Ogólne równanie pięciu momentów.

Napisał L. Karasiński.

1. Biorę pod uwagę belkę, pierwotnie prostą, poziomo wspartą na podporach. Ze środka K jej skrajnego przekroju prawego wyprowadzam oś X na lewo, Y — w dół. Punkty podparcia A_n $(n=0,1,2,..w)$ nieodkształconej X znakuję kolejno, począwszy od skrajnego lewego A_0. Wszystkie podpory są poziomo ruchome, a więc łożyskowe lub posuwne, jedna tylko nie ma posuwu poziomego, ze względu na konieczność unieruchomienia belki, — jest przeto stała lub przegubowa. (Technik, 1926. Statyka, str. 197—199).

W głównej płaszczyźnie XY bezwładności belki leży jej obciążenie zewnętrzne pionowe: siły pionowe, pary sił skupionych momentów zewnętrznych, oraz pionowe warstwy obciążeń ciągłych. Momenty lewoskrętne i siły, jednozwrotne z osią Y, uważam za dodatnie. Kierunek wzrostu momentów gnących i sił tnących belki obieram sprzeczny z kierunkiem osi X. Siły osiowe wszędzie są równe zeru: belka zgina się płasko, nie mimośrodkowo. Wymiary poziome mogą być uważane za niezmienne przy tem odkształceniu, zawartem w granicach praktycznie dopuszczalnych. Nadto — odpór poziomy owej jedynej podpory stałej lub przegubowej ma wartość zerową, wszystkie podpory przeto można rozpatrywać jako posuwne, lub łożyskowe.

Odcinek odkształconej zawarty pomiędzy dwoma sąsiedniemi punktami podparcia A_{n-1}, A_n przynależy przęsłu (n) belki. Odległość poziomą $A_{n-1}\,A_n$ — oznaczam przez l_n. Gdy belka wystaje poza podpory skrajne — lewy odcinek, wystający poza A_0, nazywam wspornikiem lewym, prawy, wystający poza A_w — wspornikiem prawym.

Moment gnący (loco citato) tuż przed A_n nazywam momentem odporowym M_n, siłę tnącą tuż przed A_n — siłą tnącą Q_n. Pionowy odpór podpory A_n oznaczam przez V_n, moment sprzeciwu podpory A_n przez N_n. Zatem tuż za punktem A_n będziemy mieli moment gnący M_n+N_n i siłę tnącą Q_n+V_n. Rzędne odkształconej oznaczam przez y, odchylenia jej stycznych od nieodkształconej X — przez y'. W punkcie podparcia A_n znakuję odpowiednio y_n, y'_n. Podporę A_i, łożyskową, niesprężystą cechują wartości $y_i=y'_i=0$, tego rodzaju podpora może być przeto tylko skrajną, albowiem przy $i=1,2,\dots w-1$ belka rozpada się na dwie belki: i-przęsłową oraz $w-i$-przęsłową. Dla niesprężystej podpory A_i posuwnej: $y_i=0$. Odpory N_n, V_n podpór sprężystych mogą być zawsze wyrażone w zależności od y_n, y'_n. Zależności te będą linjowe dla podpór wzorowo sprężystych: łożyskowej A_n przynależą:

$$V_n=-c_n\,y_n,\quad N_n=-\partial_n\,y'_n,$$

posuwnej:

$$V_n=-c_n\,y_n,\ N_n=\partial_n=0.$$

Podporę łożyskową niesprężystą cechują wartości: $c_n=\partial_n=\infty$, posuwną zaś niesprężystą: $c_n=\infty$ $N_n=\partial_n=0$.

2. Pierwotny układ Clapeyron'a $3w+3$ niewiadomych dla belki prostej, w — przęsłowej, płasko zginanej, obejmuje:
$w+1$ momentów M_n, $w+1$ odchyleń y'_n, oraz $w+1$ sił tnących Q_n, lub, co na jedno wychodzi, tyluż odporów pionowych V_n. W najogólniejszym wypadku belki, opartej na $w+1$ podporach łożyskowych, wzorowo sprężystych, układ Clapeyron'a da się zastąpić układem:

$w+1$ momentów M_n, $w+1$ odchyleń y'_n, oraz
$w+1$ rzędnych y_n.

Te niewiadome należy wyznaczyć z równań statyki i wytrzymałości. Zacznijmy od równań statyki. W przęśle pierwszem:
$M_1=M_0+N_0+[V_0+$ wypadkowa obciążenia zewnętrznego wspornika lewego$]\,l_1+$ [moment obciążenia zewnętrznego pierwszego przęsła względem A_1].
Stąd bezpośrednio:

