krzywą płaską i — prostopadły do niej bieżący przekrój o obwodzie stałym — lub zmiennym nader powoli. Jednoimienne osie główne wszystkich przekrojów pręta płaskiego leżą wraz z nieodkształconą w płaszczyźnie głównej[2]).

Skrajne punkty nieodkształconej nazywam węzłami pręta. Tylko w nich pręt może być podparty lub osadzony; podparcie w pośrednim punkcie nieodkształconej wprowadza *podział na dwa pręty o sztywnem złączu w tym* punkcie podparcia lub osadzenia. Odcinek prostej, łączącej punkty węzłowe, stanowi oś węzłową pręta nieodkształconego.

W głównej płaszczyźnie pręta zawarte są siły skupione, warstwowe, momenty zwykłe i jednostkowe, a nadto — odpory płaskiego obciążenia zewnętrznego: odkształcona leży w tejże płaszczyźnie głównej pręta.

Pręty o wspólnej płaszczyźnie głównej, przegubowo lub sztywnie na węzłach powiązane, tworzą ustrój prętowy płaski. Jego pręty mogą być przeto:

— *pp* — dwuprzegubowe, obustronnie łączone na węzłach przegubowo,

— *ps* — jednoprzegubowe, sztywnie łączone na jednym węźle, na drugim przegubowo, wreszcie —

— *ss* — bezprzegubowe, obustronnie na węzłach sztywnie łączone.

Węzeł przegubowy *wp* łączy pręty przegubem wieloszczękowym o jednej wspólnej osi węzłowej, prostopadłej do płaszczyzny ustroju. Dodatkowe sztywne wiązania międzyprętowe na węzłach tworzą złącza prętów: węzeł z przegubowego staje się sztywnym.

Węzeł sztywny *ws* łączy pręty i złącza prętowe przegubem wieloszczękowym o jednej wspólnej osi, prostopadłej do płaszczyzny ustroju. Węzeł sztywny może być o jednem złączu, o dwóch, o sztywnych *n* złączach od siebie niezależnych.

Prosty przykład: węzeł *wp* łączy sześć niezależnych od siebie prętów: A—B—C—D—E—F przegubowo. Sztywne związanie końców dwóch, trzech, czterech, pięciu lub wszystkich sześciu jego prętów – da węzeł sztywny o jednem złączu. Dwa sztywne złącza od siebie niezależne dadzą *ws* o dwóch złączach, np.: A—B—CD—EF, lub: A—BC—DEF, albo: AB—CDEF. Trzy złącza dadzą *ws* o trzech złączach, od siebie niezależnych, np.: AB—CD—EF.

Pręty węzłowe i złącza mają swobodę obrotu około wspólnej osi przegubu, a punkt przecięcia się osi węzłowej z płaszczyzną ustroju — swobodę ruchu w tej płaszczyźnie. Ten płaski ruch osi można ograniczyć, ująwszy ją w szczęki podpory posuwnej lub przegubowej. Węzeł — będzie podparty na podporze, nie uszczuplającej swobody ruchów obrotowych jego prętów i złącz.

Można również osadzić węzeł na podporze sztywnej: w punkcie podparcia unieruchomić oś węzłową, a nadto — sztywnie z podporą złączyć dowolną ilość jego prętów przegubowych i złącz. Pozostałe pręty przegubowe i złącza tego węzła, osadzonego na podporze sztywnej mają swobodę ruchu obrotowego około unieruchomionej osi węzłowej.

Wzamian ograniczenia ruchu rodzą się w punktach podparcia lub osadzenia odpory, wywołane działaniem zewnętrznego obciążenia płaskiego. *Każdy odpór stanowi niewiadomą* siłę zewnętrzną ustroju.

Pozatem obciążenie zewnętrzne wzbudza niewiadome siły wewnętrzne ustroju — wzajemnego oddziaływania prętów na węzłach. Zatem na przegub pręta może działać siła węzłowa *H*, leżąca na osi węzłowej i prostopadła do niej siła poprzeczna *A*. Złącze dorzuca moment węzłowy *D*, prostopadły do płaszczyzny ustroju. Prócz obustronnego oddziaływania tych wypadkowych — na pręt może działać jego obciążenie zewnętrzne.

