Prof. Leon Karasiński.

621.791.5:625.143

Płaskie odkształcenia szyny, jako belki na sprężystym podłożu

W latach 1922—23 na życzenie Czcigodnego Prof. Dr. A. Wasiutyńskiego opracowałem całokształt wytrzymałościowych zagadnień szyny, jako belki prostej stałego przekroju, leżącej na sprężystym podłożu, lub na sprężystych podporach, równoodległych.

Znaczną pomocą w pracy były mi wzory *Clapeyron'a i Clerc-Bresse'a,* już bowiem podczas wstępnych rozważań przekonałem się o słuszności tych wzorów w zastosowaniu do jakichkolwiek trzech punktów odkształconej, z tym, jedynym zresztą zastrzeżeniem, aby pomiędzy nimi nie było żadnych punktów podparcia.

Odrazu wzory te mogły być po raz pierwszy użyte do wyznaczania odkształconych. To spostrzeżenie, tak proste, a przez lat przeszło siedemdziesiąt, od czasu pojawienia się pierwowzoru Clapeyronowskiego zgoła nieznane, — podałem do wiadomości w *Przeglądzie Technicznym* (P. T.) z r. 1923 str. 380:

„Zastosowanie wzorów Clerc'a i Clapeyron'a do wyznaczania strzałek ugięcia belek prostych".

Dalsze wyniki, uogólnione i poszerzone na belki zmiennego przekroju ogłaszałem częściowo, w miarę potrzeby i możności. Pierwszą pracę — zwięzłą wzmiankę na str. 716 rocznika 1926:

„Długa belka na podporach sprężystych, równoodległych" wydrukował „P. T." po kilkomiesięcznej zwłoce od chwili dostarczenia rękopisu. W roku 1927 w tymże „P. T." umieściłem:

„Wzory Clerc'a i Clapeyron'a" na str. 212,

„Ogólne wzory Clerc'a i Clapeyron'a" na str. 329

oraz „Ogólne równanie pięciu momentów" na str. 626.

— prace w przeważającej mierze poświęcone zagadnieniom szyny, jako belki na sprężystych podporach równoodległych. Inne, szczuplejsze opracowanie zawarłem w ustępach rozdziałów: VIII, IX i X trzeciego wydania z r. 1930. W. T-mej „Wytrzymałość Tworzyw". Najogólniejsze wyniki z tego zakresu krótko ująłem w T., polskim „Techniku", wydanie drugie z r. 1936, dział III, rozdział E. Uzupełnienia podałem w P. T. z r. 1934:

„Zginanie mimośrodkowe płaskie i wybaczanie prętów o stałym przekroju", str. 542 oraz:

„Wzory Clerc'a i Clapeyron'a dla belek prostych zginanych" str. 658.

Dalsze rozwinięcia ukazały się w P. T. z r. 1935 na str. 489:

„Odkształcenia płaskich ustrojów prętowych" oraz w tymże P. T. r. 1936 na str. 77:

„Odkształcenia przestrzennych ustrojów prętowych".

Poza tym w wydawnictwie „Katedra i Laboratorium Wytrzymałości Tworzyw Politechniki Warszawskiej", Część II z 1933 r. na str. 1 umieściłem:

„Obciążenie osiowe belki, leżącej na podporach sprężystych, równoodległych".

a w P. T. z r. 1935 na str. 202:

„Obciążenie osiowe belki, związanej z podłoże sprężystym".

Obecnie — chcę dać zarys ujęcia innych odkształceń szyny, jako belki na sprężystym podłożu, by, po tym wstępie — przejść do rozważań ostatecznych. To założenie uproszczonego podparcia, obywające się bez pośrednictwa podkładów, wystarcza dziś — w naszych warunkach. W innych — może jutro już okaże się właściwszem założenie sprężystych podpór — równoodległych.

1. Belka stałego przekroju F leży osią podłużną X na sprężystym podłożu poziomo. Pośrodku, (Rys. 1) w połowie długości $2L$ belki prowadzę oś Y pionowo w dół. Osi X nadaję zwrot (x) — w lewo.

Przy obciążeniu płaskim, zawartym w płaszczyźnie głównej XY belki, na odkształconą, leżącą również prawie zawsze w tej płaszczyźnie działają siły skupione: pionowe P i poziome H, działają siły jednostkowe: pionowe q i poziome k, a nadto — prostopadłe do płaszczyzny XY momenty: skupione K i jednostkowe m. Siły warstwowe ciągłe: q, k — w KG. na jednostkę długości pierwotnej osi X belki, a moment warstwowy m — KG.

W płaszczyźnie XY leżą jednoimienne osie główne najmniejszych momentów J wszystkich poprzecznych przekrojów belki. Osie największych momentów I tworzą płaszczyznę poziomą XZ. Oś Z ma zwrot (z) naprzód dla widzącego zwrot (x) osi X w lewo.

Odciętą x cechuję punkt bieżący B pierwotnej osi X belki, dodatnim przyrostem dx — jej sąsiedni punkt C. Pod jarzmem płaskiego obciążenia punkt B staje się punktem:

$$B' \, (x + u, \, y)$$

bieżącym odkształconej, — punkt C — jej sąsiednim punktem:

$$C' \, (x + dx + u + du, \, y + dy)$$

Przy odkształceniach nieznacznych można pomijać u wobec x oraz du — wobec dx, a nadto — kąt pochylenia ku osi X bieżącej stycznej odkształconej — mierzyć pochodną y'. Miejscową krzywiznę odkształconej — drugą pochodną y''.

