Prof. Leon Karasiński. 621.791.5:625.143

Wielosprężyste podłoże szyny

(Dokończenie)

8. Współczynniki: p, R wielosprężystego podłoża mogę określać liczbowo z pomocą wzorów: (24), (25). W tym celu bezkreśną ważką belkę wiążę z wielosprężystym podłożem i na wykresie zaznaczam jej oś poziomą, jako podstawę. Po obciążeniu siłą pionową V pojedyńczego jarzma, wykreślam odkształconą na tymże wykresie.

Dość zmierzyć pole A pomiędzy tą podstawą i krzywą zawarte, aby po uwzględnieniu całek:

$$2\,w^2 \int e^{-mx}\,\text{Sin.}\,nx\,dx =$$

$$= -\,e^{-mx}\,[m\,\text{Sin.}\,nx + n\,\text{Cos.}\,nx] + C$$

$$2\,w^2 \int e^{-mx}\,\text{Cos.}\,nx\,dx =$$

$$= e^{-mx}\,[n\,\text{Sin.}\,nx - m\,\text{Cos.}\,nx] + C$$

otrzymać p z zależności:

$$A = \frac{w^2 V}{p\,m\,n}\int_0^{\infty} e^{-mx}\Big[m\,\text{Sin.}\,nx +$$

$$+ n\,\text{Cos.}\,nx\Big]\,dx = \frac{V}{p} \quad . \; . \; . \; (27)$$

Można korzystać z niej również i przy obciążeniu, złożonym z wielu sił pionowych skupionych V_i należy jednak wtedy brać ich wypadkową V. Wynika to wprost z samego liniowego kształtu tej zależności i ma swą doniosłość, ponieważ obciążenia doświadczalne są zawsze gromadne.

Liczbowe określanie współczynnika R wymaga nadto pomiaru rzędnej Y pod siłą V pojedyńczego jarzma odkształcającego. Po ustaleniu wartości p będę miał bowiem, na mocy wzorów (20), (26):

$$m = w\,\sqrt{1 + c} = \frac{w^2\,V}{2\,p\,Y}$$

i ostatecznie:

$$R = \frac{1}{4\,p}\left(\frac{V}{Y}\right)^2 - 2\,\sqrt{E I p}$$

Przy obciążeniach gromadnych, z wielu pionowych sił złożonych — należy użyć ogólnie znanych sposobów wyrównawczych, aby z pomiarów u rzędnych y_i pod tyluż pionowymi siłami V_i — wyznaczyć R na mocy u zależności:

$$y_i = \frac{w^2}{2\,p\,m\,n}\mathop{S}_{j=1}^{u} V_j\, e^{-m\,l_{ij}}\,[m\,\text{Sin.}\,n\,l_{ij} +$$

$$+ n\,\text{Cos.}\,n\,l_{ij}],\; l_{ij} > 0,\; l_{ii} = 0,$$

$$j = 1,\,2,\,.\,.\,.\,u$$

gdzie l_{ij} oznacza poziomą odległość siły V_j od siły V_i.

Do tego samego celu lepiej nadają się zresztą wzory, pokrewne (27), obejmujące te, lub inne odcinki pola A.

Zupełnie tak samo, lecz przy obciążeniach poziomych, należy określać liczbowo współczynniki v, T tegoż wielosprężystego podłoża, konieczne do wyznaczania najmniejszej siły osiowej S, esującej poziomo poprzecznie.

Używanie do tych celów moich wzorów (24), (25), znacznie mniej sztywnych od dawnych, przynależnych szczególnej zerowej wartości współczynnika R powinno dać lepsze ilościowe czynniki, zwłaszcza, że wzór (27) zgoła od R nie zależy i to samo pole A może mieć większe, lub mniejsze wygórowania, przy różnych wartościach R.

Dalej iść po tej drodze już nie można. Nie ma podstawy do dalszych rozwinięć rzędnych y. Jeśli więc po rzetelnym ustaleniu wartości p, R, trwa nadal jeszcze różnica w ustosunkowaniu skrajnych rzędnych, to w niej należy doszukiwać się odchyleń udarowych, pochodzących od szybkości ruchu, lub zmienności obciążenia.

