

czy towarowy, podmiejski czy dalekobieżny pośpieszny, czy wreszcie o pociąg kolei podziemnej lub t. p. W badaniach uwzględniono 2 szybkości ruszania z miejsca. W zastosowaniu do badań urządzeniu szybkość mogła być podwyższana nie w sposób ciągły, lecz stopniowany od stanu spoczynku aż do maximum prędkości. W jednej serii prób stosowano przyspieszenie wzrastające od 0 do 65 km w 3-ch stopniach w ciągu 2 minut; odpowiadało to mniej więcej ruszaniu z miejsca pociągu osobowego, podmiejskiego i t. p. Przejściowe stopnie szybkości (25 i 45 km/godz) utrzymywano w ciągu 1 minuty. W drugiej serii prób szybkość wzrastała także do 65 km/godz., lecz w ciągu 4-ch minut w 3-ch stopniach, co odpowiadało czasowi rozbiegu ciężkiego pociągu pośpiesznego, pociągu towarowego i t. p. Tu utrzymano przejściowe szybkości 25 i 45 km/godz. przez 2 minuty. Pomiary wartości badanych, które, zwłaszcza w pierwszym okresie próby, ulegały szybkim zmianom, dokonywane były co 10 sekund. Okres rozruchu obserwowany był przy różnych temperaturach w ciągu co najmniej 10 minut, w którym to okresie wyraźnie występowały najważniejsze różnice charakterystyczne pomiędzy obojdwoma rodzajami smarowania.

Prof. L. KARASIŃSKI

Wzory Clerc'a i Clapeyron'a dla belek prostych płasko zginanych

1. Ciągłość zarysu bocznej powierzchni pręta, powolna zmienność i wzajemna nieprzenikliwość jego przekrojów poprzecznych stanowią o istnieniu dwóch *głównych powierzchni bezwładności*, przecinających się prostopadłe wzdłuż pierwotnej osi pręta. W jednej z nich leżą osie najmniejszych momentów bezwładności wszystkich przekrojów poprzecznych, w drugiej — największych. Dwie *główne płaszczyzny bezwładności* może mieć tylko pręt prosty. Kładę go, jako belkę, poziomo. Ze środka O końcowego prawego przekroju, lub ścianki czołowej, wyprowadzam prostokątne osie: X — wlewo, wzdłuż pierwotnej osi pręta, Y — w dół, Z — w tył, poza płaszczyznę XY . Druga płaszczyzna XZ zawiera osie głównych momentów bezwładności J przekrojów poprzecznych; w XY leżą siły skupione P pionowe, pionowe warstwy obciążeń ciągłych, oraz pary sił skupionych momentów zewnętrznych.

To obciążenie *pionowe płaskie* nie wzbudza poziomych sił odporowych. Kierunek (w) wzrostu wypadkowych obciążeń¹⁾ obieram sprzeczny z kierunkiem dodatniej osi X — wprawo; zatem *tuż przed* bieżącym punktem (x, y) odkształconej panuje *moment zginający* M , lewoskrętny dodatni, prawoskrętny — ujemny, oraz *siła ścinająca* Q , którą zazwyczaj pomijamy wobec M . Są to wypadkowe obciążenia i odporów *lewej* części belki, aż do punktu sprowadzenia (x, y) wyłączenie.

¹⁾ WT. str. 218 p. 4. W odnośnikach dalszych PT oznacza rocznik Przeglądu Technicznego, T — drugie wydanie Technika, WT — wydanie trzecie z 1930 r. mej Wytrzymałości Tworzyw.

Wyniki badań ujęto w szereg krzywych, obrazujących wartości tarcia, temperatury i rozchodu energii napędowej silnika przy zastosowaniu smarowania pod wysokim ciśnieniem i bez ciśnienia.

(d. c. n.)

Les paliers à glissement lubrifiés d'une manière nouvelle sous pression très élevée

Résumé

Les paliers à glissement, l'une des parties principales de toute sorte de machines et de voitures, présentent — outre les avantages bien connus — de considérables désavantages, consistant dans les grandes pertes de frottement ayant lieu ainsi pendant le démarrage que pendant le mouvement constant. Dans son article l'auteur propose une amélioration du palier à glissement consistant dans l'introduction de l'huile dans le palier dans la région la plus chargée de sa surface de glissement sous une pression si haute, que la sur-pression obtenue, de 100 at et même plus, soulève du coussinet le pivot avec sa charge. L'auteur décrit ensuite la construction du palier à graissage sous très haute pression, l'installation de recherches et l'exécution de ces dernières.

Styczna odkształconej, z tego punktu wyprowadzona, tworzy z osią X kąt, w przybliżeniu równy pochodnej y' — przy ugięciach nieznacznych, jedynie dopuszczalnych w praktyce. Dla punktu *stałego*, gdziekolwiek na odkształconej obranego: x_0, y_0, y_0' . Przybliżone równanie odkształconej będzie tu:

$$EJy'' = M.$$

Jego całka pośrednia, wypisana dla punktów: bieżącego i stałego:

$$y' = \int \frac{M}{EJ} dx + C, \quad y_0' = \int \frac{M}{EJ} dx + C,$$

da po odjęciu:

$$y' - y_0' = \int \frac{M}{EJ} dx, \quad \dots \quad (1)$$

tak zwany *wzór Clapeyron'a*.

Stąd, całkując przez części, mamy dla punktu bieżącego i stałego:

$$y - xy_0' = \int dx \int \frac{M}{EJ} dx + D = x \int \frac{M}{EJ} dx - \int \frac{Mx}{EJ} dx + D,$$

$$y_0 - x_0 y_0' = x_0 \int \frac{M}{EJ} dx - \int \frac{Mx}{EJ} dx + D = D$$

Różnica:

$$y - y_0 = y_0'(x - x_0) + x \int_{x_0}^x \frac{M}{EJ} dx - \int_{x_0}^x \frac{Mx}{EJ} dx. \quad (2)$$

stanowi wzór Bresse'a²⁾.