A więc — na pręt *pp* — działają cztery wypadkowe oddziaływanie prętów, węzłowo z nim połączonych, — na pręt *ps* — pięć, na *ss* — sześć. Trzy warunki równowagi pręta płaskiego zmniejszają ilość tych niewiadomych o trzy: każdy pręt *pp* wprowadza jedną niewiadomą ustroju, każdy pręt *ps* — dwie, każdy *ss* — trzy.

Do wyznaczania tych niewiadomych służą warunki równowagi na węzłach ustroju. Każdy węzeł *wp* daje dwa równania warunkowe dla dwukierunkowych prostopadłych składowych sił wewnętrznych ustroju, — każdy węzeł *ws* takież dwa równania, a nadto jeszcze *n* równań warunkowych dla momentów węzłowych — stosownie do ilości *n* złącz prętowych od siebie niezależnych.

Ogółem przeto hyperstatycznych sił i momentów ustroju będzie:

$$(i) = (pp) + 2\,(ps) + 3\,(ss) + (o) - 2\,(wp) - 2\,(ws) - (n). \quad . \quad (1)$$

Nawiasami oznaczyłem tu ilości: prętów *pp*, *ps*, *ss*, odporów *o*, węzłów *wp*, *ws* i złącz *n* wszystkich węzłów sztywnych.

Odkształcenia stanowią drugą gromadę niewiadomych płaskiego ustroju prętowego. Podstawowe wzory wytrzymałości uzależniają odkształcenia poprzecznych przekrojów pręta płaskiego od przyrostów spółrzędnych nieodkształconej i obrotu jej stycznych. Te trzy bieżące składowe odkształcenia wyznaczyć można z trzech równań odkształconej pręta płaskiego w zależności od jego płaskiego obciążenia zewnętrznego i węzłowych składowych odkształcenia jego osi pierwotnej.

Każdy węzeł *wp* płaskiego ustroju prętowego wprowadza dwa niewiadome posunięcia swej osi w płaszczyźnie ustroju, a nadto — niewiadome kąty obrotu około tej osi — węzłowych stycznych nieodkształconych wszystkich prętów, łączonych na tym węźle przegubowo.

Każdy węzeł *ws*, prócz owych dwóch posunięć osi i *węzłowych obrotów prętów, łączonych na nim przegubowo*, wprowadza jeszcze *n* niewiadomych obrotów swych *n* złącz prętowych. Ogółem więc — tyle jest niewiadomych węzłowych obrotów prętów, łączonych przegubowo na węzłach ustroju, ile przegubów u wszystkich jego prętów.

[1]) O prętach przestrzennych mówi druga część tej pracy: „Odkształcenia przestrzennych ustrojów prętowych". W dalszych odsyłaczach: PT — oznacza rocznik Przeglądu Technicznego, T — drugie wydanie Technika, WT — trzecie wydanie z roku 1930 mojej Wytrzymałości Tworzyw.

[2]) PT z 1934 r., str. 658, lub T. str. 494 p. 4, lub WT, str. 19, p. 10.

Do wyznaczania tych obrotów węzłowych posłużą równania odkształconych poszczególnych prętów, poczem — dla pręta dwuprzegubowego pp pozostanie już tylko jedno równanie odkształconej, dla pręta jednoprzegubowego ps — dwa, a dla pręta bezprzegubowego ss — wszystkie trzy niewyzyskane równania odkształconej.

Nadto każdemu odporowi o płaskiego ustroju prętowego przynależy warunek ograniczenia ruchu w punkcie podparcia lub osadzenia — równanie odkształconej podpory, wiążące niewiadome odkształcenia, a przeto wszystkie równania odkształconych prętów i podpór ustroju dadzą nadmiar:

$$(j) = (pp) + 2\,(ps) + 2\,(ss) + (o) - 2\,(wp) - 2\,(ws) - (n)$$

równań warunkowych, pokrywający niedobór warunków równowagi bez reszty. Stąd — twierdzenie ogólne:

Równania odkształconych wszystkich prętów i podpór płaskiego ustroju, łącznie z warunkami równowagi wszystkich jego prętów i węzłów stanowią układ równań linjowych, służących do wyznaczania niewiadomych sił wewnętrznych, odporów i odkształceń ustroju.

Przypadki osobliwości macierzy tego układu każdorazowo wymagają odrębnych rozważań. Pręt płaski swobodnie sterczący z węzła ustroju służy tylko jako ramię dla obciążenia zewnętrznego. To obciążenie należy sprowadzić do węzła, a sam ów pręt wspornikowy — wyłączyć z rozważań, jakby wogóle nie istniał.