Chcę te wpływy z dostatecznym przybliżeniem ocenić i ująć we wzory. W tym celu ustrój sprężysty bezkreśnej prostej belki stałego przekroju, związanej z ciągłym, wielosprężystym podłożem, obdarzam zastępczą masą d na jednostkę długości pierwotnej osi X belki. Ta jednostkowa masa d ma wymiar [kg sek.^{2}/cm^2].

Ściślej mówiąc, bezkreśną zastępczą belkę ową odrywam od podłoża, obciążam wzamian wielosprężystymi jego sprzeciwami, pozbawiam ciężaru własnego i nasycam — ciągłą masą jednostkową d, wierząc, że drgania takich dwóch równoległych układów dość będą zbliżone do istotnych pionowych drgań toru.

Poza tym na odkształconej, w punkcie przyłożenia nacisku pionowego V koła, skupiam zastępczą masę r, przemieszczającą się po niej bez tarcia z poziomą szybkością s cm/sek posuwu. Ta ruchoma, skupiona masa zastępcza ma wymiar [kg sek^2/cm]. Obdarzam ją dostateczną przyczepnością, by mogła brać udział w drganiach, nie odrywając się od pionowo drgającej belki.

9. Założenie jednakowych mas równoodległych, skupionych w punktach podparcia bezkreśnej belki byłoby tu bez wątpienia słuszniejsze. Ktoby jednak chciał mu sprostać, temu zgóry wyrażam najgłębsze współczucie na własnym doświadczeniu oparte.

Prostota wzorów jest czynnikiem doniosłym, zwłaszcza iż uprzednie wyrzeczenie się pośrednictwa podkładów na korzyść zastępczego wielosprężystego podłoża upoważnia bądź-co-bądź do wtórnego odstępstwa — porzucenia skupień miejscowych na rzecz jednostajnego rozłożenia mas wzdłuż zastępczego ustroju bezkreśnej belki.

Ostatnie założenie — ugięć sprężystych, liniowych względem sił odkształcających da mi dla lewej części owego ustroju belki, nadal jeszcze bezkreśnej, choć już nieważkiej — w obszarze jej odciętych dodatnich:

$$v = z\, e^{-mx} \left[\frac{m}{n} \, Sin.\, nx + Cos.\, nx \right] \quad . \quad . \quad (28)$$

a dla prawej — w obszarze odciętych ujemnych:

$$v = z\, e^{mx} \left[- \frac{m}{n} \, Sin.\, nx + Cos.\, nx \right] \quad . \quad . \quad (29)$$

W obu wzorach przez v oznaczyłem bieżące ugięcie, bezpośrednio zależne od zmiennej x i pośrednio od czasu t — przez ugięcie z na osi Y pod siłą uogólnioną pionową Z — odkształcającą, udarową, lub zmienną. To założenie więc wprowadza podobieństwo ugięć v, pochodzących od siły Z — do ugięć y — spod jarzma stałej, niezmiennej siły V, na tejże osi Y leżącej.

Wobec tożsamości obustronnych odkształconych, ograniczam się do jednej z nich — lewej, i po przeróżniczkowaniu względem x:

$$v' = -2\, z\, w^2 e^{-mx} \frac{1}{n} \, Sin.\, nx$$

$$v'' = 2\, z\, w^2\, e^{-mx} \left| \frac{m}{n} \, Sin.\, nx - Cos.\, nx \right|$$

mam energię potencjalną ustroju bezkreśnej belki:

$$P = \int_0^\infty [E\, I\, (v'')^2 + R\, (v')^2 + p\, v^2]\, dx =$$

$$= z^2 \int_0^\infty [4\, E\, I\, w^4 \left(\frac{m}{n} \, Sin.\, nx - \right.$$

$$\left. - Cos.\, nx \right)^2 + 4\, R\, \frac{w^4}{n^2} \, Sin.^2\, nx +$$

$$+ p \left(\frac{m}{n} \, Sin.\, nx + Cos.\, nx \right)^2]\, dx$$

Poza tym ze wzorów (18), (19):