$$V_0=-\frac{M_0}{l_1}+\frac{M_1}{l_1}-\frac{N_0}{l_1}+v_0,\quad .\ .\ (a)$$

gdzie v_0 oznacza sumę odporów pionowych, jakieby panowały w punktach A_0 lewego wspornika i przęsła pierwszego, gdyby te odcinki belki powycinać i, nie zmieniając ich obciążeń zewnętrznych, — wspornik lewy osadzić w A_0 na podporze stałej, a przęsło (1) ustawić końcami na podporach: przegubowej i posuwnej. Z kolei:
$M_n=M_{n-1}+N_{n-1}+[Q_{n-1}+V_{n-1}]\,l_n+$ [moment obciążenia zewnętrznego przęsła (n) względem A_n].
$M_{n+1}=M_n+N_n+[Q_{n-1}+V_{n-1}+V_n+$ wypadkowa obciążenia zewnętrznego przęsła $(n)]\,l_{n+1}+$ $+$[moment obciążenia zewnętrznego przęsła $(n+1)$ względem A_{n+1}].
Stąd bezpośrednio dla $n=1,2,\dots\ w-1$:

$$V_n=\frac{M_{n-1}}{l_n}-\left(\frac{1}{l_n}+\frac{1}{l_{n+1}}\right)M_n+\frac{M_{n+1}}{l_{n+1}}+$$
$$+\frac{N_{n-1}}{l_n}-\frac{N_n}{l_{n+1}}+v_n,\quad .\ .\ .\ .\ .\ (b)$$

gdzie v_n oznacza sumę odporów pionowych, jakieby panowały w punktach A_n, przęseł (n) i $(n+1)$, gdyby te przęsła powycinać z belki, i, nie zmieniając ich obciążeń zewnętrznych, poustawiać końcami na podporach: przegubowej i posuwnej. Równanie statyki dla sił pionowych daje, po uwzględnieniu równań (a) i (b):

$$V_w=\frac{M_{w-1}}{l_w}-\frac{M_w}{l_w}+\frac{N_{w-1}}{l_w}+v_w.\quad .\ (c)$$

gdzie v_w oznacza sumę odporów pionowych, jakieby panowały w punktach A_w przęsła (w) i wspornika prawego, gdyby te odcinki powycinać z belki, i, nie zmieniając ich obciążeń zewnętrznych, wspornik prawy usadzić w A_w na podporze stałej, a przęsło (w) ustawić końcami na podporach: przegubowej i posuwnej.

Drugie równanie statyki, równanie momentów, da bezpośrednio:

$$M_0=M_l\quad .\ .\ .\ .\ .\ .\ (d)$$
$$M_w+N_w=-M_p,\quad .\ .\ .\ .\ (e)$$

gdzie M_l oznacza moment obciążenia zewnętrznego wspornika lewego względem punktu A_0, a M_p — moment obciążenia zewnętrznego wspornika prawego względem punktu A_w.

3. Równania wytrzymałościowe Clerc'a obu rodzajów (P. T. 1927, str. 329, kolumna druga, wzór drugi i trzeci od góry) należy wypisać dla w przęseł belki, poczem, korzystając z (a), (b), (c) oraz ze wzorów: $V_n=-c_n\,y_n$—wyrazić y_n w zależności od M_n i N_n. Po podstawieniu tych wartości we wzory Clerc'a i uwzględnieniu równań $N_n=-\partial_n\,y'_n$, otrzymamy $2w$ równań o $2w+2$ niewiadomych M_n i N_n.

W ten sposób równania Clerc'a drugiego rodzaju dają dla $n=0$:

$$N_0\left\{-\frac{1}{\partial_0}+\frac{\partial_1\left[\frac{1}{\partial_0}+\frac{1}{l_1}\int_0^{l_1}\frac{u\,du}{EI}\right]}{c_1\,l_1\,l_2}-\frac{1}{l_1^2}\left[\int_0^{l_1}\frac{u^2du}{EI}+\frac{1}{c_0}+\frac{1}{c_1}\right]\right\}=M_0\left\{\frac{1}{l_1^2}\left[\int_0^{l_1}\frac{u^2du}{EI}+\frac{1}{c_0}+\frac{1}{c_1}\right]-\frac{\partial_1\int_0^{l_1}\frac{u\,du}{EI}}{c_1\,l_1^2\,l_2}\right\}+M_1\left\{\frac{1}{l_1}\left[\int_0^{l_1}\left(1-\frac{u}{l_1}\right)\frac{u\,du}{EI}-\frac{1}{c_0\,l_1}-\frac{1}{c_1}\left(\frac{1}{l_1}+\frac{1}{l_2}\right)\right]-\frac{\partial_1\int_0^{l_1}\left(1-\frac{u}{l_1}\right)\frac{du}{EI}}{c_1\,l_1\,l_2}\right\}+\frac{M_2}{c_1\,l_1\,l_2}-\frac{v_0}{c_0\,l_1}+\frac{v_1}{c_1\,l_1}+\frac{1}{l_1}\int_0^{l_1}\frac{m_1\,u\,du}{EI}-\frac{\partial_1\int_0^{l_1}\frac{m_1\,du}{EI}}{c_1\,l_1\,l_2};\quad (f)$$

dla $n=1, 2, \ldots, w-2$:

$$N_n\left\{-\frac{1}{\partial_n}+\frac{1}{c_n\,l_n\,l_{n+1}\,\partial_n\left[\frac{1}{\partial_{n-1}}+\frac{1}{l_n}\int_0^{l_n}\frac{u\,du}{EI}\right]}-\frac{1}{l_{n+1}^2}\left[\int_0^{l_{n+1}}\frac{u^2\,du}{EI}+\frac{1}{c_n}+\frac{1}{c_{n+1}}\right]+\frac{\partial_{n+1}\left[\frac{1}{\partial_n}+\frac{1}{l_{n+1}}\int_0^{l_{n+1}}\frac{u\,du}{EI}\right]}{c_{n+1}\,l_{n+1}\,l_{n+2}}\right\}=$$

$$=-\frac{M_{n-1}}{c_n\,l_n\,l_{n+1}\,\partial_{n-1}\left[\frac{1}{\partial_{n-1}}+\frac{1}{l_n}\int_0^{l_n}\frac{u\,du}{EI}\right]}+M_n\left\{\frac{1}{l_{n+1}}\left[\frac{1}{l_{n+1}}\int_0^{l_{n+1}}\frac{u^2du}{EI}+\frac{1}{c_n}\left(\frac{1}{l_n}+\frac{1}{l_{n+1}}\right)+\frac{1}{c_{n+1}\,l_{n+1}}\right]+\frac{\int_0^{l_n}\left(1-\frac{u}{l_n}\right)\frac{du}{EI}}{c_n\,l_n\,l_{n+1}\left[\frac{1}{\partial_{n-1}}+\frac{1}{l_n}\int_0^{l_n}\frac{u\,du}{EI}\right]}-\frac{\partial_{n+1}\int_0^{l_{n+1}}\frac{u\,du}{EI}}{c_{n+1}\,l_{n+1}^2\,l_{n+2}}\right\}+M_{n+1}\left\{\frac{1}{l_{n+1}}\left[\int_0^{l_{n+1}}\left(1-\frac{u}{l_{n+1}}\right)\frac{u\,du}{EI}-\frac{1}{c_n\,l_{n+1}}-\frac{1}{c_{n+1}}\left(\frac{1}{l_{n+1}}+\frac{1}{l_{n+2}}\right)\right]-\frac{\partial_{n+1}\int_0^{l_{n+1}}\left(1-\frac{u}{l_{n+1}}\right)\frac{du}{EI}}{c_{n+1}\,l_{n+1}\,l_{n+2}}\right\}+$$

$$+\frac{M_{n+2}}{c_{n+1}\,l_{n+1}\,l_{n+2}}-\frac{v_n}{c_n\,l_{n+1}}+\frac{v_{n+1}}{c_{n+1}\,l_{n+1}}+\frac{1}{l_{n+1}}\int_0^{l_{n+1}}\frac{m_{n+1}\,u\,du}{EI}+\frac{\int_0^{l_n}\frac{m_n\,du}{EI}}{c_n\,l_n\,l_{n+1}\left[\frac{1}{\partial_{n-1}}+\frac{1}{l_n}\int_0^{l_n}\frac{u\,du}{EI}\right]}-\frac{\partial_{n+1}\int_0^{l_{n+1}}\frac{m_{n+1}\,du}{EI}}{c_{n+1}\,l_{n+1}\,l_{n+2}};\quad\ldots\ldots (g)$$

weszcie dla $n=w-1$:

$$N_{w-1}\left\{-\frac{1}{\partial_{w-1}}+\frac{1}{c_{w-1}\,l_{w-1}\,l_w\,\partial_{w-1}\left[\frac{1}{\partial_{w-2}}+\frac{1}{l_{w-1}}\int_0^{l_{n-1}}\frac{u\,du}{EI}\right]}-\frac{1}{l_w^2}\left[\int_0^{l_w}\frac{u^2du}{EI}+\frac{1}{c_{w-1}}+\frac{1}{c_w}\right]\right\}=$$

$$=-\frac{M_{w-2}}{c_{w-1}\,l_{w-1}\,l_w\,\partial_{w-2}\left[\frac{1}{\partial_{w-2}}+\frac{1}{l_{w-1}}\int_0^{l_{w-1}}\frac{u\,du}{EI}\right]}+M_{w-1}\left\{\frac{1}{l_w}\left[\frac{1}{l_w}\int_0^{l_w}\frac{u^2du}{EI}+\frac{1}{c_{w-1}}\left(\frac{1}{l_{w-1}}+\frac{1}{l_w}\right)+\frac{1}{c_w\,l_w}\right]+\frac{\int_0^{l_{w-1}}\left(1-\frac{u}{l_{w-1}}\right)\frac{du}{EI}}{c_{w-1}\,l_{w-1}\,l_w\left[\frac{1}{\partial_{w-2}}+\frac{1}{l_{w-1}}\int_0^{l_{w-1}}\frac{u\,du}{EI}\right]}\right\}+M_w\left\{\frac{1}{l_w^2}\left[\int_0^{l_w}\left(1-\frac{u}{l_w}\right)\frac{u\,du}{EI}-\frac{1}{c_{w-1}}-\frac{1}{c_w}\right]\right\}-$$