2. Chcąc znaleźć równania odkształconej pręta płaskiego, obieram w jego płaszczyźnie głównej (rys. 1) prostokątny układ osi X, Y i nazywam:

— *zwrotem* (x), lub (y) — kierunek wzrostu odciętych x, lub rzędnych y, a nadto:

— *skrętem* (o) — kierunek obrotu o kąt prosty dodatniej osi X aż do pokrycia nią — dodatniej osi Y.

Przez F oznaczam pole bieżącego przekroju pręta, przez I — jego główny moment bezwładności względem osi J, prostopadłej do płaszczyzny głównej XY pręta, — przez E, G — spółczynniki sprężystości podłużnej i poprzecznej tworzywa.

Bieżący punkt

$$b\ (x,\ y)$$

nieodkształconej pręta jest kresem jej łuku s, mierzonego od początkowego punktu a do b w kierunku *zwrotu* (s). Dodatni przyrost ds da punkt sąsiedni:

$$c\ (x + dx,\ y + dy)$$

nieodkształconej.

Z jej punktów: b, c wyprowadzam styczne: B, C i normalne: K, L. Kąt m pochylenia ku osi X stycznej B mierzę od zwrotu (x) do zwrotu (s) w kierunku skrętu (o). Dodatni przyrost ds daje zwrot (s) stycznej B, a przeto zawsze:

$$dx = \cos m \cdot ds, \qquad dy = \sin m \cdot ds\,.$$

Skręt (o) zwrotu (s) o kąt prosty daje zwrot (q) normalnej. Promień krzywizny r nieodkształconej jest dodatni, gdy zwrot (q) mierzy w jej środek krzywizny k. Zatem normalna K tworzy kąt:

$$m + \frac{1}{2}\pi$$

z osią X, a sąsiednia styczna C i normalna L — kąty:

$$m + dm, \qquad m + dm + \frac{1}{2}\pi\ .$$

Sąsiednie styczne: B, C i normalne K, L pochylone są ku sobie pod kątem dm.

Po odkształceniu punkt b staje się bieżącym punktem

$$b'\ (x + \delta x,\ y + \delta y)$$

odkształconej, punkt c — jej sąsiednim punktem:

$$c'\ (x + dx + \delta x + \delta dx,\ y + dy + \delta y + \delta dy)\ .$$

W punktach: b', c' styczne: B', C' odkształconej pochylają się ku osi X pod kątami:

$$m + \delta m, \qquad m + dm + \delta m + \delta dm\ ;$$

jej normalne: K', L' — pod kątami większemi o połowę π. Sąsiednie styczne: B', C' i normalne: K', L' odkształconej tworzą kąt:

$$dm + \delta dm$$

względnego ku sobie pochylenia.

W pobliżu wierzchołka b miejscowych osi spółrzędnych prostokątnych: B, K, obieram punkt d o spółrzędnych:

$$ds,\ dq\ .$$

Rzuty długostki bd na pierwotne osie X, Y będą:

$$dx = \cos m \cdot ds - \sin m \cdot dq$$

$$dy = \sin m \cdot ds + \cos m \cdot dq\ .$$

Ich zmiany:

$$\delta dx = -\ (\sin m \cdot ds + \cos m \cdot dq)\ \delta m +$$
$$+ \cos m \cdot \delta ds - \sin m \cdot \delta dq,$$
$$\delta dy = (\cos m \cdot ds - \sin m \cdot dq)\ \delta m +$$
$$+ \sin m \cdot \delta ds + \cos m \cdot \delta dq$$

zależą od przyrostów odkształcenia

$$\delta ds,\ \delta dq,\ \delta m\ .$$

Biorąc punkt c zamiast d, mogę pominąć dq, jako małą wyższego rzędu wobec ds, a nadto, zważywszy, że:

$$d\ (x\,\delta m) = dx\,\delta m + x\,d\,\delta m$$

$$d\ (y\,\delta m) = dy\,\delta m + y\,d\,\delta m\,,$$

napisać:

$$d\,\delta x = -\ dy\,\delta m + \cos m\,\delta ds - \sin m\,\delta dq =$$
$$= -\ d\ (y\,\delta m) + \cos m\,\delta ds - \sin m\,\delta dq + y\,\delta dm,$$
$$d\,\delta y = dx\,\delta m + \sin m\,\delta ds + \cos m\,\delta dq =$$
$$= d\ (x\,\delta m) + \sin m\,\delta ds + \cos m\,\delta dq - x\,\delta dm\ .$$

