Ogólne wzory Clerc'a i Claperyon'a.

Napisał L. Karasiński.

1. Biorę pod uwagę belkę poziomą, pierwotnie prostą, wspartą na podporach. Środek jej skrajnego przekroju prawego stanowi początek osi spółrzędnych. Dodatnia oś X pokrywa się z osią belki, dodatnia oś Y leży pod osią X. W głównej płaszczyźnie XY bezwładności belki tkwią jednoimienne osie główne wszystkich przekrojów poprzecznych. Leżą w niej również zewnętrzne siły pionowe, pary sił skupionych momentów zewnętrznych oraz pionowe warstwy ciągłych obciążeń belki. Pod jarzmem tego płaskiego obciążenia, pierwotnie prosta oś belki staje się odkształconą. Odciętej x przynależy ugięcie y i kąt y' pochylenia stycznej odkształconej ku osi X.

Kierunek wzrostu momentów gnących obieram sprzeczny z kierunkiem osi X. Momenty lewoskrętne znakuję dodatnio. Równanie:

$$y''=\frac{M}{EI},$$

w którem M oznacza bieżący moment gnący, I — zmienny moment bezwładności bieżącego przekroju względem osi prostopadłej do X i Y, daje wprost bezpośrednio:

$$y'=\int\frac{Mdx}{EI}+C$$

$$y=x\int\frac{Mdx}{EI}+\int\frac{Mxdx}{EI}+Cx+D.$$

Spółrzędne x_0, y_0, y_0' oraz x_1, y_1, y_1' dwóch jakichkolwiek punktów odkształconej czynią zadość powyższym równaniom. Wyrugowanie stałych całkowanie daje trzy wzory podstawowe:

$$y_1'-y_0'=\int_{x_0}^{x_1}\frac{Mdx}{EI}.$$

$$y_1-y_0=y_0'(x_1-x_0)+x_1\int_{x_0}^{x_1}\frac{Mdx}{EI}-\int_{x_0}^{x_1}\frac{Mxdx}{EI}.$$

$$y'_1=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}+\frac{1}{x_1-x_0}\int_{x_0}^{x_1}\frac{M(x-x_0)\,dx}{EI}.$$

Ostatni nosi miano wzoru Clerc'a.

2. Idąc w kierunku wzrostu momentów, wyodrębniam na odkształconej kolejne trzy jakiekolwiek punkty: $n-1$, n, $n+1$, o spółrzędnych:

x_{n-1}, y_{n-1}, y'_{n-1}; x_n, y_n, y'_n; x_{n+1}, y_{n+1}, y'_{n+1}.

Odcinek $(n-1, n)$ nazywam przęsłem n, odcinek $(n, n+1)$ — przęsłem $n+1$ i oznaczam przez:

l_n, l_{n+1} — długość przęsła n i $n+1$,
M_{n-1} M_n, M_{n+1} — momenty gnące tuż przed punktami: $n-1$, n, $n+1$.
x — odciętą punktu bieżącego odkształconej,
z — poziomą odległość punktu bieżącego odkształconej przęsła n od punktu $n-1$,
u — poziomą odległość punktu bieżącego odkształconej przęsła $n+1$ od punktu $n+1$.
M — bieżący moment gnący, tuż przed punktem o odciętej x.

W tem znakowaniu otrzymam ze wzorów pierwszego i trzeciego:

$$y'_{n-1}-y'_n=\int_{x_n}^{x_{n-1}}\frac{Mdx}{EI}=\int_0^{l_n}\frac{Mdz}{EI}.$$

$$y'_n=\frac{y_n-y_{n-1}}{x_n-x_{n-1}}+\frac{1}{x_n-x_{n-1}}\int_{x_{n-1}}^{x_n}\frac{M(x-x_{n-1})\,dx}{EI}=$$

$$=\frac{y_{n-1}-y_n}{l_n}-\frac{1}{l_n}\int^{l_n}\frac{Mzdz}{EI}.$$

$$y'_n=\frac{y_n-y_{n+1}}{x_n-x_{n+1}}+\frac{1}{x_n-x_{n+1}}\int_{x_{n+1}}^{x_n}\frac{M(x-x_{n+1})\,dx}{EI}=$$

$$=\frac{y_n-y_{n+1}}{l_{n+1}}+\frac{1}{l_{n+1}}\int_0^{l_{n+1}}\frac{Mudu}{EI}$$

ponieważ niewątpliwie:

$x_{n-1}=x+z$, $x_{n-1}-x_n=l_n$
$x=u+x_{n+1}$, $x_n-x_{n+1}=l_{n+1}$

dla przęseł n i $n+1$.

