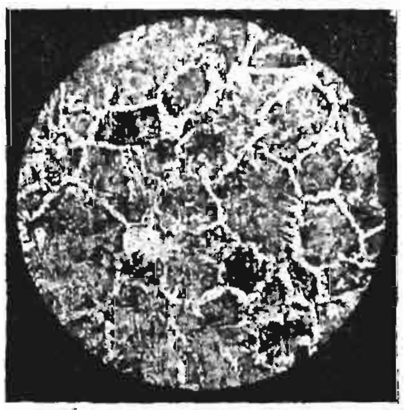
sowanego powiększenia na rys. 1 płatków ferrytu (ciemnych), poprzekładanych cementytem (białym) na podobieństwo płatków róży w nierozwiniętym pączku kwiatowym. W przekroju, jaki przedstawia obraz, płatki te okazują się jako cienkie linijki, naprzemian ciemne i białe. W tem skupieniu ilość węgla przypadająca na karbid wynosi 6,67%, na żelazo (ferryt), które w stanie zimnym karbidu prawie nie rozpuszcza, 93,33%; ogólna zawartość węgla, właściwa tej postaci, wynosi niezmiennie 0,9%.

O ile więc mamy do czynienia ze stalą o takiej zawartości, wtedy obraz mikroskopowy wykaże strukturę czysto perlityczną, jak na rys. 1, o ile węgla jest mniej, tak że oznaczyć można zawartość węgla, obliczając z obrazu stosunek powierzchni objętych perlitem i innemi składnikami, ponieważ zawartość węgla jest w każdym z nich ściśle określona.

Z wielkości ziarn krystalicznych, przy znanem powiększeniu, wnosić można o odporności żelaza na działanie natężeń, zwłaszcza nagle występujących (uderzeń), wiedząc z doświadczenia, że materjał drobnoziarnisty, a przedewszystkiem przerobiony mechanicznie, np. walcowany (rys. 5), jest znacznie wytrzymalszy niż gruboziarnisty (rys. 6), odlewany i wolno stygnący, o bardzo nieregularnie i nieforemnie wytworzonych ziarnach.



Rys. 8. (×100).

Rys. 9. (×100).

Rys. 10. (×100).

ilość karbidu jest za mała aby z całą ilością żelaza wytworzyć perlit, występuje on tylko w postaci wysp, otoczonych kryształami ferrytu, jak to widzimy na rysunku 2, przedstawiającym żelazo o zawartości 0,3% węgla: ciemny perlit otoczony jest szarawo białemi wielobokami ferrytu, którego w miarę malejącej ilości węgla będzie coraz więcej w stosunku do perlitu, a poniżej 0,05% węgla zajmie całe pole obrazu (rys. 3). Gdy zawartość węgla jest większa niż 0,9%, wtedy nadmiar karbidu objawia się w postaci wolnych skupień cementytu, barwy czysto białej, jak to widzimy na rys. 4.

Wzajemny stosunek pól perlitu do innych składników pozwala na wyprowadzanie różnych wniosków o własnościach oglądanego żelaza. Z wielkiem przybliżeniem

Warstwowe ułożenie ferrytu i perlitu (rys. 7) w żelazie walcowanem, znamionuje materjał skłonny do pękania wzdłużnego; przyczyną tego są zwykle rozwalcowane, bardzo drobne bańki gazów albo żużla, które wywołują tego rodzaju skupianie się jednego ze składników.

Siatkowa budowa, gdzie perlit otoczony jest siatką ferrytu (rys. 8) albo cementytu (rys. 9) powstaje przy długiem żarzeniu, bez następnej przeróbki mechanicznej, i znamionuje materjał kruchy. To samo zachodzi gdy ziarna wykazują ograniczenia prostemi powierzchniami (rys. 10, żelazo z surowego bloku bessemerowskiego), właściwemi t. zw. strukturze Widmannstättena, jaką uczony ten pierwszy raz zaobserwował na żelazie meteorycznem.

(d. n.).

Równowaga sprężysta ustrojów budowlanych.