$$R = 2\, E\, J\, (m^2 - n^2),\ 4\, E\, J\, w^4 = p$$

$$4\, R\, m^4 = 2p\, (m^2 - n^2)$$

a nadto jeszcze:

$$2 \int e^{-mx}\, Sin.^2\, nx\, dx =$$

$$= - e^{-2\, mx} \left[\frac{1}{2\, m} + \frac{n\, Sin.\, 2\, nx - m\, Cos.\, 2\, nx}{4\, w^2} \right]$$

$$2 \int e^{-2\, mx}\, Cos.^2\, nx\, dx =$$

$$= - e^{-2\, mx} \left[\frac{1}{2\, m} - \frac{n\, Sin.\, 2\, nx - m\, Cos.\, 2\, nx}{4\, w^2} \right]$$

ostatecznie więc:

$$P = \frac{p\, z^2}{n^2} \left[m^2 \left(\frac{1}{2\, m} - \frac{m}{4\, w^2} \right) + \right.$$

$$\left. + n^2 \left(\frac{1}{2\, m} + \frac{m}{4\, w^2} \right) + (m^2 - n^2) \left(\frac{1}{2\, m} - \frac{m}{4\, w^2} \right) \right] =$$

$$= \frac{p\, z^2}{4\, m\, n^2\, w^2} \left[m^2\, (m^2 + n^2 - m^2) + n^2\, (m^2 + n^2 + m^2) + \right.$$

$$\left. + (m^2 - n^2)\, (m^2 + n^2 - m^2) \right] = p\, \frac{m}{w^2}\, z^2 \quad . \quad . \quad (30)$$

Różniczkowanie względem czasu t da mi

$$\frac{dv}{dt} = \dot{z}\, e^{-mx} \left[\frac{m}{n} \, Sin.\, nx + Cos.\, nx \right],\ \frac{dz}{dt} = \dot{z}$$

a przeto energia kinetyczna ustroju bezkreśnej belki:

$$K = \dot{z}^2\, d \int_0^\infty e^{-2\, mx}\, \frac{m}{n} \left(Sin.\, nx + \right.$$

$$\left. + Cos.\, nx \right)^2 dx + \frac{1}{2}\, r\, \dot{z}^2$$

skąd, wobec:

$$2 \int e^{-2\, mx}\, Sin.\, nx\, Cos.\, nx\, dx =$$

$$= - e^{-2\, mx}\, \frac{m\, Sin.\, 2\, nx + n\, Cos.\, 2\, nx}{4\, w^2}$$

będę miał ostatecznie:

$$K = \frac{1}{2}\, r\, \dot{z}^2 + \frac{1}{2}\, \dot{z}^2\, d \left[\frac{m^2}{n^2} \left(\frac{1}{2\, m} - \frac{m}{4\, w^2} \right) + \right.$$

$$\left. + 2 \frac{m}{n} \frac{n}{4\, w^2} + \left(\frac{1}{2\, m} + \frac{m}{4\, w^2} \right) \right] = \frac{\dot{z}^2\, d}{8 m n^2 w^2} \left[m^2\, (m^2 + \right.$$

$$\left. + n^2 - m^2) + 2\, m^2\, n^2 + n^2\, (m^2 + n^2 + m^2) \right] + \frac{1}{2}\, r\, \dot{z}^2 =$$

$$= \frac{\dot{z}^2\, d}{8\, m\, w^2}\, (5\, m^2 + n^2) + \frac{1}{2}\, r\, \dot{z}^2 = \frac{\dot{z}^2\, d}{8\, m\, w^2}\, (4\, m^2 +$$

$$+ 2\, w^2) + \frac{1}{2}\, r\, \dot{z}^2 = \frac{1}{2}\, \dot{z}^2 \left[r + d \left(\frac{1}{2\, m} + \frac{m}{w^2} \right) \right] \quad (31)$$

Wyraźnie się tu zaznacza zależność K od masy ruchomej r, a nadto — od skupionej w punkcie przyłożenia siły Z zastępczej masy:

$$e = d \left[\frac{1}{2\, m} + \frac{m}{w^2} \right] \quad . \quad . \quad (32)$$

ustroju bezkreśnej belki. Wobec tego wszystkiego zwykłe różniczkowanie da mi tu:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial K}{\partial \dot{z}} \right] - \frac{\partial K}{\partial z} + \frac{\partial P}{\partial z} =$$

$$= (e + r)\, \frac{d^2\, z}{d\, t^2} + 2\, \frac{p\, m}{w^2}\, z = Z \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (33)$$

znane równanie *Langrange'a*.