Moment bieżący przęsła n będzie:

$$M=M_{n-1}+(M_n-M_{n-1})\frac{z}{l_n}+m_n.$$

Ten wzór daje bezpośrednio dla przęsła $n+1$:

$$M=M_{n+1}+(M_n-M_{n+1})\frac{u}{l_{n+1}}+m_{n+1}.$$

W obu powyższych wzorach oznaczyłem przez:

m_n — moment gnący, jakiby panował przekroju bieżącym przęsła n, gdyby to przęsło wyciąć z belki i, nie zmieniając jego obciążenia zewnętrznego, ustawić końcami na podporach przegubowej i posuwnej,
m_{n+1} — moment gnący, jakiby panował w przekroju bieżącym przęsła $n+1$, gdyby to przęsło wyciąć z belki i, nie zmieniając jego obciążenia zewnętrznego, ustawić końcami na podporach: przegubowej i posuwnej. Podstawienie da ogólne wzory:

$$y'_{n-1}-y'_n=M_{n-1}\int_0^{l_n}\left(1-\frac{z}{l_n}\right)\frac{dz}{EI}+\frac{M_n}{l_n}\int_0^{l_n}\frac{zdz}{EI}+$$

$$+\int_0^{l_n}\frac{m_ndz}{EI}\quad\ldots\ldots\ldots\quad(1)$$

$$y'_n=\frac{y_{n-1}-y_n}{l_n}-\frac{M_{n-1}}{l_n}\int_0^{l_n}\left(1-\frac{z}{l_n}\right)\frac{zdz}{EI}-$$

$$-\frac{M_n}{l_n^2}\int_0^{l_n}\frac{z^2dz}{EI}-\frac{1}{l_n}\int_0^{l_n}\frac{m_nzdz}{EI}\quad\ldots\ldots\quad(2)$$

$$y'_n=\frac{y_n-y_{n+1}}{l_{n+1}}+\frac{M_{n+1}}{l_{n+1}}\int_0^{l_{n+1}}\left(1-\frac{u}{l_{n+1}}\right)\frac{udu}{EI}+$$

$$+\frac{M_n}{l^2_{n+1}}\int_0^{l_{n+1}}\frac{u^2du}{EI}+\frac{1}{l_{n+1}}\int_0^{l_{n+1}}\frac{m_{n+1}udu}{EI}\quad . \; . \; . \quad (3)$$

które można nazwać wzorami Clerc'a.

Ostatnie dwa dają bezpośrednio ogólny wzór Clapeyron'a:

$$\frac{y_{n-1}-y_n}{l_n}+\frac{y_{n+1}-y_n}{l_{n+1}}=\frac{M_{n-1}}{l_n}\int_0^{l_n}\left(1-\frac{z}{l_n}\right)\frac{zdz}{EI}+$$

$$+M_n\left[\frac{1}{l_n^2}\int_0^{l_n}\frac{z^2dz}{EI}+\frac{1}{l^2_{n+1}}\int_0^{l_{n+1}}\frac{u^2du}{EI}\right]+$$

$$+\frac{M_{n+1}}{l_{n+1}}\int_0^{l_{n+1}}\left(1-\frac{u}{l_{n+1}}\right)\frac{udu}{EI}+\frac{1}{l_n}\int_0^{l_n}\frac{m_n zdz}{EI}+$$

$$+\frac{1}{l_{n+1}}\int_0^{l_{n+1}}\frac{m_{n+1}udu}{EI}\quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4)$$

W ten sposób prosty, zupełnie niezależny od rozpatrywania podpór, a więc drogą naturalną wyprowadzone wzory stanowią ogólne rozwiązanie zagadnienia belek prostych zginanych płasko.

