

BIBLIJOTEKA MATEMATYCZNO-FIZYCZNA.

POCZĄTKOWY WYKŁAD SYNTETYCZNY

WŁASNOŚCI PRZECIEĆ STOŻKOWYCH.

PLAN BIBLIJOTEKI MATEMATYCZNO-FIZYCZNEJ.

SERIJA PIĘRWSZA (12-mo).

- Tom I. **Początki arytmetyki** M. BERKMANA. Str. X+266; z drzeworytami w tekście. W oprawie kop. 65.
 Tom II. **Wiadomości początkowe z fizyki** S. KRAMSZTYKA. Książeczka I. Str. X+77; drzeworytów 47. W oprawie kop. 30.
 Tom III. **Toż.** Książeczka II. Str. VIII+132; drzeworytów 56. W oprawie kop. 45.
 Tom IV. **Wiadomości początkowe z geografii fizycznej i meteorologii** A. W. WITKOWSKIEGO. Str. VIII+108; drzeworytów 22, litografij 4. W oprawie kop. 45.
 Tom V. **O najprostszych figurach geometrycznych** M. BERKMANA. *Wkrótce wyjdzie z [druku].*

SERIJA DRUGA (12-mo).

- Tom I. **Arytmetyka** M. BERKMANA. *W. w. z d.*
 Tom II. **Krótki wykład geometrii.**
 Tom III. **Krótki wykład początków algebry.**
 Tom IV. **Przystępny wykład fizyki.**
 Tom V. **Kosmografija i geografija fizyczna z meteorologiją.**
 Tom VI. **Nauka rysunków technicznych.**

SERIJA TRZECIA (8-vo).

- Tom I. **Arytmetyka, kurs teoretyczny** M. A. BARANIECKIEGO, z przypiskami A. ŻBIKOWSKIEGO i J. N. FRANKIEGO. Str. LVIII+375, z drz. w tekście. Rub. 1 kop. 70.
 Tom II. **Zadania arytmetyczne** A. JURGIELEWICZA. *W. w. z d.*
 Tom III. **Algebra elementarna i Teoryja przybliżeń liczebnych.**
 Tom IV. **Geometrija elementarna** I. BADOWSKIEGO. *W. w. z d.*
 Tom V. **Początkowy wykład syntetyczny własności przecięć stożkowych** M. A. BARANIECKIEGO. Str. XVI+131; drzeworytów 63. Kop. 85.
 Tom VI. **Trygonometrija płaska i kulista.**
 Tom VII. **Miernictwo.**
 Tom VIII. **Zasady fizyki** A. W. WITKOWSKIEGO. *W. w. z d.*
 Tom IX. **Kosmografija** J. JĘDRZEJEWICZA. *W. w. z d.*
 Tom X. **Geografija fizyczna z meteorologiją.**
 Tom XI. **Geometrija wykreślna.**
 Tom XII. **Mechanika elementarna.**

SERIJA CZWARTA (8-vo Lex.).

- Tom I. **Wstęp do analizy** M. A. BARANIECKIEGO. *W. w. z d.*
 Tom II. **Rozwiązywanie równań liczebnych** J. SOCHOCKIEGO. Str. XII+212; drzew. 9. Rubli 2.
 Tom III. **Teoryja równań algebracyjnych** J. SOCHOCKIEGO. *W. w. z d. (*)*
 Tom IV. **Geometrija analityczna** W. ZAJĄCZKOWSKIEGO. Str. XL+511; drzeworytów 85. Rubli 3.
 Tom V. **Geometrija syntetyczna. (**)**
 Tom VI. **Rachunek różniczkowy i całkow.**
 Tom VII. **Ćwiczenia z rachunku różniczkowego i całkowego. (***)**
 Tom VIII. **Rachunek wariacyjny.**
 Tom IX. **Rachunek prawdopodobieństwa i Metoda najmniejszych kwadratów.**
 Tom X. **Zasady mechaniki teoretycznej** J. N. FRANKIEGO. *W. w. z d.*
 Tom XI. **Rachunki wykreślne.**

TOM DOBĄTKOWY «BIBLIJOTEKI». Słownik matematyczno-fizyczny.

Jako uzupełniające seriją IV «Bibl. mat.-fiz.» należy uważać następuj. dzieła, ogłoszone przez BIBLIJOTEKĘ KÓRNICKĄ:

- (*) **Teoryja wyznaczników**, kurs uniwersytecki M. A. BARANIECKIEGO. Paryż, 1879. 8-vo, str. XXII+600. Marek 12.
 (**) **Wykład geometrii wykreślnej** R. SĄGAŁY. Paryż, 1882. 4-to, str. 444 z bardzo wielu drzeworytami w tekście, oraz LXII tablic miedziorytów. Marek 24.
 (***) **Wykład nauki o równaniach różniczkowych** W. ZAJĄCZKOWSKIEGO. Paryż, 1877. 8-vo, str. XXIV+904. Marek 20.

