Prof. Leon Karasiński. 621.791.5:625.143

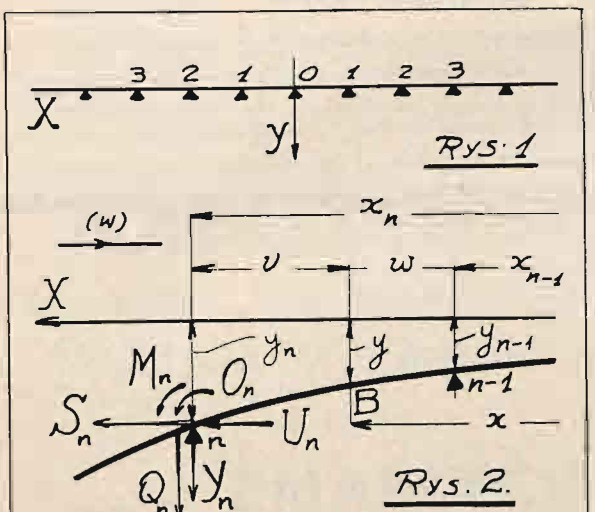
Płaskie odkształcenia szyny, jako belki, związanej z podporami sprężystymi, równoodległymi

Wracam do swych rozważań (J. B. 1937 str. 7) i, wzorem prac poprzednich, daję tu równoległe rozwinięcie, wtrąciwszy między szynę i podłoże — pośredniczące podkłady. To utrudnienie, wiodące do uciążliwszych wzorów, jest może zbędne przy obciążeniach pionowych ze względu na stosunkowo niewielkie różnice wyników. Staje się jednak koniecznym dla obciążeń płaskich ukośnych, prowadzi bowiem bliżej do istoty zjawisk.

Przedzieranie się przez gęstwiny wzorów zmusi mię nieraz do skrótów na rzecz domyślności. Nie będę się powtarzał w określeniach. Częściowo zmienię znakowanie.

1. W jednolite sprężyste podłoże włączam prosty ciąg równoodległych jednakowych podkładów o płaskich górnych ścianach, leżących w jednym poziomie tuż nad podłożem. Ciężar własny wgniecie te belki stałego przekroju nieco głębiej, tworząc płaską podstawę wązkich podpór sprężystych dla szyny — prostej belki niezmiennego przekroju — nieważkiej.

Jej podłużnej osi X poziomej (rys. 1) nadaję zwrot *(x)* — wlewo, osiom Y, Z — zwroty: *(y)* — wdół i *(z)* — naprzód.



Podłużna oś podkładu *zerowego*, równoległa do osi Z, przecina się z osią Y. Dalsze podkłady obustronne oznaczam bieżącymi liczbami, od tego zerowego począwszy. Ich osie podłużne leżą w tych samych odległościach poziomych, mają stały rozstaw h. W rzucie na oś X dają punkty podparcia — lewe i prawe w stosunku do zerowego.

Lewy punkt podparcia n ma więc odciętą nh, prawy — odciętą: — nh, przy zerowych rzędnych. Przęsłem — nazywam odcinek belki pomiędzy sąsiednimi punktami podparcia.

Pod jarzmem ciężaru własnego szyny, płaskiego obciążenia, jednostajnego nagrzania, lub oziębienia jej tworzywa, pierwotna oś podłużna szyny staje się odkształconą — krzywą, prawie zawsze leżącą w płaszczyźnie XY. W lewym punkcie podparcia n pojawia się przyrost u_n pierwotnej odciętej nh — poziomy, pionowy y_n — pierwotnej rzędnej zerowej i —— pochylenie y'_n ku osi X — miejscowej stycznej odkształconej. Te znikome przyrosty rodzą odpory sprzeciwów: poziomego i pionowego —

$$U_n = -ku_n\ ,\ Y_n = -qy_n$$

obu — w kg, a nadto — moment sprzeciwu odporowego:

$$O_n = -dy'_n$$

w cm kg. Wobec jednolitości podłoża i jednakowych podkładów spółczynniki: k, q, d — poziomego, pionowego i obrotowego sprzeciwu podpór sprężystych są niezmienne dla wszystkich punktów podparcia. Pierwsze dwa mają wymiar kg/cm, ostatni zaś: cm kg.

Płaskie obciążenie szyny, pierwotnie poziomej, zawarte w płaszczyźnie głównej XY tej belki stałego przekroju, składa się z pionowej siły jednostkowej p jej ciężaru własnego w kg/cm, a nadto ze skupionych sił w kg — pionowych P, poziomych H, oraz — prostopadłych do tej płaszczyzny skupionych momentów K w cm kg.

To obciążenie, przy obranym zwrocie *(w)* — prawym, da wypadkowe bieżące tuż przed punktem podparcia n $(x_n\ ,\ y_n)$ odkształconej: siłę osiową S_n poziomą, siłę poprzeczną Q_n pionową i moment gnący M_n, równoległy do osi Z. Tuż za tym punktem będę miał wypadkowe:

$$S_n + U_n = S_n - ku_n$$

$$Q_n + Y_n = Q_n - qy_n$$

$$M_n + O_n = M_n - dy'_n$$

Z pierwszego wzoru uzyskam dalsze dla sił osiowych, założywszy, że w dwóch sąsiednich przęsłach: $(n+1,\ n)$, $(n,\ n-1)$ niema obciążeń poziomych. W tym założeniu:

$$S_{n+1} + U_{n+1} = S_n\ ,\ S_n + U_n = S_{n-1}$$

Nadto, przy jednostajnym przyroście t, dodatnim, lub ujemnym pierwotnej temperatury t_0, stałej dla obu tych przęseł, początkowa długość jednego z nich, dajmy na to, drugiego:

$$x_n - x_{n-1} = h$$

wzrośnie o fth, za tym, w myśl wzoru (2, str. 8):

$$u_n - u_{n-1} = (S_n + U_n)\frac{h}{EF} + fth$$

Inaczej jeszcze:

$$-ku_n + ku_{n-1} = -2iS_{n-1} - fthk$$

i ostatecznie:

$$U_n - U_{n-1} = -2iS_{n-1} - fthk$$

gdzie dla skrócenia wprowadziłem oznaczenie:

$$i = \frac{hk}{2EF}$$

Zatem dla pierwszego przęsła:

$$U_{n+1} - U_n = -2iS_n - fthk$$

i, po odjęciu:

$$U_{n+1} - 2U_n + U_{n-1} = 2i(S_{n-1} - S_n) = 2iU_n$$

Równanie różnicowe:

$$U_{n+1} - 2(1+i)U_n + U_{n-1} = 0$$

ma ogólną całkę:

$$U_n = Aa^n + Bb^n \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

przy czym podstawy a, b, jako pierwiastki równania

$$z^2 - 2(1+i)z + 1 = 0$$

są równe:

$$a = 1 + i - \sqrt{(2+i)i} \angle 1$$

$$b = \frac{1}{a} = 1 + i + \sqrt{(2+i)i} \diagdown 1$$

Wobec tego:

$$-ku_n = U_n = Aa^n + Bb^n \quad \ldots (2)$$

$$S_n = -EFft + \frac{1-a}{2i}Aa^n + \frac{1-b}{2i}Bb^n \quad (3)$$

gdzie stałe A, B należy określić z warunków kresowych — na obu końcach szyny i w punktach przyłożenia skupionych sił osiowych H. Cała trudność polega na właściwej ocenie odporowego działania złącz. Stąd — konieczność poparcia wyników doświadczeniem.