3. W szczególnym wypadku przegubowego podparcia punktów $n-1, n, n+1$, ze wzorów dla M_n, M_{n+1} otrzymamy ogólny wzór

$$V_n=\frac{M_{n-1}}{l_n}-\left(\frac{1}{l_n}+\frac{1}{l_{n+1}}\right)M_n+\frac{M_{n+1}}{l_{n+1}}+v_n,$$

gdzie oznaczono przez:

V_n — odpór pionowy w punkcie n, podpartym przegubowo,

v_n — sumę odporów pionowych, jakieby panowały w punktach n przęseł n, $n+1$, gdyby te przęsła powycinać z belki i poustawiać końcami na podporach: przegubowej i posuwnej.

4. Dla przegubowych podpór wzorowo sprężystych:

$$V_n=-c_n y_n,$$

gdzie c_n oznacza odpowiedni spółczynnik sprężystości. Po powstawieniu we wzory powyższe, otrzymamy: wzory Clerc'a:

$$y'_n=-\frac{M_{n-2}}{c_{n-1}l_{n-1}l_n}-\frac{M_{n-1}}{l_n}\left[\int_0^{l_n}\left(1-\frac{z}{l_n}\right)\frac{zdz}{EI}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{c_{n-1}}\left(\frac{1}{l_{n-1}}+\frac{1}{l_n}\right)-\frac{1}{c_n l_n}\right]-\frac{M_n}{l_n}\left[\frac{1}{l_n}\int_0^{l_n}\frac{z^2dz}{EI}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{c_{n-1}l_n}+\frac{1}{c_n}\left(\frac{1}{l_n}+\frac{1}{l_{n+1}}\right)\right]+\frac{M_{n+1}}{c_n l_n l_{n+1}}-\frac{v_{n-1}}{c_{n-1}l_n}+$$

$$+\frac{v_n}{c_n l_n}-\frac{1}{l_n}\int_0^{l_n}\frac{m_n zdz}{EI}\quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5)$$

$$y'_n=-\frac{M_{n-1}}{c_n l_n l_{n+1}}+\frac{M_n}{l_{n+1}}\left[\frac{1}{l_{n+1}}\int_0^{l_{n+1}}\frac{u^2du}{EI}+\frac{1}{c_n}\left(\frac{1}{l_n}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{l_{n+1}}\right)+\frac{1}{c_{n+1}l_{n+1}}\right]+\frac{M_{n+1}}{l_{n+1}}\left[\int_0^{l_{n+1}}\left(1-\frac{u}{l_{n+1}}\right)\frac{udu}{EI}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{c_n l_{n+1}}-\frac{1}{c_{n+1}}\left(\frac{1}{l_{n+1}}+\frac{1}{l_{n+2}}\right)\right]+\frac{M_{n+2}}{c_{n+1}l_{n+1}l_{n+2}}-$$

$$-\frac{v_n}{c_n l_{n+1}}+\frac{v_{n+1}}{c_{n+1}l_{n+1}}+\frac{1}{l_{n+1}}\int_0^{l_{n+1}}\frac{m_{n+1}udu}{EI}\quad . \; . \quad (6)$$

oraz wzór Clapeyrona, zwany wzorem o pięciu momentach:

$$\frac{M_{n-2}}{c_{n-1}l_{n-1}l_n}+\frac{M_{n-1}}{l_n}\left[\int_0^{l_n}\left(1-\frac{z}{l_n}\right)\frac{zdz}{EI}-\frac{1}{c_{n-1}}\left(\frac{1}{l_{n-1}}+\frac{1}{l_n}\right)\right.$$

