ROZDZIAŁ III.

POKREWIEŃSTWO HARMONICZNE. — KOŁO HARMONICZNIE POKREWNE Z SAMYM SOBĄ. — PRZECIĘCIE STOŻKOWE WOGÓLE JAKO LINIJA HARMONICZNIE POKREWNA Z KOŁEM.

POKREWIEŃSTWO HARMONICZNE.

34. Obierzmy jakąkolwiek prostą h (fig. 15) i jakikolwiek punkt H, zewnątrz prostéj h, — jako stałe. Na płaszczyźnie, przez prostą h i punkt H wyznaczonéj,

poprowadźmy przez punkt H jakąkolwiek prostą p; dla jakiegokolwiek punktu B, leżącego na prostéj p, można, jak wiemy, znaléść inny punkt C taki, iżby te dwa punkty, B i C, przedstawiały parę, harmonicznie sprzężoną z parą punktów, utworzoną przez stały punkt H

obierzmy na prostéj h jakikolwiek punkt P; dla jakiéjkolwiek prostéj b, przechodzący przez punkt P, można, jak wiemy, znaléść inną prostą c taką, iżby te dwa promienie, b i c, przedstawiały parę, harmonicznie sprzężoną z parą promieni, utworzoną przez stałą prostą h

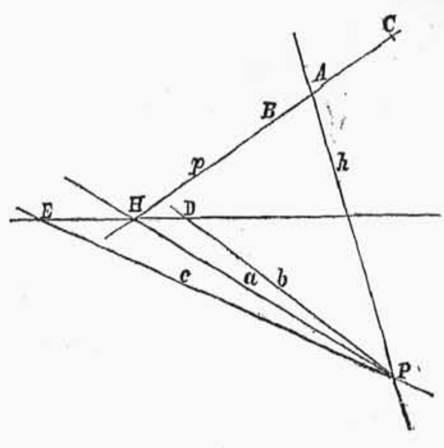

Fig. 15.

i przez punkt przecięcia się prostéj p (podstawy szeregu) ze stałą prostą h.

i przez prostą, łączącą punkt P (wiérzchołek pęku) ze stałym punktem H.

Taki związek, istniejący względem stałéj prostéj i stałego punktu między punktami i między prostymi na płaszczyźnie, nazywa się **pokrewieństwem harmonicznym** względem téj prostéj i tego punktu. Owę prostą stałą nazywać będziemy **osią**, a ów punkt stały **środkiem** pokrewieństwa harmonicznego. Dwa punkty, przedstawiające parę, harmonicznie sprzężoną z parą punktów: środkiem i punktem przecięcia się podstawy tego szeregu z osią pokrewieństwa, nazywać będziemy **punktami harmonicznie pokrewnymi z sobą**; dwie proste przedstawiające parę promieni, harmonicznie sprzężoną z parą: osią i prostą, łączącą wiérzchołek tego pęku ze środkiem pokrewieństwa, nazywać będziemy **prostymi harmonicznie pokrewnymi z sobą**. Tak np. ponieważ jest (HABC) $= -1$, przeto punkty B i C są tu z sobą harmonicznie pokrewne; ponieważ pęk *(habc)* jest harmoniczny, przeto proste b i c są tu harmonicznie z sobą pokrewne. — Oczywiście, że:

a. Dwa punkty, z sobą harmonicznie pokrewne, leżą na prostéj, przechodzącéj przez środek pokrewieństwa.

b. Dwie proste, z sobą harmonicznie pokrewne, przecinają się z sobą w punkcie, leżącym na osi pokrewieństwa.

35. Objaśnić, dlaczego:

a. Jeżeli punkt D *porusza się po prostéj b, to harmonicznie pokrewny z nim punkt* E *porusza się po prostéj c, harmonicznie pokrewnéj z tamtą prostą b*, tak iż poruszające się punkty D i E napotykają jednocześnie różne pary pokrewnych z sobą punktów, a pokrewne z sobą punkty, leżące na prostych b i c, następują po sobie w tym samym porządku.

b. Jeżeli prosta b obraca się około punktu D, *to harmonicznie pokrewna z nią prosta c obraca się około punktu* E, *harmonicznie pokrewnego z tamtym punktem* D, tak iż obracające się promienie b i c napotykają jednocześnie różne pary pokrewnych z sobą promieni, a pokrewne z sobą promienie, przechodzące przez punkty E i D, następują po sobie w tym samym porządku.

c. Tak środek pokrewieństwa, jak i każdy punkt, leżący na osi pokrewieństwa, jest sam z sobą harmonicznie pokrewny.

d. Tak oś pokrewieństwa, jak i każda prosta, przechodząca przez środek pokrewieństwa, jest sama z sobą harmonicznie pokrewna.

e. Prosta, przechodząca przez jakiekolwiek dwa punkty, jest harmonicznie pokrewna z prostą, prze-

f. Punkt przecięcia się jakichkolwiek dwu prostych, jest harmonicznie pokrewny z punktem przecięcia *chodzącą przez dwa punkty, z tamtymi harmonicznie pokrewne.*

g. Proste, łączące dwa punkty, harmonicznie z sobą pokrewne. z którymkolwiek punktem, leżącym na osi pokrewieństwa, są z sobą harmonicznie pokrewne.

i. Trzy punkty, harmonicznie pokrewne z trzema punktami, nie leżącymi na jednéj prostéj, nie leżą na jednéj prostéj.