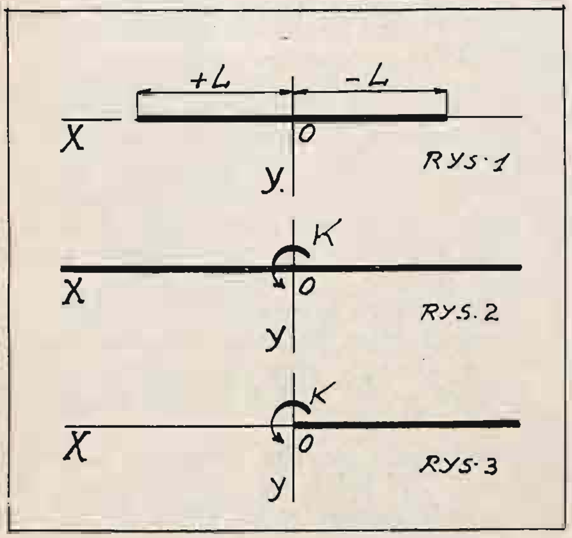
Znikome posuwy u, y rodzą sprzeciwy jednostkowe:

$$-\, hu, \; -\, py$$

sprężystego podłoża, — oba w KG na jednostkę długości pierwotnej osi X belki: Spółczynniki h, p osiowego i pionowego sprzeciwu sprężystego podłoża mają wymiar KG/cm^2.

Przy posuwaniu się zwrotem (x) wzdłuż pierwotnej osi X belki w lewo — odcięte rosną, w prawo, zwrotem $(-x)$ — maleją. Sunąc po odkształconej zwrotem *(w)* od jednego z jej końcowych punktów, spotykam po drodze kolejne składowe obciążenia.

Przy odkształceniach nieznacznych, odcięte przekroczonych punktów na odkształconej, w zależności od obranego zwrotu *(w)* stale rosną, lub wciąż maleją: zwroty: *(w)*, *(x)* są zgodne, lub sprzeczne.



Od zwrotu *(w)* zależą bieżące wypadkowe obciążenia. Przy zwrotach: *(w)*, *(x)* zgodnych — dążę z prawego końca odkształconej ku B' i sprowadzam do tego środka wszystkie kolejno mijane po drodze składowe obciążenia tej, prawej części belki, aż do punktu B' — wyłącznie.

Przy zwrotach *(w)*, *(x)* sprzecznych — zmierzam od lewego końca odkształconej ku C' i sprowadzam do tego środka obciążenie lewej części aż do punktu C' — wyłącznie. To sprowadzenie da mi dla środka C' wypadkowe bieżące: siłę osiową S, równoległą do pierwotnej osi X belki, siłę poprzeczną Q, do tej osi prostopadłą i moment gnący M o parze sił, leżących w płaszczyźnie XY.

Dodatnie są przy tym sprowadzaniu siły i sprzeciwy, jednozwrotne z osiami: X, Y — różnozwrotne zaś — ujemne. Dodatnie są momenty lewoskrętne, o skręcie pary sił — sprzecznym ruchowi na zegarowej tarczy — dla widzącego lewy zwrot *(x)* osi X.

Owe: S, Q, M — w stosunku do zwrotu *(w)* są bieżącymi wypadkowymi *tuż przed środkiem* C'. Wypadkowe *tuż za nim* otrzymam po dodaniu skupionych w punkcie C', składowych obciążenia belki, a więc w postaci sum:

$$S + H, Q + P, M + K$$

gdzie występują skończone różnice w porównaniu do: S, Q, M.

2. Zakładam, że w punkcie C' i dalej na odkształconej, aż pod sąsiedni punkt B' niema skupionych składowych obciążenia i że w tym małym przedziale brak warstwowych uskoków w rozkładzie jednostkowych obciążeń belki i sprzeciwów podłoża.

W tym założeniu miejscowej ciągłości obciążenia, sięgającej aż pod punkt B', znikomy posuw zwrotem *(w)* da nieco różniące się wypadkowe tuż przed środkiem B':

$$S + dS = S - (k - hu)\,dx$$

$$Q + dQ = Q - (q - py)\,dx$$

$$M + dM = M - (Q + m)\,dx + S\,dy$$

tu bowiem, wobec obranej sprzeczności zwrotów *(w)*, *(x)* — długostki: dx, dy należy brać ze znakami ujemnymi. Stąd po skróceniu i pominięciu momentu jednostkowego m, obcego obciążeniu szyny:

$$S' = hu - k, \quad Q' = py - q$$

$$M' = Sy' - Q \qquad (1)$$

Odkształcenia zależą od obciążenia belki i od nagrzania jej tworzywa. Przez f oznaczam jego spółczynnik rozszerzalności cieplnej względem podłoża, średni w przedziale odchyleń od pierwotnej temperatury t_0.