$$-\frac{v_{w-1}}{c_{w-1}\,l_w}+\frac{v_w}{c_w\,l_w}+\frac{1}{l_w}\int_0^{l_w}\frac{m_w\,u\,du}{EI}+\frac{\int_0^{l_{w-1}}\frac{m_{w-1}\,du}{EI}}{c_{w-1}\,l_{w-1}\,l_w\left[\frac{1}{\partial_{w-2}}+\frac{1}{l_{w-1}}\int_0^{l_{w-1}}\frac{u\,du}{EI}\right]}\quad .\ .\ (h)$$

Równania Clerc'a piewszego rodzaju dają dla $n=1$:

$$N_1\left\{-\frac{1}{\partial_1}+\frac{\int_0^{l_1}\left(1-\frac{z}{l_1}\right)\frac{z\,dz}{EI}-\frac{1}{c_0\,l_1}-\frac{1}{c_1\,l_1}}{l_1\,\partial_1\left[\frac{1}{\partial_0}+\int_0^{l_1}\left(1-\frac{z}{l_1}\right)\frac{dz}{EI}\right]}+\frac{1}{c_1\,l_1\,l_2}\right\}=M_0\left\{-\frac{1}{l_1}\left[\int_0^{l_1}\left(1-\frac{z}{l_1}\right)\frac{z\,dz}{EI}-\frac{1}{c_0\,l_1}-\frac{1}{c_1\,l_1}\right]+\frac{\int_0^{l_1}\left(1-\frac{z}{l_1}\right)\frac{z\,dz}{EI}-\frac{1}{c_0\,l_1}-\frac{1}{c_1\,l_1}}{l_1\left[\frac{1}{\partial_0}+\int_0^{l_1}\left(1-\frac{z}{l_1}\right)\frac{dz}{EI}\right]}\int_0^{l_1}\left(1-\frac{z}{l_1}\right)\frac{dz}{EI}\right\}+$$

$$+M_1\left\{-\frac{1}{l_1^2}\left[\int_0^{l_1}\frac{z^2dz}{EI}+\frac{1}{c_0}+\frac{l_1}{c_1}\left(\frac{1}{l_1}+\frac{1}{l_2}\right)\right]+\right.$$

$$\left.+\frac{\int_0^{l_1}\left(1-\frac{z}{l_1}\right)\frac{zdz}{EI}-\frac{1}{c_0\,l_1}-\frac{1}{c_1\,l_1}}{l_1^2\left[\frac{1}{\partial_0}+\int_0^{l_1}\left(1-\frac{z}{l_1}\right)\frac{dz}{EI}\right]}\int_0^{l_1}\frac{zdz}{EI}\right\}+$$

$$+\frac{M_2}{c_1\,l_1\,l_2}-\frac{v_0}{c_0\,l_1}+\frac{v_i}{c_1\,l_1}-\frac{1}{l_1}\int_0^{l_1}\frac{m_1\,zdz}{EI}+$$

$$+\frac{\int_0^{l_1}\left(1-\frac{z}{l_1}\right)\frac{zdz}{EI}-\frac{1}{c_0\,l_1}-\frac{1}{c_1\,l_1}}{l_1\left[\frac{1}{\partial_0}+\int_0^{l_1}\left(1-\frac{z}{l_1}\right)\frac{dz}{EI}\right]}\int_0^{l_1}\frac{m_1\,dz}{EI}\quad .\ .\quad (i)$$

Dalej dla $n = 2, 3, \ldots, w-1$:

$$N_n\left\{-\frac{1}{\partial_n}+\frac{1}{c_{n-1}\,l_{n-1}\,l_n\,\partial_{n-1}\,\partial_n\left[\frac{1}{\partial_{n-2}}+\int_0^{l_{n-1}}\left(1-\frac{z}{l_{n-1}}\right)\frac{dz}{EI}\right]\left[\frac{1}{\partial_{n-1}}+\int_0^{l_n}\left(1-\frac{z}{l_n}\right)\frac{dz}{EI}\right]}+\frac{1}{c_n\,l_n\,l_{n+1}}+\right.$$

$$\left.+\frac{\int_0^{l_n}\left(1-\frac{z}{l_n}\right)\frac{zdz}{EI}-\frac{1}{c_{n-1}\,l_n}-\frac{1}{c_n\,l_n}}{l_n\,\partial_n\left[\frac{1}{\partial_{n-1}}+\int_0^{l_n}\left(1-\frac{z}{l_n}\right)\frac{dz}{EI}\right]}\right\}=$$

$$=-\frac{M_{n-2}}{c_{n-1}\,l_{n-1}\,l_n\,\partial_{n-2}\left[\frac{1}{\partial_{n-2}}+\int_0^{l_{n-1}}\left(1-\frac{z}{l_{n-1}}\right)\frac{dz}{EI}\right]}+$$