Znów założywszy, że w przęśle $(n, n-1)$ niema obciążeń poziomych, bieżącym punktem B (x, y) odkształconej (rys. 2) dzielę to przęsło na dwa podprzęsła: (n, B), $(B, n-1)$ poziomych długości:

$$v = x_n - x, \quad w = x - x_{n-1} = h - v$$

W tym punkcie B styczna odkształconej tworzy z osią X znikomy kąt y', wychodzę przeto z przybliżonego równania różniczkowego (3, str. 8) odkształconej:

$$EIy'' = M + Ł$$

gdzie dla skrócenia wprowadziłem oznaczenie:

$$Ł = EIf\frac{i}{g}$$

Zwrotem (w) zmierzam od punktu podparcia n ku B i sprowadzam do tego środka obciążenie zewnętrzne podprzęsła (n, B). To mi da wypadkowe tuż przed B: siłę poprzeczną pionową V i moment Z — poziomy. Stąd — wypadkowe bieżące tuż przed punktem B: siła poprzeczna

$$Q = Q_n + Y_n + pv + V$$

i moment gnący:

$$M = M_n + O_n - (S_n + U_n)(y_n - y) + (Q_n + Y_n)v + \frac{1}{2}pv^2 + Z$$

Dla końcowego punktu przęsła, przy v równym h:

$$Q_{n-1} = Q_n + Y_n + ph + V_{n-1} \quad . \quad (4)$$

$$M_{n-1} = M_n + O_n - S_{n-1}(y_n - y_{n-1}) + (Q_n + Y_n)h + \frac{1}{2}ph^2 + Z_{n-1} \quad . \quad . \quad (5)$$

a przeto, po wyrugowaniu składowych pionowych:

$$M = S_{n-1}\left[y - y_n\frac{w}{h} - y_{n-1}\frac{v}{h}\right] + (M_n + O_n)\frac{w}{h} + M_{n-1}\frac{v}{h} - \frac{1}{2}pvw + W \quad (6)$$

gdzie oznaczyłem przez:

$$W = Z - Z_{n-1}\frac{v}{h}$$

— moment gnący tuż przed bieżącym punktem B przęsła $(n, n-1)$ nieważkiego, wyciętego z belki i podpartego izostatycznie końcami na podporach: przegubowej i posuwnej — z zachowaniem miejscowego obciążenia zewnętrznego. Jest to (6) — wzór *Bresse'a* uogólniony.

Zatem równanie różniczkowe odkształconej:

$$EIy'' - S_{n-1}y = R = \frac{1}{h}[-S_{n-1}(y_n w + y_{n-1}v) + (M_n + O_n)w + M_{n-1}v] - \frac{1}{2}pvw + W + Ł$$

da mi ogólną całkę:

$$y = Ae^{mx} + Be^{-mx} - \frac{1}{T}\left(R + \frac{EIp}{T}\right) \quad \ldots (7)$$

skąd bezpośrednio :

$$y' = m[Ae^{mx} - Be^{mx}] - \frac{R'}{T}$$

przy czym:

$$T = S_{n-1} = S_n + U_n\,,\ m = \sqrt{\frac{T}{EI}}$$

$$R' = \frac{1}{h}\left[-T\left(y_n - y_{n-1}\right) + M_n + O_n - \right.$$
$$\left. - M_{n-1}\right] + \frac{1}{2}\,p\left(v - w\right) + W'$$

o czym z łatwością można się przekonać przez podstawienie, zważywszy, że:

$$v' = -1,\ w' = 1,\ W'' = 0,\ R'' = p.$$

Siłę osiową S_{n-1} wyznaczę tu ze wzoru (3). Stałe całkowania A, B otrzymam, wypisawszy wzór (7) dla punktów podparcia: n, $n-1$ przęsła, gdzie v równe jest zeru i h. Podstawienie wszystkich tych wartości da mi ze wzoru (7) dwa nowe, różniące się budową wzory:

$$O_n = - dy'_n \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

$$O_n = - dy'_{n-1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

Jeżeli w dwóch sąsiednich przęsłach: $(n + 1, n)$. $(n, n - 1)$ niema obciążeń poziomych, to niewątpliwie, według wzoru (5):

$$M_n = M_{n+1} + O_{n+1} - S_n\left(y_{n+1} - y_n\right) +$$
$$+ \left(Q_{n+1} + Y_{n+1}\right) h + \frac{1}{2}\,ph^2 + Z_n$$

a nadto bezpośrednio:

$$M_{n-1} = M_{n+1} + O_{n+1} - S_n\left(y_{n+1} - y_{n-1}\right) -$$
$$- U_n\left(y_n - y_{n-1}\right) + \left(Q_{n+1} + Y_{n+1}\right) 2h + O_n +$$
$$+ Y_n\,h + 2ph^2 + Z_n + V_n\,h + Z_{n-1}$$

Stąd po wyrugowaniu:

$$Q_{n+1} + Y_{n+1}$$

i uwzględnieniu zależności:

$$U_n = S_{n-1} - S_n\,,\ Y_n = - qy_n$$

otrzymam ostatecznie wzór:

$$M_{n+1} - 2M_n + M_{n-1} + O_{n+1} - O_n -$$
$$- S_n\,y_{n+1} + \left(qh + S_n + S_{n-1}\right) y_n - S_{n-1}\,y_{n-1} -$$
$$- ph^2 + Z_n - Z_{n-1} - V_n\,h = 0 \quad . \quad . \quad (11)$$

2. Zatem, wyodrębniwszy m przęseł, kolejnych co do zwrotu (w), wypiszę dla nich $(m-1)$ zależności (11), wiążących $(m + 1)$ rzędnych y ich punktów podparcia, tyleż momentów M tuż przed owymi punktami oraz m momentów sprzeciwu O. Wypływa to wprost z samego kształtu zależności (11).

Te same niewiadome, w ogólnej liczbie $(3\,m+2)$ wejdą do wzorów (9), wypisanych dla m początkowych punktów wyodrębionych przęseł, a nadto również i do wzorów (10), wypisanych dla $(m-1)$ końcowych punktów tychże przęseł, z wyłączeniem ostatniego, a to dla uniknięcia wprowadzenia jeszcze jednego momentu sprzeciwu O_{n-2} na razie zbędnego, bo nie wchodzącego do pozostałych wzorów.

Ogółem więc mam równań $(3\,m - 2)$. Chcę z nich wyznaczyć m momentów sprzeciwu O oraz— $(m + 1)$ rzędnych y wszystkich punktów podparcia wyodrębionych przęseł, lub — tyleż momentów M. Pozostanie mi wobec tego jeszcze

$$(3\,m - 2) - m - (m + 1) = m - 3$$

równań dla $(m + 1)$ niewiadomych momentów M, lub tyluż rzędnych y.

Zatem przy *czterech* wyodrębnionych przęsłach otrzymam tą drogą tylko jedno równanie, wiążące pięć niewiadomych momentów M, lub rzędnych y. Biorę więc cztery przęsła pomiędzy kolejnymi co do zwrotu (w) punktami podparcia:

$$y_{n+2}\,,\ y_{n+1}\,,\ y_n\,,\ y_{n-1}\,,\ y_{n-2}$$

Dla początkowych ich punktów:

$$y_{n+2}\,,\ y_{n+1}\,,\ y_n\,,\ y_{n-1}$$

wypiszę cztery równania (9), dla końcowych zaś:

$$y_{n+1}\,,\ y_n\,,\ y_{n-1}$$

trzy równania (10). Łącznie więc z trzema zależnościami (11) będę miał dziesięć równań. Wyrugowawszy z nich cztery momenty:

$$O_{n+2}\,,\ O_{n+1}\,,\ O_n\,,\ O_{n-1}$$

a z pozostałych sześciu równań — pięć rzędnych y, lub tyleż momentów M, otrzymam jedno liniowe *równanie pięciu momentów:*

$$M_{n+2}\,,\ M_{n+1}\,,\ M_n\,,\ M_{n-1}\,,\ M_{n-2}$$

lub — jedno liniowe równanie pięciu rzędnych y, a z niego, mnożeniem przez — q jedno równanie *pięciu odporów:*

$$Y_{n+2}\,,\ Y_{n+1}\,,\ Y_n\,,\ Y_{n-1}\,,\ Y_{n-2}$$

również liniowe.