Po jednostajnym nagrzaniu całej belki do temperatury:

$$t_1 = t_0 + t$$

osiowe wydłużenie jednostkowe ujawni przyrost ft i będzie:

$$e = u' = \frac{S}{EF} + ft \quad . \; . \; . \; . \quad (2)$$

Tu E oznacza spółczynnik sprężystości podłużnej tworzywa, średni w przedziale t.

Bezpośrednie działanie promieni słonecznych przy niewątpliwej różnicy promieniowania w górnej i dolnej częściach szyny, odchyla ich temperatury od średniej t, niezmiennej wzdłuż osi X pierwotnej, leżącej mniej więcej pośrodku grubości g belki.

Założenie liniowego rozkładu temperatur w połaci g, pomiędzy skrajnymi:

$$t + \frac{1}{2}\,i\,,\; t - \frac{1}{2}\,i$$

u góry i dołu — da wyraz dodatkowy w równaniu odkształconej:

$$y'' = \frac{M}{EJ} + f\frac{i}{g} \quad . \; . \; . \; . \quad (3)$$

zależny od różnicy temperatur górnej i dolnej części belki. To samo w szerszym ujęciu dałem w P. T. z r. 1935 na str. 492.

3. Z pierwszego wzoru (1), na mocy zależności (2) mam równanie różniczkowe:

$$S'' - o^2\,S = G\,,\; o = \sqrt{\frac{h}{EF}} \quad . \; . \quad (4)$$

jednorodne, z gmatwającym wyrazem:

$$G = fht - k'$$

Podstawieniem szeregu:

$$S = R + Ł_0 G + Ł_1 G'' + Ł_2\,G'''' + \ldots.$$

z łatwością pozbędę się G po wyrównaniu spółczyników tego wyrazu i jego parzystych pochodnych. Stąd bezpośrednio:

$$hŁ_o + EF = 0\ ,\ hŁ_n = EFŁ_{n-1}\ ,\ n = 1, 2, \ldots$$

a nadto całka jednorodnego równania:

$$R = Ae^{ox} + Be^{-ox}$$

i ostatecznie:

$$S = Ae^{ox} + Be^{-ox} - EF/t + \frac{EF}{h}k' + \\ + \left(\frac{EF}{h}\right)^2 k''' + \ldots$$

Sprawdzanie zbieżności jest zbędne, gdy szereg urywa się na kilku wyrazach. Obciążenie jednostkowe osiowe k szyny występuje tylko na spadkach i, jako składowa jej ciężaru własnego ma wartość stałą nieznaczną. Zatem dla szyny:

$$\begin{aligned} S &= Ae^{ox} + Be^{-ox} - EF/t \\ hu &= o\ [Ae^{ox} - Be^{-ox}]. \end{aligned} \quad . \ . \quad (5)$$

Całka równania (4) jest niewątpliwie słuszna tylko w przedziale miejscowej ciągłości obciążenia osiowego, obwarowanej brakiem skupionych sił poziomych i zmian w rozkładzie osiowych obciążeń jednostkowych, lub sprzeciwów podłoża. Na rubieżach mogą jednak być przerwy ciągłości:

W początkowym punkcie przedziału może być uczepiona siła pozioma H, może się tu przerywać, lub przeinaczać zmienność osiowego jednostkowego obciążenia. Trzeba więc ów punkt przekroczyć zwrotem *(w)* i pod S rozumieć wypadkową siłę osiową tuż za początkowym punktem przedziału.

W sąsiednim, lewym względem tego punktu przedziale — słuszna jest całka *(S)* aż do rubieży. Daje posuw osiowy *(u)*, należy przeto zapewnić ciągłość przejścia, czyniąc dla punktu granicznego tych dwóch przedziałów:

$$(S) + H = S, \qquad (u) = u$$

Stąd dwa równania liniowe, służące do wyznaczania A, B.

Ich wyznacznik:

$$V = -2\sqrt{\frac{h}{EF}}$$

jest różny od zera, zawsze więc mogę te stałe uzależnić od stałych przedziału poprzedniego.

Gdy koniec belki leży swobodnie na sprężystem podłożu, jego siła osiowa S ma wartość zerową. Zapora pionowa, dosunięta do swobodnego końca belki i tam ustalona, sprowadza, gdy sztywna, końcowy posuw osiowy u do zera; gdy sprężysta — daje końcową siłę osiową:

$$S = -ju$$

w zależności od spółczynnika j oporu sprężystego wymiaru KG/cm.

Przez X oznaczam odciętą zapory, przez L odciętą końca belki. Jeżeli dla bezwzględnych wartości:

$$|X - L| > |u|$$

to zapora nie działa na belkę: końcowa siła osiowa ma wartość zerową. Przy nierówności odwrotnej natomiast:

$$S = j\,(X - L - u).$$

Zawsze więc jedna z tych zależności końcowych słuszna jest na rubieży belki, mogę przeto stałą B_0 pierwszego przedziału uzależnić liniowo od drugiej stałej A_0. W następnym przedziale, wobec niezerowego V — obie stałe —od tejże A_0 i tak kolejno dalej aż do przedziału ostatniego, gdzie znów słuszna jest jedna z zależności końcowych. Otrzymam z niej A_0 i — wstecz — wszystkie stałe. Ta droga nigdy nie zawodzi.