$$+M_{n-1}\left\{-\frac{1}{l_n}\left[\int_0^{l_n}\left(1-\frac{z}{l_n}\right)\frac{zdz}{EI}-\frac{1}{c_{n-1}}\left(\frac{1}{l_{n-1}}+\frac{1}{l_n}\right)-\frac{1}{c_n l_n}\right]+\right.$$

$$+\frac{\int_0^{l_n}\left(1-\frac{z}{l_n}\right)\frac{dz}{EI}}{c_{n-1}l_{n-1}l_n\partial_{n-1}\left[\frac{1}{\partial_{n-2}}+\int_0^{l_{n-1}}\left(1-\frac{z}{l_{n-1}}\right)\frac{dz}{EI}\right]\left[\frac{1}{\partial_{n-1}}+\int_0^{l_n}\left(1-\frac{z}{l_n}\right)\frac{dz}{EI}\right]}+$$

$$+\frac{\int_0^{l_{n-1}}\frac{zdz}{EI}}{c_{n-1}\,l^2_{n-1}\,l_n\left[\frac{1}{\partial_{n-2}}+\int_0^{l_{n-1}}\left(1-\frac{z}{l_{n-1}}\right)\frac{dz}{EI}\right]}+$$

$$\left.+\frac{\int_0^{l_n}\left(1-\frac{z}{l_n}\right)\frac{zdz}{EI}-\frac{1}{c_{n-1}\,l_n}-\frac{1}{c_n\,l_n}}{l_n\left[\frac{1}{\partial_{n-1}}+\int_0^{l_n}\left(1-\frac{z}{l_n}\right)\frac{dz}{EI}\right]}\int_0^{l_n}\left(1-\frac{z}{l_n}\right)\frac{dz}{EI}\right\}+$$

$$+M_n\left\{-\frac{1}{l_n}\left[\frac{1}{l_n}\int_0^{l_n}\frac{z^2dz}{EI}+\frac{1}{c_{n-1}l_n}+\frac{1}{c_n}\left(\frac{1}{l_n}+\frac{1}{l_{n+1}}\right)\right]+\right.$$

$$+\frac{\int_0^{l_n}\frac{zdz}{EI}}{c_{n-1}l_{n-1}l^2_n\partial_{n-1}\left[\frac{1}{\partial_{n-2}}+\int_0^{l_{n-1}}\left(1-\frac{z}{l_{n-1}}\right)\frac{dz}{EI}\right]\left[\frac{1}{\partial_{n-1}}+\int_0^{l_n}\left(1-\frac{z}{l_n}\right)\frac{dz}{EI}\right]}+$$

$$\left.+\frac{\int_0^{l_n}\left(1-\frac{z}{l_n}\right)\frac{zdz}{EI}-\frac{1}{c_{n-1}\,l_n}-\frac{1}{c_n\,l_n}}{l_n^2\left[\frac{1}{\partial_{n-1}}+\int_0^{l_n}\left(1-\frac{z}{l_n}\right)\frac{dz}{EI}\right]}\int_0^{l_n}\frac{zdz}{EI}\right\}+$$

$$+\frac{M_{n+1}}{c_n\,l_n\,l_{n+1}}-\frac{v_{u-1}}{c_{n-1}\,l_u}+\frac{v_n}{c_n\,l_n}-\frac{1}{l_n}\int_0^{l_n}\frac{m_n\,zdz}{EI}+$$

$$+\frac{\int_0^{l_{n-1}}\frac{m_{n-1}\,dz}{EI}}{c_{n-1}\,l_{n-1}\,l_n\left[\frac{1}{\partial_{n-2}}+\int_0^{l_{n-1}}\left(1-\frac{z}{l_{n-1}}\right)\frac{dz}{EI}\right]}+$$

$$+\frac{\int_0^{l_n}\frac{m_n\,dz}{EI}}{c_{n-}\,l_{n-1}l_nl_{n-1}\left[\frac{1}{\partial_{n-2}}+\int_0^{l_{n-1}}\left(1-\frac{z}{l_{n-1}}\right)\frac{dz}{EI}\right]\left[\frac{1}{\partial_{n-1}}+\int_0^{l_n}\left(1-\frac{z}{l_n}\right)\frac{dz}{EI}\right]}+$$

$$+\frac{\int_0^{l_n}\left(1-\frac{z}{l_n}\right)\frac{zdz}{EI}-\frac{1}{c_{n-1}\,l_n}-\frac{1}{c_n\,l_n}}{l_n\left[\frac{1}{\partial_{n-1}}+\int_0^{l_n}\left(1-\frac{z}{l_n}\right)\frac{dz}{EI}\right]}\int_0^{l_n}\frac{m_n\,dz}{EI}\quad .\quad (j)$$