Mogę dorzucić jeszcze jedno równanie (10), wypisane dla ostatniego punktu podparcia y_{n-2}. To, jedenaste równanie wprowadzi nową niewiadomą — moment sprzeciwu O_{n-2}. Zatem, wyrugowawszy pięć rzędnych y i tyleż momentów M otrzymam jedno *równanie pięciu momentów sprzeciwu:*

$$O_{n+2}\,,\ O_{n+1}\,,\ O_n\,,\ O_{n-1}\,,\ O_{n-2}$$

Mogę wreszcie wypisać dla początkowych punktów podparcia:

$$y_{n+2}\,,\ y_{n+1}\,,\ y_n\,,\ y_{n-1}$$

wyodrębnionych przęseł po cztery zależności (4), (5) i tyleż wzorów (9), a nadto — jeszcze cztery wzory (10) dla końcowych punktów:

$$y_{n+1}\,,\ y_n\,,\ y_{n-1}\,,\ y_{n-2}$$

tychże przęseł. Po wyrugowaniu z tych szesnastu równań pięciu momentów sprzeciwu O, tyluż rzędnych y i tyluż momentów M otrzymam jedno równanie pięciu sił poprzecznych:

$$Q_{n+2},\ Q_{n+1},\ Q\ ,\ Q_{n-1},\ Q_{n-2}$$

Wszystkie te drogi są pokrewne: prowadzą do różnicowych równań czwartego rzędu, liniowych,— z gmatwającymi wyrazami. Całkowanie ich jest dość łatwe, a określanie stałych całkowania — nader uciążliwe. Najprościej wiedzie do celu równanie pięciu rzędnych y lub pięciu momentów M ze względu na dość łatwe dalsze rugi niewiadomych: O, Q. Nić przewodnią wskazują prawie zawsze warunki kresowe, choć same są niekiedy zgoła niepewne, a nawet, o ile tyczą złącz — wprost wątpliwe.

Poza tym — wszystkie wzory (4—11) oparte są na domniemanej stałości rozstawu h wszystkich punktów podparcia, a ten zależy nie tyle od wymiarów podkładu, ile raczej od położenia osi odporu poprzecznego, może i niezbyt pionowego. Zależy więc od nierówności górnej powierzchni podkładu, od jej wychylenia się z poziomu, od przylegania szyny, od miejscowych różnic sprężystości drewna, a nadto od nierównomiernego podbicia i różnolitości samego podłoża, niekiedy dość znacznej.

Z tym wszystkim łączą się jeszcze i zastrzeżenia co do istotnej wielkości sił osiowych S. Tu znów wchodzą w grę niedokładności wykonania szyny, wady jej tworzywa, zużycie zewnętrzne, krzywizny wrodzone i nabyte, niestarannie ułożenie i związanie z podkładami, rychło się starzejące. Poza tym — wszelkie nieprzewidziane uskoki obciążeń, uderzenia, niejednostajność wpływów cieplnych i zależność od poziomych odporów U, a więc i od czynników, już poprzednio zaznaczonych.

Odchylenia te są jednak zwykle niezbyt znaczne wobec rozbieżności przyczyn i strącania się wpływów obosiecznego. Stąd — szeroka możność wprowadzania średnich: przy obciążeniach pionowych nieosiowych — wystarcza założenie samego podłoża, związanego z szyną wprost, bez pośrednictwa podkładów.

Ostre różnice wprowadza obciążenie osiowe, tu bowiem, do zczepności dolnej ścianki podkładu z podłożem dołącza się jego sprzeciw na bocznej — podłużnej i moment tego sprzeciwu.

Poza tym przy wszelkich obciążeniach płaskich pochylanie się szyny o znikomy kąt y' w punkcie podparcia zmusza podkład do częściowego wtórnego obrotu, zależnego od sztywności połączeń. Stąd — dalsze źródło momentów sprzeciwu obrotowego.

Możnaby wprawdzie, kosztem prostoty wzorów, rozciągnąć odporowe własności podłoża i na ten sprzeciw; tą drogą jednak uzyskane wyniki nie okupią poważnych trudności. Są zbyt sztywne. Zresztą, obciążenia poziome szyny, wobec pionowych są wprost znikowe i snadnie mogą być pominięte, z wyjątkiem — sił osiowych przy gwałtownym, nagłym hamowaniu. O tym już pisałem dwukrotnie.

3. Poza tym jest jedno jeszcze zagadnienie, warte szerszego ujęcia i zachodu. To — zesowanie szyny, związanej z podporami sprężystymi, równoodległymi. Ich zagęszczenie aż do ciągłego podłoża mija się z celem, zbyt bowiem zwęża wzory.

Chwiejność warunków kresowych na złączach da się tu zastąpić złem mniejszym: obustronnym przedłużaniem szyny poza wszelką miarę. Tak pomyślaną bezkresną belkę wiążę poziomo z podporami.

Dodatni przyrost osiowy t stałej temperatury pierwotnej t_0 tworzywa szyny wzbudza w niej siły osiowe *ściskające dodatnie:*

$$S_n = EFtt = S \qquad \ldots\ldots \quad (12)$$

stałe na całej długości. Wypływa to wprost ze wzoru (3) po zmianie znaku i uwzględnieniu zerowej wartości stałych: A, B, koniecznej wobec zupełnie dowolnego wyboru zerowego podkładu.

Stąd na mocy wzorów (1), (2) — zerowość poziomych odporów i posuwów.

$$U_n = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

$$u_n = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

wszystkich punktów podparcia. Za tym, jak poprzednio, przy obciążeniu tylko ciężarem własnym p szyny, przy zwrocie (w) prawym:

$$Q_{n-1} = Q_n + Y_n + ph \quad \ldots \quad (15)$$

$$M_{n-1} = M_n + O_n + S\,(y_n - y_{n-1}) + (Q_n + Y_n)\,h + \frac{1}{2}\,ph^2 \quad \ldots \quad (16)$$