4. Z równania (3) i dwóch ostatnich zależności (1) mam:

$$EIy''' - Sy' = -Q \qquad (6)$$

$$EIy'''' - Sy'' - S'y' + py = q$$

ogólne równania różniczkowe wyższych rzędów dla odkształconej belki o stałym przekroju, płasko na sprężystym podłożu obciążonej.

W szczególnym przypadku siły osiowej S stałej, chcę ją mieć zawsze dodatnią w ostatnim równaniu. Wprowadzam przeto podwójny znak:

$$y'''' \pm 2ay'' + cy = \frac{q}{EJ}$$

górny — dla siły osiowej S dodatniej, ściskającej, dolny — dla tejże siły S dodatniej, rozciągającej. Tutaj więc:

$$a = \frac{S}{2EJ} > 0, \qquad c = \frac{p}{EJ} > 0$$

Obciążenie jednostkowe pionowe q szyny, jako składowa jej ciężaru własnego ma wartość stałą. Wobec tego ogólna całka równania (6):

$$y = Ae^{rx} + Be^{-rx} + Ce^{sx} + De^{-sx} + \frac{q}{p}$$

gdzie spółczynniki potęgowe:

$$r = \sqrt{\mp a - \sqrt{a^2 - c}}$$

$$s = \sqrt{\mp a + \sqrt{a^2 - c}}$$

jako pierwiastki równania:

$$z^2 \pm 2a\,z + c = 0.$$

Całka ta słuszna jest w przedziale miejscowej ciągłości obciążenia, obwarowanej stałością siły osiowej, brakiem skupionych składników obciążenia i zmian warstwowych. Na rubieżach mogą jednak zachodzić przerwy ciągłości.

W początkowym punkcie przedziału mogą więc działać skupione składowe: H, P, K; mogą się rwać, lub przeinaczać warstwy jednostkowych obciążeń belki i sprzeciwów podłoża. Trzeba więc ów punkt przekroczyć zwrotem *(w)* i pod S, Q, M —

rozumieć wypadkowe tuż za tym początkowym punktem.

W sąsiednim, lewym przedziale słuszna jest całka *(y)* aż do rubieży, dająca *(Q)*, *(M)* w myśl równania (3) i pierwszego (6). Należy więc zapewnić ciągłość przejścia, czyniąc dla granicznego punktu tych dwóch przedziałów:

$$(Q)+P=Q, \qquad (M)+K=M$$
$$(y')=y', \qquad (y)=y$$

Inaczej jeszcze, na mocy tychże równań (3), (6):

$$-\frac{(Q)+P}{EJ}=y'''\pm 2ay'$$

$$\frac{(M)+K}{EJ}=y''-f\frac{i}{g}$$

Stąd — cztery zależności, liniowe względem stałych: *A, B, C, D.* Wyznacznik tego układu:

$$\begin{vmatrix} r^3\pm 2ar, & -r^3\mp 2ar, & s^3\pm 2as, & -s^3\mp 2as \\ r^2 & , r^2 & , s^2 & , s^2 \\ r & , -r & , s & , -s \\ 1 & , 1 & , 1 & , 1 \end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} r^3, & -r^3, & s^3 & -s^3 \\ r^2. & r^2, & s^2 & s^2 \\ r, & -r, & s, & -s^2 \\ 1, & 1, & 1, & 1 \end{vmatrix}\pm 2a\begin{vmatrix} r, & -r, & s, & -s \\ r^2, & r^2, & s^2 & s^2 \\ r, & -r, & s & -s \\ 1, & 1, & 1 & 1 \end{vmatrix}=$$

$$=W=4\,sr\,(s^2-r^2)^2.$$

zależy tylko od pierwiastków *r, s*, a przeto jego zerowa, tożsamościowa wartość stanowi o miejscowej równowadze wątpliwej przy danym obciążeniu belki.

W ogólnym przypadku niezerowego *W* mogę powyznaczać stałe: *A, B, C, D* dla wszystkich kolejnych przedziałów w liniowej zależności od stałych: A_0, B_0, C_0, D_0, — pierwszego, te zaś następnie określić z warunków czołowych, przyczem znów może zajść szczególny przypadek wątpliwej równowagi, tym razem już dla całej belki.

5. Przy wartości wyróżnika

$$U=a^2-c<0$$

siły osiowe *S* są zawarte w granicach:

$$2\sqrt{EJp}>S>0$$

a nadto:

$$r=\sqrt{\mp a-i\sqrt{c-a^2}}=$$

$$=\sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{c}\mp a)}-i\sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{c}\pm a)}$$

$$s=\sqrt{\mp c+i\sqrt{c-a^2}}=$$

$$=\sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{c}\mp a)}+i\sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{c}\pm a)}$$

Tu, wobec niewątpliwej zależności

$$c-a^2=(\sqrt{c}-a)(\sqrt{c}+a)>0$$

wprowadzam oznaczenia:

$$m=\sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{c}-a)},\; n=\sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{c}+a)} \quad . \quad (7)$$

i mam dla siły osiowej *S* dodatniej, ściskającej:

$$r=m-i\,n, \qquad s=m+i\,n$$

a przeto:

$$y=[A\ Sin.\ nx+B\ Cos.\ nx]\ e^{mx}+$$
$$+[C\ Sin.\ nx+D\ Cos.\ nx]\ e^{-mx}+\frac{q}{p} \quad . \quad (8)$$

