PRZEGLĄD TECHNICZNY

TYGODNIK POŚWIĘCONY SPRAWOM TECHNIKI I PRZEMYSŁU.

Tom XLVII. **Warszawa, dnia 3 czerwca 1909 r.** № 22.

BADANIA NAPRĘŻEŃ NORMALNYCH.

(Ciąg dalszy do str. 252 w № 21 r. b.).

9) Wyżej wspomnianą granicę otrzymujemy oczywiście, kładąc

$$R = 0$$

we wzorze (5), co daje

$$\frac{X\xi}{V} + \frac{Y\eta}{H} + \frac{1}{S} = 0\,, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (31)$$

równanie prostej, zwanej *linią obojętną* danego pola.

Z samego kształtu równania (31) wyciągamy

Wniosek XX. *Linia obojętna nie może przechodzić przez środek sprężystości danego pola.*

10) Linia obojętna przecina osie współrzędnych w punktach:

$$A\left(-\frac{V}{S\xi},\ 0\right), \qquad B\left(0,\ -\frac{H}{S\eta}\right),$$

z czego wypływa, że, jeśli naprzykład

$$\xi > 0, \qquad \eta > 0,$$

t. j. jeżeli punkt Q leży w pierwszym kącie, to linia obojętna przecina ujemną oś X-ów i ujemną oś Y-ów. Wogóle mamy:

Wniosek XXI. *Linia obojętna przecina boki kąta osi współrzędnych wierzchołkowo przeciwległego kątowi tychże osi, w którym leży środek naprężeń.*

11) Poprzedni wniosek traci zupełnie swą wartość wtedy, gdy środek naprężeń leży na jednej z głównych osi bezwładności.

Kładąc w równaniu (31)

$$\xi = 0,$$

lub też

$$\eta = 0,$$

otrzymujemy odpowiednio

$$\frac{Y\eta}{H} + \frac{1}{S} = 0\,, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (32)$$

lub też

$$\frac{X\xi}{V} + \frac{1}{S} = 0\,, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (33)$$

równania linii obojętnych dla tych wypadków.

A więc możemy wypowiedzieć:

Wniosek XXII. *Linia obojętna jest prostopadła do głównej osi bezwładności, gdy na tej osi leży środek naprężeń.*

Wniosek ten wypływa również bezpośrednio z wniosku (XVI), bo linia obojętna należy też do układu prostych (27).

12) Z samego kształtu wzoru (5) wypływa, że naprężenie, powstające w danym punkcie M danego pola S pod wpływem siły P, działającej na nasze pole w danym jego punkcie Q a prostopadłej do pola S, nie różni się od naprężenia, powstającego w Q pod wpływem tejże siły P, gdy ją zmusimy do działania na nasze pole w punkcie M. Stąd:

Wniosek XXIII. *Pomiędzy siłą zewnętrzną, prostopadłą do danego pola a działającą w danym środku naprężeń, z jednej, a naprężeniem, dzięki tej sile powstającem w danym punkcie, z drugiej strony—zachodzi wzajemność, polegająca na tem, że skoro zamienimy role owych punktów, naprężenie pozostanie bez zmiany.*

13) Wyobraźmy sobie płaszczyznę, przechodzącą przez środek sprężystości danego pola i przez kresę wyobrażającą daną siłę P. Oczywiście płaszczyzna ta będzie prostopadła do płaszczyzny danego pola. Nazwijmy ją *„płaszczyzną siły P“.*