Równanie różniczkowe odkształconej:

$$EIy'' + Sy = \frac{1}{h}\,[S\,(y_n\,w + y_{n-1}\,v) + (M_n + O_n)\,w + M_{n-1}\,v] + Ł - \frac{1}{2}\,p\,v\,w = R$$

daje tu:

$$y = A\ Sin.\ mx + B\ Cos.\ mx + \frac{1}{S}\left[R - \frac{EIp}{S}\right].$$

Stałe całkowania określę tu z warunków na kresach przęsła, gdzie:

$$x = x_n,\ y = y_n,\ v = 0,\ w = h$$

$$x = x_{n-1},\ y = y_{n-1},\ v = h,\ w = 0$$

i ostatecznie będę miał:

$$y = \frac{y_n\,w + y_{n-1}\,v}{h} + \frac{M_{n-1}}{S}\left[\frac{v}{h} - \frac{Sin.\ mv}{Sin.\ mh}\right] + \frac{M_n + O_n}{S}\left[\frac{w}{h} - \frac{Sin.\ mw}{Sin.\ mh}\right] - \frac{pvw}{2S} + \left(Ł - \frac{EIp}{S}\right)\frac{1}{S}\left[1 - \frac{Sin.\ mv + Sin.\ mw}{Sin.\ mh}\right] \quad \ldots \quad (17)$$

$$y' = \frac{y_n - y_{n-1}}{h} - \frac{M_{n-1}}{Sh}\left[1 - mh\,\frac{Cos.\ mv}{Sin.\ mh}\right] + \frac{M_n + O_n}{Sh}\left[1 - mh\,\frac{Cos.\ mw}{Sin.\ mh}\right] + \frac{p\,(v - w)}{2S} + \left(Ł - \frac{EIp}{S}\right)\frac{m}{S}\,\frac{Cos.\ mv - Cos.\ mw}{Sin.\ mh} \quad \ldots \quad (18)$$

przy czym:

$$m = \sqrt{\frac{S}{EI}}$$

Za tym na kresach przęsła:

$$hy'_n = -\frac{h}{d} O_n = y_n - y_{n-1} -$$
$$- b(M_n + O_n) + cM_{n-1} + G.$$

$$hy'_{n-1} = -\frac{h}{d} O_{n-1} = y_n - y_{n-1} -$$
$$- c(M_n + O_n) + bM_{n-1} - G =$$
$$= y_{n-1} - y_{n-2} - b(M_{n-1} + O_{n-1}) + cM_{n-2} + G.$$

i ostatecznie:

$$O_n = a(y_n - y_{n-1}) - abM_n + acM_{n-1} + aG \quad . \; . \; (19)$$

$$cM_{n+1} - 2bM_n + cM_{n-1} + cO_{n+1} - bO_n -$$
$$- y_{n+1} + 2y_n - y_{n-1} + 2G = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; (20)$$

gdzie dla skrócenia użyłem oznaczeń:

$$a = \frac{d}{bd - h} < 0,$$

$$b = \frac{1}{S} [mh \, Ctg. \, mh - 1] < 0,$$

$$c = \frac{1}{S} \left[\frac{mh}{Sin. \, mh} - 1 \right] > 0,$$

$$G = \left(Ł - \frac{EIp}{S} \right) \frac{mh}{S} \frac{1 - Cos. \, mh}{Sin. \, mh} +$$
$$+ \frac{ph^2}{2S} = \frac{ph^2}{2S} - (b - c) \left(Ł - \frac{EIp}{S} \right)$$

Poza tym, jak poprzednio, mam dla sąsiednich przęseł: $(n + 1, n)$, $(n, n - 1)$:

$$M_{n+1} - 2M_n + M_{n-1} + O_{n-1} - O_n +$$
$$+ Sy_{n+1} + (qh - 2S) y_n + Sy_{n-1} - ph^2 = O \quad (21)$$

4. Wzory (20), (21) wypisuję dla czterech, kolejnych co do zwrotu (w) przęseł: $(n+2, n+1)$, $(n+1, n)$, $(n, n-1)$, $(n-1, n-2)$ i, po uwzględnieniu zależności (19) mam układ sześciu równań:

$$g M_{n+2} - (e + g) M_{n+1} + e M_n +$$
$$+ f y_{n+2} + (qh - 2f) y_{n+1} + f y_n - ph^2 + O$$

$$g M_{n+1} - (e + g) M_n + e M_{n-1} +$$
$$+ f y_{n+1} + (qh - 2f) y_n + f y_{n-1} - ph^2 = O$$

$$g M_n - (e + g) M_{n-1} + e M_{n-2} +$$
$$+ f y_n + (qh - 2f) y_{n-1} + f y_{n-2} - ph^2 = O \quad (22)$$

$$cg M_{n+2} + i M_{n+1} + cg M_n -$$
$$- ey_{n+2} + (e + g) y_{n+1} - gy_n + H = O$$

$$cg M_{n+1} + i M_n + cg M_{n-1} -$$
$$- ey_{n+1} + (e + g) y_n - gy_{n-1} + H = O$$

$$cg M_n + i M_{n-1} + cg M_{n-2} -$$
$$- e y_n + (e + g) y_{n-1} - gy_{n-2} + H = O$$

gdzie użyłem skracających oznaczeń:

$$e = 1 - ac, \; f = a + S, \; g = 1 - ab$$
$$i = ab^2 + ac^2 - 2b, \; H = [2 - a(b - c)] \, G \quad (23)$$

Równania układu (22) mnożę przez:

$$cg, \; i, \; cg, \; - g, \; e + g, \; - e$$

i, po dodaniu wszystkich sześciu mam *równanie pięciu rzędnych:*

$$y_{n+2} + Ky_{n+1} + 2Ly_n + Ky_{n-1} + y_{n-2} + 2j = O \quad (24)$$

przy czym:

$$K = \frac{(qh - 2f) \, cg + fi - (e + g)^2}{g(e + cf)}$$

$$L = \frac{(qh - 2f) \, i + 2cfg + 2(e^2 + eg + g^2)}{2g(e + cf)}$$

$$j = -\frac{i + 2cg}{2g(e + cf)} ph^2$$

Stąd, mnożeniem przez q — otrzymam *równanie pięciu odporów:*

$$Y_{n+2} + KY_{n+1} + 2LY_n + KY_{n-1} + Y_{n-2} + 2P = O \quad (25)$$

gdzie:

$$P = \frac{i + 2cg}{2g(e + cf)} pqh^2$$

Z kolei równania układu (22) mnożę przez:

$$e, \; -(e + g), \; g, \; f, \; qh - 2f, \; f$$

i, po dodaniu wszystkich sześciu, mam *równanie pięciu momentów:*

$$M_{n+2} + KM_{n+1} + 2LM_n + KM_{n-1} + M_{n-2} + 2N = 0 \quad (26)$$

przy czym:

$$N = \frac{qhH}{2g(e + cf)} = \frac{2 - a(b - c)}{2g(e + cf)} qhG$$

Dalej po uwzględnieniu zależności:

$$abd - ah = d, \; - a \frac{h}{d} = 1 - ab = g$$

wzór (18), wypisany dla kresów przęsła $(n, n-1)$, da mi dwa podstawowe wzory:

$$gO_n = a(y_n - y_{n-1}) + aG -$$
$$- ab(M_n + O_n) + ac \, M_{n-1}$$

$$g \, O_{n-1} = a(y_n - y_{n-1}) - a \, G -$$
$$- ac(M_n + O_n) + abM_{n-1}$$

skąd bezpośrednio:

$$cg\,O_n - bgO_{n-1} = -a(b-c)(y_n - y_{n-1}) - $$
$$- a(b^2 - c^2) M_{n-1} + a(b+c)G$$

$$bgO_n - cgO_{n-1} = a(b-c)(y_n - y_{n-1}) - $$
$$- a(b^2 - c^2)(M_n + O_n) + a(b+c)G.$$