Dzielimy ten wzór przez $(x - x_0)$; po odjęciu od (1) i zebraniu wyrazów:

$$y' - y_0' - \frac{y - y_0}{x - x_0} = -y_0' + \left(1 - \frac{x}{x - x_0}\right) \int_{x_0}^x \frac{M}{EJ} dx + \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x \frac{Mx}{EJ} dx,$$

otrzymamy:

$$y' = \frac{y - y_0}{x - x_0} + \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x \frac{M}{EJ} (x - x_0) dx, \quad (3)$$

wzór Clerc'a³⁾.

Ostatnie dwa wzory różnią się zasadniczo co do istoty: wzór (2) stanowi całkę ogólną różniczkowego równania odkształconej; wzór (3) — jego całkę pośrednią. Rugując y' z dwóch całek (1), (3) pośrednich, — mamy całkę (2) ogólną. Równanie różniczkowe odkształconej otrzymamy, różniczkując (1) lub (3) jednokrotnie, zaś (2) — dwukrotnie. Wzór (2) staje się wzorem (3), gdy punkt bieżący będzie stałym i naodwrot. Bresse nie docenił swego wzoru; ogłosił go w 1859 r., zastosował w 1865 r. do belek o stałym przekroju, a w 1880 r. do belek o przekroju zmiennym⁴⁾. Clerc natomiast całą tę drogę przebiegł odrazu, stając u kresu wcześniej, choć w tym samym roku 1880. Jego wzór prościej wiedzie do celu w przypadku najogólniejszym. Dla granic stałych oba wzory dają tożsamościowe wyniki. Oba korzystają zresztą z pomocniczego twierdzenia Bresse'a⁵⁾ przy dalszych rozwinięciach.

2. Idąc w kierunku (w), wyodrębniamy na odkształconej trzy kolejne punkty: $(n-1)$, (n) , $(n+1)$ o współrzędnych: (x_{n-1}, y_{n-1}) , (x_n, y_n) , (x_{n+1}, y_{n+1}) . Różnice odciętych: $(x_{n-1} - x_n)$, $(x_n - x_{n+1})$ dają poziome długości: l_n, l_{n+1} przęseł: $(n-1, n)$, $(n, n+1)$, lewego i prawego. Tuż przed tymi punktami panują momenty zginające: M_{n-1}, M_n, M_{n+1} . W przęśle lewym $(n-1, n)$ obieramy na odkształconej punkt bieżący — w poziomej odległości z od lewego punktu $(n-1)$. Tuż przed tym punktem bieżącym (x, y) panuje moment zginający, równy:

$$M = M_{n-1} + (M_n - M_{n-1}) \frac{z}{l_n} + m_n,$$

według pomocniczego twierdzenia Bresse'a.

Tutaj m_n oznacza moment, jakiby panował tuż przed owym punktem bieżącym, gdyby przeszło $(n-1, n)$ wyciąć z belki, i, nie zmieniając w niczym jego obciążenia, ustawić końcami na podporach: przegubowej i posuwnej⁶⁾.

Z kolei w przęśle $(n, n+1)$ wyodrębnimy punkt bieżący w poziomej odległości:

$$u = l_{n+1} - z',$$

od prawego punktu $(n+1)$. Tuż przed tym punktem bieżącym panuje moment:

$$M' = M_n + (M_{n+1} - M_n) \frac{z'}{l_{n+1}} + m_{n+1} = M_{n+1} + (M_n - M_{n+1}) \frac{u}{l_{n+1}} + m_{n+1}.$$

Wzór Clerc'a, wypisany dla przęśla $(n-1, n)$, daje:

$$y_n' = \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} + \frac{1}{x_n - x_{n-1}} \int_{x_{n-1}}^{x_n} \frac{M}{EJ} (x - x_{n-1}) dx = \frac{y_{n-1} - y_n}{l_n} - \frac{1}{l_n} \int_0^{l_n} \frac{Mz}{EJ} dz. \\ y_n' = \frac{y_{n-1} - y_n}{l_n} - \frac{M_{n-1}}{l_n} \int_0^{l_n} \left(1 - \frac{z}{l_n}\right) \frac{z dz}{EJ} - \frac{M_n}{l_n^2} \int_0^{l_n} \frac{z^2 dz}{EJ} - \frac{1}{l_n} \int_0^{l_n} \frac{m_n z}{EJ} dz, \dots \quad (4)$$

ponieważ tutaj:

$$x_{n-1} = x + z,$$

Dalej dla przęśla $(n, n+1)$:

$$y_n' = \frac{y_n - y_{n+1}}{x_n - x_{n+1}} + \frac{1}{x_n - x_{n+1}} \int_{x_{n+1}}^{x_n} \frac{M'}{EJ} (x - x_{n+1}) dx = \frac{y_n - y_{n+1}}{l_{n+1}} + \frac{1}{l_{n+1}} \int_0^{l_{n+1}} \frac{M'u}{EJ} du, \\ y_n' = \frac{y_n - y_{n+1}}{l_{n+1}} + \frac{M_n}{l_{n+1}^2} \int_0^{l_{n+1}} \frac{u^2 du}{EJ} + \frac{M_{n+1}}{l_{n+1}} \int_0^{l_{n+1}} \left(1 - \frac{u}{l_{n+1}}\right) \frac{u du}{EJ} + \frac{1}{l_{n+1}} \int_0^{l_{n+1}} \frac{m_{n+1} u}{EJ} u du, \dots \quad (5)$$

tu bowiem:

$$x = u + x_{n+1}.$$

²⁾ M. Bresse. Cours de Mécanique appliquée. Part. I z 1859 r. str. 92, ostatni wzór u dołu. Part. III z 1865 r. str. 8, drugi wzór od góry. Part. I z 1880 r. str. 161, pierwszy wzór od góry.