l. Punkty, harmonicznie pokrewne z punktami szeregu harmonicznego, tworzą szereg punktów harmoniczny.

n. Punkt, harmonicznie pokrewny z punktem w nieskończoności (us. 4, 6), *znajduje się od środka i od osi pokrewieństwa w odległości jednakowéj* i, oczywiście, nawzajem.

się dwu prostych, z tamtymi harmonicznie pokrewnych.

h. Punkty przecięcia się dwu prostych, harmonicznie z sobą pokrewnych, z którąkolwiek prostą, przechodzącą przez środek pokrewieństwa, są z sobą harmonicznie pokrewne.

k. Trzy proste, harmonicznie pokrewne z trzema prostymi, nie przechodzącymi przez jeden punkt, nie przechodzą przez jeden punkt.

m. Proste, harmonicznie pokrewne z promieniami pęku harmonicznego, tworzą pęk promieni harmoniczny.

o. Prosta, harmonicznie pokrewna z prostą w nieskończoności (us. 7), *znajduje się od środka i od osi pokrewieństwa w odległości jednakowéj* i, oczywiście, nawzajem.

Tę prostą, znajdującą się od środka i od osi pokrewieństwa w odległości jednakowéj (wskutek więc tego, równoległą do osi) nazwiemy l i n i j ą ś r e d n i ą pokrewieństwa harmonicznego; oznaczać ją będziemy: l_s.

Uwaga. Jeżeli punkt D (us. *a*), poruszający się po prostéj *b*, spotyka prostą l_s, to wtedy harmonicznie z nim pokrewny punkt D, poruszający się po prostéj *c*, harmonicznie pokrewnéj z prostą *b*, znajduje się jednocześnie w nieskończoności (por. us. 19).

36. Jeżeli, przy danych: osi i środku pokrewieństwa harmonicznego,

a. punkt, poruszający się, opisuje pewną figurę, to inny, z nim pokrewny, punkt, opisuje jednocześnie figurę taką, iż każdy punkt na niéj jest pokrewny z odpowiednim punktem na tamtéj figurze, czyli: opisuje f i g u r ę h a r m o n i c z n i e p o k r e w n ą z tamtą. Najprostszy przykład tego mieliśmy w us. 35, *a*.

b. prosta, posuwająca się, wciąż dotyka pewnéj figury, to inna, z nią pokrewna, prosta, wciąż dotyka jednocześnie figury takiéj, iż każda styczna do niéj jest pokrewna z odpowiednią styczną do tamtéj figury, czyli: dotyka f i g u r y h a r m o n i c z n i e p o k r e w n é j z tamtą. Najprostszy przykład tego mieliśmy w us. 35, *b*.

Każdą więc figurę, inną niż prosta, albo punkt, lub zbiór kilku oddzielnych prostych, albo kilku oddzielnych punktów, harmonicznie pokrewną z daną, można jednocześnie rozważać, albo jako powstałą wskutek ruchu punktu, harmonicznie pokrewnego z punktem, opisującym figurę daną, albotéż jako powstałą wskutek ruchu prostéj, harmonicznie pokrewnéj z prostą, dotykającą figury danéj. Możemy przeto równie dobrze wprowadzać albo jeden, albotéż drugi z tych sposobów powstawania figury, harmonicznie pokrewnéj z daną. Od jednego z nich łatwo przejść do drugiego; gdy bowiém mamy punkt na figurze danéj i styczną do niéj w tym punkcie, to:

prosta, łącząca punkt, harmonicznie pokrewny z punktem danym, z punktem przecięcia się stycznéj danéj z osią (us. 34, *b*) jest styczną do figury, harmonicznie pokrewnéj z daną.

punkt przecięcia się prostéj, harmonicznie pokrewnéj ze styczną daną, z prostą, łączącą punkt dany ze środkiem (us. 34, *a*), jest punktem na figurze, harmonicznie pokrewnéj z daną.

KOŁO HARMONICZNIE POKREWNE Z SAMYM SOBĄ.

37. Średnicę AB (fig. 16) koła danego podzielmy wewnętrznie i zewnętrznie w tym samym dowolnym stosunku (us. 8); punkty C i H

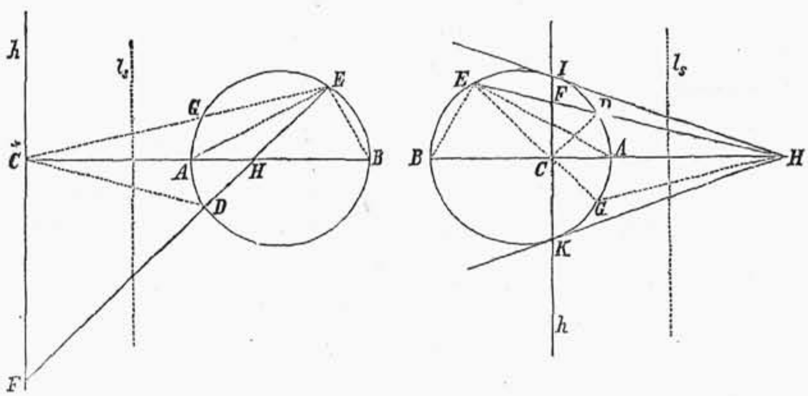

Fig. 16.