Dolne wskaźniki przedostatniego wzoru podwyższam o jedność, dodaję doń wzór ostatni i mam po zebraniu wyrazów:

$$cg\,O_{n+1} + i\,O_n + cg\,O_{n-1} + $$
$$+ a(b-c)(y_{n+1} - y_{n-1}) = 0$$

Poza tym odejmowaniem i dodawaniem otrzymam z podstawowych wzorów:

$$g(O_n - O_{n-1}) = 2aG - $$
$$- a(b-c)(M_n + O_n + M_{n-1})$$

$$g(O_n + O_{n-1}) = 2a(y_n - y_{n-1}) - $$
$$- a(b+c)(M_n + O_n - M_{n-1}).$$

inaczej jeszcze:

$$eO_n - g\,O_{n-1} = 2aG - $$
$$- a(b-c)(M_n + M_{n-1})$$

$$(1+ac)O_n + g\,O_{n-1} = 2a(y_n - y_{n-1}) - $$
$$- a(b+c)(M_n - M_{n-1})$$

Ostatni wzór, po uwzględnieniu zależności (21) i łatwych do sprawdzenia równości:

$$2 + (b+c)S = (b+c)f + e + g$$

$$(b+c)(qh - 2S) = (b+c)(qh - 2f) - 2(e+g)$$

da mi:

$$ky_{n+1} + (qh - 2k)y_n + ky_{n-1} = $$
$$= -lO_{n+1} + lO_{n-1} - ph^2$$

gdzie oznaczyłem przez:

$$k = f + \frac{e+g}{b+c}, \quad l = \frac{g}{a(b+c)}$$

Mam więc układ pięciu równań:

$$ky_{n+2} + (qh - 2k)\,y_{n+1} + ky_n - $$
$$- lO_{n+2} + lO_n - ph_2 = 0$$
$$ky_n + (qh - 2k)\,y_{n-1} + ky_{n-2} - $$
$$- lO_n + lO_{n-2} - ph^2 = 0$$

$$cgO_{n+2} + iO_{n+1} + cgO_n + $$
$$+ a(b-c)(y_{n+2} - y_n) = 0$$
$$cgO_{n+1} + i\,O_n + cgO_{n-1} + $$
$$+ a(b-c)(y_{n+1} - y_{n-1}) = 0$$
$$cg\,O_n + i\,O_{n-1} + cg\,O_{n-2} + $$
$$+ a(b-c)(y_n - y_{n-2}) = 0$$

Mnożę te równania przez:

$$-a(b-c),\ a(b-c),\ k,\ gh - 2k,\ k$$

Po dodaniu wszystkich pięciu i uwzględnieniu zależności:

$$ck + \frac{b-c}{b+c} = e + cf$$

$$(qh - 2k)\,cg + ki = (qh - 2f)\,cg + fi - (e+g)^2$$

$$(qh - 2k)\,i + 2cgk - 2g\,\frac{b-c}{b+c} = $$

$$= (qh - 2f)\,i + 2cfg + 2(e^2 + eg + g^2)$$

otrzymałem ostatecznie równanie pięciu momentów sprzeciwu:

$$O_{n+2} + KO_{n+1} + 2LO_n + KO_{n-1} + O_{n-2} = 0 \quad . \ . \ (27)$$

bez wolnego wyrazu.

Chcąc znaleźć ostatnie równanie tego kształtu, wychodzę ze wzoru (16) i mam na mocy zależności (15), (19):

$$gM_n - eM_{n-1} + f(y_n - y_{n-1}) + $$
$$+ hQ_{n-1} + aG - \frac{1}{2}ph^2 = 0$$

Ten wynik mnożę przez q; z przeinaczonego wzoru (15) podstawiam

$$qy_n = Q_n - Q_{n-1} + ph$$

To samo robię z czwartym i piątym równaniem (22). Stąd układ:

$$fQ_{n+2} + (qh - 2f)\,Q_{n+1} + fQ_n + $$
$$+ gqM_{n+2} - eqM_{n+1} + aqG - \frac{1}{2}ph^2 = 0$$

$$fQ_{n+1} + (qh - 2f)\,Q_n + fQ_{n-1} + $$
$$+ gqM_{n+1} - eqM_n + aqG - \frac{1}{2}ph^2 = 0$$

$$fQ_n + (qh - 2f)\,Q_{n-1} + fQ_{n-2} + $$
$$+ gqM_n - eqM_{n-1} + aqG - \frac{1}{2}ph^2 = 0$$

$$eO_{n+2} - (2e+g)\,O_{n+1} + (e+2g)\,O_n - g\,O_{n-1} - $$
$$- cgqM_{n+2} - iqM_{n+1} - cgqM_n - qH = 0$$

$$eO_{n+1} - (2e+g)\,O_n + (e+2g)\,O_{n-1} - gO_{n-2} - $$
$$- cgqM_{n+1} - iqM_n - cgqM_{n+1} - qH = 0$$

Równania te mnożę przez:

$$cg,\ i,\ cg,\ g,\ -e$$

i, po dodaniu ich wszystkich, mam *równanie pięciu sił poprzecznych:*

$$Q_{n+2} + KQ_{n+1} + 2LQ_n + KQ_{n-1} + Q_{n-2} + 2R = 0 \quad (28)$$

przy czym:

$$R = -\frac{i + 2cg}{4g(e + cf)}\, pqh^2$$

ponieważ:

$$a(i + 2cg)\, qG + (e - g)\, q\, H =$$

$$= (a(i+2cg) + (e - g)\, [2 - a(b - c)])\, qG = 0.$$

5. Wzory (24—28) mają ten sam kształ równania różnicowego:

$$X_{n+2} + KX_{n+1} + 2LX_n + KX_{n-1} + X_{n-2} + 2W = 0 \quad (29)$$

Założenie stałości obciążenia bezkresnej szyny i jednostajności nagrzania przy niezmiennym podłożu i jednakowych równoodległych podkładach czyni zupełnie dowolnym wybór podkładu zerowego. Wobec tego całka równania (29) nie może mieć wyrazów, zależnych od n. Sprowadza się więc do wolnego wyrazu:

$$X_n = V$$

czyniącego zadość zależności:

$$(1 + K + L)\, V + W = 0$$

skąd bezpośrednio:

$$V = -\frac{W}{1 + K + L} = -\frac{2g(e + cf)}{i + 2cg}\,\frac{W}{qh}$$

o czym z łatwością można się przekonać przez podstawienie.

Za tym w myśl wzorów, poprzednio otrzymanych:

$$y_n = \frac{ph}{q}, \quad y'_n = 0, \quad O_n = 0$$

$$Y_n = -ph, \quad Q_n = \frac{1}{2}\, ph,$$

$$M_n = \frac{ph^2}{2S(b - c)} + \frac{EIp}{S} - Ł =$$

$$= \frac{EIp}{S} - \frac{ph}{2m}\, Ctg\, \frac{mh}{2} - Ł.$$

$$S = EFft, \quad m = \sqrt{\frac{S}{EI}}$$

Pośrodku przęsła, na mocy zależności (6), (17), (18):

$$y_s = \frac{ph}{q} + \frac{ph^2}{8S}\left[\frac{4}{mh}\, Tng\, \frac{mh}{4} - 1\right]$$

$$y'_s = 0, \quad Q_s = 0,$$

$$M_s = \frac{EIp}{S} - \frac{ph}{2m\, Sin\, \frac{mh}{2}} - Ł.$$

tutaj więc odkształcona zaklęsa najniżej. Wszystkie punkty podparcia leżą na poziomie najwyższym. Odkształconą szyny stanowi ciąg jednakowych falowań znikomej rozwartości pionowej. Odkształcona jest niemal prostą.

Dopiero przy znaczniejszym jednostajnym nagrzaniu, bez innej zresztą wyraźnej przyczyny, może zajść zesowanie, wyróżniające się przerostami owych rozwartości i różnicami długości fal, wykraczających poza przęsła. Czy możliwość tej odrębności miejscowej kryje się w moich wzorach?