Napisał **LEON KARASIŃSKI.**

Weźmy pod uwagę ustrój złożony z ogniw sprężystych, powiązanych w jedną całość. Jego szkielet geometryczny może ulegać odkształceniom w stosunku do swej postaci pierwotnej, a nadto zmieniać położenie względem układu odniesienia. Ustrój nazwiemy parametralnie zmiennym, gdy wszystkie jego zmiany postaci lub położenia dadzą się sprowadzić do zmian pewnego układu niezależnych *parametrów geometrycznych wewnętrznych lub zewnętrznych.* Zmianom wewnętrznych przypisywać będziemy wszelkie odkształcenia, zmianom zaś parametrów zewnętrznych — wszelkie zmiany położenia. Nadto rozróżniać będziemy parametry wewnętrzne *sprężyste i wolne*, uzależniając od zmian parametrów sprężystych wszelkie odkształcenia ustroju, powstałe z odkształceń sprężystych jego ogniw. Zmianom parametrów wolnych przypisywać będziemy natomiast odkształcenia ustroju, niezależne od sprężystych odkształceń jego poszczególnych ogniw.

Obciążenie ustroju stanowią siły zewnętrzne. *Posunięciem* siły nazwiemy rzut posunięcia jej punktu uczepienia na oś jej działania. Znak siły przynależy jej posunięciu kierunkowo z nią zgodnemu, odwrotny zaś — sprzecznemu. Siła przez posunięcie da pracę, stąd prosty sposób wyznaczania posunięć sił uogólnionych: kąt obrotu pary stanowi posunięcie momentu tej pary, jako siły uogólnionej. Odkształceniom ogniw towarzyszą naprężenia, dające uogólnione siły sprężyste Q ustroju, występujące zawsze w liczbie parzystej, o wypadkowych równych zeru. Ich posunięcia względne oznaczymy przez q. Układ m sił Q i posunięć q sprężystych, od siebie niezależnych nazwiemy pełnym, gdy całkowity przyrost pracy sprężystej ustroju δH, przynależny jego odkształceniu, stanowi $\Sigma Q \delta q$. Posunięcia q, jako względne, zależą tylko od parametrów wewnętrznych, istnieje przeto zawsze m zależności $G(q, r) = 0$, wyznaczających q w funkcji tych parametrów r, o ile *jakobian* G względem q ma wartość różną od zera. Jego zerowa wartość świadczy o niewłaściwym wyborze parametrów sprężystych z pośród układu wewnętrznych, lub niezależności pewnych q od r w danej postaci ustroju, czyli chwiejności ustroju, przynależnej jego pewnej postaci. Siły sprężyste Q powiązane są z posunięciami q w zależnościach $F(Q,q)=0$.

Z nich wyznaczają się q w funkcji Q lub naodwrót, nie można bowiem przewidywać zerowych wartości odpowiednich jakobianów bez odmówienia słuszności podstawowym prawom sprężystości, stanowiącym o kształcie zależności F.

Posunięcia uogólnionych sił zewnętrznych P mają składowe u, zależne od parametrów zewnętrznych s, składowe f, zależne od parametrów wolnych t, wreszcie składowe p zależne od pozostałych wewnętrznych parametrów sprężystych r. Istnieją przeto trzy gromady zależności $S(u, s) = 0$, $T(f, t) = 0$ oraz $R(p, r) = 0$, dających te składowe w funkcji właściwych parametrów ustroju.

Podstawowy warunek równowagi $\Sigma P\delta(u+f+p)-\delta H=0$, oparty na zasadzie prac możliwych, rozpada się na trzy układy równań warunkowych:

$$\sum P\frac{\partial u}{\partial s} = 0, \quad \sum P\frac{\partial f}{\partial t} = 0, \quad \sum P\frac{\partial p}{\partial r} - \frac{\partial H}{\partial r} = 0.$$

Pierwszy układ daje zwykłe równania statyki całego ustroju, jako ciała sztywnego, bo trwającego w równowadze odkształcenia, służy przeto do wyróżnienia i wyznaczenia odporów po izostatycznem unieruchomieniu ustroju względem układu odniesienia. Drugi układ ustala zależności pomiędzy siłami zewnętrznemi, konieczne do otrzymania równowagi ustroju chwiejnego, trzeci wyznacza czynniki równowagi sprężystej ustroju, jako ciała stałego, odkształcalnego.

