wywodów da się zastosować z pożytkiem w jego zakładzie, w zależności od rodzaju produkcji, różnorodności jej i wielkości przedsiębiorstwa i o ile omówione metody mogą w danym wypadku być uproszczone bez większej szkody dla sprawy.

Często trudno mu będzie, dla braku czasu lub braku doświadczenia, rozstrzygnąć tę dość zawiłą sprawę samemu. Wtedy powinien poradzić się doświadczonego fachowca i na zasadzie jego opinji powziąć ostateczną decyzję oraz opracować we wszystkich szczegółach odpowiednią metodę kalkulacji, lub powierzyć tę robotę siłom fachowym.

Podkreślić należy jednak wyraźnie, streszczając wszystkie powyższe wywody, że dokładna kalkulacja ma znaczenie nietylko *bezpośrednie*, dając przedsiębiorcy możność naznaczania odpowiednich cen sprzedażnych na zasadzie dokładnej znajomości *rzeczywistych* a nie tylko urojonych kosztów własnych i pozwalając mu brać wyłącznie zamówienia korzystne, a inne zostawić swej konkurencji źle kalkulującej. *Pośredni* wpływ dobrej kalkulacji jest bodaj jeszcze ważniejszy, bo pozwala mu lepiej i dokładniej ocenić różne czynniki, od których zależy powodzenie firmy, chroni go od niemiłych niespodzianek przy układaniu rocznego bilansu, daje mu możność ciągłej kontroli wszystkich kosztów, prowadzącej z natury rzeczy do zmniejszenia ich z biegiem czasu, i do wyrobienia poczucia odpowiedzialności każdego naczelnika oddziału przez kontrolę kosztów podwładnego mu biura albo warsztatu, wreszcie prowadzi naturalną drogą do ulepszeń technicznych.

Widzieliśmy natomiast, że zła, t. j. fałszywa albo niedostatecznie dokładna kalkulacja, sprowadza do fabryki same tylko niekorzystne zamówienia i prowadzi z konieczności do powolnego upadku przedsiębiorstwa.

*Zasada dobrej kalkulacji da się streścić w przykazaniu: nie obarczaj żadnego obstalunku kosztami, które z wykonaniem jego nie są związane.*

# TWIERDZENIA O PRACY SPRĘŻYSTEJ.

Napisał **Leon Karasiński.**

*I. Wzory zasadnicze.* Weźmy pod uwagę ciało lub układ sprężysty, odkształcony pod jarzmem $m$ sił zewnętrznych i odporów $P_k$. Oznaczmy przez $p_k$ rzut przesunięcia punktu uczepienia siły $P_k$ na jej oś działania, przez $\Pi$ odpowiednią pracę sprężystą, wyznaczoną w zależności od $n$ sił wewnętrznych $Q_i$ oraz odpowiednich rzutów ich przesunięć względnych $q_i$. W ogólnym wypadku istnieje $n$ równań $f_i(q, Q)=0$, zależnych od własności sprężystych poszczególnych ogniw układu, a nadto $s$ równań $\varphi_u(p, q)=0$, wyrażających warunki geometryczne więzów lub właściwości cynematyczne zespołu. Równania $\varphi$ uzależniają $s$ przesunięć $t_u$ od pozostałych $w=m+n-s$ przesunięć niezależnych $r_v$.

Niech będzie $U=\Sigma Pp-\Pi$. Warunek równowagi sprężystej zespołu, oparty na zasadzie prac możliwych wyrazi się wzorem $\delta U=\Sigma P\delta q-\delta\Pi=\Sigma P\delta p-\Sigma Q\delta q=0$, ponieważ niewątpliwie $\delta\Pi=\Sigma Q\delta q$, co zresztą wypływa bezpośrednio z tej samej zasady. W układzie zmiennych niezależnych $r_u$ pierwotny warunek $\delta U=0$ rozpada się na $w$ równań warunkowych:

$$U_v=\frac{\partial U}{\partial r_v}=\sum_{k=1}^{m}P_k\frac{\partial p_k}{\partial r_v}-\frac{\partial\Pi}{\partial r_v}=\sum_{k=1}^{m}P_k\frac{\partial p_k}{\partial r_v}-\sum_{i=1}^{n}Q_i\frac{\partial q_i}{\partial r_v}=0,$$

$$\frac{\partial\Pi}{\partial r_v}=\sum_{i=1}^{n}Q_i\frac{\partial q_i}{\partial r_v}\quad\ldots\ldots\quad(1)$$

o ile wszystkie pochodne i siły wewnętrzne tego wzoru mają wartości określone. To zastrzeżenie wymaga spełnienia następujących warunków:

1⁰ (Warunki $A$) funkcje $\varphi$ oraz ich pochodne $\frac{\partial\varphi}{\partial t}$ są ciągłe, nadto wyznacznik funkcyjny $\Phi=\frac{\varphi_1\varphi_2\ldots\varphi_s}{t_1t_2\ldots t_s}\neq 0$.

2⁰ (Warunki $B$) funkcje $f$ i pochodne $\frac{\partial f}{\partial Q}$ są ciągłe, a jakobian t. j. wyznacznik funkcyjny $F=\frac{f_1f_2\ldots f_n}{Q_1Q_2\ldots Q_n}\neq 0$. Równania powyższe stanowią uogólnienie pierwszego twierdzenia *Castigliano*.

Można z nich wyznaczyć wszystkie przesunięcia $r_v$ a następnie $p, q, Q$ w funkcji sił $P$ niezależnych, wymaga to jednak spełnienia warunków $A$, $B$, a nadto funkcje $U_v$ oraz ich pochodne:

$$\frac{\partial U_v}{\partial r_u}=\sum_{k=1}^{m}\left[\frac{\partial P_k}{\partial r_u}\frac{\partial p_k}{\partial r_v}+P_k\frac{\partial^2 p_k}{\partial r_u\partial r_v}\right]-\frac{\partial^2\Pi}{\partial r_u\partial r_v}=$$

$$\sum_{k=1}^{m}\left[\frac{\partial P_k}{\partial r_u}\frac{\partial p_k}{\partial r_v}+P_k\frac{\partial^2 p_k}{\partial r_u\partial r_v}\right]-\sum_{i=1}^{m}\left[\frac{\partial Q_i}{\partial r_u}\frac{\partial q_i}{\partial r_v}+Q_i\frac{\partial^2 q_i}{\partial r_u\partial r}\right].$$

winny czynić zadość wymogom ciągłości, a wyznacznik funkcyjny $J=\frac{U_1U_2\ldots U_w}{r_1r_2\ldots r_w}$ różnić się od zera (warunki $C$). W ogólnym wypadku trzeba liczyć się z możliwością istnienia $P$ zależnych od $r$, stąd konieczność zachowania $\frac{\partial P}{\partial r}$ w powyższym wzorze. Nadto uwzględnić należy równania statyki oraz swoiste zależności pomiędzy siłami zewnętrznemi; wyodrębnijmy przeto $\omega$ sił $P_\mu$ niezależnych od pozostałych.

Będzie to nowy układ zmiennych $P_\mu$ i zasadniczy warunek $\delta U=0$ rozpadnie się na $\omega$ równań warunkowych:

$$\frac{\partial U}{\partial P_\mu}=\sum_{k=1}^{m}P_\mu\frac{\partial p_k}{\partial P_\mu}-\frac{\partial\Pi}{\partial P_\mu}=\sum_{k=1}^{m}P_k\frac{\partial\Pi}{\partial P_\mu}-\sum_{i=1}^{n}Q_i\frac{\partial q_i}{\partial P_\mu}=0,$$

$$\frac{\partial\Pi}{\partial P_\mu}=\sum_{i=1}Q_i\frac{\partial q_i}{\partial P_\mu}\quad\ldots\ldots\quad(2)$$

o ile będą spełnione warunki $A$, $B$, $C$.