Bezkresną ważką belkę stałego przekroju poziomo związano z jednakowymi równoodległymi podporami, tkwiącymi w niezmiennym sprężystym podłożu. Po jednostajnym nagrzaniu belka uległa zesowaniu na łącznej długości n przęseł, kolejnych co do zwrotu (w), począwszy od punktu podparcia m. Obustronnie jednak poza tym przedziałem odkształcona jej pozostała niemal prostą, złożoną z powtarzających się falowań nieznacznej rozwartości pionowej.

Nie działa tu żaden inny wyraźny czynnik odkształcający, prócz niezmiennego ciężaru własnego szyny i jednostajnego przyrostu osiowego t jej stałej temperatury t_0 pierwotnej. Mogły więc działać tylko znikome, nieuchwytne bodźce, umiejscowione na długości l owych n przęseł: drobne, nieuniknione wahania tego obciążenia, nagrzania, lub — nader słabe odchylenia ich wypadkowych bieżących, powstałe z małych różnic wymiarów i własności tworzyw. A nadto jeszcze — nieprzewidziane, znikome obciążenia i drgania.

Łączny wpływ tych słabych czynników nie może odbić się na budowie wzorów (29), ich spółczynnikach i wolnych wyrazach. Zależne odeń przyrosty, poprzenoszone na prawą stronę tych wzorów, nie usuwają zera, są bowiem znikome. Inaczej mówiąc lewa strona wzoru (29) jest ściślej równa zeru poza przedziałem zesowania.

Za tym nazewnątrz i na rubieżach tego przedziału:

$$X_i = V = X, \quad (i > m + n, \; m > i)$$

wewnątrz zaś, na całej długości l:

$$X_i = Ae^{ri} + Be^{-ri} + Ce^{si} + De^{-si} + V$$

$$(m + n > i > m)$$

taki bowiem kształt ma ogólna całka równania różnicowego (29), a jej wyrazy zmienne — wewnątrz przedziału zależą od położenia podpory, nie są więc zerami, jak poza przedziałem zesowania, gdzie wybór zerowego podkładu jest nadal zupełnie dowolny ze względu na ściślejszą jednostajność obciążenia i nagrzania.

W obec tej swobody prowadzę oś Y przez początkowy punkt podparcia długości l. Przekraczając zwrotem (w) jej końcowy punkt podparcia n stosuję wzory (29) czterokrotnie i mam:

$$(1 + K + 2L + K)\, X + X_{n-1} + 2W = 0$$

$$(1 + K + 2L)\, X + KX_{n-1} + X_{n-2} + 2W = 0$$

$$(1 + K)\, X + 2LX_{n-1} + KX_{n-2} + X_{n-3} + 2W = 0$$

$$X + KX_{n-1} + 2LX_{n-2} + KX_{n-3} + X_{n-4} + 2W = 0$$

skąd, na mocy zależności:

$$X + KX + 2LX + KX + X + 2W = 0$$

mam układ równań warunkowych:

$$X_{n-1} - X = 0, \qquad X_{n-2} - X = 0,$$

$$X_{n-3} - X = 0, \qquad X_{n-4} - X = 0$$

Tą samą drogą dla początkowego puktu podparcia długości l otrzymam nowy układ:

$$X_1 - X = 0, \qquad X_2 - X = 0.$$

$$X_3 - X = 0, \qquad X_4 - X = 0.$$

Oba układy liniowe, jednorodne co do stałych całkowania: A, B, C, D, mają wspólny wyznacznik:

$$F = \begin{vmatrix} a^3, & b^3, & c^3, & d^3 \\ a^2, & b^2, & c^2, & d^2 \\ a, & b, & c, & d \\ 1, & 1, & 1, & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d) =$$
$$= (a^2-1)(c^2-1)(a-c)^2(ac-1)^2(ac)^{-3}$$

zależny tylko od potęgowych spółczynników: r, s całki ogólnej równania różnicowego (29). Użyłem tu upraszczających oznaczeń:

$$a = e^r, \qquad b = e^{-r} = a^{-1} = \frac{1}{a}$$

$$c = e^s, \qquad d = e^{-s} = c^{-1} = \frac{1}{c}$$

Za tym przy F różnym od zera oba układy dadzą zerowe: A, B, C, D, a nadto:

$$X_{n-1} = X_{n-2} = X_{n-3} = X_{n-4} = X$$

$$X_4 = X_3 = X_2 = X_1 = X$$

— wartości, obustronnie uszczuplające długość l o cztery przęsła, co niewątpliwie przeczy założeniu. Stąd wniosek o możliwości zesowania tylko przy F równym zeru, a więc przy jednej z równości:

$$a^2 = 1, c^2 = 1, a = c, ac = 1.$$

6. Podstawy potęgowe a, c, ogólnej całki równania (29):

$$X_n = Aa^n + Ba^{-n} + Cc^n + Dc^{-n} + V \quad . \quad . \quad (30)$$

są pierwiastkami równania:

$$z^4 + Kz^3 + 2Lz^2 + Kz + 1 = 0.$$

Wynika to wprost z podstawienia i wyrównania mnożników. Za tym, jeśli zachodzi jedna z dwóch równości:

$$a = \pm 1, \qquad c = \pm 1$$

to z ostatniego równania:

$$1 \pm K + L = 0.$$

Stąd przy górnych znakach będę miał:

$$i + 2cg = -[2 - a(b-c)](b-c) = 0$$

a przy dolnych:

$$(qh - 4f)(i - 2cg) + 4(e+g)^2 =$$
$$= [2 - a(b+c)][8 - (b+c)(qh - 4S)] = 0.$$

Oba pierwsze mnożniki są zawsze dodatnie. Łatwo to stwierdzić, zważywszy, że:

$$b \pm c \leqq 0$$

i wobec tego:

$$2 - a(b \mp c) = \frac{(b \pm c)d - 2h}{bd - h} > 0$$

Poza tym mnożnik:

$$8 - (b+c)(qh - 4S) =$$

$$= 8 - \left[\frac{mh(1 + Cos.\, mh)}{Sin.\, mh} - 2\right]\left(\frac{qh}{S} - 4\right) =$$

$$= 8\left[\frac{qh}{4S} - \left(\frac{qh}{4S} - 1\right)\frac{mh}{2}\, Ctg\, \frac{mh}{2}\right]$$

jest zawsze dodatni, o czym z łatwością przekonać się można mnożeniem widocznych nierówności:

$$\frac{qh}{4S} - 1 < \frac{qh}{4S}$$

$$\frac{mh}{2}\, Ctg\, \frac{mh}{2} \leqq 1$$

Ostatni mnożnik:

$$b - c = \frac{mh}{S}\,\frac{Cos.\, mh - 1}{Sin.\, mh} = 0$$

daje siłę osiową:

$$S = 4\,\frac{\pi^2 El}{h^2}$$

wybaczającą jedno z przęseł nieważkiej belki, a więc — nieistotną.