BIBLIJOTEKA MATEMATYCZNO-FIZYCZNA,

WYDAWANA POD REDAKCYJĄ

M. A. BARANIECKIEGO

Z ZAPOMOGI KASY POMOCY DLA OSÓB, PRACUJĄCYCH

NA POLU NAUKOWYM, IMIENIA JÓZEFA MIANOWSKIEGO.

SERYJA III.

TOM V.

POCZĄTKOWY WYKŁAD SYNTETYCZNY

WŁASNOŚCI

PRZECIEĆ STOŻKOWYCH

NA PODSTAWIE ICH POKREWIEŃSTWA HARMONICZNEGO Z KOŁEM.

NAPISZAŁ

DR. MARYJAN A. BARANIECKI,

PRYMAT-DOCENT UNIwersYTETU W WARSZAWIE.

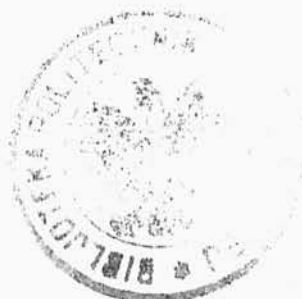


WARSZAWA.

W Drukarni Noskowskiego.

—
1885.

i. z. 16193



~~C 4706~~

Дозволено Цензурою.
Варшава 30 Января 1885 г.



№. 17

Drzeworyty ciął W. Bojarski.
Papier z papierni w Pilicy.

BG03P/358-06

Potrzeba wprowadzenia do średniego nauczania wykładu początkowego własności przecięć stożkowych niejednokrotnie była i u nas zaznaczana. Wykład ów jednak, tak niekiedy dawniej w szkołach średnich ogólnych, jak i dotąd w t. z. szkołach realnych, opiera się na metodzie Descartes'a. Literatura nasza posiada nawet w tym kierunku znakomity podręcznik: *Początki Geometrii analitycznej dla szkół gimnazjalnych* Antoniego Wyrwicz, profesora uniwersytetu wileńskiego (Wilno, dwa małe tomiki, 1828—9). Prawdopodobnie jednak ze względu na wspomnianą metodę, tak odrębną od metody «Elementów» Euklidesa, a częściowo może także z powodu, że kurs taki uważano u nas niewłaściwie za specjalną już jakoby gałąź studiów matematycznych, nie wszedł on w poczet przedmiotów, ogólnie obowiązujących w nauczaniu średnim. —

Rozbudzenie we Francji pod wpływem Monge'a, w ostatnich jeszcze latach zeszłego stulecia, zamięłowania do badań ściśle geometrycznych *), pojawienie się Carnot'a *Géométrie de position* (1803), oraz kilku innych prac znamienitych, a następnie dzieła i wykłady Chasles'a, w Niemczech zaś głównie prace i wykłady Steiner'a wywołały coraz żywsze uprawianie nowych metod syntetycznych w geometrii, które powoli wkraczały tam także do szkół średnich. U nas jedynie w latach 1833—1840 w gimnazjum gubernialnym w Łukowie Julijan Bayer, późniejszy wykładowca w Szkole Głównej warszawskiej, uwzględnił jako «Nową syntezę» ten kierunek, przynajmniej w obszernym zastosowaniu do teorii poprzecznych i do własności koła **). W tymże mniej więcej zakresie G. H. Niewęgłowski przeprowadził go w odpowiednich ustępach obu wydań swjej *Geometrii* (Poznań, 1854; Paryż, 1869).

Syntetyczne traktowanie wykładu początkowego własności przecięć stożkowych posiada już na zachodzie dość obszerną literaturę właściwą, świadczącą jednocześnie o wprowadzaniu go do wyższych klas różnych szkół oddzielnych; jako zaś bliskie metody «Elementów», prędkiej-później ono powszechnie stanowić będzie składową część ogólnego wykształcenia średniego. —

*) Zarys historyczny rozwoju metod syntetycznych w geometrii, częściowo uwzględniony we wstępie do tomu IV seryi IV «Bibl.», będzie umieszczony w tomie V téjże seryi.

**) Ów wykład istniał we wspomnianym okresie w klasie 5-jej szkoły łukowskiej. W latach, w których Bayer owę klasę nie prowadził, według jego kursu uczył w niej Wilhelm Olszański. — Bayer później ten kurs litografował około r. 1867 w Warszawie, p. t. *Pierwsze początki geometrii wyższej* (4-to, str. 88 i tablic 24; bez wymienienia miejsca, autora i roku, oraz bez wstępnego słowa). Zupełną identyczność «Pierwszych początków» z ową «Nową syntezą» szkoły w Łukowie zaświadcza jej uczeń z owych lat, prof. dr. Karol Jurkiewicz, któremu zawdzięczaam przytoczone tu szczegóły.

VI

Uwzględnienie w seryi III «Bibl.» takiego wykładu ma w chwili obecnej głównie na celu rozpowszechnienie u nas pojęcia o tym, iż można go wprowadzić do nauczania średniego. Praktyczniej zaś rzecz biorąc, ten tom «Bibl.» ma dziś przedstawiać jedną z tych niewielu wogóle, a u nas tymwięcej, książek matematycznych, dostępnych większemu zastępowi czytelników; można ją bowiem studyjować nawet przed ukończeniem nauki gimnazyjalnej, gdyż do jej zrozumienia potrzebne są tylko główne wiadomości z planimetrii.