niech będą punktami takiego podziału *). Mamy przeto (ABCH) = —1. Przyjmijmy jeden z tych punktów C i H, np. punkt H, za środek pokrewieństwa harmonicznego, a prostą *h*, prostopadłą do średnicy AB w drugim punkcie podziału, t. j. w punkcie C, za oś tegoż pokrewieństwa; punkty przeto A i B są z sobą harmonicznie pokrewne. — Przez środek po-

*) Por. us. 8, uwaga.

krewieństwa H poprowadźmy jakąkolwiek prostą, przecinającą koło *); niech D i E będą punktami, w których ona przecina koło, zaś F niech będzie punktem jéj przecięcia się z osią h. Z jednego z punktów D i E, np. z punktu E, poprowadźmy proste, przechodzące przez punkty A, B i C. Ponieważ pęk E(ABCH) jest harmoniczny, a promienie EA i EB są do siebie prostopadłe, zatym promień EA dzieli kąt między promieniami EH i EC na połowy (us. 27, a). Wskutek tego, łuk DA jest równy łukowi AG, a tymsamym kąty DCA i ACG są sobie równe, tak iż pęk C(HFED), w którym promienie CH i CF są do siebie prostopadłe, jest harmoniczny (us. 27, b), a więc (HFED) $= -1$, t. j. punkty końcowe cięciwy ED są harmonicznie sprzężone z parą punktów: ze środkiem pokrewieństwa H i z punktem przecięcia się téj cięciwy **) z osią h; czyli: punkty końcowe cięciwy ED są z sobą harmonicznie pokrewne. Gdy zaś prosta ED była jakąkolwiek prostą, przechodzącą przez środek pokrewieństwa, przecinającą koło, przeto: *jeżeli w jednym z dwu punktów, dzielących harmonicznie średnicę koła, wystawimy do niéj prostopadłą, tę prostą przyjmiemy za oś, drugi zaś z tych punktów za środek pokrewieństwa harmonicznego, to punkty końcowe każdéj cięciwy tego koła, przechodzącéj przez środek pokrewieństwa, są z sobą pokrewne.* Albo, innymi słowy: *jeżeli punkty końcowe średnicy koła, do któréj oś pokrewieństwa harmonicznego jest prostopadła, są z sobą pokrewne, to punkty końcowe każdéj cięciwy tego koła, przechodzącéj przez środek pokrewieństwa, są z sobą pokrewne* ***).

38. Jakąkolwiek cięciwę ED (fig. 16) koła danego, inną niż średnica, podzielmy wewnętrznie i zewnętrznie w tym samym dowolnym stosunku w punktach H i F; jeden z tych punktów, np. punkt H, przyjmijmy za środek pokrewieństwa harmonicznego, a prostą h, przechodzącą przez drugi punkt F i prostopadłą do średnicy AB tego koła, przechodzącéj przez środek pokrewieństwa H, przyjmijmy za oś tego pokrewieństwa. Punkty przeto D i E są z sobą harmonicznie pokrewne. Ponieważ pęk C(HFED) jest harmoniczny, a promienie CH i CF do siebie prostopadłe, przeto kąt GCH jest równy kątowi HCD, a więc i kąty CEA i AEH są sobie równe. Gdy zaś nadto promienie EA i EB są do siebie prostopadłe, zatym pęk E(ABCH) jest harmoniczny i (ABCH) $= -1$,

---

*) W badaniach tego rodzaju, jakie są przedmiotem niniejszego wykładu, używa się stale «koło» w znaczeniu: okrąg koła.

**) Uwaga. Mówi się niekiedy, przez skrócenie: cięciwa, zamiast: prosta, któréj odcinkiem jest cięciwa (jakby tu, właściwie mówiąc, wyrazić się należało ze względu na lewą fig. 16-tą). Mówiąc tak, oczywiście, nie mamy wtedy na myśli długości odcinka prostéj między punktami, spólnymi téj prostéj i koła, lecz wogóle tę prostą.

***) Por. us. 95.

t. j. punkty końcowe średnicy AB są z sobą pokrewne. Na mocy zaś powyżéj dowiedzionego (us. 37), punkty końcowe jakiéjkolwiek cięciwy tego koła, przechodzącéj przez środek pokrewieństwa, są z sobą pokrewne. Możemy więc powiedzićć ogólniéj, niż powyżéj: *jeżeli z jednego z dwu punktów, dzielących harmonicznie cięciwę koła, spuścimy prostopadłą na średnicę, przechodzącą przez drugi z tych punktów, a tę prostopadłą i ów drugi punkt przyjmiemy odpowiednio za oś i za środek pokrewieństwa harmonicznego, to punkty końcowe każdéj cięciwy tego koła, przechodzącéj przez środek pokrewieństwa, są z sobą pokrewne.*

39. Z tego, że tu punkty końcowe każdéj cięciwy, przechodzącéj przez punkt H, są z sobą harmonicznie pokrewne, wprost wynika, że gdy punkt D porusza się po tym kole, to, przy każdym jego położeniu, drugi punkt przecięcia się odpowiedniéj prostéj DH z kołem wyznaczy odpowiednie położenie punktu E, harmonicznie pokrewnego z punktem D. Innymi słowy: gdy punkt D opisuje koło, to harmonicznie z nim pokrewny punkt E opisuje toż samo koło. Czyli (us. 36, *a*): figurą, harmonicznie pokrewną z naszym kołem, jest ono samo. A więc, ogólnie,

Jeżeli oś pokrewieństwa harmonicznego ma kierunek prostopadły do średnicy koła, przechodzącéj przez środek pokrewieństwa, i punkty końcowe jednéj cięciwy, przechodzącéj przez środek pokrewieństwa, są z sobą pokrewne, to wówczas to koło jest samo z sobą harmonicznie pokrewne *).