Mnożąc równania (1) przez $r_v$, lub (2) przez $P_\mu$ otrzymamy po dodaniu:

$$\sum_{k=1}^{m}P_k\sum_{v=1}^{w}\frac{\partial p_k}{\partial r_v}r_v=\sum_{i=1}^{n}Q_i\sum_{v=1}^{w}\frac{\partial q_i}{\partial r_v}r_v=\sum_{v=1}^{w}\frac{\partial\Pi}{\partial r_v}r_v\ .\quad(3)$$

$$\sum_{k=1}^{m}P_k\sum_{\mu=1}^{\omega}\frac{\partial p_k}{\partial P_\mu}P_\mu=\sum_{i=1}^{n}Q_i\sum_{\mu=1}^{\omega}\frac{\partial q_i}{\partial P_\mu}P_\mu=\sum_{\mu=1}^{\omega}\frac{\partial\Pi}{\partial P_\mu}P_\mu\ .\quad(4)$$

pierwszy wzór wymaga spełnienia warunków $A$, $B$, drugi — $A$, $B$, $C$, jego więc zakres stosowalności jest znacznie szczuplejszy. Wszystkie powyżej podane wzory wyrażają ogólne twierdzenia o pracy sprężystej. Zawodzą w tak zwanym „wypadku wyjątkowym", kiedy warunki $A$, $B$ nie są spełnione. W pozostałych „zwykłych" wypadkach stosowane być mogą o ile równowaga sprężysta jest stateczna.

Wyznaczamy:

$$\delta^2 U=\Sigma P\delta^2 p-\delta^2\Pi=\Sigma P\delta^2 p-\Sigma\delta Q\delta q-\Sigma Q\delta^2 q.$$

Równowaga jest *stateczna*, o ile przy spełnieniu warunków $A$, $B$, $C$ przyrost $\delta^2 U$ jest stale ujemny dla wszelkich warjacyjnych przyrostów zmiennych niezależnych, *niestateczna*, gdy przyrost $\delta^2 U$ jest stale dodatni lub niewyraźnego znaku, wreszcie równowaga sprężysta jest *wątpliwa*, gdy $\delta^2 U=0$, lub gdy choć jeden z warunków $C$ nie jest spełniony. Z łatwością można udowodnić, że $\delta^2 U$ jest stale ujemne, o ile spełnia się następujący szereg nierówności:

$$D_1 = \frac{U_1}{x_1} < 0, \; D_2 = \frac{U_1 U_2}{[x_1 x_2]} > 0,$$

$$D_3 = \frac{U_1 U_2 U_3}{x_1 x_2 x_3} < 0 \ldots\ldots D_j = (-1)^j \frac{U_1 U_2 U_3 \ldots\ldots U_j}{x_1 x_2 x_3 \ldots\ldots x_j} > 0.$$

W jakobianach tego szeregu przez $x$ oznaczono zmienne niezależne $r_v$ lub $P_\mu$, przez $U_i$ pochodne wzorów (1) lub (2), przez $j$ odpowiednio $w$ lub $\omega$. Przy wyznaczaniu drugich pochodnych jakobianów $P_k$ należy uważać jako stałe. Cechą równowagi wątpliwej będzie $D_j = 0$, istnieje przeto osobliwy wypadek równowagi wątpliwej, gdy warunki $A$, $B$ są spełnione i przyrost $\delta^2 U$ jest stale ujemny, lecz nie spełniają się warunki $C$. Zachodzi to wtedy, gdy choćby jedna z pochodnych $\frac{\partial P}{\partial r}$ nie jest równa zeru, wtedy bowiem $D_j$ różni się od $J$. Natomiast przy zerowych wartościach wszystkich pochodnych $\frac{\partial P}{\partial r}$ oba jakobiany są tożsamościowe, dają więc jednakowe wartości krytyczne obciążenia zewnętrznego, stanowiące o równowadze wątpliwej. W pewnych wypadkach zachodzi potrzeba zbadania wyższych przyrostów $\delta^n U$, nie nastręcza to jednak żadnych trudności: o równowadze statecznej wyrokuje zawsze najniższy różny od zera i stale ujemny parzysty przyrost $\delta^{2k} U$.

*II. Wzory pochodne. A. Założenie pierwsze: funkcje $\varphi$ są linjowe* i $\Phi \neq 0$. Zatem warunki $A$ są spełnione i wszystkie przesunięcia $p, q$ wyrażą się w linjowych funkcjach $r_v$. Stąd bezpośrednio, na mocy wzoru Eulera o funkcjach jednorodnych, otrzymamy z (3):

$$\sum_{k=1}^{m} P_k p_k = \sum_{i=1}^{n} Q_i q_i = \sum_{v=1}^{w} \frac{\partial \Pi}{\partial r_v} r_v \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

wzór, wyrażający uogólnienie twierdzenia *Clapeyrona*. Z łatwością udowodnimy również, przez porównanie (5) z (3), że wzór powyższy słuszny jest tylko dla funkcji $\varphi$ linjowych.