Całkowanie w granicach dwóch jakichkolwiek punktów a, i nieodkształconej da wzory *Bresse'a*:

$$\delta x_i - \delta x_a = -\ y_i\,\delta m_i + y_a\,\delta m_a + U$$

$$\delta y_i - \delta y_a = x_i\,\delta m_i - x_a\,\delta m_a + V \quad . \ . \ . \ (2)$$

gdzie dla skrócenia użyłem oznaczeń:

$$U = \int_{x_a}^{x_i} \frac{\delta ds}{ds}\,dx - \int_{y_a}^{y_i} \frac{\delta dq}{ds}\,dy + \int_{s_a}^{s_i} \frac{\delta dm}{ds}\,y\,ds\ ,$$

$$V = \int_{y_a}^{y_i} \frac{\delta ds}{ds}\,dy + \int_{x_a}^{x_i} \frac{\delta dq}{ds}\,dx - \int_{s_a}^{s_i} \frac{\delta dm}{ds}\,x\,ds\ .$$

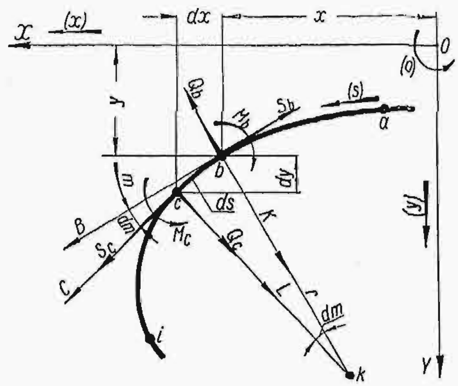
Stąd, po wyrugowaniu tych lub owych przyrostów kątów za pomocą wzoru *Clapeyron'a:*

$$\delta m_i - \delta m_a = W = \int_{s_a}^{s_i} \frac{\delta dm}{ds}\,ds \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ (3)$$

będę miał inną postać wzorów *Bresse'a:*

$$\left.\begin{aligned}\delta x_i - \delta x_a &= -(y_i - y_a)\,\delta m_a + U - y_i\,W = \\ &= -(y_i - y_a)\,\delta m_i + U - y_a\,W \\ \delta y_i - \delta y_a &= (x_i - x_a)\,\delta m_a + V + x_i\,W = \\ &= (x_i - x_a)\,\delta m_i + V + x_a\,W\,.\end{aligned}\right\} \quad \ldots (4)$$

3. Przy obciążeniach niezbyt znacznych, jedynie praktycznie dopuszczalnych, — wszystkie przyrosty odkształcenia są znikome wobec pierwotnych wartości spółrzędnych i kątów. Zatem przy sprowadzaniu obciążenia zewnętrznego do środków przekrojów poprzecznych — mogę brać: b, c zamiast b', c'.



Rys. 1.

Wypadkowe sprowadzania zależą od *zwrotu (w)*, czyli kierunku posuwania się wzdłuż pręta przy uwzględnianiu sił i momentów obranej części obciążenia, dającej dla środka bieżącego przekroju — bieżące: *siły osiowe S*, styczne do nieodkształconej, *siły poprzeczne*, czyli *tnące Q*, do niej prostopadłe, oraz — *momenty gnące M*, prostopadłe do płaszczyzny głównej *XY* pręta.

Zwroty *(w)*, *(s)* mogą być zgodne, lub sprzeczne. Zwrot *(w)* jest zgodny ze zwrotem *(s)*, gdy od początkowego węzła nieodkształconej, mijając punkt a, dążę ku b i sprowadzam do tego środka przekroju — wszystkie kolejno spotkane po drodze: odpory, siły i momenty zewnętrzne. Sprowadzenie tej części obciążenia da wypadkowe bieżące:

$$S_b,\ Q_b,\ M_b$$

tuż przed punktem b, gdy pominę jego obciążenie zewnętrzne, lub *tuż za nim*, gdy do tych wypadkowych dołączę: *siłę osiową* O_b, *poprzeczną* P_b *i moment gnący* Z_b obciążenia zewnętrznego samego punktu b.