40. Gdy punkt E (fig. 16 prawa) porusza się po kole od punktu B np. ku punktowi I, to kolejne położenia punktu E, jako coraz bliższe punktu H, będą tu coraz bliższe odpowiednich położeń punktu F na osi; wskutek tego (us. 13), pokrewny z nim punkt D będzie również każdorazowo coraz bliższy owego położenia punktu F. I gdy punkt E razem się zejdzie z punktem I, to zejdzie się z nimi również punkt D (us. 13), tak iż oba punkty E i D, wogóle punkty przecięcia się cięciwy, przechodzącéj przez środek pokrewieństwa H, zejdą się z sobą razem, czyli staną się jednym **) punktem I, a prosta HI będzie styczną. Toż samo co do stycznéj HK i jéj punktu styczności K. Zatym, oba punkty styczności stycznych, które do tego koła można wyprowadzić z punktu H, leżą na osi pokrewieństwa *h*. Cięciwę, łączącą z sobą punkty styczności stycznych do krzywéj, które z pewnego punktu można wyprowadzić, nazywamy c i ę c i w ą s t y c z n o ś c i, odpowiadającą owemu punktowi. Możemy więc powiedzićć: *jeżeli środek pokrewieństwa harmonicznego leży zewnątrz koła,*

*) Por. us. 97.

**) Można więc punkt styczności prostéj, stycznéj do koła, przyjmować jako dwa punkty, schodzące się z sobą razem, czyli jako «punkt podwójny».

z sobą samym pokrewnego, to osią jest cięciwa styczności, odpowiadająca środkowi pokrewieństwa *).

Z tego jeszcze wynika, że: *gdy przez punkty końcowe jakiéjkolwiek cięciwy koła poprowadzimy styczne do niego, tę cięciwę przyjmiemy za oś, a punkt spotkania się stycznych za środek pokrewieństwa harmonicznego, to koło będzie harmonicznie pokrewne z samym sobą.*

41. Ćwiczenia.

1°. Gdyby środek pokrewieństwa harmonicznego był w środku koła, a punkty końcowe średnicy miały być z sobą pokrewne, to osią byłaby prosta p_∞. A więc: *koło, którego środek jest w środku pokrewieństwa harmonicznego, jest wtedy pokrewne samo z sobą, kiedy osią pokrewieństwa jest prosta w nieskończoności* **).

2°. Dlaczego trzy proste: AD, BE i CF (fig. 16), i, wogóle, trzy proste: jedna łącząca dwa którekolwiek położenia punktu D, druga łącząca dwa odpowiednie położenia punktu E, i trzecia CF przecinają się z sobą w jednym punkcie? Dlaczego każde takie trzy proste z prostą, łączącą ów punkt ich spotkania się z punktem H, tworzą pęk harmoniczny?

3°. Dlaczego długość promienia koła, z samym sobą harmonicznie pokrewnego, jest średnią gieometryczną odległości osi i środka pokrewieństwa od środka tego koła?

4°. Dlaczego koło, samo z sobą harmonicznie pokrewne, nie przecina prostéj l_s (fig. 16)?

5°. Czym się staje koło, samo z sobą harmonicznie pokrewne, styczne do prostéj l_s?

PRZECIĘCIE STOŻKOWE WOGÓLE, JAKO LINIJA HARMONICZNIE POKREWNA Z KOŁEM.

42. Przyjmijmy, że środek pokrewieństwa harmonicznego jest w środku koła danego; szukajmy figury pokrewnéj z tym kołem (us. 36).

Niech punkt H będzie środkiem pokrewieństwa harmonicznego i zarazem środkiem koła (fig. 17), a osią niech będzie np. prosta h. Przez punkt dowolny A na kole poprowadźmy prostą AH, przecinającą się z osią w punkcie B, i wyznaczmy taki punkt A', iżby $(HBAA') = -1$; jest więc punkt A' pokrewny z punktem A i jest punktem na figurze, pokrewnéj z kołem danym. Podobnie dla każdego innego punktu na kole możemy znaléść odpowiedni punkt na figurze, harmonicznie pokrewnéj z tym kołem. Miejsce więc gieometryczne tak wyznaczonego punktu A'

---

*) Por. us. 97.

**) Por. us. 95 i 96, a także us. 62.

przedstawi figurę, harmonicznie pokrewną z kołem danym. — Poprowadźmy prostą l_s, która podstawę szeregu przecina w punkcie S. Ponieważ punkt S dzieli na połowy odcinek między punktami pary H i B, sprzężonéj z parą A i A', przeto (us. 16)

$$SH^2 = SA.SA', \text{ czyli } \frac{SA'}{SH} = \frac{SH}{SA},$$

skąd *)

$$\frac{SA'-SH}{SH-SA} = \frac{SA'}{SH}, \text{ czyli } \frac{HA'}{AH} = \frac{SA'}{SH}.$$

