tów i inne, nie zostały z braku widocznej potrzeby wykonane.

Tok robót przedstawiał się zgoła odmiennie od tego jaki w swoim czasie proponowałem. Załączone zdjęcia fotograficzne i dołączone do nich napisy w następnym zeszycie „Cementu", dają pewien pogląd na rozwój wypadków; dołączymy dla uzupełnienia kilka drobnych uwag, ograniczając się do przedstawienia szczegółów bardziej wartościowych. *(Dok. n.)*

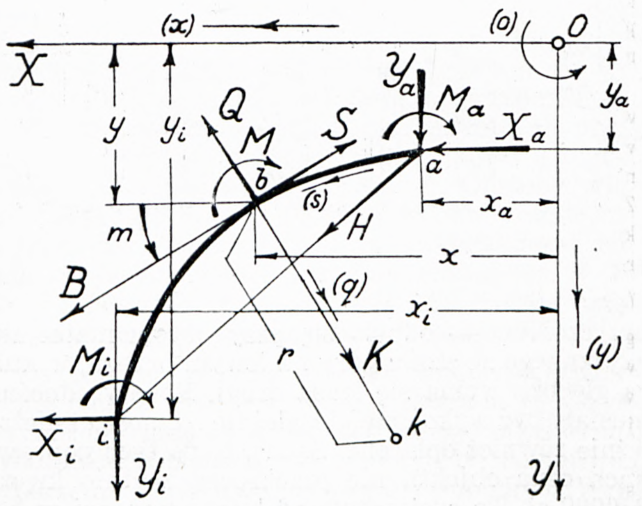
PŁASKIE USTROJE PRĘTOWE

Prof. Leon Karasiński, Warszawa

1. W myśl obowiązujących przepisów, przy wyznaczaniu hyperstatycznych ustroju prętów betonowych, wzmocnionych stalowemi wkładkami, a więc niejednolitych, należy zastępczo brać sprowadzone przekroje jednolite betonowe i — sprowadzone ich momenty. Środki przekrojów sprowadzonych tworzą n i e o d k s z t a ł c o n ą, wogóle różną od pierwotnej osi pręta niejednolitego.

Prosta, lub krzywa oś pierwotna p ł a s k i e g o pręta zawarta jest w p ł a s z c z y ź n i e g ł ó w n e j, dzielącej wszystkie jego niejednolite przekroje na połówki, symetryczne co do zarysów obwodu i styków stali z betonem. Zatem w płaszczyźnie głównej pręta prostego niejednolitego leży jego nieodkształcona i wszystkie siły płaskiego obciążenia, wraz z parami momentów.

Pręty płaskiego ustroju mają wspólną płaszczyznę główną. Obieram w niej (Rys. 1) prostokątny układ osi X, Y.



Rys. 1.

Z w r o t e m (x), (y) nazywam kierunek wzrostu odciętych x, — rzędnych y. S k r ę t e m (o) zwę kierunek obrotu dodatniej osi X o kąt prosty — aż do pokrycia dodatniej osi Y. Łuki nieodkształconej jednego z prętów ustroju mierzę od początkowego jej punktu a (x_a, y_a) w kierunku z w r o t u (s).

Końcowy punkt i (x_i, y_i) odcina łuk l — długość nieodkształconej. W pośrednim punkcie b (x, y) kończy się bieżący łuk s. Nieodkształcone sąsiednich prętów ustroju schodzą się w punktach węzłowych a, i pręta. Odcinek ai prostej stanowi *oś węzłową*. Jej międzywęzłową długość oznaczam przez h, osiowe rzuty przez:

$$h_x = x_i - x_a \quad , \quad h_y = y_i - y_a$$

Bieżący punkt b nieodkształconej stanowi środek sprowadzonego przekroju F. Jego sprowadzony moment bezwładności względem osi środkowej, prostopadłej do płaszczyzny głównej XY oznaczam przez I, przez E — spółczynnik sprężystości podłużnej betonu. Z tego punktu b wyprowadzam styczną bB i normalną bK nieodkształconej. Dodatni przyrost ds daje z w r o t (s) stycznej bB, a przeto kąt m jej pochylenia ku osi X mierzę od zwrotu (x) do zwrotu (s) w kierunku skrętu (o). Z w r o t (q) normalnej bK otrzymam skrętem (o) zwrotu (s) o kąt prosty.