Dalszy posuw o łuk:

$$bc = ds$$

da mi przyrosty:

$$d\,S_b,\ d\,Q_b,\ M_b$$

i wypadkowe — tuż przed punktem c, lub tuż za nim.

Zwrot *(w)* jest sprzeczny ze zwrotem *(s)*, gdy od końcowego węzła nieodkształconej, mijając punkt i, dążę ku c i sprowadzam do tego środka — drugą część obciążenia. To sprowadzenie da wypadkowe:

$$S_c,\ Q_c,\ M_c$$

tuż za punktem c, gdy pominę jego obciążenie zewnętrzne, lub — *tuż przed nim*, gdy dołączę do tych wypadkowych: siłę osiową O_c, poprzeczną P_c i moment Z_c obciążenia zewnętrznego punktu c.

Dalszy posuw w kierunku zwrotu *(w)* o łuk:

$$cb = -\,ds$$

da przyrosty:

$$d\,S_c,\ d\,Q_c,\ d\,M_c$$

i wypadkowe tuż przed punktem b, lub — tuż za nim. Słowa: tuż przed, tuż za stosują się zawsze do zwrotu *(s)*.

Pomiędzy b, c niema obciążeń skupionych, może tam jednak działać siła jednostkowa: osiowa o_b, styczna do nieodkształconej, poprzeczna p_b, do niej prostopadła, — obie w kg/cm, a nadto — jednostkowy moment gnący z_b w kg prostopadły do płaszczyzny głównej pręta.

Siły osiowe: bieżąca S, skupiona O i jednostkowa o — mają zwrot *(w)*, gdy są ujemne, ściskające, lub zwrot przeciwny *(—o)*, gdy są dodatnie, rozciągające.

Siły poprzeczne — tnące: bieżąca Q, skupiona P i jednostkowa p mają zwrot *(w)*, odchylony o kąt prosty skrętem *(o)*, gdy są ujemne, lub skrętem wprost przeciwnym (—o), gdy są dodatnie.

Momenty gnące: bieżący M, skupiony Z i jednostkowy z, w przypadku zwrotów *(w)*, *(s)* zgodnych — mają skręt *(o)* gdy są ujemne, lub przeciwny skręt *(—o)*, gdy są dodatnie i naodwrót, w przypadku zwrotów *(w)*, *(s)* sprzecznych — mają skręt *(o)*, gdy są dodatnie, lub przeciwny skręt *(—o)*, gdy są ujemne.

Zatem będą miał zawsze dla zwrotu *(w)*:

$$dS = \left(o + \frac{Q}{r}\right) ds\,,\quad dQ = \left(p - \frac{S}{r}\right) ds\,,$$

$$dM = (z - Q)\,ds$$

niezależnie od zgodności lub sprzeczności zwrotów *(w)*, *(s)*. Są to znów wzory *Bresse'a*.

Siły osiowe S dają [3]) wydłużenie:

$$\delta\,ds = \frac{S}{EF}\,ds$$

łuku ds, oraz — płaski obrót przekroju c względem przekroju b około środka krzywizny k o kąt:

$$\delta dm = \frac{S}{EFr}\,ds\,.$$

Siły tnące Q wywołują [4]) przesunięcie

$$\delta dq = \frac{n\,Q}{GF}\,ds$$

środka c po normalnej L w kierunku zwrotu siły tnącej, przyłożonej do tego środka, a nadto — płaski obrót przekroju c względem przekroju b około środka c o kąt:

$$\delta dm = \frac{d}{ds}\left(\frac{n\,Q}{GF}\right) ds\,.$$

Łatwo się o tem przekonać, zważywszy, że owo przesunięcie δdq końca c łuku ds odchyla cały trójkąt bck o kąt:

$$\frac{n\,Q}{GF}$$

obrotu około początkowego punktu b łuku ds. Sąsiednia siła:

$$Q + dQ$$

[3]) *WT* str. 391 p. 2, lub *T*, str. 554 p. 2.

[4]) *WT* str. 392 p. 3. Spółczynnik liczbowy n zależy od postaci przekroju. Dla kołowego ma średnią wartość: 1,18, dla prostokątnego: 1,2.

odchyli następny trójkąt o kąt:

$$\frac{nQ}{GF} + d\left(\frac{nQ}{GF}\right)$$

obrotu około środka c, zatem normalna L obróci się względem normalnej K o kąt:

$$d\left(\frac{nQ}{GF}\right)$$

względnego obrotu sąsiednich przekrojów b, c pręta.