Płaszczyzna siły przecina się z płaszczyzną

$$XOY$$

naszego pola S wzdłuż prostej

$$Y'\,Y',$$

na której, oczywiście, leży punkt

$$Q\,(\xi,\ \eta),$$

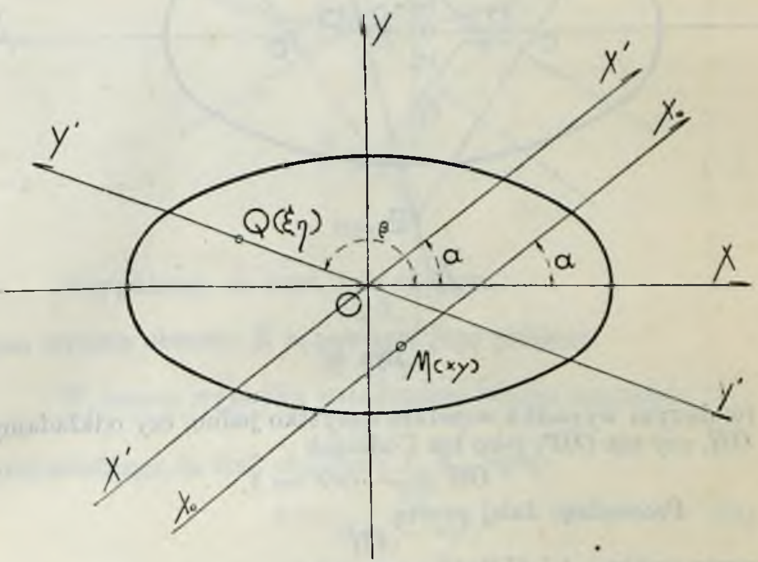
a którą *„osią siły P“* zwać będziemy.

Przez środek sprężystości naszego pola przeprowadzamy prostą

$$X'\,X',$$

należącą do układu prostych (27), t. j. równoległą do linii obojętnej

$$X_0\,X_0$$



Rys. 8.

naszego pola. Obie te proste tworzą z główną osią bezwładności OX naszego pola kąt

$$\alpha = \operatorname{arc\,tg}\left[\frac{dY}{dX}\right],$$

przyczem wartość pochodnej otrzymujemy różniczkując równanie (27) prostych układu (27) lub, co na jedno wychodzi, równanie linii obojętnej (31):

$$\frac{\xi}{V} + \frac{dY}{dX}\,\frac{\eta}{H} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (34)$$

Oznaczmy przez

$$\beta$$

kąt, jaki tworzy promień wodzący

$$OQ\,,$$

a co za tem idzie i prosta $Y'\,Y'$ z osią współrzędnych OX. Oczywiście mamy

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\eta}{\xi},$$

a przeto równanie (34) da nam:

$$H + \operatorname{tg}\alpha\,\operatorname{tg}\beta\;V = 0\,, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (35)$$

co dowodzi, że prosta $X'\,X'$ i oś siły P — to dwie sprzężone średnice elipsy bezwładności danego pola S. Stąd:

Wniosek XXIV. *Oś danej normalnej siły, działającej na dane pole i prosta równoległa do linii obojętnej, a przechodząca przez środek sprężystości tego pola, stanowią parę sprzężonych średnic elipsy bezwładności danego pola.*

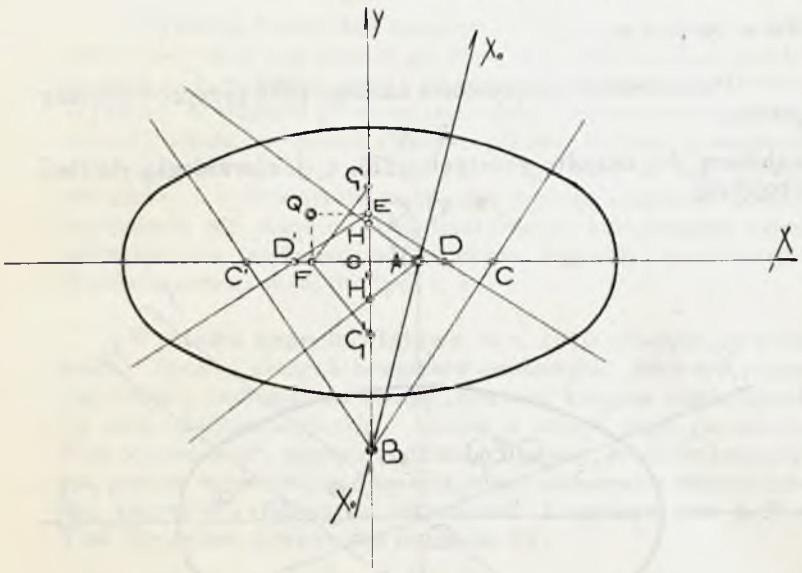
Stąd łatwy sposób budowania osi obojętnej, gdy mamy dany środek naprężeń, a co za tem idzie i oś siły P. Sposób ten podany był w końcu poprzedniego paragrafu wraz z dowodzeniem.