Na węzeł a działają wypadkowe siły: X_a, Y_a i moment M_a sąsiednich prętów ustroju. Zamiast składowych: X_a, Y_a mogę wziąć na osi węzłowej wypadkową s i ł ę w ę z ł o w ą H i prostopadłą s i ł ę p o p r z e c z n ą A. Ich składowe spełniają warunki:

$$\begin{gathered} H_x h = H h_x , \quad H_y h = H h_y , \\ A_x h_x + A_y h_y = 0 , \; H_x + A_x = X_a , \; H_y + A_y = Y_a \end{gathered} \tag{1}$$

Zatem, obrawszy zgodny z (s) z w r o t (w) — posuwania się wzdłuż pręta, wyznaczę dla środka b wypadkowe bieżące: siłę osiową S na bB, siłę tnącą Q na bK i moment gnący M, prostopadły do płaszczyzny głównej XY. Siły osiowe mają zwrot (w), gdy są ujemne, ściskające, lub — zwrot przeciwny $(-w)$, gdy są dodatnie, rozciągające. Przy zwrotach (s), (w) zgodnych ujemna siła tnąca ma zwrot (q), dodatnia — zwrot przeciwny $(-q)$; ujemny zaś moment gnący ma skręt (o), dodatni moment skręt przeciwny $(-o)$.

Zatem dla środków b, i:

$$\begin{gathered} M = M_a - X_a (y - y_a) + Y_a (x - x_a) + Z_b \\ M_i = M_a - X_a h_y + Y_a h_x + Z_i \end{gathered}$$

gdzie przez Z_i, Z_b oznaczyłem wypadkowe momenty obciążenia zewnętrznego całego pręta, oraz — jego części ab. Stąd:

$$\begin{gathered} A_x h^2 = -(M_i - M_a - Z_i) h_y , \; A_y h^2 = (M_i - M_a - Z_i) h_x \\ (M - M_a - Z_b) h = (M_i - M_a - Z_i) [(x - x_a) h_x + \\ + (y - y_a) h_y] + H [(x - x_a) h_y - (y - y_a) h_x] \end{gathered} \tag{2}$$

Gdy nieodkształcona pokrywa oś węzłową:

$$\begin{gathered} h = l , (x - x_a) h = s h_x , (y - y_a) h = s h_y \\ (M - M_a - Z_b) l = (M_i - M_a - Z_i) s \end{gathered}$$

Tu s oznacza odcinek ab prostej. Z tych, czy innych wzorów, dla końcowego punktu węzłowego i otrzymam: wypadkowe S_i, Q_i, M_i, lub X_i, Y_i, M_i oddziaływania pręta ai na dalsze pręty płaskiego ustroju.

Po odkształceniu punkt b stanie się punktem bieżącym

$$b' \; (x + u, y + v)$$

odkształconej pręta niejednolitego. Jej styczna $b'B'$ utworzy kąt:

$$m + w$$

z osią X. Różnicę tych przyrostów kątowych w dowolnych dwóch punktach nieodkształconej, np. w początkowym a i w bieżącym b da wzór *Clapeyron'a:*

$$w_b - w_a = W_{ab} = \int_0^s \frac{M}{EJ} ds \tag{3}$$

a różnice przyrostów osiowych — dwa wzory Bresse'a:

$$\begin{aligned} u_b - u_a &= -(y_b - y_a)\, w_a + U_{ab} - y_b W_{ab} = \\ &= -(y_b - y_a)\, w_b + U_{ab} - y_a W_{ab} \\ v_b - v_a &= (x_b - x_a)\, w_a + V_{ab} + x_b W_{ab} = \\ &= (x_b - x_a)\, w_b + V_{ab} + x_a W_{ab} \end{aligned} \tag{4}$$