$$\left.-\frac{1}{c_n}\left(\frac{1}{l_n}+\frac{1}{l_{n+1}}\right)\right]+M_n\left[\frac{1}{l^2_n}\int_0^{l_n}\frac{z^2dz}{EI}+\frac{1}{l^2_{n+1}}\int_0^{l_{n+1}}\frac{u^2du}{EI}+\frac{1}{c_{n-1}l_n^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{c_n}\left(\frac{1}{l_n}+\frac{1}{l_{n+1}}\right)^2+\frac{1}{c_{n+1}l^2_{n+1}}\right]+\frac{M_{n+1}}{l_{n+1}}\left[\int_0^{l_{n+1}}\left(1-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{u}{l_{n+1}}\right)\frac{udu}{EI}-\frac{1}{c_n}\left(\frac{1}{l_n}+\frac{1}{l_{n+1}}\right)-\frac{1}{c_{n+1}}\left(\frac{1}{l_{n+1}}+\frac{1}{l_{n+2}}\right)\right]+$$

$$+\frac{M_{n+2}}{c_{n+1}l_{n+1}l_{n+2}}+\frac{v_{n-1}}{c_{n-1}l_n}-\frac{v_n}{c_n}\left(\frac{1}{l_n}+\frac{1}{l_{n+1}}\right)+\frac{v_{n+1}}{c_{n+1}l_{n+1}}+$$

$$+\frac{1}{l_n}\int_0^{l_n}\frac{m_n zdz}{EI}+\frac{1}{l_{n+1}}\int_0^{l_{n+1}}\frac{m_{n+1}udu}{EI}=0\quad . \; . \quad (7)$$

5. Określone w punkcie pierwszym obciążenie płaskie nie da odporów poziomych, zatem w założeniu podpór nieprzegubowych wzorowo sprężystych, należy w punktach podparcia przewidzieć:

V_n — odpór pionowy w punkcie n oraz

N_n — moment sprzeciwu w punkcie n, podpartym na podporze bezprzegubowej, wzorowo sprężystej, przyczem

$$V_n=-c_n y_n,\quad N_n=-\partial_n y'_n,$$

gdzie przez c_n, ∂_n odznaczyłem odpowiednie spółczynniki sprężystości.

Zatem moment bieżący przęsła n:

$$M=M_{n-1}+N_{n-1}+(M_n-M_{n-1}-N_{n-1})\frac{z}{l_n}+m_n.$$

Ten wzór da dla przęsła $n+1$:

$$M=M_{n+1}+(M_n+N_n-M_{n+1})\frac{u}{l_{n+1}}+m_{n+1}.$$

Po podstawieniu, otrzymam kolejno następujące wzory:

$$\frac{N_n}{\partial_n}-N_{n-1}\left[\frac{1}{\partial_{n-1}}+\int_0^{l_n}\left(1-\frac{z}{l_n}\right)\frac{dz}{EI}\right]=$$

$$=M_{n-1}\int_0^{l_n}\left(1-\frac{z}{l_n}\right)\frac{dz}{EI}+\frac{M_n}{l_n}\int_0^{l_n}\frac{zdz}{EI}+$$

$$+\int_0^{l_n}\frac{m_n dz}{EI}\quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (8)$$

$$y'_n=-\frac{N_n}{\partial_n}=-\frac{M_{n-2}}{c_{n-1}l_{n-1}l_n}-$$

$$-\frac{M_{n-1}}{l_n}\left[\int_0^{l_n}\left(1-\frac{z}{l_n}\right)\frac{zdz}{EI}-\frac{1}{c_{n-1}}\left(\frac{1}{l_{n-1}}+\frac{1}{l_n}\right)-\right.$$

$$-\frac{1}{c_n l_n}\Big] - \frac{M_n}{l_n}\Big[\frac{1}{l_n}\int_0^{l_n}\frac{z^2\,dz}{EI} + \frac{1}{c_{n-1} l_n} +$$

$$+\frac{1}{c_n}\Big(\frac{1}{l_n}+\frac{1}{l_{n+1}}\Big)\Big] + \frac{M_{n+1}}{c_n l_n l_{n+1}} - \frac{N_{n-2}}{c_{n-1} l_{n-1} l_n} -$$

$$-\frac{N_{n-1}}{l_n}\Big[\int_0^{l_n}\Big(1-\frac{z}{l_n}\Big)\frac{z\,dz}{EI} - \frac{1}{c_{n-1} l_n} - \frac{1}{c_n l_n}\Big] -$$

$$-\frac{N_n}{c_n l_n l_{n+1}} - \frac{v_{n-1}}{c_{n-1} l_n} + \frac{v_n}{c_n l_n} -$$