Chcąc z kolei otrzymać wzór następny, bierzemy pod uwagę „pokrewny" układ $m$ sił i odporów $P_k'$, czyniący zadość warunkom następującym: każde dwie siły $P_k$ i $P_k'$ winny być równoległe, mieć ten sam punkt zaczepienia, natomiast mogą się różnić zwrotem lub wartością. Oznaczmy odpowiednio przez $p_k'$, $q_i'$ nowe wartości przesunięć. Wobec tożsamości osi działania i punktów zaczepienia sił obu układów pokrewnych równania $\varphi$ nie zmienią swego kształtu, a przeto ze względu na linjowość $\varphi$ będziemy mieli:

$$\frac{\partial p_k'}{\partial r_v'} = \frac{\partial p_k}{\partial r_v}, \quad \frac{\partial q_i'}{\partial r_v'} = \frac{\partial q_i}{\partial r_v}$$

przy wszelkich wartościach wskaźników. Pomnóżmy równania (1) odpowiednio przez $r_v'$. Po dodaniu i uwzględnieniu tylko co wyżej otrzymanych zależności, będziemy mieli:

$$\sum_{k=1}^{m} P_k p_k' = \sum_{i=1}^{n} Q_i q_i' = \sum_{v=1}^{w} \frac{\partial \Pi}{\partial r_v} r_v' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

wzór, wyrażający uogólnione twierdzenie *Mohra*. Wzory (5), (6) stosują się tylko w wypadku $\varphi$ linjowych i nie zależą od kształtu $f$. Wymagają spełnienia warunków $A$, $B$, zawodzą przeto w wypadku „wyjątkowym".

*B. Założenie drugie: funkcje $\varphi, f$ są linjowe, nadto* $\Phi \neq 0$, $F \neq 0$. Wobec spełnienia warunków $A$ i $B$ wyznaczamy z $\varphi, f$ przesunięcia $p$, $q$ w postaci funkcji linjowych $r_v$ i całkujemy ostatnie równania (1). W wyniku otrzymamy $\Pi$ w postaci jednorodnej funkcji drugiego stopnia zmiennych $r_v$, z natury rzeczy stale dodatniej. Brak tej koniecznej cechy świadczyłby niezbicie o niewłaściwym doborze funkcji $f$, wyrażających sprężyste własności ogniw układu. Wyłączmy go z góry. Tego rodzaju funkcja $\Pi$ stale dodatnia stanowi cechę ciał lub układów *wzorowo sprężystych*. Stosując do niej twierdzenie Eulera o funkcjach jednorodnych otrzymamy ze wzoru (5) wzór *Clapeyrona*:

$$\sum_{k=1}^{m} P_k p_k = \sum_{i=1}^{n} Q_i q_i = 2\Pi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Z kolei stosując dwukrotnie wzór szósty do dwuch pokrewnych układów sił $P_k$ i $P_k'$ otrzymamy, oprócz (6) dodatkowo:

$$\sum_{k=1}^{m} P_k' p_k = \sum_{i=1}^{n} Q_i' q_i = \sum_{v=1}^{w} \frac{\partial \Pi'}{\partial r_v'} r_v.$$

Z łatwością możemy udowodnić, że skrajne prawe wyrazy obu tych wzorów są równe, ponieważ $\Pi$ i $\Pi'$ wyznaczą się całkowaniem równań (1) w tożsamościowych funkcjach zmiennych $r_v$ i $r_v'$. W ten sposób mamy wzór:

$$\sum_{k=1}^{m} P_k p_k' = \sum_{i=1}^{n} Q_i q_i' = \sum_{k=1}^{m} P_k' p_k = \sum_{i=1}^{n} Q_i' q_i \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

wyrażający uogólnione twierdzenie *Betti*, czyli *zasadę wzajemności*.