Za tym możliwość zesowania zależy tylko od pozostałych równości:

$$a = c, \qquad ac = 1$$

Podstawy:

$$a, a^{-1}, c, c^{-1}$$

czynią zadość równaniu:

$$z^2 + \frac{1}{z^2} + K\left(z + \frac{1}{z}\right) + 2L = 0$$

Podstawienie:

$$z + \frac{1}{z} = Z, \qquad z^2 + \frac{1}{z^2} = Z^2 - 2$$

da mi to samo przeinaczone równanie:

$$Z^2 + KZ + 2(L-1) = 0$$

a jego pierwiastki:

$$P = -\frac{1}{2}K + \frac{1}{2}\sqrt{K^2 - 8(L-1)}$$

$$R = -\frac{1}{2}K - \frac{1}{2}\sqrt{K^2 - 8(L-1)}$$

dadzą dwa nowe równania:

$$z^2 - Pz + 1 = 0$$

$$z^2 - Rz + 1 = 0.$$

Otrzymam z nich szukane podstawy:

$$\frac{1}{2}P \pm \frac{1}{2}\sqrt{P^2 - 1}$$

$$\frac{1}{2}R \pm \frac{1}{2}\sqrt{R^2 - 1}$$

a z owych dwóch warunkowych równości:

$$a = c, \; ac = 1$$

przez podstawienie — wypadkową:

$$P = R = -\frac{1}{2}K$$

lub jeszcze inaczej:

$$K^2 = 8(L-1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (31)$$

Stąd w ogólnym przypadku:

$$a = c = -\frac{1}{4}K \pm \frac{1}{4}\sqrt{K^2 - 16} =$$

$$= -\frac{1}{4}K \pm \frac{1}{4}\sqrt{8(L-3)} = u$$

$$a^{-1} = c^{-1} = -\frac{1}{4}K \mp \frac{1}{4}\sqrt{K^2 - 16} =$$

$$= -\frac{1}{4}K \mp \frac{1}{4}\sqrt{8(L-3)} = u^{-1}$$

a w szczególnym:

$$a = a^{-1} = c = c^{-1} = \pm 1$$

gdy:

$$L = 3, \; K = \mp 4.$$

Za tym, jeżeli równocześnie:

$$L > 3, \; K^2 = 8(L-1) > 16$$

przy wszelkich:

$$K > 4$$

lub też:

$$K < -4$$

to podstawy obie są rzeczywiste, a ogólna całka równania różnicowego: (29):

$$X_n = (A + B_n)\, u^n + (C + Dn)\, u^{-n} + V \quad . \quad (32)$$

Gdy znów równocześnie

$$L < 3, \; K^2 = 8(L-1) < 16$$

$$4 > K > -4$$

— obie podstawy są zespolone:

$$u = -\frac{1}{4}K \pm \frac{1}{4}i\sqrt{8(3-L)} =$$

$$= Cos.\, v \pm i\, Sin.\, v$$

$$u^{-1} = -\frac{1}{4}K \mp \frac{1}{4}i\sqrt{8(3-L)} =$$

$$= Cos.\, v \mp i\, Sin.\, v$$

skąd bezpośrednio mam:

$$Cos.\, v = -\frac{1}{4}K$$

$$Sin.\, v = \sqrt{1 - Cos.^2\, v} = \frac{1}{4}\sqrt{8(3-L)}$$

a przeto całka ogólna równania różnicowego (29):

$$X_n = (A + Bn)\, Sin.\, vn + (C + Dn)\, Cos.\, vn + V \quad (33)$$

co łatwo sprawdzić przez podstawienie i należyty wybór stałych całkowania.

Poza tym łączną możliwość równości:

$$L = 3, \; K = -4$$

mogę z góry wykluczyć wobec poprzednio już rozpatrzonej wartości:

$$K + L + 1 = 0$$

Za tym w szczególnym przypadku, gdy równocześnie:

$$L = 3, \; K = 4$$

ogólna całka równania różnicowego:

$$X_{n+2} + 4X_{n+1} + 6X_n + 4X_{n-1} + X_{n-2} + 2W = 0$$

ma kształt:

$$X_n = [A + Bn + Cn^2 + Dn^3]\,(-1)^n - \frac{1}{8}W \quad . \quad (34)$$

co łatwo stwierdzić wprost podstawieniem.

7. Zerowa wartość wyznacznika F odpowiada wyróżnikowi:

$$R = K^2 - 8(L-1) = 0$$

Podstawienie i zebranie wyrazów da mi:

$$[K^2 - 8(L-1)]\, g^2 (e + cf)^2 =$$
$$= [qhcg - f(i + 2cg) + (e-g)^2]^2 -$$
$$- 4\, qhg\, [e(i + 2cg) + c(e-g)^2] = 0$$

Stąd, wobec:

$$i + 2cg = -(b-c)\,[2 - a(b-c)]$$
$$f = a + S,\ e - g = a(b-c)$$

będę miał przeinaczoną tę samą zależność:

$$[qhcg + 2(b-c)(a+S) - aS(b-c)^2]^2 +$$
$$+ 4\, qhg\,(b-c)\,[2 - a(b+c)] = 0$$

a nadto, po uwzględnieniu:

$$g = -\frac{h}{bd - h}\ ,\quad S = m^2 EJ$$

$$b - c = \frac{mh}{S}\ \frac{Cos.\, mh - 1}{Sin.\, mh}$$

$$b + c = \frac{1}{S}\left[m h\ \frac{Cos.\, mh + 1}{Sin.\, mh} - 2\right]$$

i wprowadzeniu stałych podparcia (P. T. 1927. str. 331):

$$v = \frac{qh^3}{6\,EJ}\ ,\quad w = \frac{dh}{2\,EJ}$$

belki stałego przekroju na sprężystych podporach, otrzymam ostatecznie:

$$\left[\frac{6v}{m^2h^2}\left(1 - \frac{Sin.\, mh}{mh}\right) + 2w\,\frac{Sin.\, mh}{mh} +\right.$$
$$\left. + 2\,(Cos.\, mh - 1)\right]^2 - \frac{48\,vw}{m^4h^4}(Cos.\, mh - 1)^2 +$$
$$+ \frac{48v}{m^3h^3}\,(Cos.\, mh - 1)\, Sin.\, mh = 0\ .\ .\ .\ .\ \ (35)$$

— wzór dla siły osiowej, dającej pionowe zesowanie szyny.

Poza tym jeszcze, wobec:

$$e + g = 2 - a(b+c),\ e + cf = 1 + cS$$
$$i - 2cg = -(b+c)\,[2 - a(b+c)]$$

będę miał dalsze dwa wzory dla:

$$K = \frac{6v}{m^2\, h^2}\left(1 - \frac{Sin.\, mh}{mh}\right) - \frac{2w}{mh}\ Sin.\, mh -$$
$$- 2\,(Cos.\, mh + 1) = v - 2w - 4 +$$
$$+ 2\sum_{i=1}(-1)^i\left[\frac{3v}{(2i+2)(2i+3)} - w - 2i - 1\right]\frac{(mh)^{2i}}{(2i+1)!}$$

oraz dla:

$$L - 1 = \frac{6vw}{m^4\, h^4}\,[2(1 - Cos.\, mh) - mh\ Sin.\, mh] +$$
$$+ \frac{6v}{m^2\, h^2}\left[\frac{Sin.\, mh}{mh} - Cos.\, mh\right] + \frac{2w}{mh}\ Sin.\, mh +$$
$$+ 2\ Cos.\, mh = \frac{1}{2}\ v\, w + 2\,(v + w + 1) +$$
$$+ 2\sum_{i=1}(-1)^i\left[\frac{3vw}{(2i+3)(2i+4)} + \frac{3v}{2i+3} + w + 2i + 1\right]\frac{(mh)^{2i}}{(2i+1)!}$$

Te zależności ujmują zesowanie szyny, jako prostej belki stałego przekroju, związanej z podporami sprężystymi, równoodległymi. Równanie (35) daje siłę osiową S_0, esującą, wogóle niższą od tej z prostego wzoru, opartego na założeniu zastępczego, sprężystego podłoża szyny. Nie ma w tym nic dziwnego, jako, że to uproszczenie wprowadza nieistniejącą ciągłą więźbę pomiędzy podkładami — stężającą.