Wreszcie dla $n = w$:

$$N_w\left\{-\frac{1}{\partial_w}+\frac{1}{c_{w-1}l_{w-1}l_w\partial_{w-1}\partial_w\left[\frac{1}{\partial_{w-2}}+\int_0^{l_{w-1}}\left(1-\frac{z}{l_{w-1}}\right)\frac{dz}{EI}\right]\left[\frac{1}{\partial_{w-1}}+\int_0^{l_w}\left(1-\frac{z}{l_w}\right)\frac{dz}{EI}\right]}+\frac{\int_0^{l_w}\left(1-\frac{z}{l_w}\right)\frac{zdz}{EI}-\frac{1}{c_{w-1}\,l_w}-\frac{1}{c_w l_w}}{l_w\,\partial_w\left[\frac{1}{\partial_{w-1}}+\int_0^{l_w}\left(1-\frac{z}{l_w}\right)\frac{dz}{EI}\right]}\right\}=$$

$$
=-\frac{M_{w-2}}{c_{w-1}\, l_{w-1}\, l_w\, \partial_{w-2}\left[\frac{1}{\partial_{w-2}}+\int\limits_0^{l_{w-1}}\left(1-\frac{z}{l_{w-1}}\right)\frac{dz}{EI}\right]}+M_{w-1}\left\{-\frac{1}{l_w}\left[\int\limits_0^{l_w}\left(1-\frac{z}{l_w}\right)\frac{zdz}{EI}-\frac{1}{c_{w-1}}\left(\frac{1}{l_{w-1}}+\frac{1}{l_w}\right)-\frac{1}{c_w\, l_w}\right]+\right.
$$

$$
+\frac{\int\limits_0^{l_w}\left(1-\frac{z}{l_w}\right)\frac{zdz}{EI}-\frac{1}{c_{w-1}\, l_w}-\frac{1}{c_w\, l_w}}{l_w\left[\frac{1}{\partial_{w-1}}+\int\limits_0^{l_w}\left(1-\frac{z}{l_w}\right)\frac{dz}{EI}\right]}\int\limits_0^{l_w}\left(1-\frac{z}{l_w}\right)\frac{dz}{EI}+\frac{\int\limits_0^{l_{w-1}}\frac{zdz}{EI}}{c_{w-}\, l'_{w-1}\, l_w\left[\frac{1}{\partial_{w-2}}+\int\limits_0^{l_{w-1}}\left(1-\frac{z}{l_{w-1}}\right)\frac{dz}{EI}\right]}+
$$

$$
\left.+\frac{\int\limits_0^{l_w}\left(1-\frac{z}{l_w}\right)\frac{dz}{E}}{c_{w-1}\, l_{w-}\, l_w\, \partial_{w-1}\left[\frac{1}{\partial_{w-2}}+\int\limits_0^{l_{w-1}}\left(1-\frac{z}{l_{w-1}}\right)\frac{dz}{EI}\right]\left[\frac{1}{\partial_{w-1}}+\int\limits_0^{l_w}\left(1-\frac{z}{l_w}\right)\frac{dz}{E}\right]}\right\}+M_w\left\{-\frac{1}{l^2_w}\left[\int\limits^{l_w}\frac{z^2dz}{EI}+\frac{1}{c_{w-}}+\frac{1}{c_w}\right]+\right.
$$

$$
\left.+\frac{\int\limits_0^{l_w}\left(1-\frac{z}{l_w}\right)\frac{zdz}{EI}-\frac{1}{c_{w-1}\, l_w}-\frac{1}{c_w\, l_w}}{l^2_w\left[\frac{1}{\partial_{w-1}}\int\limits_0^{l_w}\left(1-\frac{z}{l_w}\right)\frac{dz}{FI}\right]}\int\limits_0^{l_w}\frac{zdz}{EI}+\frac{\int\limits_0^{l_w}\frac{zdz}{EI}}{c_{w-1}\, l_{w-1}\, l^2_w\, \partial_{w-1}\left[\frac{1}{\partial_{w-2}}+\int\limits_0^{l_{w-1}}\left(1-\frac{z}{l_{w-1}}\right)\frac{dz}{EI}\right]\left[\frac{1}{\partial_{w-1}}+\int\limits_0^{l_w}\left(1-\frac{z}{l_w}\right)\frac{dz}{EI}\right]}\right\}-
$$

$$
-\frac{v_{w-1}}{c_{w-1}\, l_w}+\frac{v_w}{c_w\, l_w}-\frac{1}{l_w}\int\limits_0^{l_w}\frac{m_w\, zdz}{EI}+\frac{\int\limits_0^{l_w}\left(1-\frac{1}{l_w}\right)\frac{zdz}{FI}-\frac{1}{c_{w-}\, l_w}-\frac{1}{c_w\, l_w}}{l_w\left[\frac{1}{\partial_{w-1}}+\int\limits_0^{l_w}\left(1-\frac{z}{l_w}\right)\frac{dz}{EI}\right]}\int\limits_0^{l_w}\frac{m_w\, dz}{EI}+
$$