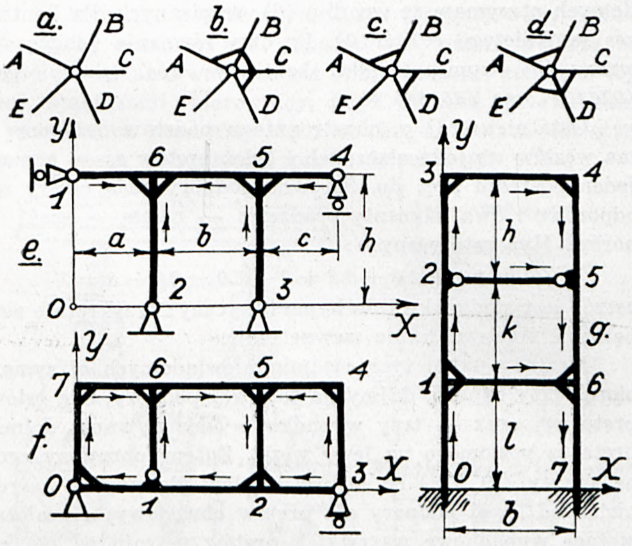
$$U_{ab} = \int_0^s \left[\frac{S}{EF} \cos m + \frac{M}{EJ} y \right] ds + (t - t_o)(x - x_a) f$$

$$V_{ab} = \int_0^s \left[\frac{S}{EF} \sin m - \frac{M}{EJ} x \right] ds + (t - t_o)(y - y_a) f$$

dla niejednolitego pręta prostego, lub niezbyt krzywego, przy jednostajnem nagrzaniu go, lub ochłodzeniu od t_o do t, a nadto — przy jednakowym spółczynniku f rozszerzalności cieplnej betonu i stali. Ściślejsze i ogólniejsze wzory ogłosiłem w Przeglądzie Technicznym z 1935 r. str. 489 i 545.

2. Łączenie pręta w punkcie węzłowym z podporą, lub sąsiedniemi prętami wspólnej płaszczyzny głównej stanowi węzeł płaskiego ustroju. W ę z e ł p r z e g u b o w y wp łączy pręty przegubem wieloszczękowym o wspólnej osi przegubowej, prostopadle przebijającej płaszczyznę główną ustroju w punkcie węzłowym. Dodatkowe sztywne wiązania międzyprętowe na węzłach tworzą z ł ą c z a, częściowo, lub całkowicie usztywniające węzeł przegubowy.

W ę z e ł s z t y w n y ws o n złączach wiąże pręty, jak przegubowy, lecz z dodatkiem n sztywnych, obrotowo od siebie niezależnych połączeń, co najmniej dwuprętowych. Węzeł wp, łączący przegubowo (Rys. 2, a) np. pięć prętów:



Rys. 2.

A, B, C, D, E staje się węzłem sztywnym o jednem złączu — przez sztywne związanie końców dwóch, trzech, czterech (Rys. 2, b), lub wszystkich pięciu prętów na węźle. Dwa niezależne od siebie złącza, np.: AB — CD, lub: AB — CDE — dadzą ws o dwóch złączach (Rys. 2, c, d).

Pręty, łączone węzłem płaskiego ustroju, mają te same posunięcia u, v wspólnego im punktu węzłowego. Ten płaski posuw osi przegubowej można ograniczyć, ująwszy ją w szczęki podpory posuwnej, lub przegubowej. Węzeł oprze się na podporze, nieuszczuplającej swobody przyrostów kątowych w jego prętów i złącz, a wszystkim prętom jednego złącza przynależy wspólny przyrost kątowy.

Sztywne podparcie pręta polega na unieruchomieniu jego osi przegubowej i sztywnem związaniu z podporą dowolnej ilości prętów i złącz. Pozostałe pręty i złącza tego węzła, osadzonego na podporze sztywnej — mają nadal swobodę przyrostów kątowych w, od siebie niezależnych.

W punktach węzłowych podparcia, lub osadzenia, pod jarzmem płaskiego obciążenia rodzą się odpory — niewiadome siły zewnętrzne ustroju. Podpora r posuwna wzbudza jedną siłę odporową, przegubowa p — dwie, sztywna s — dwie siły i moment odporowy. Zatem ogólną ilość odporów płaskiego ustroju prętowego, płasko obciążonego wyrażę wzorem:

$$(o) = (r) + 2\,(p) + 3\,(s)$$

gdzie nawias — oznacza ilość.

Pręty o wspólnej płaszczyźnie głównej mogą być: pp— d w u p r z e g u b o w e, obustronnie na węzłach łączone przegubowo, — ps — j e d n o p r z e g u b o w e, wiązane sztywnem złączem na jednym węźle, na drugim — przegubowo, wreszcie — ss — b e z p r z e g u b o w e, obustronnie na węzłach wiązane sztywnemi złączami. Pręt jednostronnie związany z ustrojem jest tylko wspornikiem, ramieniem dla sił zewnętrznych. Jego obciążenie należy przeto sprowadzić do punktu węzłowego, a sam pręt — wyłączyć z ustroju.