³⁾ A. Clerc. Mémoire sur une nouvelle théorie de la résistance des poutres. Mémoires et compte-rendu des travaux de la Société des Ingénieurs Civils z 1880 r. Vol. II str. 111. Wogóle A. Clerc nie ma szczęścia. Jedną z niemieckich Statyk Budowli podała „anonimowo” jego wzór wraz z pierwotnym dowodzeniem Clerc'a, czysto geometrycznym. W roku 1932 czytaliśmy takie wypowiedzenie się:

„stwierdzić mogę jednakże, że niema wogóle autora w odnośnej dziedzinie piśmiennictwa techniczno-naukowego, któryby nosił nazwisko „Clerc”.

⁴⁾ Według słów Bresse'a: „la démonstration, donnée pour le cas d'une section constante n'a besoin que d'une petite modification pour s'adapter au cas d'une section variable”... A jednak czekano na to aż 15 lat od 1865 do 1880 roku!

⁵⁾ T. str. 495 p. 6 lub WT. str. 228 p. 5.

⁶⁾ T. str. 197 p. 2 lub WT. str. 225. B. p. 1.

Zupełnie te same wyniki dałby i wzór *Bresse'a*, możemy przeto słusznie nazywać oba powyższe wzory, ogłoszone w 1880 r. niezależnie przez *Bresse'a* i *Clerc'a* — wzorami *Bresse-Clerc'a*. Ich różnica:

$$\begin{aligned} \frac{y_{n-1} - y_n}{l_n} + \frac{y_{n+1} - y_n}{l_{n+1}} &= \frac{M_{n-1}}{l_n} \int_0^{l_n} \left(1 - \frac{z}{l_n}\right) \frac{z dz}{EJ} + \\ &+ M_n \left[\frac{1}{l_n^2} \int_0^{l_n} \frac{z^2 dz}{EJ} + \frac{1}{l_{n+1}^2} \int_0^{l_{n+1}} \frac{u^2 du}{EJ} \right] + \\ &+ \frac{M_{n+1}}{l_{n+1}} \int_0^{l_{n+1}} \left(1 - \frac{u}{l_{n+1}}\right) \frac{u du}{EJ} + \frac{1}{l_n} \int_0^{l_n} \frac{m_n}{EJ} z dz + \\ &+ \frac{1}{l_{n+1}} \int_0^{l_{n+1}} \frac{m_{n+1}}{EJ} u du, \dots \quad (6) \end{aligned}$$

stanowi wzór *Clapeyron'a*.

Stąd bezpośrednio dla belki o przęsłach stałej sztywności — dwa wzory *Bresse-Clerc'a*:

$$y_n' = \frac{y_{n-1} - y_n}{l_n} - \frac{1}{E_n J_n} \left[\frac{l_n}{6} M_{n-1} + \frac{l_n}{3} M_n + \frac{1}{l_n} \int_0^{l_n} m_n z dz \right]. \dots \quad (7)$$

$$y_n' = \frac{y_n - y_{n+1}}{l_{n+1}} + \frac{1}{E_{n+1} J_{n+1}} \left[\frac{l_{n+1}}{3} M_n + \frac{l_{n+1}}{6} M_{n+1} + \frac{1}{l_{n+1}} \int_0^{l_{n+1}} m_{n+1} u du \right], \dots \quad (8)$$

i jeden:

$$\begin{aligned} \frac{y_{n-1} - y_n}{l_n} + \frac{y_{n+1} - y_n}{l_{n+1}} &= \frac{1}{E_n J_n} \left[\frac{l_n}{6} M_{n-1} + \right. \\ &+ \left. \frac{l_n}{3} M_n + \frac{1}{l_n} \int_0^{l_n} m_n z dz \right] + \frac{1}{E_{n+1} J_{n+1}} \left[\frac{l_{n+1}}{3} M_n + \right. \\ &+ \left. \frac{l_{n+1}}{6} M_{n+1} + \frac{1}{l_{n+1}} \int_0^{l_{n+1}} m_{n+1} u du \right], \dots \quad (9) \end{aligned}$$

wzór *Clapeyron'a*. Ostatnie trzy wzory dostosowałem do podstawowych rodzajów obciążenia pionowego płaskiego⁷⁾.

Wzory (6), (9) daleko odbiegły od pierwowzoru⁸⁾ *Clapeyronowskiego*:

$$\begin{aligned} l_n M_{n-1} + 2(l_n + l_{n+1}) M_n + l_{n+1} M_{n+1} &= \\ &= \frac{1}{4} (q_n l_n^2 + q_{n+1} l_{n+1}^2) \end{aligned}$$

Są to znów raczej wzory *Bresse-Clerc'a*, a zatem jeno śmiech wzbudzać może podejmowana co pe-

⁷⁾ *PT* z 1927 r. str. 212. *T.* str. 496 p. 8 oraz *WT.* str. 230 p. 7.

⁸⁾ *C. R.* z 1857 r. Tom 45, str. 1076.

wien czas gorąca walka o prawa *Bertot*, który ogłosił ów pierwowzór o dwa lata wcześniej⁹⁾.

3. Wszystkie dotychczasowe sposoby wyprowadzania wzorów *Bresse-Clerc'a* i *Clapeyron'a* uparcie grzeszyły niewzruszonym przekonaniem o konieczności podparcia belki w punktach: $(n-1)$, (n) , $(n+1)$. Ten pogląd trwał przeszło siedem dziesiątków lat od czasu pierwszych poczynań *Clapeyron'a* i zwał się zakres stosowalności wzorów do szczytłej służby wyznaczania odporów hyperstatycznych.