Spuściwszy z punktów H i A' prostopadłe na l_s, możemy do ostatniéj proporcyi, zamiast stosunku $\frac{SA'}{SH}$, wprowadzić stosunek $\frac{DA'}{CH}$. Czyniąc to, otrzymamy $\frac{HA'}{AH} = \frac{DA'}{CH}$, skąd

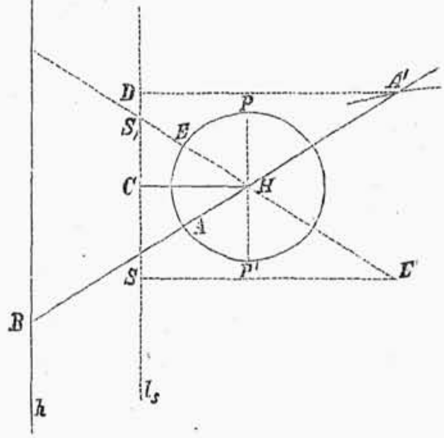

Fig. 17.

$$(1) \qquad \frac{HA'}{DA'} = \frac{AH}{CH}.$$

Tu oba wyrazy drugiego stosunku: AH, promień koła, i CH, połowa odległości środka od osi, pozostają niezmienne dla każdego punktu A na kole i odpowiedniego A' na figurze harmonicznie pokrewnéj z kołem. A zatym, dla każdego punktu A' na figurze, harmonicznie pokrewnéj z kołem, stosunek

$$(2) \qquad \frac{HA'}{DA'},$$

t. j. stosunek odległości każdego punktu A' od środka pokrewieństwa harmonicznego i od linii średniéj, przedstawia liczbę stałą. —

Jeżeli punkt A na kole, wyszedszy z pewnego położenia, opisuje je (raz) czyto w jednym, czytéż w drugim kierunku, to dochodzi do swego położenia początkowego, nie doznając przerwy i raz tylko przechodząc przez każde stanowisko. — Gdyby punkt pokrewny A', opisujący jedno-

*) Przy takim położeniu osi h, przy którym prosta l_s przecina koło dane w dwu punktach, wrazie, kiedy punkt A znajduje się po téjże stronie prostéj l_s, po któréj przypada oś h, należy tu wprowadzić tylko taką zmianę: zamiast różnic wyrazów każdego stosunku brać ich sumy.

cześnie (us. 36, *a*) miejsce gieometryczne, pokrewne z tym kołem, doznawał przerwy, to wtedy odpowiednie dwa kolejne stanowiska punktu A', w pewnéj oznaczonéj odległości od siebie będące, byłyby pokrewne z dwoma «sąsiednimi» stanowiskami punktu A na kole. Wówczas dla wszystkich punktów pośrednich na prostéj, łączącéj owe dwa stanowiska punktu A', nie byłoby odpowiednich punktów pokrewnych (us. 35, *a*) na pokrewnéj prostéj (us. 35, *e*), przechodzącéj przez dwa sąsiednie stanowiska punktu A, co być nie może (us. 18). Niéma zatym na prostéj, przechodzącéj przez owe dwa stanowiska punktu A', pośrednich między nimi punktów, t. j. punkty, odpowiadające owym dwu stanowiskom punktu A', są sąsiednimi punktami na prostéj, przez nie przechodzącéj, a więc i na tym miejscu gieometrycznym, pokrewnym z kołem. Nasze przeto miejsce gieometryczne nie doznaje przerwy, czyli, jak się mówi, jest «ciągłe». — Podobnież, gdyby podczas takiego obiegu punkt A' dwa lub więcéj razy przechodził przez toż samo stanowisko, to temu stanowisku odpowiadałoby dwa lub więcéj różnych stanowisk punktu A, t. j. z jednym punktem na miejscu gieometrycznym, opisywanym przez punkt A', byłoby pokrewnych kilka punktów na kole, co być nie może (us. 18), czyli: to miejsce gieometryczne siebie nie przecina. — Widzimy więc, że, podobnie jak koło (us. 35, *i*), *miejsce gieometryczne punktu* A' *jest liniją krzywą, ciągłą, zamkniętą, siebie saméj nie przecinającą.*

Ze względu na stałą wartość stosunku (2) dla każdego punktu miejsca gieometrycznego punktu A', możemy powiedzieć:

Gdy środek pokrewieństwa harmonicznego znajduje się w środku koła, to linija krzywa, z tym kołem harmonicznie pokrewna, jest miejscem gieometrycznym takiego punktu, iż stosunek jego odległości od środka pokrewieństwa i od linii średniéj przedstawia liczbę stałą.

43. Dowiedziemy, że, nawzajem:

Gdy dana linija jest miejscem gieometrycznym takiego punktu, iż stosunek jego odległości od punktu stałego i od prostéj stałéj jest stały, i gdy przyjmujemy ów punkt stały za środek pokrewieństwa harmonicznego, a za oś taką prostą, iż owa prosta stała jest liniją średnią pokrewieństwa, to liniją, harmonicznie pokrewną z liniją daną, jest koło, którego środek znajduje się w środku pokrewieństwa.