Płaskie obciążenie zewnętrzne wzbudza niewiadome siły wewnętrzne płaskiego ustroju na węzłach — wypadkowe wzajemnego oddziaływania prętów. Na przegub działa siła węzłowa H i poprzeczna A; złącza dorzucają momenty węzłowe. Zatem na pręt pp działają cztery siły wewnętrzne, na ps — pięć, a na ss — sześć. Warunki równowagi pręta zmniejszają ilość tych niewiadomych o trzy: każdy pręt pp wprowadza jedną hyperstatyczną siłę węzłową, pręt ps siłę i moment, a każdy pręt ss siłę węzłową i dwa momenty węzłowe.

Do wyznaczania tych niewiadomych służą warunki równowagi węzłów. Mam więc dla każdego węzła po dwa równania sił, działających na przegub, a nadto jeszcze po jednem równaniu momentów dla każdego niezależnego złącza. Zatem ogólną ilość hyperstatycznych sił i momentów płaskiego ustroju prętowego, płasko obciążonego wyrażę wzorem:

$$(i) = (pp) + 2(ps) + 3(ss) + (o) - 2(wp) - 2(ws) - (n)$$

gdzie znowu nawias — oznacza ilość. Tyleż równań, linjowych względem owych hyperstatycznych otrzymam z moich wzorów, wypisanych dla tych, czy innych konturów ustroju.

Dążąc po nieodkształconej z pręta na pręt przez złącza sztywnych węzłów płaskiego ustroju, wyodrębnię zeń ciągły kontur, złożony z prętów ss i zakończony prętami ss, lub ps. Kolejne jego złącza, jako sztywne — przenoszą wypadkowe obciążenia, oddając następnemu prętowi — końcowe przyrosty odkształceń poprzedniego. Kontur więc podlega warunkom równowagi prętów tworzących, a przyrosty jego odkształceń czynią zadość wzorom *Clapeyron'a i Bresse'a.*

Kontur otwarty (ab) stanowi nieprzerwany ciąg kolejnych prętów ss, łączących początkowy jego węzeł a z końcowym b. Oba końcowe pręty jednoprzegubowe cechują otwarty kontur pp, oba bezprzegubowe — kontur ss; jeden końcowy pręt bezprzegubowy drugi jednoprzegubowy — kontur ps. Złączenie obu końcowych węzłów konturu otwartego w jeden węzeł zamykający o spółrzędnych: x_o, y_o daje zamknięty kontur: zpp, zps, lub — zss. Przynależą mu zerowe wartości lewych części wzorów (4). Stąd:

$$U - y_o W = 0, \qquad V + x_o W = 0 \tag{5}$$

wzory dla zamkniętego konturu zpp, lub zps.

Poza tem lewa część wzoru (3) staje się zerem dla zss, a więc:

$$U = o, \quad V = o, \quad W = o \tag{6}$$

dla zamkniętego konturu *zss*. Rugując ten, lub ów przyrost kątowy ze wzorów (4) otrzymam po uporządkowaniu:

$$(x_b - x_a)(u_b - u_a) + (y_b - y_a)(v_b - v_a) =$$
$$= (x_b - x_a) U_{ab} + (y_b - y_a) V_{ab} + (x_a y_b - x_b y_a) W_{ab} \quad (7$$

wzór dla pręta płaskiego, lub otwartego konturu *(ab)*.

Dwa otwarte kontury *(ab)*, *(bc)* mogę związać sztywnem złączem wspólnego węzła *b*, lub wspólnym prętem tego węzła. Po wyrugowaniu przyrostu w_b ze wzorów (4), będę miał:

$$(x_c - x_b)(v_b - v_a) - (x_b - x_a)(v_c - v_b) =$$
$$= (x_c - x_b)[V + x_a W]_{ab} - (x_b - x_a)[V + x_c W]_{bc} \quad (8)$$
$$(y_c - y_b)(u_b - u_a) - (y_b - y_a)(u_c - u_b) =$$
$$= (y_c - y_b)[U - y_a W]_{ab} - (y_b - y_a)[U - y_c W]_{bc} \quad (9)$$