W roku 1922 zauważyłem zbędność tego ograniczenia wobec zupełnej dowolności wyboru owych punktów na odkształconej, z tem jedynym zresztą zastrzeżeniem, aby pomiędzy nimi nie było punktów podparcia. Odrazu wzory *Bresse-Clerc'a* i *Clapeyron'a* mogły być po raz pierwszy użyte do wyznaczania odkształconych. Ten wynik, nader dla praktyki doniosły, a dotąd zgłoła nieznanym, bo niedostrzeżony, podałem do wiadomości w roku 1923 w *Przeglądzie Technicznym*¹⁰⁾.

Postępowanie według mego sposobu jest zawsze jednakowe: dzielimy przedewszystkiem belkę punktami podparcia na przęsła pierwotne i wyznaczamy ze wzorów *Bresse-Clerc'a* lub *Clapeyron'a* hyperstatyczne momenty zginające tuż przed owymi punktami podparcia. Następnie, chcąc znaleźć rzędną y odkształconej, przynależną odciętej x , albo pochodną y' , wyodrębniamy przęsło pierwotne, zawierające punkt końcowy odciętej x . Ten punkt dzieli owe przęsło na dwa przęsła wtórne. Pisząc dla obu wzór *Clapeyron'a*, lub dla jednego z nich — odpowiedni wzór *Bresse-Clerc'a*, otrzymamy szukaną rzędną y , lub pochodną y' .

Ta droga najprędzej zmierza do celu. Jest rachunkowo bez zarzutu. W rzadkich przypadkach, gdy dla belki o stałym przekroju zachodzi konieczność ujęcia w jeden wzór całej odkształconej — najlepsze wyniki dają moment łańcuchowy *Clebsch'a* i łańcuchowe równanie odkształconej¹¹⁾. Przytoczę tu choć jeden prosty przykład belki o stałym przekroju, poziomo jednostronnie osadzonej. W jej głównej płaszczyźnie bezwładności XY , pionowej, w odległości b od środka O przekroju osadzonego, działa skupiony ciężar P . Całkowita pierwotna długość l belki jest większa od b .

Chcąc znaleźć ugięcie y belki, przynależne odciętej x w połaci prawej, gdzie:

$$b \geq x \geq 0,$$

korzystamy ze wzoru (7) *Bresse - Clerc'a*, wypisa-

⁹⁾ Autorstwo zupełnie słusznie przypisano *Clapeyron'owi* ze względu na poprzednie jego prace. Wyraźnie to podkreśla *Bresse słowami*: „M. Clapeyron... a introduit l'innovation la plus heureuse, quand il a pris d'autres inconnues auxiliaires, savoir les moments de flexion, efforts tranchants et inclination de la poutre dans les sections au dessus des points d'appui. Faire l'élimination partielle d'un certain nombre de ces inconnues entre les équations, données par M. Clapeyron, pour en tirer le théorème, dont il s'agit, est une idée, qui se présente tout naturellement et en quelque sorte d'elle même... M. Clapeyron est, selon moi, le véritable auteur de la découverte, comme ayant produit l'idée mère...”

¹⁰⁾ *L. Karasiński*. Zastosowanie wzorów *Clerc'a* i *Clapeyron'a* do wyznaczania strzałek ugięcia belek prostych. *PT.* z 1923 r. str. 380. Nadto *T.* str. 517 p. 8 oraz *WT.* str. 236 p. 12.

¹¹⁾ *T.* str. 502, 503 p. 12, 13 lub *WT.* str. 223 p. 12. Liczne przykłady, aż nadto podkreślające praktyczną doniosłość obu sposobów, podałem w *T.* na str. 504—527 włącznie, lub w *WT.* IX. C. początek na str. 242.

nego dla przęsła ($l_n = x$). W lewym końcowym punkcie tego przęsła:

$$y_{n-1} = y \quad M_{n-1} = P(b-x)$$

W prawym końcowym punkcie O:

$$y_n' = y_n = 0 \quad M_n = Pb,$$

a przeto:

$$0 = \frac{y}{x} - \frac{1}{EJ} \left[\frac{x}{6} P(b-x) + \frac{x}{3} Pb \right]$$

tutaj bowiem:

$$m_n = 0,$$

jako że w przęsle (x) nie ma obciążenia zewnętrznego. Stąd:

$$y = \frac{Px^2}{6EJ} (3b-x) \quad b > x > 0.$$

Chcąc znaleźć kąt pochylenia ku osi X stycznej odkształconej w punkcie (x, y), możemy wziąć pochodną y' , lub też — skorzystać ze wzoru (8) Bresse-Clerc'a, wypisanego dla przęsła ($l_{n+1} = x$). W lewym końcowym punkcie tego przęsła:

$$y_n = y \quad y_n' = y' \quad M_n = P(b-x)$$

a w prawym końcowym punkcie O:

$$y_{n+1} = y_{n+1}' = 0 \quad M_{n+1} = Pb.$$

zatem:

$$y' = \frac{y}{x} + \frac{1}{EJ} \left[\frac{x}{3} P(b-x) + \frac{x}{6} Pb \right]$$

i tu bowiem:

$$m_{n+1} = 0.$$

Stąd, po odjęciu poprzednio otrzymanego wzoru:

$$y' = \frac{Px}{2EJ} (2b-x) \quad b > x > 0.$$

Z kolei, chcąc znaleźć y dla odciętej x , zawartej w lewej połaci, gdzie:

$$l > x > b,$$

moglibyśmy skorzystać z tych samych wzorów, ponieważ i tu w przęsle (x) nie ma żadnego punktu podparcia. Wypiszmy jednak, dla odmiany, trzeci wzór (9) Clapeyron'a dla sąsiednich przęseł:

$$(l_n = x - b), \quad (l_{n+1} = b).$$

Tu dla skrajnego lewego punktu przęsła (l_n):

$$y_{n-1} = y \quad M_{n-1} = 0,$$

dla środkowego punktu pomiędzy przęsłami:

$$y_n = p = \left[\frac{Px^2}{6EJ} (3b-x) \right]_{x=b} = \frac{Pb^3}{3EJ}, \quad M_n = 0,$$

a dla skrajnego prawego punktu O przęsła (l_{n+1}):

$$y_{n+1} = 0, \quad M_{n+1} = Pb.$$

Siłę P , jako graniczną, możemy zaliczać do przęsła (l_n), lub (l_{n+1}). Tak, czy inaczej, po wycięciu obu tych przęseł i obustronnem podparciu, siła P działać będzie bezpośrednio na jedną z podpór i tu więc:

$$m_n = m_{n-1} = 0.$$

Zatem wzór (9):

$$\frac{y-p}{x-b} - \frac{p}{b} = \frac{1}{6EJ} b Pb$$

daje:

$$by - bp - px + bp = \frac{Pb^3}{6EJ} (x-b)$$

skąd:

$$y = \frac{Pb^3}{6EJ} (3x-b) \quad | \quad x > b.$$

Różniczkowanie da:

$$y' = \frac{Pb^2}{2EJ} = \text{Constans},$$

w przęsle (l_n) belka, jako nieobciążona, zachowuje swój kształt pierwotny.

4. Dla belki, wspartej na podporach sprężystych, wzory Bresse-Clerc'a i Clapeyron'a stają się wzorami o czterech i pięciu momentach. Do zdobyczy w tym obrębie dorzuciłem ogólne wzory dla belki na podporach sprężystych, dających momenty sprężewiu, a nadto rozwiązałem zagadnienie szyny, leżącej na podporach równoodległych¹²⁾. Na razie chcę się tu ograniczyć do podpór niesprężystych, uszeregowanych po odkształceniu belki mniej więcej poziomo w znikomych odległościach pionowych y_n od pierwotnej osi X belki.

To znaczy, że początkowo ściśle osiowy szereg punktów podparcia uległ nieznacznym zmianom po obciążeniu belki: część owych punktów pozostała na osi, — reszta zesza z niej w dół — lub do góry. Idąc w kierunku (w) od lewego końca belki ku prawemu, gdzie leży początek O osi X , numerujemy kolejno wszystkie punkty podparcia: (0), (1), (2), ... (n-1), (n), (n+1) ... (s-2), (s-1), (s), wyodrębniając s przęseł pierwotnych. Obciążenie pionowe płaskie nie ma składowych poziomych, nie wzbudza sił odporowych poziomych. Zatem odcięte punktów osiowych można uważać za niezmiennie przy odkształceniach nieznaczących; stałe podpory — utożsamiać z łożyskowymi, a przegubowe — z posuwkami⁶⁾.

Belka może być tylko końcami osadzona niesprężysto, jako że unieruchomienie pośredniego przekroju dzieli ją na dwie belki niezależne. Możemy przeto brać pod uwagę, wobec koniecznej swobody cieplnego rozszerzania się belki — te trzy przypadki podstawowe:

I. Prawy skrajny przekrój (s) belki jest unieruchomiony, osadzony niesprężysto. Lewy koniec belki tkwi w podporze łożyskowej niesprężystej. Wszystkie podpory pośrednie są niesprężyste — posuwne.

II. Prawy skrajny przekrój (s) belki jest unieruchomiony, osadzony niesprężysto na podporze stałej. Pozostałe podpory są niesprężyste — posuwne. Belka może się kończyć ponad lewą skrajną podporą, może poza nią wystawać. Część wystająca nazwiemy *lewym wspornikiem* belki.

III. Wszystkie podpory są niesprężyste posuwne, prócz skrajnej prawej — przegubowej. Belka może się kończyć ponad skrajnymi podporami, może poza nie wystawać. Części wystające nazywać będziemy wspornikami: lewym i prawym.

W przypadku I pierwsze przęsło (l_1) poczyna się u ścianki tulei podpory łożyskowej w punkcie podparcia (0) i kończy ponad podporą (1). W punkcie (0) panuje moment odporowy M_0 , a tuż przed (1) — moment zginający M_1 . Wobec osadzenia poziomego belki w tulei, y_0' ma wartość zerową. Nad-

¹²⁾ PT. z 1926 r. str. 714, PT. z 1927 r. str. 214, 330, 626, nadto: T. str. 534—538, lub WT. str. 227 p. 3, str. 236 p. 11, str. 246. p. c, str. 253 p. C, str. 261 p. c. str. 279 p. 10.

to y_0, y_1 są dane zgóry, lub przewidywane, a przeto wzór (5) lub (8) da:

$$b_0 M_0 + a_1 M_1 = \frac{y_0 - y_1}{l_1} + S_0 = C_0.$$

Tutaj S_0 oznacza sumę wyrazów, pochodzących od obciążenia zewnętrznego przęśła (l_1). Spółczynniki b_0, a_1 nie są odeń zależne. Dla dalszych przęseł mamy ze wzoru (6) lub (9):

$$a_n M_{n-1} + b_n M_n + a_{n+1} M_{n+1} = \frac{y_{n-1} - y_n}{l_n} + \frac{y_{n+1} - y_n}{l_{n+1}} + S_n = C_n, \quad (10)$$

kolejno przy:

$$n = 1, 2, 3, \dots, s-2, s-1.$$

Tuż przed skrajnymi punktami ($s-1$), (s) ostatniego prawego przęśła (l_s) panują momenty zginające. M_{s-1}, M_s . Wobec osadzenia belki w (s) poziomo — y_s' jest równe zeru, a przeto ze wzoru (4) lub (7) otrzymamy równanie ostatnie:

$$a_s M_{s-1} + b_s M_s = \frac{y_{s-1} - y_s}{l_s} + S_s = C_s. \quad (11)$$

W przypadku II, obciążenie zewnętrzne lewego wspornika belki, po sprowadzeniu do skrajnego lewego jej punktu (o) podparcia, da moment zginający M_0 tuż przed (o). Ten moment jest równy zeru, gdy belka kończy się ponad podporą (o). Zatem ze wzoru (6) lub (9) będziemy mieli dla przęseł (l_1), (l_2):

$$b_1 M_1 + a_2 M_2 = \frac{y_0 - y_1}{l_1} + \frac{y_2 - y_1}{l_2} + S_1 - a_0 M_0 = C_1. \quad (12)$$

Do tego równania, pierwszego, należy dorzucić następane, (10), wypisane dla:

$$n = 2, 3, \dots, s-2, s-1,$$

a nadto — równanie (11) — ostatnie.