Momenty gnące M sprawiają[5]) płaski obrót przekroju c względem przekroju b o kąt:

$$\delta dm = \frac{M}{EFrj}\, ds$$

około środka d, leżącego na promieniu krzywizny ck w odległości j od środka c, dają więc wydłużenie:

$$\delta ds = \frac{M}{EFr}\, ds$$

łuku ds. Odległość j wylicza się ze wzoru:

$$j = r - \frac{F}{\int\limits_F \frac{dF}{r+u}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (j)$$

gdzie u oznacza rzędną poletka dF na osi U, wyprowadzonej ze środka b przekroju. Ta oś leży na normalnej K i ma zwrot od środka krzywizny k — ku środkowi b pola F przekroju.

Łatwo dostrzec z tego wzoru, że iloczyn rj jest zawsze dodatni, gdyż środek krzywizny k leży poza obrębem pręta. Dla prętów o małej krzywiźnie iloczyn Frj wobec znacznego r zbliża się do I — głównego momentu bezwładności pola F względem osi J, prostopadłej do osi U. Samo j zbliża się do zera. Zatem dla prętów o słabej krzywiźnie:

$$\delta dm = \frac{M}{EI}\, ds, \quad \delta\, ds = o\,.$$

4. Odkształcenia cieplne zależą od różnicy temperatur nagrzania pręta i od spółczynnika rozszerzalności f jego tworzywa. Odcinek pręta, pomiędzy sąsiedniemi przekrojami b, c zawarty, ma stałą temperaturę t_o — pierwotną.

Z tego odcinka wyodrębniam włókno dF w odległości

$$r + u$$

od osi k, prostopadle przecinającej płaszczyznę główną XY pręta w środku krzywizny nieodkształconej.

Po jednostajnem nagrzaniu całego odcinka do temperatury t — pierwotna długość tego włókna:

$$(r + u)\, dm$$

wzrośnie o:

$$(t - t_o)\,(r + u)\, f\, dm\,.$$

Stąd wydłużenie cieplne:

$$e_t = (t - t_o)\, f\,,$$

stałe dla wszystkich włókien odcinka.

Przypiszę go działaniu z a s t ę p c z e g o c i e p l n e g o n a p r ę ż e n i a o s i o w e g o:

$$N_t = Ee_t = E\,(t - t_o)\, f\,,$$

stałego w całym przekroju, a więc pochodzącego od z a s t ę p c z e j s i ł y o s i o w e j:

$$S_t = \int\limits_F N_t\, dF = EF\,(t - t_o)\, f\,.$$

[5]) *WT* str. 393 p. 4, lub T str. 554 p. 4,5.

Ta siła daje przyrost

$$\delta ds = \frac{S_t}{EF}\, ds = (t - t_o)\, f\, ds$$

łuku ds, oraz — płaski obrót przekroju c względem przekroju b około środka krzywizny k o kąt:

$$\delta dm = (t - t_o)\,\frac{f\, ds}{r}\,.$$

Jednostajne nagrzanie odcinka nie daje zastępczego momentu gnącego. Istotnie:

$$M_t = \int\limits_F N_t\, u\, dF = E\,(t - t_o)\, f \int\limits_F u\, dF = o$$

ostatnia bowiem całka tego wzoru stanowi moment statyczny przekroju względem osi J — środkowej, a więc jest równa zeru.

Moment M_t pojawi się po niejednostajnem nagrzaniu odcinka. Wobec niepokonanych trudności wskazania istotnego spadku temperatur w pręcie, wychodzę z założeń najprostszych.

Cały odcinek ma pierwotną temperaturę t początkowego jednostajnego nagrzania.

Przy wtórnem niejednostajnem nagrzaniu skrajne włókna odcinka, leżące w odległości

$$r + w$$

od osi k przegrzano do temperatury t_w. Odległość skrajnych włókien przeciwległych od tejże osi oznaczam przez:

$$r - v\,,$$

ich temperaturę wtórnego nagrzania — przez t_v i zakładem, że włókno obojętne, leżące w odległości

$$r - j$$

od osi k — pozostało przy swej pierwotnej temperaturze t, a przeto nie wydłużyło się po niejednostajnem wtórnem nagrzaniu odcinka.