Dla siły *S* dodatniej, rozciągającej:

$$r=n-i\,m, \qquad s=n+i\,m$$

i wobec tego:

$$y=[A\ Sin.\ mx+B\ Cos.\ mx]\ e^{nx}+$$
$$+[C\ Sin.\ mx+D\ Cos.\ mx]\ e^{-nx}+\frac{q}{p} \quad . \quad (8')$$

Natomiast, przy wartości wyróżnika:

$$U=a^2-c>0$$

siły osiowe są wogóle większe, jako, że

$$S>2\sqrt{EJp}$$

Tu więc oznaczam:

$$u=\sqrt{a-\sqrt{a^2-c}}$$
$$v=\sqrt{a+\sqrt{a^2-c}} \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

i mam dla siły osiowej *S* dodatniej, ściskającej:

$$r=i\,v, \qquad s=i\,u$$

a przeto:

$$y=A\ Sin.\ vx+B\ Cos.\ vx+$$
$$+C\ Sin\ ux+D\ Cos.\ ux+\frac{q}{p} \quad . \quad (10)$$

Dla siły osiowej *S* dodatniej, rozciągającej:

$$r=u, \qquad s=v$$

a więc:

$$y=A\ Sih.\ ux+B\ Coh.\ ux+$$
$$+C\ Sih.\ vx+D\ Coh.\ vx+\frac{q}{p} \quad . \quad (10')$$

Wreszcie w szczególnym przypadku wyróżnika:

$$U = a^2 - c = 0$$

siła osiowa:

$$S = 2\sqrt{EJp}$$

Tutaj:

$$a = \sqrt{c} = w^2, \quad w = \sqrt[4]{c} = \sqrt[4]{\frac{p}{EJ}} \quad . \quad (11)$$

a przeto dla siły osiowej S dodatniej ściskającej:

$$y = (A + Bx)\ Sin.\ wx + (C + Dx)\ Cos.\ wx + \frac{q}{p} \quad . \quad . \quad (12)$$

a dla siły osiowej S dodatniej, rozciągającej:

$$y = (A + Bx)\ Sih.\ wx + (C + Dx)\ Coh.\ wx + \frac{q}{p} \quad . \quad . \quad (12')$$

Wobec niewielkiej wartości spółczynnika h sprzeciwu osiowego sprężystego podłoża szyny, zmienność siły osiowej S jest powolna, można więc z dostateczną ścisłością stosować wzory tu wyprowadzone, podzieliwszy odkształconą na połacie tak, aby w każdej z nich siła osiowa mało różniła się od stałej.

6. Przy doświadczalnym określaniu spółczynnika sprzeciwu osiowego h sprężystego podłoża nieraz trudno uniknąć momentu obciążenia. Chcę go uwzględnić. Belka (Rys. 2) nieskończona obustronnie, pokrywa całą oś X. Obciążenie jej stanowi moment K, skupiony w punkcie zerowej odciętej x.

Wobec niewątpliwego braku sił osiowych wyróżnik U jest ujemny, a przeto, według (7):

$$m = n = \sqrt[4]{\frac{1}{4}c} = \sqrt[4]{\frac{p}{4EJ}}$$

Odkształconą da wzór (8), lub (8').

Oba końce belki giną w nieskończoności, co, przy odciętych ujemnych wymaga zerowych wartości C i D dla odkształconej prawego przedziału ważkiej belki:

$$y = [A\ Sin\ mx + B\ Cos\ mx]\ e^{mx} + \frac{q}{p}$$

$$y' = m\ [(A + B)\ Cos.\ mx + (A - B)\ Sin\ mx]\ e^{mx}$$

$$y'' = 2\ m^2\ [A\ cos.\ mx - B\ Sin.\ mx]\ e^{mx}$$

$$y''' = 2\ m^3\ [(A - B)\ Cos\ mx - (A + B)\ Sin\ mx]\ e^{mx}$$

a przy odciętych dodatnich — zerowej wartości A, B — we wzorach dla odkształconej lewego przedziału tejże ważkiej belki:

$$(y) = [C\ Sin.\ mx + D\ Cos\ mx]\ e^{-mx} + \frac{q}{p}$$

$$(y') = m\ [(C - D)\ Cos\ mx - (C + D)\ Sin.\ mx]\ e^{-mx}$$

$$(y'') = 2\ m^2\ [D\ Sin.\ mx - C\ Cos.\ mx]\ e^{-mx}$$

$$(y''') = 2\ m^3\ [(C + D)\ Cos.\ mx + (C - D)\ Sin\ mx]\ e^{-mx}$$

Pomiędzy przedziałami, przy zerowej odciętej x:

$$(M) + K = M, \qquad (Q) = Q$$
$$(y') = y, \qquad (y) = y$$

a przeto:

$$-2\ m^2\ EIC + K = 2\ m^2\ EIA$$

$$C + D = A - B, \qquad C - D = A + B, \qquad D = B$$

skąd:

$$A = C = \frac{K}{4\ m^2\ EJ}, \quad B = D = O$$

i ostatecznie:

$$(y) = \frac{Ke^{-mx}}{4\ m^2\ EJ}\ Sin\ mx + \frac{q}{p}$$

$$y = \frac{Ke^{mx}}{4\ m^2\ EJ}\ Sin\ mx + \frac{q}{p}$$

dla lewego i prawego przedziału tej ważkiej belki.