Niech będzie H (fig. 17) punktem stałym, a l_s prostą stałą, zaś A' punktem na linii danéj, z którego prostopadła na prostą l_s spotyka ją w punkcie D. Według założenia, dla wszelkich punktów A' na téj linii, stosunek

$$(3) \qquad \frac{HA'}{DA'}$$

jest pewną liczbą stałą. Z punktu H spuśćmy prostopadłą na l_s, na niéj oddzielmy od C część, równą HC, i przez jéj koniec poprowadźmy równoległą do l_s; tę prostą h mamy przyjąć za oś, a punkt H za środek pokrewieństwa. Znalazszy punkt A, pokrewny z punktem A', wyznaczymy miejsce gieometryczne takiego punktu A. Ponieważ (HBA'A) = —1 i punkt przecięcia się podstawy tego szeregu z prostą l_s, t. j. punkt S, dzieli na połowy odcinek zawarty między punktami H i B, przeto i t. d. (jak w us. 42). Dochodzimy tą drogą do proporcyi

$$(4) \qquad \frac{HA'}{DA'} = \frac{AH}{CH}.$$

Ponieważ, według założenia, stosunek (3) jest stały, przeto także, według (4), stosunek $\frac{AH}{CH}$ przedstawia liczbę stałą. Atoli następnik tego stosunku, długość odcinka CH, jako odległość punktu stałego od prostéj stałéj, jest stały, a więc: poprzednik AH jest stały, t. j. wszystkie punkty A, harmonicznie pokrewne z punktami A' na linii danéj, znajdują się w téj saméj odległości od punktu stałego H, środka pokrewieństwa harmonicznego, c. n. d. [Wynika to zresztą wprost z téj uwagi, że gdy punkt A' tworzy z punktem A parę, harmonicznie sprzężoną z parą punktów: H i B, to dla punktów: H i B jednéj pary i trzeciego A' czwartym punktem harmonicznym może być tylko punkt A (us. 18). Jeżeli przeto miejsce gieometryczne punktu A' jest harmonicznie sprzężone z miejscem gieometrycznym punktu A, to, nawzajem, miejsce gieometryczne punktu A jest harmonicznie sprzężone z miejscem gieometrycznym punktu A'.]

44. Widzieliśmy (us. 42), że: koło dane, w którego środku przyjmujemy środek pokrewieństwa harmonicznego, i dana oś tego pokrewieństwa wyznaczają, jako harmonicznie z tym kołem pokrewną, (jednę, us. 18) liniją krzywą, która jest miejscem gieometrycznym takiego punktu, iż stosunek jego odległości od środka i od linii średniéj pokrewieństwa jest stały.

Miejsce gieometryczne takiego punktu, iż stosunek jego odległości od punktu stałego *) *i od stałéj prostéj jest stały*, nazywa się **przecięciem stożkowym** **). Ów stały punkt nazywa się ogniskiem, owa zaś stała prosta kierownicą przecięcia stożkowego. Możemy więc powiedzieć, że (us. 42):

---

*) Ta odległość owego punktu miejsca gieometrycznego od punktu stałego nazywa się promieniem wodzącym punktu miejsca gieometrycznego.

**) Usprawiedliwienie téj nazwy w Dodatku (na końcu książki).

Liniją harmonicznie pokrewną z kołem, w którego środku znajduje się środek pokrewieństwa, jest przecięcie stożkowe; kierownicą jego jest linija średnia, ogniskiem zaś — środek tego pokrewieństwa.

45. Zadanie. *Mając dane kierownicę i ognisko przecięcia stożkowego, a nadto wskazany punkt, do niego należący, poprowadzić styczną do owego przecięcia stożkowego w punkcie danym.* Niech punkt H (fig. 17) będzie ogniskiem, prosta CD kierownicą przecięcia stożkowego, a A' punktem na tym przecięciu stożkowym. Spuśćmy z H prostopadłą na CD, przedłużmy ją tak, iżby to przedłużenie było równe CH, a przez punkt końcowy poprowadźmy równoległą do CD, prostą h. Na prostéj A'H, przecinającéj się z h w B, wyznaczmy taki punkt A, iżby $(HBA'A) = -1$. Przez punkt A poprowadźmy prostopadłą do BA', a punkt przecięcia się téj prostéj z h połączmy z punktem A'. Ta prosta będzie żądaną styczną. Dlaczego?

46. Na fig. 17-éj mogliśmy uwzględnić tylko pewne jedno położenie osi pokrewieństwa harmonicznego względem koła danego; od tego położenia, czyli *od odległości osi od środka koła danego zależy widocznie wielkość liczby, przedstawionéj przez stosunek* (2), *odpowiadający przecięciu stożkowemu, harmonicznie pokrewnemu z kołem danym, i, oczywiście, nawzajem.*

Zależnie przeto od położenia osi pokrewieństwa harmonicznego względem koła danego,

a) albo linija średnia leży cała zewnątrz koła, i wtedy $AH < CH$, a więc, według (1), stosunek (2) przedstawia liczbę mniejszą od 1;

b) albo linija średnia jest styczną do koła, i wtedy $AH = CH$, a więc stosunek (2) przedstawia 1;

c) albo też linija średnia przecina koło w dwu punktach, i wtedy $AH > CH$, a więc stosunek (2) przedstawia liczbę większą od 1.

Te więc przypadki zależą od tego, czy promień koła, dla którego wyznaczamy przecięcie stożkowe, jako liniją harmonicznie z tym kołem pokrewną, jest odpowiednio mniejszy, czy równy, czyteż większy od odległości środka od linii średniéj pokrewieństwa (czyli od odległości ogniska od kierownicy).

Każdy z tych przypadków należy rozważyć oddzielnie, aby wykryć kształt odpowiednich przecięć stożkowych.