§ 3. Również odnalezienie środka naprężeń, przynależnego do danej linii obojętnej, nie nasuwa żadnych trudności, zważywszy, że prosta owa przecina osie współrzędnych w punktach:

$$OA = -\frac{V}{S\xi}, \qquad OB = -\frac{H}{S\eta} \quad \text{(rys. 9).}$$

Aby znaleźć naprzykład odciętą
ξ
środka naprężeń
$Q\ (\xi, \eta)$,
odkładamy na osi
OY
odcinek

$$OH = -OH' = \frac{V}{S}$$



Rys. 9.

(w danym wypadku zupełnie wszystko jedno, czy odkładamy OH, czy też OH') jako też i odcinek

$$OG = -OG' = 1.$$

Prowadząc dalej prostą
AH
przez punkty A i H (lub prostą
AH'
przez punkty A i H'), a następnie prostą
FG
(lub też prostą
FG'),
przechodzącą przez punkt G (lub G'), a prostopadłą do prostej AH (lub AH'), otrzymujemy z podobnych trójkątów:

$\Delta\ OFG \sim \Delta\ OAH$ (lub $\Delta\ OFG' \sim \Delta\ OAH'$)

proporcyę:

$-OF : OH = OG : OA$ (lub: $-OF : OH' = OG' : OA$),

skąd:

$$OF = -\frac{OH}{OA}\ OG = -\frac{V}{S\,.\,AO} = \xi.$$

W podobny sposób otrzymujemy rzędną
η
odkładając odcinki

$$OC = -OC' = \frac{H}{S}, \qquad OD = -OD' = 1,$$

na osi OX; niech prosta
BC (lub BC')
przechodzi przez punkty B i C (lub C'), a prosta
ED (lub ED')
niechaj przechodzi przez punkt D (lub D'), będąc prostopadłą do prostej BC (lub BC'). Z podobnych trójkątów

$\Delta\ OED \sim \Delta\ OCB$ (lub $\Delta\ OED' \sim \Delta\ OC'B$)

otrzymujemy zupełnie tak, jak poprzednio:

$$OE = -\frac{H}{S\,.\,OB} = \eta,$$

Część trzecia. Teorya analityczna rdzenia pola.

§ 1. Oznaczmy (rys. 10) przez
$X_0\,X_0$
linię obojętną danego pola
S,
pozostającego pod wpływem siły normalnej, działającej w pewnym jego punkcie, oraz przez
α
kąt nachylenia prostej $X_0\,X_0$ ku głównej osi bezwładności
OX
naszego pola.

Chcemy na mocy tych danych określić położenie środka naprężeń
$Q\ (\xi, \eta)$,
przynależnego do danej linii obojętnej.

Weźmy na danej linii obojętnej dowolny punkt
$M\ (x, y)$,
równanie prostej $X_0\,X_0$ przez ten punkt przechodzącej będzie:

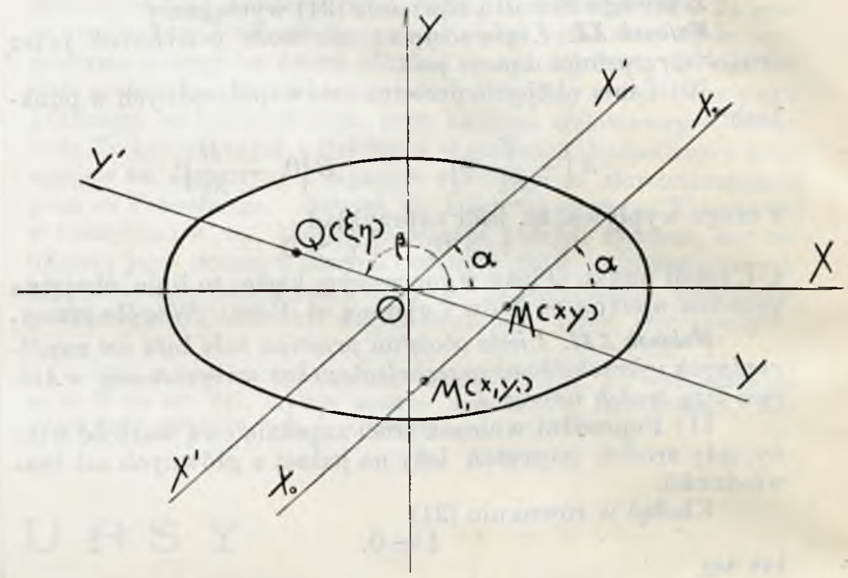
$$(Y - y) = m\,(X - x)\,. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (36)$$

czyli

$$Xm - Y + (y - mx) = 0, \quad . \quad . \quad . \quad (36)$$

gdzie

$$m = \operatorname{tg} \alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (37)$$



Rys. 10.