Zakładam przytem, że to nagrzanie sprawia płaski obrót przekroju c względem przekroju b o kąt δdm — około środka d, leżącego na promieniu krzywizny ck w odległości j od środka c, i że odległość tę wyznacza się ze wzoru (j).

Słowem — odkształcenie, wywołane owem niejednostajnem wtórnem nagrzaniem — chcę uzależnić w y ł ą c z n i e o d z a s t ę p c z e g o m o m e n t u c i e p l n e g o M_t, działającego, jak zwykły bieżący moment gnący.

Kryje się w tem milczące założenie odpowiedniego rozkładu temperatur, zmieniających się wraz z odległością

$$r + u$$

od osi k. Włókno odcinka, w tej odległości wyodrębnione ma po nagrzaniu wtórnem temperaturę t_u. Jego długość

$$(r + u)\, dm\,,$$

przynależna temperaturze t — wzrośnie o:

$$(t_u - t)\,(r + u)\, f\, dm = (j + u)\,\delta dm\,.$$

Zatem dla skrajnych włókien odcinka:

$$(t_w - t)\,(r + w)\, f\, dm = (j + w)\,\delta dm\,,$$

$$(t_v - t)\,(r - v)\, f\, dm = (j - v)\,\delta dm\,.$$

Iloraz i różnica tych zależności dadzą:

$$t = \frac{t_w\,(r + w)\,(v - j) + t_v\,(r - v)\,(w + j)}{(r + w)\,(v - j) + (r - v)\,(w + j)}\,,$$

$$\delta dm = \frac{(t_w - t)\,(r + w) - (t_v - t)\,(r - v)}{r\,(v + w)}\, f\, ds\,,$$

$$\delta ds = j\,\delta dm\,.$$

Stąd, po dodaniu przyrostów, wywołanych działaniem pierwotnego jednostajnego nagrzania i po uwzględnieniu wartości t:

$$\delta dm = \left[\frac{t_w (r + w) - t_v (r - v)}{v + w} - t_o\right] \frac{f\,ds}{r},$$

$$\delta ds = \left[\frac{t_m (r + w)\, v + t_v (r - v)\, w}{r (v + w)} - t_o\right] f\,ds.$$

Czyniąc w tych wzorach:

$$t_w = t_v = t,$$

wracam do wyników, poprzednio otrzymanych dla jednostajnego nagrzania.

Przy znacznem r i zerowem j, t. j. przy wartościach, przynależnych prętom o słabej krzywiźnie:

$$\delta dm = \frac{t_w - t_v}{v + w} f\,ds,$$

$$\delta ds = \left[\frac{t_w v + t_v w}{v + w} - t_o\right] f\,ds.$$

Zatem, przy łącznem działaniu wszystkich czynników odkształcenia:

$$\frac{\delta dm}{ds} = \frac{S}{EFr} + \frac{d}{ds}\left(\frac{nQ}{GF}\right) + \frac{M}{EFrj} +$$

$$+ \left[\frac{t_w (r + w) - t_v (r - v)}{v + w} - t_o\right] \frac{f}{r},$$

$$\frac{\delta ds}{ds} = \frac{S}{EF} + \frac{M}{EFr} +$$

$$+ \left[\frac{t_w (r + w)\, v + t_v (r - v)\, w}{r (v + w)} - t_o\right] f$$

dla pręta o krzywiźnie znacznej, dla pręta zaś o krzywiźnie słabej:

$$\frac{\delta dm}{ds} = \frac{d}{ds}\left(\frac{nQ}{GF}\right) + \frac{M}{EI} + \frac{t_w - t_v}{v + w} f,$$

$$\frac{\delta ds}{ds} = \frac{S}{EF} + \left[\frac{t_w v + t_v w}{v + w} - t_o\right] f.$$

Nadto w obu przypadkach:

$$\frac{\delta dq}{ds} = \frac{nQ}{GF}.$$

W e w s z y s t k i c h t y c h w z o r a c h d o d a t n i e m u r p r z y n a l e ż ą d o d a t n i e

$$v,\ w,\ j -$$

u j e m n e m u — u j e m n e.

Początkujący ufają tylko potędze twierdzeń o pracy sprężystej, nie podejrzewając zgoła, ile tam kryje się zdradliwych pułapek. I tu można by skorzystać z tych wzorów. *Castigliano*, prawidłowo użyty, dałby to samo, choć mniej przejrzyście i z większym nakładem pracy i nudy...

