Wątpliwa równowaga sprężysta.

Nota L. **Karasińskiego**, przyjęta na posiedzeniu Akademji Francuskiej dnia 11 lipca 1921. (Comptes Rendus. Tome 173. № 3, 18/VI 1921).

Ciało uległo odkształceniu sprężystemu pod jarzmem sił P, zewnętrznych. Niech Π oznacza odpowiednią pracę sprężystą, p—rzut przesunięcia punktu uczepienia siły P na jej oś działania, q—składową przesunięcia jakiegokolwiek punktu tego ciała względem osi dowolnego układu spółrzędnych.

Wyraźmy q wzorem $q = \Sigma a_i f_i$, w którym n funkcji f_i spółrzędnych pierwotnych, nieodkształconych punktu rozpatrywanego—powinno czynić zadość warunkom geometrycznym podpór, lub więzów zewnętrznych, a n niewiadomych parametrów a_i statycznych—należy wyznaczyć w zależności od sił P tak, aby przesunięcia p, praca Π i funkcja: $U = \Sigma Pp - \Pi$—daly się wyznaczyć w zależności od a_i.

Warunek równowagi:

$$\delta U = \Sigma \frac{\partial U}{\partial a_i} \delta a_i = 0,$$

oparty na zasadzie prac możliwych, rozpada się na n równań $\frac{\partial U}{\partial a_i} = 0$. Z tych równań można wyznaczyć wszystkie wartości a_i w zależności od sił P, o ile pochodne $\frac{\partial^2 U}{\partial a_i \, \partial a_k}$ nie są nieskończone lub nieoznaczone, a wyznacznik

$$J = \frac{\frac{\partial U}{\partial a_1}, \frac{\partial U}{\partial a_2}, \dots \frac{\partial U}{\partial a_n}}{a_1, \quad a_2, \dots \quad a_n}$$

nie jest równy zeru.

Oznaczmy $\beta_i = \delta a_i$, $2\Delta = \delta^2 U$ i weźmy pod uwagę układ n równań:

$$\frac{\partial \Delta}{\partial \beta_i} = \frac{\partial^2 U}{\partial a_1 \partial a_i} \beta_1 + \frac{\partial^2 U}{\partial a_2 \partial a_i} \beta_2 + \dots + \frac{\partial^2 U}{\partial a_n \partial a_i} \beta_n = 0.$$

Ten układ daje jedyne wartości pierwiastków $\beta_i = 0$, gdy $J \neq 0$, a przeto wyznaczone wyżej wartości dla a_i nie mogą dać wszystkich wartości pochodnych $\frac{\partial \Delta}{\partial \beta_i}$ równych zeru. Stąd prosty wniosek, że i $\Delta \neq 0$ [1]).

Równowaga sprężysta ciała będzie *stateczna*, gdy $\Delta < 0$, dla wszelkich dowolnych wartości β_i, *niestateczna* gdy $\Delta > 0$, lub niewyraźnego znaku. Ten ostatni wypadek zachodzi zawsze, ilekroć istnieje układ szczególnych wartości β_{i0}, dający $\Delta_0 = 0$ przy $J \neq 0$, wtedy bowiem rozwinięcie

$$\delta \Delta_0 = \Delta_0 \pm \Sigma h_i \frac{\partial \Delta}{\partial \beta_{i0}} + \dots$$

zmienia znak wraz z h_i, przechodząc przez zero dla wartości $\beta_{i0} \pm h_i$ nieskończenie bliskich.

Równowaga niestateczna nie ma żadnej wartości praktycznej. Niekiedy zachodzi jeszcze wypadek równowagi *wątpliwej* przy nieskończonej lub nieoznaczonej wartości jednej z pochodnych $\frac{\partial^2 U}{\partial a_i \partial a_k}$, lub też zerowej wartości wyznacznika J.

Ten osobliwy stan równowagi odpowiada tak zwanemu krytycznemu układowi obciążeń zewnętrznych (wyboczenie, chwiejne ustroje przegubowo prętowe i t. p.). Równowaga wątpliwa zaznacza się wartością nieskończoną, lub nieoznaczoną Δ, pochodzącą od $\frac{\partial^2 U}{\partial a_i \partial a_k}$, lub też wartością $\Delta = 0$, wypływającą z równania $J = 0$, w tym bowiem wypadku podany wyżej układ równań $\frac{\partial \Delta}{\partial \beta_i} = 0$ może mieć w pewnym szczupłym obszarze pierwiastki β_i różne od zera. (Szersze rozwinięcie i zastosowania patrz: L. Karasiński „Wytrzymałość Tworzyw").

[1]) To wypływa wprost z twierdzenia Euler'a o funkcjach jednorodnych.

Painlévé o Einsteinie.