Równanie (36) różni się kształtem jedynie od równania

$$X\frac{\xi}{V} + Y\frac{\eta}{H} + \frac{1}{S} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (38)$$

danej linii obojętnej, a więc współczynniki obu tych równań czynić winny zadość równaniom:

$$\frac{m}{\dfrac{\xi}{V}} = \frac{-1}{\dfrac{\eta}{H}} = \frac{y - mx}{\dfrac{1}{S}}, \quad . \quad . \quad . \quad (39)$$

z których otrzymujemy wzory:

$$\xi = \frac{Vm}{S\,(y - xm)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (40)$$

$$\eta = \frac{-H}{S\,(y - xm)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (41)$$

określające położenie środka naprężeń, przynależnego do danej linii obojętnej.

Ponieważ pomiędzy współrzędnemi obranego punktu M i współrzędnemi jakiegokolwiek innego punktu
$M_1\,(x_1, y_1)$
leżącego również na danej osi obojętnej, zachodzi związek:

$$y_1 - mx_1 = y - mx,$$

przeto możemy wypowiedzieć następujące

Twierdzenie I. *Współrzędne środka naprężeń, przynależnego do danej linii obojętnej, mogą być wyrażone w funkcyi współrzędnych jakiegokolwiek punktu, leżącego na tej prostej, oraz współczynnika kątowego danej linii obojętnej.*

§ 2. Przeprowadźmy przez środek sprężystości danego pola dwie proste:
prostą
$X'\,X'$,
równoległą do danej linii obojętnej
$X_0\,X_0$,
oraz prostą
$Y'\,Y'$,
przechodzącą przez świeżo znaleziony środek naprężeń Q.

Kąt, jaki promień wodzący

$$OQ$$

(a co za tem idzie i prosta $Y' Y'$) tworzy z dodatnią osią OX, oznaczamy przez

$$\beta,$$

przyczem oczywiście:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\eta}{\xi}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (42)$$

a więc na mocy równań (39) będziemy mieli

$$H + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \; V = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (43)$$

co dowodzi, że proste $X' X'$ i $Y' Y'$ stanowią parę sprzężonych średnic centralnej elipsy bezwładności naszego pola.

Twierdzenie II. *Środek naprężeń, przynależny do danej linii obojętnej, leży na średnicy, sprzężonej ze średnicą centralnej elipsy bezwładności danego pola, równoległą do danej linii obojętnej.*

§ 3. Gdy dana linia obojętna jest równoległa do osi

$$OY,$$

wtedy, oczywiście, równanie (36) posiada kształt

$$X = x, \qquad (m = \infty) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (44)$$

i zamiast (38) mamy tu równania:

$$\frac{1}{\dfrac{\xi}{V}} = \frac{0}{\dfrac{\eta}{H}} = \frac{-x}{\dfrac{1}{S}}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (45)$$

skąd otrzymujemy bezpośrednio wzory:

$$\xi = -\frac{V}{Sx}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (46)$$

$$\eta = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (47)$$

określające położenie środka naprężeń dla danego poszczególnego wypadku, kiedy

$$m = \infty.$$

Wyniki powyższe (46), (47) można również otrzymać, kładąc we wzorach (40, (41):

$$m = \infty,$$

bowiem wtedy:

$$\xi = \left[\frac{Vm}{S\,(y - xm)}\right]_{m=\infty} = \left\{\frac{V}{S\left(\dfrac{y}{m} - x\right)}\right\}_{m=\infty} = -\frac{V}{Sx},$$

$$\eta = \left[\frac{-H}{S\,(y - xm)}\right]_{m=\infty} = 0,$$

a więc wzory (40), (41) nie tracą swej wartości i w danym wypadku, t. j. przy m nieskończenie wielkiem.