10. Całka tego równania ruchu (33) zależy od rodzaju zmienności Z. Stałą składową tej siły oznaczam przez V, przez G — okresowo zmienną, lub wogóle zależną od czasu; trzecia składowa pochodzi od przeciwdziałania zastępczej ruchomej masy r, skupionej w punkcie przyłożenia owej siły Z.

Umiejscowienie osi Y nie wpływa na bieżące własności bezwładnościowe, czy sprężystościowe ustroju bezkreśnej belki, mogę więc siłę Z unieruchomić wraz z osią Y uwzględniwszy odkształcające działanie pozbawionej ruchu masy r.

Z góry przy tym wyłączam okresy rozruchu i hamowania; poziome przyśpieszenia na prostym torze pomijam, jako znikome i bez wpływu na ugięcia pionowe. Ze stałą przeto poziomą szybkością s

wspina się masa r po łuku odkształconej, wklęsłym tu względe osi X.

Wywiera więc pionowy dodatkowy nacisk:

$$2\, zrs^2 w^2$$

jako że miejscowa krzywizna owego łuku:

$$v_0'' = -\, 2\, zw^2.$$

Ostatecznie mam siłę pionową:

$$Z = V + G\,(t) + 2\, z\, r\, s^2\, w^2$$

oraz równanie ruchu:

$$(e + r)\, \frac{d^2 z}{d\, t^2} + 2 \left[\frac{pm}{w^2} - r\, s^2\, w^2 \right] z =$$

$$= V + G\,(t) \quad . \; . \; . \; . \quad (34)$$

Jego całka ogólna

$$z = A\, Sin\, (j\, t + a) - \frac{1}{(e + r)\, j} \left[\frac{V}{j} + \right.$$

$$\left. + \int_o^t G\,(u).\; Sin.\; j\,(t - u)\, d\,u \right] \quad . \; . \quad (35)$$

gdzie oznaczyłem przez:

$$j = \sqrt{2\, \frac{p\, m - r\, s^2\, w^4}{(e + r)\, w^2}} \quad . \; . \; . \quad (36)$$

w ostatnim jej wyrazie czas t gra rolę zmiennej wtrąconej i niezależnej od zmiennej całkowania u.

Łatwo sprawdzić, że całka (35) czyni zadość równaniu różniczkowemu (34), tu bowiem:

$$\frac{dz}{dt} = j\, A\; Cos.\; (j\, t + a) +$$

$$+ \frac{1}{e + r} \int_o^t G\,(u)\; Cos.\; j\,(t - u)\; d\,u.$$

$$\frac{d^2 z}{d\, t^2} = -\, j^2\, A\; Sin.\; (j\, t + a) +$$

$$+ \frac{1}{e + r} [G\;\;(t) - \int_o G\,(u)\; Sin.\; j\,(t - u)\; du]$$

Pierwszy wyraz prawej części wzoru (35) daje drgania własne ustroju bezkreśnej belki, odpowiadające zerowym składowym: V, G oraz szybkości s — równej zeru. Ich okres:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{(e + r)\, w^2}{2\, pm}} \quad . \; . \; . \quad (37)$$

zależy od skupionej masy r, drgającej wraz z ustrojem.

Okres drgań własnych ustroju bezkreśnej belki, bez owej masy r:

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{e\, w^2}{2\, p\, m}} = 2\, \pi \sqrt{\frac{d}{2\, p} \left(1 + \frac{w^2}{2\, m^2} \right)} \quad . \quad (38)$$

zależy od jednostkowej masy d tego ustroju i od współczynników p, R wielosprężystego podłoża.