Głębsze różnice leżą w szerszym wyodrębnieniu sprężystych sprzeciwów podłoża, spółczynników podparcia. Stąd — większa gibkość wzorów, ale zarazem i znaczniejsze trudności w roztrząsaniu wyników. Staje mi tu na przeszkodzie brak pełnych danych co do wprowadzonego spółczynnika d. Z prostych rozważań wynika jego kształt:

$$d = i\ \frac{r^3}{l}\ k + j\ \frac{s^3}{h}\ q$$

gdzie przez: l, r, s oznaczyłem długość, grubość i szerokość podkładu: i, j — stałe doświadczalne, zależne głównie od przyczepności podłoża.

Badania czysto pracowniane nic tu nie dadzą — konieczne są próbne odcinki toru. Tylko tą drogą można otrzymać istotne wartości dla i, j, a nadto — stwiedzić, jaką najmniejszą ilość przęseł może mieć przedział zesowania?

Zwrotna budowa równania różnicowego (29) z góry wyklucza długość tego przedziału, złożoną tylko z dwóch sąsiednich przęseł. Łatwo to pojąć, zważywszy, że wyrazy wyznacznika F nie mogą mieć szczególnych wartości zerowych.

Przy pięcioprzęsłowym zesowaniu na długości:

$$l = 5h$$

oba układy kresowych równań warunkowych łączą się w jeden:

$$X_4 - X = 0,\ X_3 - X = 0$$
$$X_2 - X = 0,\ X_1 - X = 0$$

o wyznaczniku F.

Pierwsze równanie odpada, gdy:

$$l = 4\,h$$

a przeto, rozumując, jak w ogólnym przypadku, z łatwością stwierdzę możliwość zesowania przy jednej z czterech stałych: A, B, C, D, równej zeru i przy macierzy układu:

$$\begin{vmatrix} a^3, & a^{-3}, & c^3, & c^{-3} \\ a^2, & a^{-2}, & c^2, & c^{-2} \\ a, & a^{-1}, & c, & c^{-1} \end{vmatrix}$$

rzędu drugiego — o wszystkich wyznacznikach trzeciego stopnia zerowych, inaczej bowiem układ trzech liniowych, jednorodnych co do: A, B, C, D równań warunkowych:

$$X_3 - X = 0,\ X_2 - X = 0,\ X_1 - X = 0$$

dałby zerowe wartości dla tych niewiadomych, sprowadzając długość l zesowania — do zera.

Stąd — prosty wniosek o konieczności jednej z dwóch równości:

$$a = c,\ ac - 1$$

lub, co na jedno wychodzi, — o zerowej wartości wyróżnika:

$$R = K^2 - 8\,(L - 1) = 0$$

prowadzącej do równania (35).

W razie trójprzęsłowego zesowania, gdy:

$$l = 3\,h$$

— układ składa się tylko z dwóch równań warunkowych:

$$X_2 - X = 0,\ X_1 - X = 0$$

liniowych, jednorodnych względem: A, B, C, D, za tym, przy dwóch z tych stałych równych zeru, macierz układu

$$\begin{vmatrix} a^2, & a^{-2}, & c^2, & c^{-2} \\ a, & a^{-1}, & c, & c^{-1} \end{vmatrix}$$

winna dać zerowy wyznacznik drugiego stopnia, przynależny dwum pozostałym. Wymóg ten — zmierza znów do równania (35), należy bowiem i tu odrzucić równości:

$$a^2 = 1,\ c^2 = 1$$

dające siłę, wybaczającą jedno z trzech przęseł, a więc — nieistotną.

Dalej tą drogą już pójść nie można, wobec różnych od zera:

$$a,\ a^{-1},\ c,\ c^{-1}$$

Najmniejsza długość przedziału zesowania mogłaby objąć trzy, kolejne co do zwrotu *(w)* przęsła.

Rozwiązanie równania (35), dość żmudne, łatwo da się ująć i udostępnić w postaci wykresu, wyrażającego zależność mh od stałych podparcia: v, w. Ten sam wykres, poszerzony, nada się i przy zesowaniu poziomym.

Ze wzorów trzeba jednak będzie poskreślać wyrazy, zależne od ciężaru własnego p szyny, i, zamiast największego momentu bezwładności I — brać wszędzie najmniejszy — względem osi głównej Y — pionowej. Nadto — spółczynniki q, d — sprężystego sprzeciwu pionowego i obrotowego względem osi Z poziomej — zastąpić spółczynnikami: b, g sprężystego sprzeciwu poziomego, prostopadłego do osi podłużnej szyny i — obrotowego — w płaszczyźnie poziomej.

Pierwszy — ma wymiar kg/cm i wiąże się z odporem

$$B_n = -\,bz_n$$

poziowym bocznym sprężystej podpory n. Drugi, wymiaru cm. kg, daje pionowy moment sprzeciwu odporowego tejże podpory:

$$C_n = -\,gz'_n$$

W tych wzorach z_n oznacza rzędną poziomego rzutu odkształconej szyny — poziomy posuw jej punktu n podparcia, z'_n — pochylenie ku osi X — poziomego rzutu jej stycznej w tym punkcie.

Stąd — nowe stałe podparcia:

$$v = \frac{bh^3}{6\,EJ_m},\quad w = \frac{gh}{2\,EJ_m}$$

i nowe spółczynniki w równaniu (35) dla sił osiowych, esujących poziomo, wogóle niższych od esujących pionowo, a więc groźniejszych. Wartości b, g należy określać doświadczalnie na próbnych odcinkach toru.

Pierwszy — spółczynnik b bocznego poziomego sprzeciwu sprężystej podpory stanowi jej cechę pierwotną. Drugi — spółczynnik g sprzeciwu obrotowego sprężystej podpory w płaszczyźnie poziomej, w pierwszej mierze zależy od tęgości związania szyny z podkładem, — następnie — od sztywności samego podkładu, a więc — od spółczynnika sprężystości podłużnej jego tworzywa i od głównego momentu bezwładności jego stałego przekroju — względem osi pionowej. Nadto zależy jeszcze, i to w sposób nader zawiły, od k — spółczynnika sprzeciwu osiowego sprężystej podpory.

RÉSUMÉ. Voir (p. 7) la publication antérieure, concernant le rail, lié à l'assise élastique.

1. Le rail — poutre droite, liée aux appuis élastiques, équidistants. Ses déformations, dues aux changements de le température. Sollicitation extérieure plane et l'équation d'équarrissage. Les équations d'équilibre.

2. Les équations de cinq ordonnées des appuis élastiques et de leurs réactions verticales, moments fléchissants, moments résistants et des efforts tranchants. L'influence des variations locales de la charge et de la température.

3. Le serpentement thermique du rail, lié aux appuis élastiques, équidistants. L'effort longitudinal et la déformation axiale—nulle. L'élastique du rail. Relations entre les résultantes de la charge extérieure.

4. Les équations définitives de cinq ordonnées des appuis élastiques et de leurs réactions verticales, moments fléchissants, moments résistants et des efforts tranchants. Détermination de leurs termes invariants.

5. Définition du serpentement. Sa longueur locale. L'intégrale des équations (29) aux differences finies et ses constantes. Conditions aux extrémités de la longueur totale du serpentement. Le déterminant F.

6. Analyse de trois formes distinctes de l'élastique correspondant à la valeur nulle de F. Le discriminant (31) et les inégalités secondaires. Cas spécial du flambement d'une seule travée entre deux appuis consécutifs.

7. L'équation finale (35) du serpentement et les valeurs de ses deux termes. La plus petite longueur totale du serpentement. Les coefficients des appuis élastiques et la différence entre le serpentement vertical et horizontal.