47. Uprzednio jednak wyprowadzimy kilka spośród własności ogólnych, spólnych wszystkim przecięciom stożkowym.

a. Prosta może posiadać z kołem spólne albo dwa punkty, albo jeden (czyli dwa, schodzące się z sobą razem), albo żadnego. Zważmy,

b. Przez punkt można poprowadzić do koła albo dwie styczne, albo jednę (czyli dwie, schodzące się z sobą razem), albo żadnéj. Zważże punkt spólny danego koła i danéj prostéj jest harmonicznie pokrewny tak z punktem, leżącym na prostéj, harmonicznie pokrewnéj z prostą daną (us. 35, *a*), jak i z punktem, należącym do przecięcia stożkowego, harmonicznie pokrewnego z kołem danym (us. 36, *a*). Ów więc punkt pokrewny jest punktem spólnym tego przecięcia stożkowego i prostéj, pokrewnéj z prostą daną (us. 18). I nawzajem. Zależnie przeto od tego, ile pewna prosta posiada punktów spólnych z kołem, prosta, z tamtą pokrewna, ma z przecięciem stożkowym, pokrewnym z kołem, punktów spólnych albo dwa, albo jeden, albotéż żadnego.

Z tego wynika, że *prosta może mieć z przecięciem stożkowym conajwięcéj dwa punkty spólne.* — Mówimy, że pewna linija krzywa jest 2-go, 3-go i t. d. «rzędu», zależnie od tego, czy prosta może mieć conajwięcéj odpowiednio 2, 3 i t. d. punkty z nią spólne. Zatym *przecięcie stożkowe jest krzywą rzędu 2-go.*

my, że styczna do danego koła, przechodząca przez punkt dany, jest harmonicznie pokrewna tak z prostą, przechodzącą przez punkt, harmonicznie pokrewny z punktem danym (us. 35, *b*), jak i ze styczną do przecięcia stożkowego, harmonicznie pokrewnego z kołem danym (us. 36, *b*). Owa więc prosta pokrewna jest styczną do tego przecięcia stożkowego i przechodzi przez punkt, pokrewny z punktem danym (us. 25). I nawzajem. Zależnie przeto od tego, ile z pewnego punktu można poprowadzić stycznych do koła, z punktu, z tamtym pokrewnego, można do przecięcia stożkowego, pokrewnego z kołem, poprowadzić stycznych albo dwie, albo jednę, albotéż żadnéj.

Z tego wynika, że *z punktu można poprowadzić do przecięcia stożkowego conajwięcéj dwie styczne.* — Mówimy, że pewna linija krzywa jest 2-éj, 3-éj i t. d. «klasy», zależnie od tego, czy z punktu można do niéj conajwięcéj odpowiednio 2, 3 i t. d. styczne poprowadzić. Zatym *przecięcie stożkowe jest krzywą klasy 2-éj.*

Z tego, że przecięcie stożkowe jest liniją ciągłą, zamkniętą, siebie saméj nie przecinającą (us. 42), wynika, że ono, podobnie jak koło, posiada «obszar wewnętrzny», przez nie zewsząd ograniczony i nigdzie przez nie nieprzecięty. I jak z punktu, leżącego wewnątrz koła, nie można do niego poprowadzić stycznéj, taksamo, według *b.*, *do przecięcia stożkowego z żadnego punktu jego obszaru wewnętrznego nie można poprowadzić stycznéj.* — Również: *przez punkt na przecięciu stożkowym można poprowadzić jednę styczną, a ów punkt jest jéj punktem styczności; do przecięcia stożkowego można z punktu jego obszaru zewnętrznego poprowadzić dwie styczne.* [Zauważmy, że tu przypadek punktu na przecięciu stożkowym można podciągnąć pod przypadek punktu zewnętrznego, jeżeli przyjmiemy, że: przez punkt na przecięciu stożkowym przechodzą dwie styczne, razem się z sobą schodzące. Odpowiednio, można przypadek stycznéj do przecięcia stożkowego podciągnąć pod przypadek cięciwy (por. us. 40) i powiedzieć, że: styczna dotyka się przecięcia stożkowego w dwu punktach, razem się z sobą *) schodzących].

Odcinek prostéj, przecinającéj przecięcie stożkowe, zawarty między dwoma spólnymi punktami tych linij (us. *a*), jest pokrewny z odpowiednią cięciwą koła, harmonicznie pokrewnego z tym przecięciem stożkowym (us. 35, *e*). Ten odcinek nazwiemy podobnie cięciwą przecięcia stożkowego. Do niéj stosuje się również uwaga, zrobiona w us. 37-ym o cięciwie koła. Zgodnie z takim pojmowaniem niekiedy wyrażeń: cięciwa koła, cięciwa przecięcia stożkowego, możemy np. ogólnie powiedzieć, że: cięciwa koła i harmonicznie z nią pokrewna cięciwa przecięcia stożkowego przecinają się z sobą na osi pokrewieństwa, i t. p.