Teraz, kiedyśmy już dowiedli zupełnej ogólności wzorów (40), (41), przypuśćmy, że nieskończenie wielka ilość linii obojętnych przechodzi przez dany punkt

$$M\,(x, y).$$

Każdej z tych linii obojętnych, a raczej każdej poszczególnej wartości współczynnika m we wzorach (40) i (41), odpowiada pewien określony środek naprężeń; zespół tych wszystkich punktów tworzy miejsce geometryczne środków naprężeń, odpowiadających różnym wartościom kątowego współczynnika m.

Z łatwością znajdziemy równanie tego geometrycznego miejsca, rugując m z równań (40), (41). Tą drogą otrzymujemy równanie prostej

$$\frac{\xi x}{V} + \frac{\eta y}{H} + \frac{1}{S} = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (48)$$

tworzącej kąt

$$\gamma = \operatorname{arc\,tg}\left[-\frac{Hx}{Vy}\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (49)$$

z osią dodatnich X-ów.

Twierdzenie III. *Nieskończonej ilości linii obojętnych, przechodzących przez dany punkt pola, odpowiada nieskończona ilość środków naprężeń, tworzących linię prostą, czyli geometryczne miejsce środków naprężeń, odpowiadających różnym wartościom współczynnika kątowego poszczególnych linii obojętnych, przechodzących przez dany punkt.*

§ 4. Niech równanie

$$P\,(x, y) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (50)$$

wyznacza w układzie osi współrzędnych (rys. 11)

$$OX, \; OY,$$

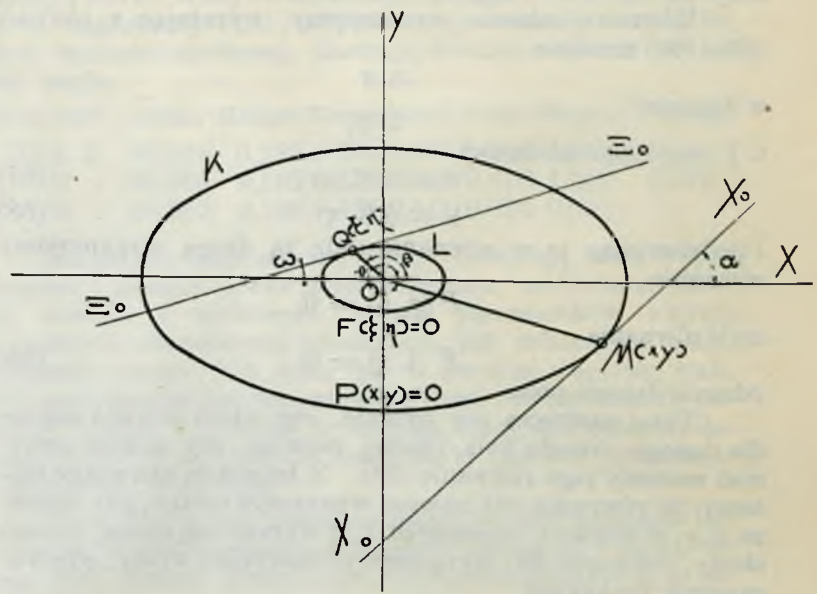
będących głównemi osiami bezwładności danego pola

$$S,$$

wypukłą krzywą

$$K,$$

ciągłą, bez punktów szczególnych, stanowiącą *obwód* naszego pola S.



Rys. 11.

Przypuśćmy, że dana linia obojętna

$$X_0 X_0$$

jest styczną obwodu K w pewnym jego punkcie

$$M\,(x, y).$$

W danym wypadku współrzędne środka naprężeń

$$Q\,(\xi, \eta),$$

przynależnego do linii obojętnej $X_0 X_0$, będą:

$$\xi = \frac{Vy'}{S\,(y - xy')}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (51)$$

$$\eta = -\frac{H}{S\,(y - xy')}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (52)$$

przyczem, oczywiście, tutaj współczynnik kątowy danej linii obojętnej

$$m = \operatorname{tg} \alpha = y' = \frac{dy}{dx}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (53)$$

określi się z równania

$$\frac{\partial P\,(x, y)}{\partial x} + y' \frac{\partial P\,(x, y)}{\partial y} = 0; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (54)$$