Na posiedzeniu paryskiej Akademji Umiejętności w dn. 24 z. m. słuchano z wielkiem zajęciem Painlévé'go, rozwijającego swe poglądy na teorje Einsteina i porównywującego je z mechaniką klasyczną. Zdaniem uczonego francuskiego, pomysły Einsteina doprowadzają do wzorów, wiążących liczne fakty,—i wzory te, może z niektóremi zmianami, zleją się z pozytywną umiejętnością przyszłości, przyczem wszakże nie utrzymają się zasady i wywody filozoficzne, proklamowane przez Einsteina, zaś więcej jeszcze przez jego uczniów, jako podstawa lub wynik teorji.

Krytyka więc Painlévé'go nie ma na celu zniszczenia dzieła Einsteina, lecz dąży do uwydatnienia tego co jest pozytywne i co w niem zostało osiągnięte, aby to porównać z wynikami mechaniki Newtona. Niezbędnem jest w tym celu wyraźne oddzielenie nowych pomysłów teorji od osłaniających je, a często zaciemniających, komplikacji matematycznych.

Teorja, którą Einstein nazwał uogólnioną teorją względności, opiera się na zasadzie, że miary nasze konstatują tylko zgodności dwóch zjawisk, w pewnym punkcie przestrzeni i w pewnej chwili. Ale ta zgodność, skoro raz ma miejsce, utrzymuje się, jakikolwiek będzie nasz sposób odniesienia przestrzeni i czasu. Nawet jeżeli pomieszamy, w sposób jak najdowolniejszy, odniesienie przestrzeni i czasu, które Einstein i Minkowski uważają za nierozłączne, nadać będzie można prawom natury kształt, pozostający niezmienionym, jakiekolwiek przyjęto odniesienie.

Zasada ta jest dla Painlévé'go niezaprzeczalną oczywistością. Prawa natury wywodzić można z wzorów niezmiennych, które określają te prawa, z przybliżeniem dowolnego przekształcenia odniesienia przestrzeń-czas. Wzory te więc, w istocie swej, są niewystarczające do zupełnego określenia tych praw, gdyż nie pozwalałyby zrobić wyboru między dwoma prawami, któreby się wyrażały przez też same wzory, lecz w których mieszczące się ilości przedstawiałyby zupełnie różne miary.

Tak rozumiana zasada nie podlega wątpliwości, ale też nie można z niej nic wyciągnąć, bez dołączenia postulatów, które z niej wcale nie wynikają. Nie tak wszakże pojmuje ją wielu uczniów Einsteina. Przyjmują oni wyrażenie niepewne i niebezpieczne, mianowicie, że wszystkie sposoby odniesienia przestrzeni są równowarte, że niema osi uprzywilejowanych, że nauki Galileusza i Newtona, przypisujące pewnym osiom wyjątkowe własności, wynikające z ich pojęć o ruchu absolutnym, są tylko iluzjami, którym fakty zaprzeczają.

Wielu zwolenników Einsteina myśli i pisze tak, jakby sądzili, że zasada względności uogólnionej jest istotnie rozszerzeniem zasady względności ograniczonej, która tak się wyraża: czy przyjmiemy osie, uważane według Newtona jako absolutnie stałe, czy też osie ożywione względem tamtych ruchem prostolinijnym i jednostajnym, to prawa natury są ściśle też same dla obserwatora, unoszonego przez jeden lub drugi przyjęty system osi.

Wyraźniej rzec można, że dla dwóch obserwatorów, z których jeden należy do świata absolutnie stałego, w znaczeniu newtonowskiem, a drugi ożywiony jest ruchem prostolinijnym i jednostajnym, względem pierwszego, prawa te będą ściśle też same. W szczególności światło rozchodzić się będzie prostolinijnie, z tą samą prędkością we wszystkich kierunkach dla obu obserwatorów.

A jest to fakt fizyczny, pozytywny, zadziwiający, wyciągnięty z doświadczenia Michelson'a. Fakt ten wykazuje, że przy odniesieniu przestrzeni i czasu, jednakowem przez obu obserwatorów, ruch światła jest dla obu jednaki. Przeciwnie zasada względności uogólnionej, poprawnie wyrażona byłaby, prawdziwa, nawet gdyby doświadczenie Michelson'a dało było wynik odwrotny.

Jeżeli dwóch obserwatorów, z których każdy unoszony jest przez gwiazdę, do której się odnosi, ma jeden względem drugiego ruch nie będący prostem przesunięciem, prostolinijnem i jednostajnem i jeżeli ci dwaj obserwatorowie odnoszą jednakiemi metodami i określeniami przestrzeń i czas, to ich obserwacje wyrażą się różnemi wzorami. Jeden np. widzieć będzie, że element materjalny, bardzo oddalony od wszystkich