W przypadku III oznaczam: przez M_s — moment zginający tuż przed punktem (s) podparcia belki, przez Q — siłę ścinającą tuż za tym punktem, przez l długość prawego wspornika, czyli odległość punktu (s) od prawego końca O belki, przez M_l — moment względem punktu O — wypadkowy obciążenia zewnętrznego odcinka l , poczynwszy od punktu (s) włącznie, wreszcie przez Q_l — wypadkową siłę pionową tego obciążenia. Warunki równowagi wspornika:

$$M_s + lQ + M_l = 0 \quad Q + Q_l = 0$$

dają moment:

$$M_s = lQ_l - M_l.$$

Jest on równy zeru, gdy belka kończy się ponad podporą (s). Zatem ze wzoru (6) lub (9) mamy dla skrajnych dwóch przęseł (l_{s-1}), (l_s), pomiędzy punktami podparcia: ($s-2$), ($s-1$), (s):

$$a_{s-1} M_{s-2} + b_{s-1} M_{s-1} = \frac{y_{s-2} - y_{s-1}}{l_{s-1}} + \frac{y_s - y_{s-1}}{l_s} + S_{s-1} - a_s M_s = C_{s-1}.$$

Do tego równania ostatniego należy dodać równanie (12) jako pierwsze, a nadto — równania pośrednie

(10), wypisane kolejno dla:

$$n = 2, 3, \dots, s-2, s-1.$$

Jak widać, w tych trzech przypadkach układ równań różni się tylko ilością niewiadomych momentów: M_1, M_2, \dots, M_{s-1} dla III, dalej: $M_1, M_2, \dots, M_{s-1}, M_s$ dla II, wreszcie: $M_0, M_1, M_2, \dots, M_{s-1}, M_s$ dla I. Sam układ natomiast jest tożsamościowy co do rodzaju i wzajemnego ustosunkowania równań skrajnych i pośrednich. Wobec tego możemy wprost ograniczyć się do najczęściej spotykanego w praktyce ostatniego III-go przypadku.

5. Pierwsze równanie tego układu:

$$\begin{aligned} b_1 M_1 + a_2 M_2 &= C_1 \\ a_2 M_1 + b_2 M_2 + a_3 M_3 &= C_2 \\ \dots &\dots \\ a_n M_{n-1} + b_n M_n + a_{n+1} M_{n+1} &= C_n \quad (u) \\ \dots &\dots \\ a_{s-2} M_{s-3} + b_{s-2} M_{s-2} + a_{s-1} M_{s-1} &= C_{s-2} \\ a_{s-1} M_{s-2} + b_{s-1} M_{s-1} &= C_{s-1} \end{aligned}$$

daje M_2 w liniowej zależności od M_1 , drugie równanie da M_3 , trzecie — M_4 , przedostatnie — M_{s-1} . Po podstawieniu w ostatnie otrzymamy M_1 , a następnie znowu z pierwszego równania — M_2 , z drugiego — M_3 , z przedostatniego M_{s-1} . Ostatnie służy do sprawdzenia.

Można również od razu wyznaczyć M_1 jako iloraz dwóch wyznaczników macierzy układu (u). W tym celu oznaczmy przez D_1^{s-1} jej wyznacznik, złożony z przekątnej: b_1, b_2, \dots, b_{s-1} , i symetrycznych wyrazów: a_2, a_3, \dots, a_{s-1} . Tak samo oznaczmy przez D_m^m jego minor główny, złożony z kolejnych wyrazów przekątnej: $b_i, b_{i+1}, \dots, b_{m-1}, b_m$ i symetrycznych wyrazów: $a_{i+1}, a_{i+2}, \dots, a_{m-1}, a_m$. Dolny wskaźnik dotyczy zawsze pierwszego wyrazu lewego u góry, a wskaźnik górny — ostatniego prawego wyrazu przekątnej — u dołu. Stąd prosty wniosek, że:

$$D_m^m = b_m, \quad D_1^1 = b_1, \quad D_{s-1}^{s-1} = b_{s-1},$$

a nadto:

$$D_0^1 = D_0^0 = D_1^0 = 1, \quad D_s^{s-1} = D_s^s = 1.$$

Wyrazy ostatniego wiersza, obce macierzy układu stanowią uzupełnienie, konieczne dla skrajnych rozwinięć jej wyznacznika, w którym zera zastąpiono kropkami. Rozłóżmy go:

$$D_1^{s-1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_2 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_2 & b_2 & a_3 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & a_{n-2} & b_{n-2} & a_{n-1} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & a_{n-1} & b_{n-1} & a_n & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & a_n & b_n & a_{n+1} & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & a_{n+1} & b_{n+1} & a_{n+2} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & a_{n+2} & b_{n+2} & a_{n+3} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & a_{n+3} & b_{n+3} & a_{n+4} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & a_{s-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & b_{s-2} & a_{s-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & a_{s-1} & b_{s-1} \end{vmatrix}$$

$D_2^{s-1} \quad \quad \quad D_n^{s-1} \quad D_{n+1}^{s-1} \quad D_{n+2}^{s-1} \quad \quad \quad D_{s-2}^{s-1} \quad D_{s-1}^{s-1}$

według minorów pierwszych (n-1) jego kolumn. Tylko dwa iloczyny są tu różne od zera:

D_1^{s-1} = D_1^{n-1} D_n^{s-1} - a_n^2 D_1^{n-2} D_{n-1}^{s-1} . . . (v)

Łatwo się o tem przekonać, przestawiając wiersze: (n-1), (n). Ten sam rozkład da dla minorów głównych:

D_1^n = b_n D_1^{n-1} - a_n^2 D_1^{n-2} D_n^{s-1} = b_n D_{n-1}^{s-1} - a_{n-1}^2 D_{n-2}^{s-1} . . . (w)

Ostatni wzór stosujemy kolejno:

D_{s-1}^{s-1} = b_{s-1} D_{s-2}^{s-1} - a_{s-2}^2 D_{s-3}^{s-1} - a_{s-2}^2 D_{s-1}^{s-1} = b_{s-3} D_{s-2}^{s-1} - a_{s-2}^2 D_{s-1}^{s-1} . . . (t)

Służy on do obliczania D_1^{s-1}.

Zatem:

M_1 D_1^{s-1} = |C_1 a_2 . . . C_2 b_2 a_3 . . . C_{s-1} . . . b_{s-1}| = C_1 b_2 a_3 D_2^{s-1} - C_2 a_2 b_3 a_4 D_3^{s-1} + . . .

M_1 D_1^{s-1} = C_1 D_2^{s-1} - C_2 a_2 D_3^{s-1} + C_3 a_2 a_3 D_4^{s-1} - C_4 a_2 a_3 a_4 D_5^{s-1} + . . . + (-1)^{s-1} C_{s-2} a_2 a_3 . . . a_{s-2} a_{s-1} D_{s-1}^{s-1} + (-1)^s C_{s-1} a_2 a_3 . . . a_{s-2} a_{s-1}.

W tym wzorze powtarzają się minory główne układu (t). Przy wyznaczaniu wpływowych duże zazwyczaj korzyści daje ogólny wzór dla M_n. Chcąc go znaleźć, piszemy kolejno: C_1, C_2, . . . C_{s-1} wzamian wyrzów kolumny n wyznacznika D_1^{s-1}. Po przestawieniu kolumn będziemy mieli:

(-1)^{n-1} M_n D_1^{s-1} =

Table with rows C1 to Cs-1 and columns D1^1, D1^2, D1^3, ..., D1^{n-3}, D1^{n-2}, D1^{n-1}. The table contains a grid of elements representing the expansion of a determinant with some elements highlighted in boxes to show the pattern of minors.

Les équations de Clerc et de Clapeyron dans le cas de poutres droites soumises à la flexion plane

Analys e.

1. Poutre droite, ayant deux plans principaux d'inertie est soumise à la flexion plane. L'équation différentielle appro-

Stąd bezpośrednio:

M_n D_1^{s-1} = [(-1)^{n-1} C_1 a_2 a_3 . . . a_n + (-1)^n C_2 b_1 a_3 a_4 . . . + (-1)^{n-1} C_3 D_1^2 a_4 a_5 . . . a_n + (-1)^n C_4 D_1^3 a_5 a_6 . . . + . . . + C_{n-2} D_1^{n-3} a_{n-1} a_n - C_{n-1} D_1^{n-2} a^n] D_n^{s-1} + . . .

Dla n równego dwum oraz (s-1) otrzymamy stąd:

M_2 D_1^{s-1} = [-C_1 a_2 + C_2 b_1] D_3^{s-1} - C_3 b_1 a_3 D_4^{s-1} + C_4 b_1 a_3 a_4 D_5^{s-1} - C_5 b_1 a_3 a_4 a_5 D_6^{s-1} + . . . + (-1)^s C_{s-2} b_1 a_3 a_4 . . . a_{s-2} D_{s-1}^{s-1} + (-1)^{s-1} C_{s-1} b_1 a_3 a_4 . . . a_{s-2} a_{s-1}.

Stosując kolejno pierwszy wzór (w) otrzymamy układ:

D_1^1 = b_1
D_1^2 = b_2 D_1^1 - a_2^2
D_1^3 = b_3 D_1^2 - a_3^2 D_1^1

D_1^{n-1} = b_{n-1} D_1^{n-2} - a_{n-1}^2 D_1^{n-3}
D_1^n = b_n D_1^{n-1} - a_n^2 D_1^{n-2}

Układ ten służy do obliczania D_1^m

ximative de l'élastique à l'intégrale générale de Bresse et deux intégrales intermédiaires, l'une de Clapeyron, l'autre de Clerc.

2. Le théorème de Bresse relatif aux trois moments de flexion en trois points de l'élastique change ces intégrales en relations (4, 5, 7, 8) de Bresse-Clerc et (6, 9) de Clapeyron,

qui ont servi exclusivement à la recherche des moments de flexion au dessus des appuis hyperstatiques.

3. J'ai remarqué¹⁰⁾ en 1922, que ces relations déterminent aussi l'élastique. Moments de flexion une fois connus en deux points, on se sert de l'équation de Bresse-Clerc ou de Clapeyron pour calculer l'ordonnée y d'un point intermédiaire de l'élastique, ou l'inclinaison de la poutre y' en ce point.

4. Les relations de Bresse-Clerc et de Clapeyron, écrites pour une poutre à plusieurs travées solidaires, forment un système (u) des équations, linéaires par rapport aux moments de flexion M_n sur les appuis. On peut résoudre ce

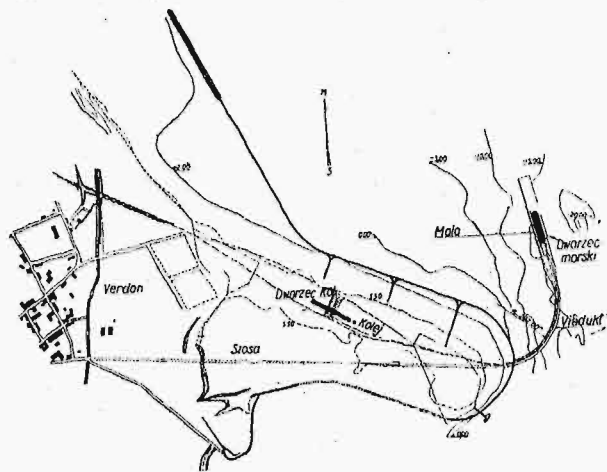
système par l'élimination des inconnues, ou par le calcul direct d'une seule d'elles, par exemple M_1 .