Dla belki (Rys. 3) nieskończonej jednostronnie, pokrywającej ujemną oś X — stałe C, D mają wartości zerowe. Dla początkowego punktu, obciążonego skupionym momentem K, przy zerowej odciętej x:

$$EIy'' = K, \quad -Q = EIy''' = 0$$

a przeto mam:

$$K = 2\ m^2\ EIA, \qquad A - B = 0$$

i ostatecznie:

$$y = \frac{Ke^{mx}}{2\ m^2\ EJ}\ (Sin\ mx + Cos\ mx) + \frac{q}{p}$$

dla tej ważkiej belki.

7. Belka stałego przekroju (Rys. 1), dowolnej długości $2\ L$, pozioma swobodnie leży na sprężystym podłożu. Obciążenie ciężarem własnym q. I tu, wobec braku osiowych, odkształconą otrzymam ze wzoru (8).

Ma ona dawać rzędne y niezależnie od znaku odciętych x, zatem należy uczynić we wzorze:

$$C = -A, \qquad D = B$$

skąd, po zebraniu wyrazów:

$$y = 2\ A\ Sih\ mx\ Sin\ mx + 2\ B\ Coh\ mx\ Cos\ mx + \frac{q}{p}$$

$$y' = 2\ m\ (A + B)\ Sih.\ mx\ Cos.\ mx + 2\ m\ (A - B)\ Coh.\ mx\ Sin.\ mx$$

$$y'' = -4\,m^2\,B\,Sih\,.\,mx\;Sin\,.\,mx\;+$$
$$+\;4\,m^2\,A\,Coh\,.\,mx\;Cos\,.\,mx$$

$$y''' = 4\,m^3\,(A - B)\;Sih\,.\,mx\;Cos\,.\,mx$$
$$-\;4\,m^3\,(A + B)\;Coh\;mx\;Sin\,.\,mx.$$

Na obu końcach belki niema sił poprzecznych, ani momentów gnących, zatem odciętej L przynależą zerowe wartości y'', y''' w dwóch ostatnich równaniach. Wyznacznik tego układu równań liniowych jednorodnych:

$$-\frac{1}{2}\,[Sih\,2\,m\,L + Sin\,2\,m\,L]$$

jest różny od zera, zatem, wobec braku wolnych wyrazów A, B mają wartośći zerowe i ostatecznie:

$$y = \frac{q}{p}$$

wynik — od L niezależny, a więc słuszny i dla belki nieskończonej — obustronnie, lub jednostronnie.

Ważka belka stałego przekroju, swobodnie na sprężystym podłożu leżąca — nie ugina się, lecz wgniata w podłoże.

8. Ważka belka (Rys. 1) stałego przekroju swobodnie leży na sprężystym podłożu. Ma długość $2\,L$ przy pierwotnej stałej temperaturze t_0 tworzywa. Jednostajny na całej długości przyrost t daje zerowe siły osiowe na końcach belki:

$$S_1 = Ae^{oL} + Be^{-oL} - EFft$$

$$S_2 = Ae^{-oL} + Be^{oL} - EFft$$

skąd bezpośrednio:

$$A = B = \frac{EFft}{2\,Coh.\,oL}$$

i ostatecznie:

$$S = EFft\left[\frac{Coh.\,ox}{Coh.\,oL} - 1\right]$$

$$u = ft\sqrt{\frac{EF}{h}}\,\frac{Sih.\,ox}{Coh.\,oL}$$

Pośrodku belki siła osiowa ma wartość skrajną:

$$S_o = EFft\left[\frac{1}{Coh.\,oL} - 1\right]$$

a posuw— zerową. Skrajne posuwy na końcach belki:

$$u_s = \pm ft\sqrt{\frac{EF}{h}}\;tah.\,oL$$

Jeżeli w odległościach X_1, X_2, czyniących zadość nierównościom:

$$|X_1 - L| < |u_s|,\;|X_2 + L| < |u_s|$$

ustalono zapory pionowe, to pod ich naciskiem pojawią się końcowe siły osiowe:

$$S_1 = j_1\,(X_1 - L - u_1) = Ae^{oL} + Be^{-oL} - EFft$$

$$S_2 = j_2\,(X_2 + L - u_2) = Ae^{-oL} + Be^{oL} - EFft$$

Ten układ, wobec niezerowego wyznacznika da stałe A, B.

W szczególnym przypadku belki nieskończonej obustronnie, wobec nieograniczonego wzrastania odciętych dodatnich i ujemnych ze wzorów (5) mam:

$$S = -EFft \qquad u = e = 0$$

oraz naprężenie osiowe:

$$N = -Eft$$

stałe dla całej belki, nie sięgające w zwykłych warunkach granicy podatności jej tworzywa.

9. A jednak czasem, podczas letnich upałów pojawia się zesowanie szyny pionowe, lub poziome. Czy to zjawisko mieści się we wzorach? Ważka belka, nieskończona obustronnie leży na sprężystym podłożu. Ma temperaturę pierwotną t_0 — stałą na całej długości.