Drugi wyraz całki (35), zawierający V przerasta wszelką miarę, gdy j dąży do zera. Stąd — niebezpieczna dla toru stała szybkość:

$$s_0 = \sqrt{\frac{p\, m}{r\, w^4}} = \sqrt{\frac{4\, E\, J\, m}{r}} \quad . \quad (39)$$

poziomego posuwu masy r.

Ostatni wreszcie wyraz tejże całki daje drgania ustroju bezkreśnej belki, pochodzące od siły wymuszającej G. Okresowo zmienną siłę G z pomocą analizy harmonicznej rozłożę na składowe ogólnego kształtu:

$$h\; Sin.\; (\, kt + l).$$

Każda z tych składowych może mieć swój odrębny okres zmienności w czasie:

$$T_k = \frac{2\, \pi}{k}$$

każdej z nich, na mocy wzoru:

$$\int G\,(u)\;\; Sin.\;\; j\;\; (t\; -\; u)\;\; du =$$

$$= h \int\; Sin.\;\; (kt + l)\;\; Sin.\;\; j\;\; (t\; -\; u)\;\; du =$$

$$= \frac{h}{j^2 - k^2} \Big[\; j\;\; Sin\;\; (ku + l)\;\; Cos.\;\; j\;\; (t - u) +$$

$$+\; k\;\; Cos\;\; (ku + l)\;\; Sin.\;\; j\;\; (t - u)] + C.$$

odpowiada złożony wyraz całki:

$$\frac{h}{(e + r)\;\, (j^2 - k^2)} \Big[\;\, Sin.\;\; (kt + l) -$$

$$-\;\, Sin.\;\, l\;\; Cos.\;\; jt - \frac{k}{j}\;\; Cos.\;\; l.\;\; Sin.\;\; jt]$$

Występują tu mnożniki: j, k zmiennej t a nadto, w mianowniku — różnica ich kwadratów, skąd — możliwość nadmiernego wzrostu tego wyrazu przy k zbliżonym do j, stanowiąca istotę oddźwięku sprężystego w stosunku do tej składowej okresowo zmiennej siły G, wywołującej drgania ustroju bezkresnej belki.

11. Zastępcza masa e ustroju bezkreśnej belki, skupiona w punkcie przyłożenia siły Z może być określona pośrednio przy udarowej próbie. Wymaga to podwójnego pomiaru ugięć. Ustrój bezkreśnej belki stopniowo w tym celu obciążam ciężarem ga, skupionym na osi Y. Z pomocą samopiszących przyrządów mierzę ugięcia y w dowolnych punktach.

Następnie masę a podnoszę do wysokości h ponad pierwotną oś belki, puszczam, by mogła swobodnie spaść na nią i z wykresów samopiszących przyrządów znajduję ugięcia v udarowe w tych samych punktach. Wyrównanie ilorazów v/y da mi współczynnik udarowy u, a przezeń — e.

Istotnie, na mocy wzorów (24), (25), (26) ugięcia y będą tu liniowo zależne od:

$$z_0 = \frac{g\; a\; w^2}{2\; p\, m} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (40)$$

a przeto, w myśl wzorów (28), (29):

$$\frac{v}{y} = \frac{z}{z_0} = u \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (41)$$

Swobodnie spadająca masa a uderza skupioną zastępczą masę e ustroju bezkreśnej belki z końcową szybkością:

$$b = \sqrt{2gh}$$

a przeto początkowa szybkość obu tych mas złączonych:

$$\frac{a\,b}{a + e}$$

Ich początkowa energia kinetyczna:

$$\frac{1}{2}\ \frac{a^2\,b^2}{a + e}$$

wraz z energią spadku z istotniej, bo nie zastępczej masy a:

$$g\,a\,z$$

da przyrost energii potencjalnej ustroju bezkreśnej belki:

$$\frac{1}{2}\,z\,Z = \frac{1}{2}\,g\,a\,\frac{z^2}{z_0}$$

jako że w obszarze ugięć sprężystych, liniowo zależnych od sił odkształcających:

$$\frac{z}{z_0} = \frac{Z}{g\,a}$$

Stąd bezpośrednio:

$$\frac{1}{2}\,g\,a\,\frac{z^2}{z_0} - g\,a\,z - \frac{1}{2}\,\frac{a^2\,b^2}{a + e} = 0$$

inaczej jeszcze:

$$z^2 - 2\,z_0\,z - \frac{a\,b^2\,z_0}{(a + e)\,g} = 0$$

i ostatecznie:

$$z = z_0\left[1 + \sqrt{1 + \frac{a\,b^2}{(a + e)\,g\,z_0}}\right] \quad . \quad (42)$$

ponieważ z jest większe od z_0.