Zawsze jednak pierwszy — *Bresse*, świetny umysł galloromański, niewyczerpane tajemne źrodło dla tych, jak mówi *Maxwell* — „ociężałych"...

(d. n.)

Dr. A. BARDACH

Chałupnictwo, jako forma produkcji przemysłowej *)

Chałupnictwo jest formą produkcji, bardzo w Polsce rozpowszechnioną. — Warszawa, Łódź, Wilno, Białystok, Tarnów przepełnione są chałupnikami, mamy również zwarte osiedla chałupnicze jak Brzeziny, Nowy Dwór, Świątkowice, Kozienice i t. d., a w niektórych powiatach (zwłaszcza podgórskich), jest tysiące warsztatów chałupniczych, rozsianych po wsiach. Przemysł chałupniczy zatrudniał w okresie przedkryzysowym ponad 300 000 ludzi (Katalog Wystawy Pracy Chałupniczej z r. 1931); dzisiaj w związku z kryzysem liczba chałupników jest zapewne znacznie większa. Mówiąc o przemyśle polskim, należy zawsze mieć na uwadze o b i e j e g o f o r m y, z a r ó w n o f a b r y c z n ą, j a k i c h a ł u p n i c z ą.

Wiemy z historji gospodarczej, że zanim rozwinął się dzisiejszy przemysł fabryczny istniały t. zw. m a n u f a k t u r y, bardzo rozpowszechnioone w XVII, a zwłaszcza XVIII wieku. Robotnicy pracowali we wspólnym warsztacie pracy, stosowano podział pracy, nie było natomiast maszyn, a jedynie rzemieślnicze narzędzia produkcji. Przed okresem manufaktur, w zaraniu gospodarki kapitalistycznej w Europie zachodniej, *istniało c h a ł u p n i c t w o, jako jedyna* forma produkcji przemysłowej. Kupiec-nakładca skupywał gotowe wyroby rzemieślnicze, względnie zamawiał je u majstrów i dostarczał na rynek. Chałupnictwo, z którem spotykamy się obecnie w Polsce w ważniejszych dziedzinach przemysłu, najczęściej n i e o d p o w i a d a ż a d n e j z w y m i e n i o n y c h t u f o r m h i s t o r y c z n y c h p r z e m y s ł u, a n i w c z e s n o - k a p i t a l i s t y c z n e m u c h a ł u p n i c t w u, a n i m a n u f a k t u r z e z XVII i XVIII w i e k u, a n i n o w o c z e s n e j f a b r y c e. Jest to nowa forma produkcji, w której odnajdujemy zarówno cechy dawnego chałupnictwa, jak i elementy późniejszych manufaktur i dlatego proponuję wprowadzenie nowej nazwy, mianowicie „zdecentralizowana manufaktura". Będzie to więc produkcja, oparta na technice rzemieślniczej, w której stosowany jest daleko posunięty podział pracy, dzięki czemu chałupnik jest w trwały sposób związany z jakąś cząstkową funkcją procesu produkcyjnego (podobnie jak robotnik w fabryce, czy ongiś w manufakturze). Warsztat pracy chałupnika robi wprawdzie na pierwszy rzut oka wrażenie warsztatu rzemieślnika. Ale to złudzenie mija, gdy spogląda się nań od strony kantoru nakładcy (którego skromny lokal kryje w sobie biuro nieraz bardzo dużego przedsiębiorstwa o miljonowych obrotach), lub też gdy się bada wewnętrzną organizację pracy oraz socjalne położenie pracownika. W związku z ustawą o pracy chałupniczej, wydaną w lipcu r. b., przynosi tygodnik „Rzemiosło" (w numerze z dn. 26 sierpnia r. b.) następującą informację p. t. „Z życia rzemiosł w Brzezinach". Na zebraniu rzemieślników omawiano sprawę wydawania kart rzemieślniczych chałupnikom: „kwestja ta napotyka na terenie Brzezin na znaczne trudności, gdyż chałupnicy brzezińscy są s p e c j a l i s t a m i t y l k o n i e k t ó r y c h c z ę ś c i u b r a ń jak spodni, kamizelek czy marynarek, a przepisy tegoż rozporządzenia pozwalają na wyda-

*) Uwagi na marginesie pierwszej polskiej ustawy chałupniczej.