a nadto — wzór w dwóch postaciach:

$$(x_c - x_b)(u_b - u_a) + (y_b - y^a)(v_c - v_b) =$$
$$= (x_c - x_b)[U - y_a W]_{ab} + (y_b - y_a)[V + x_c W]_{bc}$$
$$(y_c - y_b)(v_b - v_a) + (x_b - x_a)(u_c - u_b) =$$
$$= (y_c - y_b)[V + x_a W]_{ab} + (x_b - x_a)[U - y_c W]_{bc} \quad (10$$

razem — trzy wzory dla jakichkolwiek dwóch złączonych konturów *(ab)*, *(bc)*, lub — dwóch prętów jednego złącza. Wyrazy: *U*, *V*, *W* wszystkich tych wzorów zmieniają znak po uwstecznieniu obu zgodnych zwrotów *(s)*, *(w)* konturu, lub pręta.

3. Wyznaczanie hyperstatycznych płaskiego ustroju prętowego ma przebieg zawsze jednakowy. Właściwa ocena połączeń węzłowych pozwoli określić ilokrotność *(i)* jego hyperstatyczności, a ustalenie zgodnych zwrotów *(s)*, *(w)* — uzależnić wypadkowe bieżące od zewnętrznego płaskiego obciążenia i od obranych hyperstatycznych. Te niewiadome da układ *(i)* równań linjowych — mych wzorów, wypisanych dla konturów ustroju, należycie wyodrębnionych, najprostszych.

Wzory (5), (6) posłużą do wyznaczania hyperstatycznych wewnętrznych, wzory (7), (8), (9), (10) — zewnętrznych, ich bowiem lewe strony, jednorodne co do przyrostów osiowych *u*, *w* odkształcenia, mają wartości zerowe dla podpór nieodkształcalnych, a dla sprężystych mogą być uzależnione od sprzeciwów odporowych linjowo.

W rzadkim przypadku składowych *u*, *v* nieosiowego posuwu podpory, należy ten posuw rugować ze wzorów (4) — wraz z przyrostem kątowym. Stąd jeszcze jeden wzór. Wszystko — najlepiej wyjaśnią przykłady (Rys. 2, *e*, *f*, *g*), celowo podciągnięte w szczegółach dla wyrazistości.

Pierwszy ustrój *e* ma dwa węzły *ws* — pośrednie, pomiędzy niemi jeden pręt *ss*, a nadto — cztery pręty *ps*, przegubowo złączone z podporami w czterech węzłach *wp*. Dwie przegubowe podpory — dwie — posuwne. Lewa ma posuw pionowy, prawa — poziomy. Odporów sześć. Hyperstatycznych:

$$(i) = 1.0 + 2.4 + 3.1 + 6 - 2.4 - 2.2 - 2 = 3$$

ustrój jest trzykrotnie hyperstatyczny zewnętrznie: jest nadto podparty.

W jego płaszczyźnie głównej prowadzę prawozwrotną oś *X* przez dolne punkty podparcia, oś *Y* — przez górny lewy. Zgodne zwroty *(s)*, *(w)* biorę od przegubów ku węzłom *ws* i od piątego węzła ku szóstemu. Wobec zerowych posuwów: *u*, *v* obu dolnych podpór, wzór (7), wypisany dla otwartego konturu *(2653)* da pierwsze równanie:

$$b\,U_{2653} = 0, \quad U_{2653} = U_{26} - U_{56} - U_{35} = 0$$

Drugie równanie będę miał z pierwszego wzoru (10), wypisanego dla złączonych konturów: *(162)*, *(2653)*:

$$b\,[U - hW]_{162} - h\,[V + (a+b)\,W]_{2653} = 0$$

ze względu na zerowość posuwów *u* obu lewych podpór, górnej, dolnej oraz — na takież posuwy *v* — dolnych podpór. Ostatnie równanie otrzymam ze wzoru (8), wypisanego dla złączonych konturów: *(2653)*, *(354)*:

$$c\,[V + aW]_{2653} \quad b\,[V + (a+b+c)\,W]_{354} = 0$$

tu bowiem we wszystkich trzech punktach podparcia posuwy *v* są zerowe. Ten układ równań da hyperstatyczne ustroju: tak czy inaczej obrane trzy siły odporowe, lub — tyleż momentów tuż przed węzłami sztywnemi: piątym i szóstym.