Zakładam, że pod działaniem przyrostu t, dającego stałą siłę osiową S dodatnią, ściskającą, lub rozciągającą, — belka uległa zesowaniu w przedziale skończonej długości l, pomiędzy skrajnymi odciętymi:

$$x_1 = l + x, \qquad x_2 = x$$

i że obustronnie, poza tym przedziałem zachowała swą pierwotną postać prostego pręta.

Zatem dla odciętych przedziału:

$$y = Ae^{rx} + Be^{-rx} + Ce^{sx} + De^{-sx} + \frac{q}{p}$$

dla pozostałych zaś, większych od x_1 i mniejszych od x_2:

$$(y) = \frac{q}{p}$$

Na obu rubieżach, wobec braku miejscowych obciążeń skupionych i zmian warstwowych:

$$(Q) = Q, \quad (M) = M,$$
$$(y') = y, \quad (y) = y$$

a przeto, wobec:

$$(y''') = (y'') = (y') = 0$$

w obu końcowch punktach przedziału :

$$y''' \pm 2\,ay' = 0, \qquad y'' = 0$$

$$y' = 0\,,\, y = \frac{q}{p}$$

Stąd dwa układy równań liniowych, jednorodnych względem stałych przedziału:

$$[y''']_1 = 0\,,\,[y'']_1 = 0\,,\,[y']_1 = 0\,,\,[y]_1 - \frac{q}{p} = 0$$

$$[y''']_2 = 0\,,\ [y'']_2 = 0\,,\ [y']_2 = 0\,,\ [y]_2 - \frac{q}{p} = 0$$

o wspólnym wyznaczniku:

$$W = 2\,sr\,(s^2 - r^2)^2$$

Zatem przy W różnym od zera oba układy dają zerowe wartości stałych A, B, C, D przedziału, niezależnie od jego rozciągłości l i umiejscowienia x. Belka pozostaje prostą na całej długości.

Może więc uledz zesowaniu tylko przy W zerowem, ta wartość bowiem wyznacznika daje stałe: A, B, C, D w postaci nieoznaczonej. W tym szczególnym przypadku równości pierwiastków: r, s, ogólna całka równania różniczkowego (6) odkształtowanej:

$$y = (A + Cx)\,e^{sx} + (B + Dx)\,e^{-sx} + \frac{q}{p}$$

czyni mu zadość niezależnie od wartości stałych całkowania.

Rysując przeto obraz zmienności rzędnych y w przedziale l, nie wyznacza im wielkości, wobec nieoznaczonych A, B, C, D. Mimo to jednak oznakę przejścia z początkowej rubieży przedziału l na końcową — stanowić nadal winien powrót do tych samych miejscowych względnych odkształceń, obciążeń i sprzeciwów podłoża.

Stąd prosty wniosek: układ równań liniowych, jednorodnych względem stałych przedziału l:

$$[y''']_2 - [y''']_1 = 0,\quad [y'']_2 - [y'']_1 = 0$$

$$[y']_2 - [y']_1 = 0,\qquad [y]_2 - [y]_1 = 0$$

powinien spełniać się niezależnie od wartości tych stałych przedziału: A, B, C, D, co niewątpliwie wymaga zerowości wyznacznika *) tego układu:

$$V = -\,16\,s^4\,(e^{sl} - 1)^2\,(e^{-sl} - 1)^2 =$$

$$= -\,64\,s^4 \left[1 - \frac{1}{2}\,(e^{sl} + e^{-sl})\right]^2$$

Zatem przy sile osiowej S dodatniej, rozciągającej, oba równe pierwiastki: s, r są rzeczywiste i zerowość wyznacznika V daje konieczną zależność:

$$\frac{1}{2}\,(e^{sl} + e^{-sl}) = Coh\,sl = 1$$

możliwą tylko przy długości l przedziału, równej zeru. Stąd — prosty wniosek, że jednostajny spadek temperatury tworzywa nie może dać zesowania szyny.

Jednostajne natomiast nagrzanie daje siłę osiową stałą:

$$S_0 = EFft$$

dodatnią ściskającą. Pozatem, przy równości pierwiastków: r, s ta siła osiowa ma szczególną wartość:

$$S_0 = 2\sqrt{EJp}$$

powodującą zesowanie belki przy dodatnim przyroście

$$t = \frac{2}{fF}\sqrt{\frac{J}{E}\,p}$$

pierwotnej jednostajnej temperatury jej tworzywa.

Oba pierwiastki są tu równe:

$$r = s = \sqrt{-a} = i\sqrt{a}$$

a więc zerowość wyznacznika V może zajść tylko przy:

$$\frac{1}{2}\,(e^{sl} + e^{-sl}) = Cos\,l\sqrt{a} = 1$$

skąd bezpośrednio:

$$l\sqrt{a} = 2\,k\,\pi,\quad a = \frac{S_0}{2\,EJ} = \sqrt{\frac{p}{EJ}}$$

i ostatecznie:

$$l_0 = 2\,k\,\pi\,\sqrt[4]{\frac{EJ}{p}}\qquad k = 1,\ 2, \ldots$$

przyczym najmniejszą długość l_0 przedziału zesowania daje k równe jedności.

10. Przyczyny powstawania zesowań są dość przejrzyste, lecz nieuchwytne. W dużej mierze działają tu drobne krzywizny pierwotnej osi podłużnej szyny, jej ciężarowe zwisania między podkładami, niestaranne układanie i niejednakowe osiadanie podłoża, bądź co bądź mało jednolitego, choć nad podziw pewnego.