5. Le déterminant du système, développé par rapport aux mineurs de ses $(n-1)$ premières colonnes, donne trois formules de réduction (v, w), qui servent au calcul du déterminant par mineurs principaux successifs. Cette méthode donne un développement de M_1 et une formule générale pour M_n . De là en changeant n on tire deux formules particulières pour la seconde inconnue M_2 et la dernière — M_{s-1}

Inż. S. D. CHRULOW

O mechanizacji robót kesonowych

Rozwój techniki pociąga za sobą takie powiększenie ciężaru budowli inżynierskich, jakich przed laty 40—50 nikt się nie spodziewał. Zagadnienie przeniesienia tych sił na grunt nośny



Rys. 1. Plan sytuacyjny portu w Verdon pod Bordeaux.

wywołuje coraz większe trudności i projektowanie fundamentów nabiera pierwszorzędного znaczenia. Tem się tłumaczy ciągły wzrost zainteresowania techników literaturą o fundamentowaniu i rozwój tej dziedziny budownictwa.

Zastosowanie kesonów.

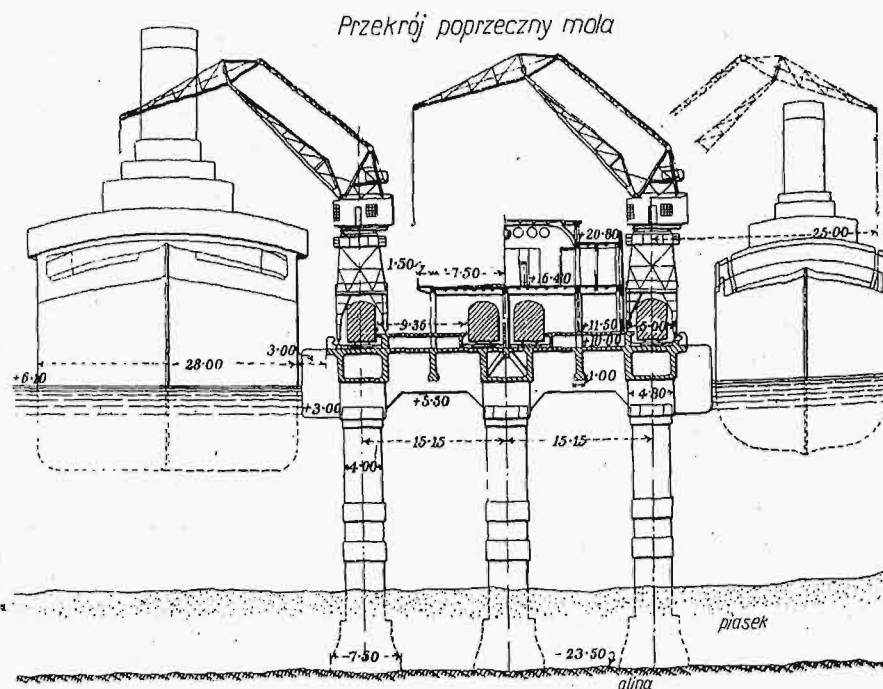
Fundamentowanie zapomocą kesonów stanowi klasyczny sposób fundamentowania pod wodą. Jego zalety są ogólnie znane i uznawane, lecz niestety kesony stanowią najdroższy rodzaj fundamentów. Duże ich koszty są skutkiem bardzo powolnego tempa robót budowlanych oraz drogiej robocizny. Oprócz nieco uciążliwych manipulacji służowania, zasilania powietrzem sprężonym i prądem elektrycznym, główną ujemną cechą kesonów są szkodliwe dla zdrowia, nawet niebezpieczne warunki pracy w nich.

Wprawdzie postęp w dziedzinie zapobiegania chorobie kesonowej jest już znaczny.

Jeszcze bowiem w latach 1903—09, podczas budowy „tunelu pensylwańskiego” w Nowym Jorku, na sto wypadków choroby kesonowej przypadało 1,5 wypadków śmiertelnych, podczas gdy przy budowie słynnego tunelu Holland'a (1926-28) liczba ta spadła do 0,1433. Mimo to roboty kesonowe są słusznie nadal uważane za uciążliwe, szkodliwe i nawet niebezpieczne. Do tego dochodzi powolne ich tempo oraz duży koszt ich wykonania.

Jednakże znaczenie tych robót w technice współczesnej jest tak duże, że nietylko nie może być mowy o ich wyeliminowaniu z dziedziny budownictwa, lecz odwrotnie — trzeba znaleźć sposoby usunięcia ich wad. Gdyby nam się udało naprz. dostarczyć na pożądane miejsce i potem opuścić na dno gotowy kadłub kesonu, zaoszczędzilibyśmy (na miejscu) czas i koszty budowy kesonu oraz montażu rusztowania. Zastosowanie maszyn do usunięcia ziemi z wnętrza kesonu mogłoby zastąpić pracę ludzką w powietrzu sprężonym oraz znacznie skrócić czas wykonania i obniżyć może koszty robocizny.

Przykładem może służyć budowa moła w Bordeaux, raczej jego „avant-portu” w miasteczku Verdon, położonym przy ujściu rz. Gironde'y. Za urządzeniem portu osobowego w Verdon przemawiało to, że pociągi, łączące Verdon z miastami w głębi



Rys. 2. Przekrój poprzeczny moła portowego.