$$-\frac{1}{l_n}\int_0^{l_n}\frac{m_n\,z\,dz}{EI} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

$$y'_n = -\frac{N_n}{\partial_n} = -\frac{M_{n-1}}{c_n l_n l_{n+1}} +$$

$$+\frac{M_n}{l_{n+1}}\Big[\frac{1}{l_{n+1}}\int_0^{l_{n+1}}\frac{u^2\,du}{EI} + \frac{1}{c_n}\Big(\frac{1}{l_n}+\frac{1}{l_{n+1}}\Big) +$$

$$+\frac{1}{c_{n+1} l_{n+1}}\Big] + \frac{M_{n+1}}{l_{n+1}}\Big[\int_0^{l_{n+1}}\Big(1-\frac{u}{l_{n+1}}\Big)\frac{u\,du}{EI} -$$

$$-\frac{1}{c_n l_{n+1}} - \frac{1}{c_{n+1}}\Big(\frac{1}{l_{n+1}}+\frac{1}{l_{n+2}}\Big)\Big] + \frac{M_{n+2}}{c_{n+1} l_{n+1} l_{n+2}} -$$

$$-\frac{N_{n-1}}{c_n l_n l_{n+1}} + \frac{N_n}{l_{n+1}}\Big[\frac{1}{l_{n+1}}\int_0^{l_{n+1}}\frac{u^2\,du}{EI} + \frac{1}{c_n l_{n+1}} +$$

$$+\frac{1}{c_{n+1} l_{n+1}}\Big] - \frac{N_{n+1}}{c_{n+1} l_{n+1} l_{n+2}} - \frac{v_n}{c_n l_{n+1}} +$$

$$+\frac{v_{n+1}}{c_{n+1} l_{n+1}} + \frac{1}{l_{n+1}}\int_0^{l_{n+1}}\frac{m_{n+1}\,u\,du}{EI} \quad \ldots \quad (10)$$

$$\frac{M_{n-2}}{c_{n-1} l_{n-1} l_n} + \frac{M_{n-1}}{l_n}\Big[\int_0^{l_n}\Big(1-\frac{z}{l_n}\Big)\frac{z\,dz}{EI} -$$

$$-\frac{1}{c_{n-1}}\Big(\frac{1}{l_{n-1}}+\frac{1}{l_n}\Big) - \frac{1}{c_n}\Big(\frac{1}{l_n}+\frac{1}{l_{n+1}}\Big)\Big] +$$

$$+M_n\Big[\frac{1}{l_n^2}\int_0^{l_n}\frac{z^2\,dz}{EI} + \frac{1}{l^2_{n+1}}\int_0^{l_{n+1}}\frac{u^2\,du}{EI} + \frac{1}{c_{n-1} l_n^2} +$$

$$+\frac{1}{c_n}\Big(\frac{1}{l_n}+\frac{1}{l_{n+1}}\Big)^2 + \frac{1}{c_{n+1} l^2_{n+1}}\Big] +$$

$$+\frac{M_{n+1}}{l_{n+1}}\Big[\int_0^{l_{n+1}}\Big(1-\frac{u}{l_{n+1}}\Big)\frac{u\,du}{EI} - \frac{1}{c_n}\Big(\frac{1}{l_n}+\frac{1}{l_{n+1}}\Big) -$$

$$-\frac{1}{c_{n+1}}\Big(\frac{1}{l_{n+1}}+\frac{1}{l_{n+2}}\Big)\Big] + \frac{M_{n+2}}{c_{n+1} l_{n+1} l_{n+2}} +$$

$$+\frac{N_{n-2}}{c_{n-1} l_{n-1} l_n} + \frac{N_{n-1}}{l_n}\Big[\int_0^{l_n}\Big(1-\frac{z}{l_n}\Big)\frac{z\,dz}{EI} -$$

$$-\frac{1}{c_{n-1} l_n} - \frac{1}{c_n}\Big(\frac{1}{l_n}+\frac{1}{l_{n+1}}\Big)\Big] +$$