W gęstwę odchyleń stałych, lub z czasem rosnących — wdziera się żmudna następczość obciążeń, z całemi hurmami drgań osłabiających, sprężysta niestrudzona gra odkształceń, niewystarczalność przerw wypoczynkowych i posępna, tajemna praca zmian wewnętrznych, niszczących, przy tęgiej, wytrwałej pomocy uskoków cieplnych.

Chcieć to przewidzieć, ująć wyrazem wzoru — próżny trud! i beznadziejność wyników, zaskakiwanych coraz to z innej strony. Można powiedzieć tylko jedno: pod zerami obu układów zależności końcowych przedziału czai się wieloraka ciżba znikomych odchyleń, nieuchwytnych przyrostów rzędnych, pochyleń osi, lekkich obciążeń pasożytnych i wahań sprzeciwów podłoża.

Wszystko to wyrównane zerami. Siły osiowe rosną wraz z nagrzaniem. Równocześnie maleje różnica pierwiastków: r, s. Dąży do zera wyznacznik W i, przy sile osiowej dość bliskiej szczególnej wartości S —, wkracza w dziedzinę wielkości po-

---

*) Wyznacznik ten ma postać pierwotną:

$$\begin{vmatrix} 1, & 1, & b + m\,rx & , d + nrx \\ 1, & -1, & b + m\,(rx + 1), & -d + n\,(-rx + 1) \\ 1, & 1, & b + m\,(rx + 2), & d + n\,(rx - 2) \\ 1, & -1, & b + m\,(rx + 3), & -d + n\,(-rx + 3) \end{vmatrix}\ m\,n\,s^4$$

przy oznaczeniach:

$$e^{sl} - 1 = m\,,\ e^{-sl} - 1 = n$$

$$sle^{sl} = b\,,\ sle^{-sl} = d$$

krytych zerami prawych stron obu układów końcowych zależności przedziału.

W granicy wyrównywa się stosunek W do tych wielkości niedozerowych, wypełniających coraz to inny słup wyznacznika. Słowem — stałe ogólnej całki przedziału, od niedawna nieoznaczone, poczynają się stawać. Sama całka przemienia swój kształt, tracąc część zależności od swej podstawy e dotychczasowej. Pojawia się w niej na chwilę zmienna niezależna w mnożnikach i szybko ginie w nowej postaci, rozpadającej się na wstawy i dostawy kołowe.

Tą drogą wyprowadzone wzory, w myśl poczynionych założeń dotyczą zesowania pionowego. Dostosowanie do poziomego nie stręczy trudności. Trzeba zamiast największego I — brać w nich najmniejszy moment bezwładności J przekroju względem pionowej osi Y, a na miejsce spółczynnika sprzeciwu pionowego p — podstawiać spółczynnik b sprzeciwu poprzecznego tegoż podłoża, również wymiaru KG/cm², lecz znacznie mniejszy liczbowo.

Stąd wniosek, że zesowanie poziome, w płaszczyźnie podłoża zachodzi przy mniejszym przyroście

$$t=\frac{2}{fF}\sqrt{\frac{J_m}{E}b}$$

pierwotnej jednostajnej temperatury szyny. Natomiast najmniejsza długość zesowania:

$$l_o=2\pi\sqrt[4]{\frac{EJ_m}{b}}$$

Zesowanie poziome częstsze ma być. Naprzekór temu działa niejednostajność działania promieni słonecznych, z lekka zwypuklająca szynę pomiędzy podkładami. Przeciwdziałając zwisaniu, nie przeważa jednak możliwości na stronę zesowań pionowych, rzadziej pojawiających się jakoby w naszych warunkach.

RÉSUMÉ. Préface: rappel des publications antérieures, concernant le rail—poutre droite, posée sur l'assise élastique, ou—sur les appuis élastiques équidistants.

1. Exposé du problème. Charges uniformément réparties, l'effort longitudinal S et tranchant Q. Le moment fléchissant M.

2. Relations (1). Déformations, dues aux changements de la température. La dilatation (2). L'équation d'équarrissage (3).

3. L'équation différentielle (4) et son intégrale donnant (5) — l'effort longitudinal S et la déformation axiale „u" du rail echauffé ou refroidi. Conditions aux extrémités.

4. Les équations différentielles (6) de l'élastique du rail fléchi. Leur intégrale et ses constantes. Cas d'équilibre ambigu local ou total de la poutre.

5. Trois formes distinctes de l'élastique correspondant à la valeur positive, négative ou nulle du discriminant U.

6. Exemple d'une poutre pesante, très longue, sollicitée par un seul moment extérieur, agissant au milieu de sa longueur ou à la section d'aval.

7. Autre exemple: Poutre pesante, posée sur l'assise élastique continue, ne fléchit pas, mais s'enfonce uniformément sous la charge de son propre poids.

8. L'effort longitudinal et l'allongement thérmique du rail, lié à son assise élastique. Conditions aux extrémités. Cas d'une longueur infinie.

9. Serpentement thérmique du rail. La température critique et la longueur locale du serpentement.

10. Causes latentes du serpentement et l'impossibilité de leur mise en équations. Serpentement vertical et transversal.