a więc ostatecznie będziemy mieli wzory:

$$\xi = -\frac{V}{S} \frac{\dfrac{\partial P(x, y)}{\partial x}}{\dfrac{\partial P(x, y)}{\partial y}} \frac{1}{\left(y + x \dfrac{\dfrac{\partial P\,(x, y)}{\partial x}}{\dfrac{\partial P\,(x, y)}{\partial y}}\right)}$$

czyli

$$\xi = -\frac{V}{S} \frac{\dfrac{\partial P\,(x, y)}{\partial x}}{x \dfrac{\partial P\,(x, y)}{\partial x} + y \dfrac{\partial P\,(x, y)}{\partial y}} \quad . \quad . \quad . \quad (55)$$

i zupełnie tak samo

$$\eta = -\frac{H}{S} \frac{\dfrac{\partial P\,(x, y)}{\partial y}}{x \dfrac{\partial P\,(x, y)}{\partial x} + y \dfrac{\partial P\,(x, y)}{\partial y}} \quad . \quad . \quad . \quad (56)$$

Rozpatrzmy teraz układ linii obojętnych, tworzących rój stycznych obwodu danego pola. Każdą z prostych tego układu w zupełności określają współrzędne

$$x, \; y$$

punktu styczności M, oraz współczynnik kątowy, t. j. wartość pochodnej

$$y' = -\frac{\dfrac{\partial P}{\partial x}}{\dfrac{\partial P}{\partial y}}$$

w tym punkcie; a do każdej linii obojętnej—stycznej obwodu przynależy pewien określony środek naprężeń. Geometrycznem miejscem wszystkich tych środków naprężeń będzie krzywa, *rdzeniem* danego pola zwana.

Równanie rdzenia wyznaczymy, wyrażając z równań (55) i (56) zmienne

$$x, y$$

w funkcyi

$$\xi, \eta,$$

t. j. znajdując zależności

$$x = \varphi(\xi, \eta), \quad \ldots \ldots (57)$$

$$y = \psi(\xi, \eta), \quad \ldots \ldots (58)$$

i podstawiając je w równanie (50); tą drogą otrzymujemy równanie

$$P(\varphi, \psi) = 0,$$

czyli równanie

$$F(\xi, \eta) = 0 \quad \ldots \ldots (59)$$

rdzenia danego pola.

Tutaj nastręcza się pytanie, czy rdzeń istnieje zawsze dla danego obwodu pola; inaczej mówiąc, czy zawsze otrzymać możemy jego równanie (59). Z łatwością zauważyć możemy, że równanie (59) zawsze wyznaczyć można, gdy zmienne x, y w funkcyi zmiennych ξ, η wyrazić się dadzą, innemi słowy, równanie (59) wyznaczyć można tylko wtedy, gdy wyznacznik funkcyjny

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x}, & \frac{\partial \xi}{\partial y} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x}, & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{vmatrix} \quad \ldots \ldots (60)$$

nie jest zerem w ogólności.

Na mocy wzorów (55) i 56) otrzymujemy, różniczkując częściowo po x i po y

$$J = \frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial x} =$$

$$= \frac{HV}{S^2} \frac{2\frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 P}{\partial y^2}\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)^2}{\left(x\frac{\partial P}{\partial x} + y\frac{\partial P}{\partial y}\right)^3}.$$

Pozatem mamy:

$$\frac{\partial P}{\partial x} + y'\frac{\partial P}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + y''\frac{\partial P}{\partial y} + 2y'\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} + y'^2\frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = 0,$$

skąd

$$y''\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)^3 = 2\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y}\frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 P}{\partial y^2}\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)^2,$$

a więc ostatecznie wyznacznik:

$$J = \frac{HV}{S^2}\, y'' \frac{\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)^3}{\left(x\frac{\partial P}{\partial x} + y\frac{\partial P}{\partial y}\right)^3} = \frac{HV}{S^2}\frac{y''}{(y - xy')^3} \quad . \; . \; (61)$$

Ponieważ w ogólności

$$y'' \neq 0,$$

ani też, co wypływa z określenia funkcyi P,

$$\frac{\partial P}{\partial y} \neq 0,$$

przeto rdzeń, przynależny do danego obwodu, istnieje zawsze.