$$
+\frac{\int\limits_0^{l_{w-1}}\frac{m_{w-}\, dz}{EI}}{c_{w-1}\, l_{w-1}\, l_w\left[\frac{1}{\partial_{w-2}}+\int\limits_0^{l_{w-}}\left(1-\frac{z}{l_{w-1}}\right)\frac{dz}{EI}\right]}+\frac{\int\limits_0^{l_w}\frac{m_w\, dz}{EI}}{c_{w-1}\, l_{w-1}\, l_w\, \partial_{w-1}\left[\frac{1}{\partial_{w-2}}+\int\limits_0^{l_{w-1}}\left(1-\frac{z}{l_{w-1}}\right)\frac{dz}{EI}\right]\left[\frac{1}{\partial_{w-1}}+\int\limits_0^{l_w}\left(1+\frac{z}{l_w}\right)\frac{dz}{EI}\right]} \quad (k).
$$

Powyższe wzory uzależniają poszczególne N_n od M_n.

4. Rugując zwykłem obustronnem dzieleniem N_n ($n=1, 2, \ldots w-1$) ze wzorów (g) (h), (i), (j) otrzymamy $w-1$ równań o $w+1$ niewiadomych M_n. Są to **najogólniejsze równania pięciu momentów**. Można z nich wyznaczyć wszystkie niewiadome M_n, należy jednak dodatkowo uwzględnić zależność (d) oraz równanie, jakie otrzymamy, rugując N_w z równań (e) i (k). W szczególnym wypadku podpory A_0 (lub A_w) stałej lub łożyskowej niesprężystej, należy założyć $N_0=0$ (lub $N_w=0$), a nadto pominąć równanie (d) lub (e).

Ogólne równanie pięciu momentów oddaje cenne usługi w wypadku podpór wzorowo sprężystych łożyskowych i posuwnych. Wypływa zeń bezpośrednio wzór Pearson'a w założeniu zerowych wartości wszystkich ∂_n, to jest w założeniu podpór posuwnych wzorowo sprężystych. W założeniu wszystkich $\partial_n=0$ oraz $c_n=\infty$, ogólne równanie pięciu momentów staje się równaniem Clapeyron'a, dla podpór posuwnych niesprężystych, uszeregowanych na jednym poziomie.

W szczególnym wypadku równych przęseł i jednakowych spółczynników sprężystości podpór, będziemy mieli: $l_n=l$, $c_n=c$, $\partial_n=\partial$ przy $n=0,1,2\ldots w$, a przeto ogólne równanie pięciu momentów:

$$
M_{n-2}+(m-4-2w)\,M_{n-1}+[\,2(2m+3)+
$$

$$
+(m+4)\,w]\,M_n+(m-4-2w)\,M_{n+1}+M_{n+2}+
$$

$$
+(1+w)\,lv_{n-1}-(2+w)\,lv_n+lv_{n+1}+
$$

$$
+6(1+w)\,\frac{m}{l^2}\int\limits_0^l m_n zdz+6\,\frac{m}{l^2}\int\limits_0^l m_{n+1}\,u\,du-
$$

$$
-2\,\frac{w}{l}\int\limits_0^l m_{n-1}\,dz-2(m-2)\frac{w}{l}\int\limits_0^l m_n\,dz-
$$

$$
-2\,\frac{w}{l}\int\limits_0^l m_{n+1}\,dz=0,
$$

gdzie oznaczono: $m=\dfrac{cl^3}{6EI}$, $w=\dfrac{\partial l}{2\,EI}$.

Kolejność obliczeń jest zawsze ta sama we wszystkich wypadkach. Z ogólnych równań pięciu momentów, oraz dodatkowych (d), (e) i (k) wyznaczymy momenty odporowe M_n zwykłą drogą rozwiązywania równań linjowych, lub też, przy znacznej liczbie przęseł — sposobami, zapożyczonemi z teorji równań różnicowych. Po podstawieniu otrzymanych M_n we wzory (f), (g), (h) i (k) wyznaczymy momenty sprzeciwu N_n, a następnie odpory pionowe V_n ze wzorów (a), (b) i (c). Stąd bezpośrednio w ogólnym wypadku:

$$y_n = -\frac{V_n}{c_n} \text{ oraz } y'_n = -\frac{N_n}{\partial_n}.$$

Siły tnące otrzymamy drogą sumowania obciążeń i odporów pionowych. Przy wyznaczaniu momentów gnących skorzystamy z uogólnionego wzoru Bresse'a:

$$M = M_{n-1} + N_{n-1} + (M_n - M_{n-1} - N_{n-1}) \frac{z}{l_n} + m_n$$

(P. T. 1927 str. 330).