Drugi ustrój *f* ma u dołu prawy węzeł *wp*, wsparty na podporze posuwnej. Lewy dolny węzeł *ws* przegubem łączy się z podporą przegubową. Sąsiedni dolny węzeł *ws* przegubem wiąże pręt pionowy. Zatem — trzy odpory, trzy pręty *ps*, siedm prętów ss, tyleż węzłów *ws* jednozłącznych i jeden *wp*. Hyperstatycznych

$$(i) = 1.0 + 2.3 + 3.7 + 3 - 2.1 - 2.7 - 7 = 7$$

ustrój siedmiokrotnie hyperstatyczny wewnętrznie: jest nadto usztywniony.

W jego płaszczyźnie głównej łączę punkty podparcia prawozwrotną osią *X*. Pierwotną oś lewego pionowego pręta nazywam osią *Y*. Przez X_1 Y_1 oznaczam składowe oddziaływania sąsiedniego pionowego pręta na przegub dolnego węzła *ws*, przez X_3, Y_3 — oddziaływania prawego pionowego pręta na przegub podpory posuwnej. Trzy wypadkowe łącznego oddziaływania węzłowego dwóch prętów na dolny lewy pręt oznaczam przez S_1, Q_1, M_1, tworząc jeden z możliwych układów siedmiu hyperstatycznych wewnętrznych.

Z tyluż linjowych równań wyznaczę te niewiadome ustroju. Zgodne zwroty *(s)*, *(w)* obieram dla prętów dolnych od prawego przegubu ku lewemu, — dla górnych prętów od obu skrajnych węzłów ku piątemu. Od tegoż węzła — wdół po pręcie pionowym. Dla trzech pozostałych pionowych — wgórę.

Bieżące wypadkowe wszystkich prętów uzależnię od obranych hyperstatycznych. Trzy równania dla tych niewiadomych otrzymam ze wzorów (6), wypisanych dla konturu *zss* zamkniętego *(0765210)*. Po dwa równania dadzą mi wzory (5), wypisane dla konturów *zps* zamkniętych: *(07610)* oraz *(25432)*.

Ostatni ustrój *g*, obustronnie u podstaw osadzony — ma węzłów *ws* jednozłącznych i tyleż prętów *ss* — a nadto jeden pośredni pręt *pp*. Sztywne podpory dają cztery siły odporowe i dwa momenty osadzenia — razem — sześć odporów. Hyperstatycznych:

$$(i) = 1.1 + 2.0 + 3.8 + 6 - 2.0 - 2.8 - 8 = 7$$

ustrój jest siedmiokrotnie hyperstatyczny: trzykrotnie zewnętrznie i czterokrotnie wewnętrznie.

Możliwy układ tych siedmiu niewiadomych otrzymam, biorąc trzy odpory, dajmy na to lewej podpory, siłę osiową pręta *pp*, oraz — trzy wypadkowe oddziaływania dolnego pręta *ss* poziomego na lewy węzeł. Zatem, obrawszy zgodne zwroty *(s)*, *(w)* od lewych węzłów dla prętów pośrednich i od lewej podpory dla prętów obwodowych, uzależnię bieżące wypadkowe wszystkich prętów ustroju od płaskiego obciążenia zewnętrznego i od obranych siedmiu hyperstatycznych.

Tyleż równań linjowych dadzą me wzory. Trzy będę miał ze wzorów (6), wypisanych dla konturu *zss* zamkniętego *(1234561)*. Posuwy *u*, *v*, *w*, obu sztywnych podpór są zerowe, zatem dla konturu *ss* otwartego *(0167)* wzór (3) da zerową wartość *W*, a dwa wzory (4) — takież wartości *U* i *V*. Stąd — dalsze trzy równania. Ostatnie, siódme otrzymam, zważywszy, że lewe strony wzoru (7), wypisanego dla pręta *pp* i dla konturu *pp* otwartego *(2345)* — będą tożsamościowe.

Zatem, prowadząc w płaszczyźnie głównej ustroju prawozwrotną oś *X* przez punkty podparcia, zaś oś *Y* wzdłuż pierwotnych osi lewych pionowych prętów, będę miał po skróceniu przez *b*:

$$[U - (k+l)W]_{25} = [U - (k+l)W]_{2345}$$

razem — siedem równań dla tyluż niewiadomych ustroju.