Twierdzenie IV. *Układowi linii obojętnych, tworzących rój stycznych obwodu danego pola, zawsze odpowiada pewna ściśle określona równaniem (59) krzywa, tak zwany rdzeń danego pola, czyli geometryczne miejsce środków naprężeń, przynależnych do poszczególnych linii obojętnych — stycznych do obwodu danego pola.*

Wyznacznik funkcyjny J jest zerem tylko jedynie w tym poszczególnym wypadku, gdy stale

$$y'' = \frac{d^2 y}{dx^2} = 0,$$

wtedy bowiem oczywiście i

$$J = 0.$$

Jest to wypadek linii prostej

$$y = ax + b,$$

stanowiącej część obwodu danego pola; rdzeń, przynależny do takiego obwodu, redukuje się, jak wiadomo, do punktu pojedyńczego.

§ 5. Weźmy pod uwagę jakikolwiek punkt

$$Q(\xi, \eta)$$

rdzenia danego pola, przynależny do linii obojętnej — stycznej do obwodu danego pola, przechodzącej przez pewien ściśle określony punkt

$$M(x, y)$$

obwodu, *sprzężony* z punktem Q (lub przynależny do Q). Oznaczmy przez

$$\omega$$

kąt, jaki tworzy z osią dodatnich X-ów styczna rdzenia, przechodząca przez punkt Q; różniczkując (51) i (52), znajdziemy

$$d\xi = \frac{V\, yy''\, dx}{S\,(y - xy')^2}$$

$$d\eta = -\frac{H\, xy''\, dx}{S\,(y - xy')^2},$$

gdzie

$$y'' = \frac{d^2 y}{dx^2},$$

a stąd

$$\eta' = \frac{d\eta}{d\xi} = \operatorname{tg}\omega = -\frac{Hx}{Vy}. \quad \ldots \ldots (62).$$

Twierdzenie V. *Współczynnik kątowy stycznej rdzenia danego pola, przechodzącej przez dany środek naprężeń, jest funkcyą współrzędnych punktu sprzężonego.*

§ 6. Oznaczmy przez

$$\theta$$

kąt, jaki promień wodzący

$$OM$$

tworzy z osią dodatnich X-ów; na mocy równania (62) będziemy mieli

$$H + V \operatorname{tg}\omega \operatorname{tg}\theta = 0, \quad \ldots \ldots (63)$$

co dowodzi, że promień wodzący OM leży na średnicy elipsy centralnej naszego pola, sprzężonej ze średnicą, równoległą do stycznej rdzenia pola

Twierdzenie VI. *Styczna rdzenia pola, przechodząca przez dany środek naprężeń, jest równoległa do średnicy centralnej elipsy bezwładności danego pola, sprzężonej ze średnicą, przecinającą obwód tego pola w punkcie sprzężonym.*

§ 7. Dzieląc równania (51) i 52) będziemy mieli:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\alpha = -\frac{H\xi}{V\eta}, \quad \ldots \ldots (64)$$

co nam pozwala wypowiedzieć

Twierdzenie VII. *Współczynnik kątowy stycznej obwodu danego pola jest funkcyą współrzędnych środka naprężeń, przynależnego do danej stycznej.*

§ 8. Biorąc pod uwagę, że:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\eta}{\xi},$$

mamy z równania (64)

$$H + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta\, V = 0, \quad \ldots \ldots (65)$$

co daje:

Twierdzenie VIII. *Styczna obwodu jest równoległa do średnicy centralnej elipsy bezwładności danego pola, sprzężonej ze średnicą przechodzącą przez przynależny do danej stycznej środek naprężeń.*

§ 9. Równanie (63), porównane z (65), daje

$$\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}\omega \operatorname{tg}\theta,$$

skąd

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\omega} = \frac{\operatorname{tg}\theta}{\operatorname{tg}\beta}, \quad \ldots \ldots (66)$$

a zatem

Twierdzenie IX. *Współczynniki kątowe stycznych obwodu oraz rdzenia danego pola mają się do siebie, jak styczne kątów biegunowych punktów, przez które przechodzą owe styczne.*

(C. d. n.) *L. S. Karasiński.*