$$+\frac{N_n}{l_{n+1}}\Big[\frac{1}{l_{n+1}}\int_0^{l_{n+1}}\frac{u^2\,du}{EI} + \frac{1}{c_n}\Big(\frac{1}{l_n}+\frac{1}{l_{n+1}}\Big) +$$

$$+\frac{1}{c_{n+1} l_{n+1}}\Big] - \frac{N_{n+1}}{c_{n+1} l_{n+1} l_{n+2}} + \frac{v_{n-1}}{c_{n-1} l_n} -$$

$$-\frac{v_n}{c_n}\Big(\frac{1}{l_n}+\frac{1}{l_{n+1}}\Big) + \frac{v_{n+1}}{c_{n+1} l_{n+1}} + \frac{1}{l_n}\int_0^{l_n}\frac{m_n\,z\,dz}{EI} +$$

$$+\frac{1}{l_{n+1}}\int_0^{l_{n+1}}\frac{m_{n+1}\,u\,du}{EI} = 0 \quad \ldots\ldots \quad (11)$$

Wzory powyższe rozwiązują zagadnienie. Ze wzoru ósmego wyznaczą się momenty N_n w zależności od momentów M_n, jako że dla podpory w ostatniej w kierunku wzrostu momentów:

$$M_w + N_w = 0.$$

Można również korzystając ze wzoru (8) wyrazić momenty N_{n-2}, N_{n-1}, N_{n+1} wzorów (9), (10) przez N_n. Po wyrugowaniu N_n ze wzorów (9) i (10) otrzymamy wzór o pięciu momentach, który tu pomijam, jako zbyt długi.

Po podstawieniu tych wartości N_n we wzór jedenasty, zawierający rekordową liczbę dziewięciu momentów, otrzymamy, po uwzględnieniu warunków brzegowych, układ równań, z których wyznacza się wszystkie momenty M_n.

6. W szczególnym wypadku szyny, jako nieskończenie długiej belki o stałym przekroju, wspartej na podporach o stałem rozstawieniu l i jednakowych spółczynnikach c, ∂ wszystkich podpór, otrzymamy, stosując wzór ósmy i jedenasty:

$$N_n - N_{n-1}(1+w) = w\Big(M_{n-1} + M_n + \frac{2}{l}\int_0^l m_n\,dz\Big)$$

$$M_{n-2} + (m-4)\,M_{n-1} + 2\,(2m+3)\,M_n + (m-4)\,M_{n+1} +$$
$$+ M_{n+2} + N_{n-2} + (m-3)\,N_{n-1} + (2m+3)\,N_n - N_{n+1} +$$
$$+ l\,(v_{n-1} - 2v_n + v_{n+1}) + \frac{6m}{l^2}\Big[\int_0^l m_n\,z\,dz +$$
$$+ \int_0^l m_{n+1}\,u\,du\Big] = 0.$$

W tych wzorach $m = \frac{cl^3}{6EI}$, $w = \frac{\partial l}{2EI}$.

Rozwiązanie tego zagadnienia podałem w Nr. 10 P. T.

7. Twierdzenia o pracy sprężystej również mogłyby dać wszystkie wyżej podane wzory z pewnemi jednak zastrzeżeniami, które w istocie swej są zbędne, jak widać z niniejszych rozważań. W ten sposób Merten (Gandawa) wyprowadził w roku 1905 wzów Clapeyrona w najogólniejszej postaci, jaką mu nadał Clerc już znacznie wcześniej.

W założeniu podpór wzorowo sprężystych przegubowych, oznaczamy:

H = [praca sprężysta naprężeń całej belki] —

$$-\,{}^1/_2\,\Sigma\,\frac{v_n^2}{c_n}.$$

Chcąc otrzymać wzory Clapeyrona, niezawierające y_n', stosujemy twierdzenie Menabrea:

$$\frac{\partial H}{\partial M_n} = 0.$$

Wzory Clerc'a dla y_n' można otrzymać z łatwością, biorąc H dla jednego przęsła. Drugie twierdze- Castigliano da

$$\frac{\partial H}{\partial M_n} = y'_n,$$

ponieważ y_n' jest niewątpliwie posunięciem uogólnionej siły M_n.