Podstawienie (41) da mi tu na mocy (40):

$$u = 1 + \sqrt{1 + \frac{4\,p\,h\,m}{(a + e)\,g\,w^2}} \quad . \quad . \quad . \quad (43)$$

skąd wypadkowa zależność dla skupionej na osi Y zastępczej masy:

$$e = \frac{4\,p\,h\,m}{u\,(u - 2)\,g\,w^2} - a \quad . \quad . \quad . \quad (44)$$

ustroju bezkreśnej belki.

Ocena ruchomej masy r jest łatwiejsza, choć i tu leży trudność w potrąceniu wpływu sprężystych połączeń kół z nadwoziem. Przy skrajnym nacisku na oś, dochodzącym do 20 tonn, ze wzoru (39) otrzymam niebezpieczną dla naszych torów stałą szybkość 135 km/godz, obniżającą się do 128 km/godz dla małych wartości współczynnika R. Wynik aż nazbyt wiarogodny — mimo wyraźnej przesady w ocenie ruchomej masy r.

We wzorach tu wyprowadzonych nie uwzględniłem uporności odkształceń, rosnącej niewątpliwie wraz z poziomą szybkości s posuwu ruchomej masy r. Nadto odrazu już zgóry pominąłem wpływ jednostajnego podparcia podkładami, a zwłaszcza— oddziaływanie ich zagęszczeń pod złączami szyn, dające miejscowe przyrosty sprężystych sprzeciwów podłoża — przy nagłych spadkach sztywności samych szyn na stykach i udarowych źródłach, kryjących się w tych przerwach ciągłości.

Te sprzeczne, częściowo równoważące się oddziaływania przynależą wyłącznie już tylko ocenie doświadczalnej, na ścisłych możliwie najprostszych wzorach opartej. Do takowych — wiedzie założenie wielosprężystego podłoża bezkreśnej zastępczej belki stałego przekroju. Tą drogą otrzymane wzory są niewątpliwie ściślejsze, a przy tym mniej sztywne od stosowanych dotychczas.

RÉSUMÉ. Voir les publications antérieures, concernant le rail, lié à l'assise élastique (p. 7) et aux appuis élestiques équidistants (p. 130).

1. Force verticale, sollicitant le rail lié aux appuis. Les relations, peu maniabiles à cause de leur forme bien compliquée.

2. L'assise multélastique obviant à cet inconvénient. Les réactions uniformément reparties sur toute la longueur infinie du rail.

3. La torsion du rail, lié à l'assise multélastique. Le moment tordant et l'angle de torsion. Les relations fondamentales.

4. La sollicitation extérieure du rail. Ses composantes; la force axiale, l'effort tranchant et le moment fléchissant. L'équation d'équarrissage.

5. Le serpentement thérmique du rail, lié à l'assise multélastique. La force axiale critique et la valeur des coefficients v. T.

6. La force verticale agissant sur le rail lié à l'assise multélastique. L'intégrale de l'équation d'équarrissage et ses constantes.

7. L'équation de l'élastique et le cas special de l'assise élastique correspondant à la valeur nulle du coefficient R.

8. Détermination des coefficients p. R. de l'assise multélastique. La masse fictive d uniformément repartie sur toute la longueur du rail et la masse mobile r.

9. Sollicitation dynamique. L'influence de la vitesse du mouvement sur le rail et des forces périodiques. L'équation de Lagrange.

10. L'intégrale de l'équation du mouvement. Les oscillations du rail, dues à la vitesse de translation et aux forces periodiques.

11. La déformation du rail après la chute d'une masse pesante. La valeur numérique de la masse fictive d. Va vitesse dangereuse.