48. Dla jakiegokolwiek punktu A (fig. 17) na kole, innego niż punkty przecięcia się z tym kołem prostéj CH, prostopadłéj ze środka na oś, istnieje punkt E, znajdujący się w takiéj saméj, jak punkt A, pooegłości od téj prostéj CH. Wtedy prosta CH jest dwusieczną kąta, zawartego między prostymi HA i HE. — Jeżeli wyznaczymy punkt E', harmonicznie pokrewny z punktem E, a punkt przecięcia się prostych EE' i l_s nazwiemy S_1, to punkty A' i E' na przecięciu stożkowym zadość czynią związkom (por. us. 42):

$$SH^2 = SA \,.\, SA'; \quad S_1H^2 = S_1E \,.\, S_1E'.$$

Ponieważ tu $SH = S_1H$, $SA = S_1E$, przeto

$$SA' = S_1E', \text{ a więc także } HA' = HE'.$$

Są więc te punkty A' i E' jednakowo oddalone od ogniska H. — Zważmy jeszcze, że prosta CH jest dwusieczną kąta A'HE', tak iż trójkąty, któreby powstały, gdybyśmy z punktów A' i E' spuścili prostopadłe na prostą CH, byłyby sobie równe, wskutek czego te prostopadłe przedstawiałyby jednę prostą A'E', podzieloną w punkcie przecięcia się z prostą CH na połowy. Te więc punkty A' i E' są symetrycznie położone względem prostéj CH.

Podobnie dla każdego innego punktu A' na przecięciu stożkowym, leżącego zewnątrz prostéj CH, możemy na nim wyznaczyć odpowiedni punkt E', symetryczny z punktem A' względem téj prostéj CH. A więc, *przecięcie stożkowe jest liniją symetryczną względem prostéj, przechodzącéj przez ognisko prostopadle do kierownicy.*

---

*) W takim znaczeniu użyliśmy w tym ustępie wyrażeń w nawiasach pod *a*. i pod *b*.

49. Przez środek pokrewieństwa harmonicznego H (fig. 17) poprowadźmy równolegle do osi prostą PP'. Punkt jéj spotkania się z osią leży w nieskończoności; przeto punkt H dzieli odcinek, zawarty między punktem P na kole i punktem z nim pokrewnym, na połowy (us. 19). Wskutek tego, punkt P', drugi punkt końcowy téj średnicy koła, jest właśnie owym punktem, pokrewnym z punktem P, tak iż punkt P' na kole jest jednocześnie punktem na tymże, co punkt A', przecięciu stożkowym. Podobnież punkt P na kole jest jednocześnie punktem na tymże przecięciu stożkowym. — Zważmy, że ta własność jest widocznie niezależna od odległości osi od środka pokrewieństwa harmonicznego (us. 46). A więc, *przecięcie stożkowe, harmonicznie pokrewne z kołem, przechodzi przez oba punkty końcowe jego średnicy, równoległéj do osi pokrewieństwa.*

Z tego wynika, że gdy przez ognisko przecięcia stożkowego poprowadzimy cięciwę równolegle do kierownicy, to koło, zakréślone na niéj, jako na średnicy, będzie harmonicznie sprzężone z tym przecięciem stożkowym (us. 43) względem środka pokrewieństwa w ognisku i osi tak położonéj, iż kierownica jest liniją średnią pokrewieństwa. A więc,

Koło, którego średnicą jest cięciwa przecięcia stożkowego, przechodząca przez ognisko równolegle do jego kierownicy, jest harmonicznie pokrewne z tym przecięciem stożkowym; ognisko jest środkiem, a kierownica liniją średnią tego pokrewieństwa.

50. Długość odcinka PP' (fig. 17), zawartego między punktami spólnymi przecięcia stożkowego i koła, harmonicznie z nim pokrewnego, nazywa się p o d w ó j n y m p a r a m e t r e m przecięcia stożkowego. A zatym, *parametr przecięcia stożkowego jestto połowa długości jego cięciwy, przechodzącéj przez ognisko równolegle do kierownicy.* —

Stosunek odległości któregokolwiek punktu na przecięciu stożkowym od jego ogniska i od kierownicy, dla oddzielnego przecięcia stożkowego stały (us. 44), jest równy, według związku (1) w us. 42-im, stosunkowi $\frac{AH}{CH}$ (fig. 17), t. j. stosunkowi długości promienia koła, harmonicznie pokrewnego z przecięciem stożkowym, do odległości linii średniéj od środka pokrewieństwa. Długość promienia koła, harmonicznie pokrewnego z przecięciem stożkowym, jest jego parametrem, linija średnia jest kierownicą, a środek ogniskiem przecięcia stożkowego. Przeto *liczbę, właściwą przecięciu stożkowemu, którą przedstawia stosunek odległości któregokolwiek na nim punktu od ogniska i od kierownicy, przedstawia także stosunek parametru do odległości ogniska od kierownicy.*

Uwaga. Użyliśmy tu wyrażenia «liczba, właściwa przecięciu stożkowemu». Oczywiście, że rozumiéć to należy (por. us. 46) tak, iż przy pewnéj oznaczonéj odległości ogniska od kierownicy, każdéj oddzielnéj liczbie takiéj odpowiada jedno przecięcie stożkowe, i nawzajem. Innymi słowy: przy pewnéj oznaczonéj odległości ogniska od kierownicy, każda oddzielna wartość parametru wyznacza jedno przecięcie stożkowe (us. 42, 44); i nawzajem, każdemu oddzielnemu przecięciu stożkowemu odpowiada jedna wartość parametru (us. 43, 49). —

Jak już widzieliśmy (us. 46), liczba, właściwa przecięciu stożkowemu, może być albo mniejsza od 1, albo równa 1, albotéż większa od 1. Rozważymy pokolei te trzy przypadki.