Wyodrębnienie czynników równowagi sprężystej stanowi cel istotny mej pracy. Pomijam przeto badanie obu pierwszych układów, wkraczające w dziedzinę mechaniki i zakładam, że ustrój sprężysty stały, to znaczy nie mający wolnych parametrów węwnętrznych, unieruchomiono izostatycznie na podporach. To założenie zgoła nie uszczupli ogólności rozważań, przynależnych wytrzymałości tworzyw. Podstawowy warunek w układzie zmiennych niezależnych r rozpada się na w równań warunkowych:

$$U_v = \sum_{k=1}^{n} P_k \frac{\partial p_k}{\partial r_v} - \sum_{i=1}^{m} Q_i \frac{\partial q_i}{\partial r_v} =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} P_k \frac{\partial p_k}{\partial r_v} - \frac{\partial H}{\partial r_v} = 0,$$

wyznaczających niezależne parametry r, a co zatem idzie, i p, q, Q w funkcjach sił zewnętrznych przy różnej od zera wartości jakobianu U względem r. Wszystkie *„Twierdzenia o pracy sprężystej"* wyprowadziłem bezpośrednio z równań powyższych na łamach *Przeglądu*, prócz twierdzenia Menabrea, ogłoszonego wcześniej (*Przegląd Techniczny*, 1922 str. 248 oraz 1920, str. 141). Praca obecna rozszerza pojęcie zmiennych r, uzupełnia przeto i podkreśla wyniki poprzednich.

Linjowość zależności R G, F stanowi cechę ustroju wzorowo sprężystego. Wypływa z niej bezpośrednio właściwa ustrojom wzorowo sprężystym postać pracy sprężystej, jako jednorodnej funkcji drugiego stopnia Q lub q. Nadto linjowość ta uniezależnia równania warunkowe od parametrów r. Są to więc wewnętrzne równania statyki ustroju wzorowo sprężystego, wiążące Q z P. Ustrój wzorowo sprężysty stały, unieruchomiony na podporach jest izostatyczny wewnętrznie, gdy $m = w$, w tym wypadku bowiem wszystkie jego siły wewnętrzne Q sprężyste wyznaczą się z równań statyki w zależności od sił zewnętrznych, spełniając warunek podstawowy $\Sigma P\delta p - \delta H = 0$ niezależnie od przyrostów zmiennych. Drugi wypadek $w > m$ może być z góry wykluczony w myśl założenia o stałości ustroju, albowiem po wyznaczeniu wszystkich Q z m równań statyki i podstawieniu w równania pozostałe otrzymamy $w - m$ zależności wiążących siły zewnętrzne, co świadczyłoby o *$w-m$-krotnej* hypostatyczności, czyli chwiejności ustroju, sprzecznej z założeniem.

Zostaje przeto jeszcze wypadek $w < m$—niewystarczalności równań statyki, wypadek *$m-w$-krotnej* hyperstatyczności wewnętrznej ustroju wzorowo sprężystego. Równania statyki dają tu jeno w sił sprężystych Q_i izostatycznych w postaci funkcji linjowych sił zewnętrznych P_k i pozostałych $m-w$ hyperstatycznych sił sprężystych Q_h. Podstawiwszy te wartości w $F(Q,q) = 0$ wyznaczymy z tych m zależności wszystkie posunięcia q w postaci funkcji linjowych P_k, Q_h. Te wartości, podstawione w zależności $G(q, r) = 0$ przekształcą je w m zależności $M(P_k, Q_h, r) = 0$, wiążących w parametrów r z siłami P_k i Q_h. Rugując z nich wszystkie Q_h otrzymamy w zależności, z których wyznaczymy wszystkie r w postaci funkcji linjowych sił zewnętrznych P_k, i po podstawieniu w zależności $R(p, r) = 0$ otrzymamy wszystkie p_k w postaci funkcji linjowych sił zewnętrznych. Warunek podstawowy w układzie zmiennych niezależnych P_k, Q_h rozpadnie się na dwa układy równań warunkowych:

$$U_j = \sum_{k=1}^{n} P_k \frac{\partial p_k}{\partial P_j} - \frac{\partial H}{\partial P_j} = 0,$$

$$U_h = -\frac{\partial H}{\partial Q_h} = -\sum_{i=1}^{m} Q_i \frac{\partial q_i}{\partial Q_h} = 0$$