Wreszcie ze wzorów Clerc'a lub Clapeyron'a otrzymamy rzędne y i odchylenia y' odkształconej przęsła (n) w poziomej odległości e od punktu podparcia A_{n-1}. W tym celu wyodrębniamy przęsła (e) i $(l_n - e)$. Dwa wzory Clerc'a:

$$y' = \frac{y_{n-1} - y}{e} - \frac{1}{e}\int_0^e \frac{Mzdz}{EI} =$$

$$= \frac{y - y_n}{l_n - e} + \frac{1}{l_n - e}\int_0^{l_n - e} \frac{Mudu}{EI}$$

wypisane dla tych dwóch przęseł pomocniczych dadzą szukane y, y'. Te same niewiadome odkształconej lewego wspornika, przynależne poziomej odległości e od punktu podparcia A_0, wyznaczą się ze wzorów Clerc'a:

$$y'_0 = \frac{y - y_0}{e} - \frac{1}{e}\int_0^e \frac{Mzdz}{EI},$$

$$y' = \frac{y - y_0}{e} + \frac{1}{e}\int_0^e \frac{Mudu}{EI}$$

wypisanych dla przęsła (e). Podobny układ równań otrzymamy również i dla prawego wspornika.

W powyższych rozważaniach zawarte jest całkowite rozwiązanie zagadnienia belek prostych, płasko zginanych.

5. Wypadek różnych pierwotnych poziomów punktów podparcia belki prostej wymaga szczegółowego omówienia. Weźmy pod uwagę układ punktów A_n podpór, uszeregowanych mniej więcej poziomo w pionowej płaszczyźnie. Nieobciążona i nieważka belka prosta, poziomo opuszczana, oprze się na punkcie podparcia najwyższym, pochyli się i wesprze na jednym z pozostałych. Zatem pod jarzmem pionowego obciążenia płaskiego pocznie wyginać się mimośrodkowo. Zginanie płaskie, nie mimośrodkowe, wyklucza wszelkie pierwotne pochylenia belki prostej; załóżmy przeto, że w układzie punktów A_n przynajmniej dwa punkty leżą na najwyższym poziomie. Przez te punkty przejdzie nieodkształcona X belki. Punkty pozostałe leżeć będą w odległościach pionowych pierwotnych $(y_n)_0$ od osi X. Stopniowe wyginanie belki pionowem obciążeniem płaskiem, łącznie ze sprężystemi odkształceniami owych najwyższych podpór, — włączy kolejno coraz to inne punkty do gromady punktów istotnego podparcia, poczem ustali się równowaga całego układu, pewna część jednak punktów A_n może w tem nie wziąć udziału.

Należy przeto rozróżniać podpory obustronnego i jednostronnego działania pionowego. Te ostatnie mogą tylko wejść do gromady owych nieistotnych podpór układu.

Nadto podpory łożyskowe istotne mogą mieć pierwotne odchylenia $(y'_n)_0$ od poziomu, zatem w najogólniejszym wypadku ostateczna rzędna odkształconej:

$$y_n = (y_n)_0 - \frac{V_n}{c_n},$$

a ostatecznie odchylenie jej stycznej od poziomu:

$$y'_n = (y'_n)_0 - \frac{N_n}{\partial_n}.$$

Chcąc przeto uwzględnić pierwotne wartości rzędnych i odchyleń odkształconej na podporach, należy we wzorach Clerc'a drugiego rodzaju (f), (g), (h) dodać z prawej strony wyrazy:

$$\left(\frac{y_n - y_{n+1}}{l_{n+1}} - y'_n\right)_0,$$

a we wzorach Clerc'a pierwszego rodzaju (i), (j), (k) wyrazy:

$$\left(\frac{y_{n-1} - y_n}{l_n} - y'_n\right)_0,$$

również z prawej strony.

Podpory jednostronnego działania dają odpory wyłącznie tylko jednego znaku, zatem po otrzymaniu M_n, N_n, V_n należy wszystkie podpory przynależne odporom znaku odwrotnego pominąć, a wszystkie rachunki rozpocząć na nowo.

Prosty przykład najlepiej to uwypukli. Belka pozioma o stałym przekroju opiera się końcami na odporach niesprężystych, przegubowej i posuwnej. Pionowa oś siły zewnętrznej P dzieli ją na dwie połowy l. Na tej osi, w odległości f od nieodkształconej X leży pod belką trzecia niesprężysta podpora posuwna jednostronnego działania. Jej odpór pionowy V może być tylko ujemny. Wzór Clapeyron'a wypisany dla obu przęseł l da:

$$6\,EI\left[\frac{-f}{l} + \frac{-f}{l}\right] = 2(l + l)M.$$

Nadto ze wzoru (b), po uwzględnieniu wartości środkowego momentu gnącego M, otrzymamy:

$$V = -\left(\frac{1}{l} + \frac{1}{l}\right)M - P = \frac{6\,EI}{l^3}f - P.$$

Zatem podpora środkowa będzie istotna, gdy $V < 0$, co odpowiada warunkowi:

$$f < \frac{Pl^3}{6EI}.$$

staje sie zbędną natychmiast, gdy:

$$f \geqslant \frac{Pl^3}{6EI}.$$

Ten sam wynik otrzymamy również i dla podpory środkowej jednostronnego działania, wzorowo sprężystej.