Wobec poczynionych założeń $\delta^2 p = \delta^2 q = 0$, a przeto $\delta^2 U = -\Sigma \delta Q \delta q = -\delta^2 \Pi$. Zważmy, że $\delta^2 \Pi$ otrzymać można wprost zmieniając zmienne funkcji $\Pi$ na $\partial r_v$ inaczej mówiąc funkcje $\Pi$ i $\delta^2 \Pi$ mają tożsamościową budowę w stosunku do odpowiednich zmiennych $r_v$ i $\partial r_v$, to jest te same stałe spółczynniki u zmiennych. Wypływa to wprost z różniczkowania. Funkcja $\Pi$ jest stale dodatnia, zatem i $\delta^2 \Pi$ jest stale dodatnie, a $\delta^2 U$ — stale ujemne. Równowaga jest stateczna, zatem $D_j \neq 0$. Może zachodzić jedynie odosobniony wypadek równowagi wątpliwej gdy $J = 0$, a więc gdy choćby jedna pochodna $\frac{\partial P}{\partial r} \neq 0$. W innych wypadkach, gdy wszystkie $\frac{\partial P}{\partial r} = 0$, jakobian $J = D_j \neq 0$, można będzie więc wyznaczyć wszystkie $r_v, p, q, Q$ w funkcjach linjowych $P_\mu$. Rzut okiem na wzory (3) (7) wystarczy, aby dostrzec, że to istotnie będą funkcje linjowe.

Przeróżniczkujmy (7) a otrzymamy:

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{\partial P_k}{\partial P_\mu} p_k + \sum_{k=1}^{m} P_k \frac{\partial p_k}{\partial P_\mu} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial Q_i}{\partial P_\mu} q_i + \sum_{i=1}^{n} Q_i \frac{\partial q_i}{\partial P_\mu} = 2 \frac{\partial \Pi}{\partial P_\mu}$$

skąd, po odjęciu (2) dostaniemy wzór:

$$\sum_{k=1}^{m} p_k \frac{\partial P_k}{\partial P_\mu} = \sum_{i=1}^{n} q_i \frac{\partial Q_i}{\partial P_\mu} = \frac{\partial \Pi}{\partial P_\mu} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

wyrażający uogólnione drugie twierdzenie *Castigliano*. W roczniku 1020 *Przeglądu*, na str. 141 ogłosiłem ścisły dowód twierdzenia *Menabrea* czyli *zasady najmniejszej pracy*, oparty na powyższem twierdzeniu.

# W SPRAWIE WYKONANIA SZWU PODŁUŻNEGO
## PRZY WALCZAKACH KOTŁÓW SYSTEMU GARBEGO

List prof. E. Hahna, zamieszczony w № 25 „*Przeglądu Technicznego*" zniewala mnie do uwag następujących:

P. E. Hahn przyjmuje, niezgodnie z rzeczywistością, że stosunek grubości nakładki w części grubszej do grubości w części cieńszej wynosi $n = 2:1$, gdy w rzeczywistości jest tylko $n = 1{,}3$ do $1{,}6$ — i w związku z tem założeniem oraz z dowolnie przyjętym przez siebie ramieniem pary sił otrzymuje sumę obciążeń nakładki, której niemożliwość rzuca się w oczy.

Niewątpliwie bliższym rzeczywistości jest p. inż. Z. Klębowski, który sprawę momentu gnącego przy niesymetrycznym kształcie nakładki poruszył w rzeczowym artykule p. t. „Połączenia blach różnych grubości w walczakach kotłów parowych", ogłoszonym w № 13 str. 79 „*Przegl. Techn.*" Przy konkretnych założeniach, że $D = 1500\ mm$, $p = 12$ atm, grubość nakładki zewnętrznej — 12 i 18 $mm$, grubość zaś ścianki kotła $= 17\ mm$, p. Klębowski otrzymuje teorytycznie możliwą wielkość momentu gnącego $Mg_1 = 203\ kgcm$, gdy według p. Hahna byłoby $Mg_1 = 540\ kgcm$, czyli 2,65 razy więcej! P. Klębowski zaznacza jednak zupełnie słusznie, że wyliczony przezeń „moment gnący jest w znacznej mierze zrównoważony przez moment