Drugi układ wyraża *twierdzenie Menabrea*: *pochodna pracy sprężystej względem hyperstatycznej siły sprężystej ma wartość zerową dla ustroju wzorowo sprężystego.*

Pierwszy układ wyraża drugie *twierdzenie Castigliano*, z łatwością można bowiem dostrzec, iż, wobec linjowości p_k względem P i jednorodności pracy sprężystej jako funkcji P_k Q_h pochodna p_k względem P_j ma stałą wartość równą wartości pochodnej p_j względem P_k, a przeto na mocy twierdzenia *Euler'a* o funkcjach jednorodnych będziemy mieli kolejno:

$$\sum_{k=1}^{n} P_k \frac{\partial p_k}{\partial p_j} = \sum_{k=1}^{n} P_k \frac{\partial p_j}{\partial P_k} = p_j, \quad \text{a zatem} \frac{\partial H}{\partial P_j} = p_j$$

Pochodna pracy sprężystej względem niezależnej siły zewnętrznej daje posunięcie tej siły dla ustroju wzorowo sprężystego. Stąd prosty sposób wyznaczania warunków dodatkowych dla sił zewnętrznych, jakim mają podlegać w wypadku częściowego uniemożliwienia swobodnego posuwania się punktu uczepienia siły zewnętrznej, gdy ten punkt spotyka po drodze zaporę, ograniczającą p_j do pewnej danej wartości. Gdy $p_j = 0$, siła P_j stanowi *odpór hyperstatyczny*—stąd druga część twierdzenia Menabrea: *Pochodna pracy sprężystej względem hyperstatycznego odporu, przynależnego podporze niesprężystej ma wartość zerową dla ustroju wzorowo sprężystego.*

Podpory sprężyste nie wymagają swoistych rozważań: wystarczy uzupełnić ustrój odpowiednio dobranem ogniwem sprężystem, opartem na podporze niesprężystej. Wypływa to wprost z samej postaci wyrazów — $Q\delta q$ przyrostu δH.

W najprostszym ustroju *przegubowo prętowym,* podpartym i obciążonym na węzłach—rolę parametrów, a zarazem i posunięć p — grają składowe u, v, w posunięć osi przegubów, rolę sił P — składowe X, Y, Z sił działających na węzłach, rolę sił sprężystych Q — osiowe siły prętów, powiązane z posunięciami q linjowemi zależnościami $q = Ql : EF$. Zależności $G(q, r) = 0$ występują tu w postaci nielinjowej:

$$lq + {}^1/_2\, q^2 = (x-x')(u-u') + (y-y')(v-v') + (z-z')(w-w') +$$
$$+ {}^1/_2\,[(u-u')^2 + (v-v')^2 + (w-w')^2],$$

mimo to jednak ustrój może być w przybliżeniu rozpatrywany jako wzorowo sprężysty, albowiem z tej zależności otrzymamy:

$$lq = (x-x')(u-u') + (y-y')(v-v') + (z-z')(w-w')$$

po odrzuceniu wyższych potęg posunięć, zupełnie zresztą dopuszczalnem prawie dla wszystkich ustrojów, stosowanych w budownictwie.

Rozważania powyższe stanowią ścisły dowód wyżej podanych twierdzeń, mogą być nadto dostosowane do wyznaczania warunków równowagi ciał sprężystych; wykracza to jednak poza ramy zakreślone. Pomijam tu również badanie wypadków wyjątkowych, gdy jakobiany zależności wyżej wymienionych mają wartości zerowe.