Niechaj nadto ta książka ułatwia pierwsze kroki do wielce doniosłych, a tak u nas zaniedbanych studyjów w zakresie geometrii syntetycznej wogóle, a w szczególności niech toruje drogę odpowiedniemu tomowi seryi IV «Bibl.»

28 stycznia r. 1885.

Red.

SPIS RZECZY.

	<i>Str.</i>
PRZEDMOWA	XIII
Errata	XVI

ROZDZIAŁ I. POJĘCIA WSTĘPNE. str. 1 — 6

1. Szereg punktów. — 2. Zwykle wyznaczanie położenia punktu na prostej. — 3. Wyznaczenie położenia punktu na prostej przy pomocy stosunku jego odległości od dwu stałych na niej punktów. — 4. Należy przyjąć na prostej jeden punkt w nieskończoności. — 5. Liczba oderwana, którą przedstawia stosunek odległości punktu na prostej od dwu na niej punktów stałych, dokładnie określa położenie tego punktu.

6. Proste do siebie równoległe przechodzą przez ten sam punkt w nieskończoności. — 7. Na płaszczyźnie należy przyjąć jedną prostą w nieskończoności.

ROZDZIAŁ II. SZEREG PUNKTÓW HARMONICZNY I PĘK PROMIENI HARMONICZNY. CZWOROBOK ZUPEŁNY I CZWOROKĄT ZUPEŁNY. str. 7 — 27

8. Podział danego odcinka wewnątrz i zewnątrz w tym samym stosunku. — 9. Jest to t. z. podział harmoniczny odcinka. — 10. Dwie pary punktów harmonicznie z sobą wzajemnie sprzężone. — 11. Symbol szeregu punktów harmonicznego. — 12. Zadanie: dla trzech punktów znaleźć czwarty harmoniczny. — 13. Położenie punktów jednej pary względem punktów drugiej. — 14. Gdy jeden punkt każdej z dwu par punktów, harmonicznie sprzężonych, pozostaje niezmiennym, to, wskutek przesunięcia się jednego z pozostałych punktów, drugi z nich przesunął się w tymże kierunku. — 15. Przy danym szeregu harmonicznym punktów, średnia harmoniczna dwu odcinków. — 16. Przy danym szeregu harmonicznym punktów, średnia geometryczna dwu odcinków. — 17. Inne rozwiązanie zadania us. 12-go. — 18. Dla danych dwu punktów jednej pary i punktu drugiej można znaleźć jeden tylko punkt szeregu harmonicznego. — 19. Przypadek, kiedy punkt jednej pary jest w środku odcinka między punktami drugiej.

20. Pęk promieni. — 21. Pęk promieni harmoniczny; dwie pary. — 22. Położenie promieni jednej pary względem promieni drugiej. — 23. Poprzeczna przecina promienie pęku harmonicznego w punktach, tworzących szereg harmoniczny. — 24. Poprzeczna równoległa do jednego z promieni pęku harmonicznego. — 25. Zadanie: dla trzech promieni znaleźć czwarty harmoniczny. Dla danych dwu promieni jednej pary i promienia drugiej można znaleźć jeden tylko promień pęku harmonicznego. — 26. Szczególny pęk harmoniczny promieni do siebie równoległych. — 27. Szczególny pęk promieni: dwa ramiona kąta, jego dwusieczna i dwusieczna kąta przyległego. Inne

rozwiązanie zadania us. 25-go. — 28. Własność czterech punktów na kole, przez które przechodzą promienie pęku harmonicznego, mającego swój wierzchołek na tymże kole.

29. Rozwiązanie zadań us. 12-go i 25-go zapomocą linijału. — 30. Zaznaczenie własności punktów i prostych na figurze, służącej do takiego rozwiązania tych zadań. — 31. Czworobok zupełny i czworokąt zupełny. — 32. Ich własności harmoniczne.

33. Ćwiczenia.

ROZDZIAŁ III. POKREWIEŃSTWO HARMONICZNE. KOŁO HARMONICZNIE POKREWNE Z SAMYM SOBĄ. PRZECIĘCIE STOŻKOWE WOGÓLE, JAKO LINIJA HARMONICZNIE POKREWNA Z KOŁEM str. 28 — 42

34. Związek między punktami i między prostymi na płaszczyźnie względem stałej prostej (osi) i stałego punktu (środka), zwany pokrewieństwem harmonicznym. — 35. Własności punktów harm. pokrewnych i prostych harm. pokrewnych. Linija średnia pokrewieństwa harm. — 36. Powstawanie figury harm. pokrewniej z daną.

37. Gdy punkty końcowe średnicy koła prostopadłej do osi pokrewieństwa są z sobą pokrewne, to punkty końcowe każdej cięciwy, przechodzącej przez środek pokrewieństwa, są z sobą pokrewne. — 38. Uogólnienie tej własności koła. — 39. Przypadek, kiedy koło jest harm. pokrewne z samym sobą. — 40. Gdy środek pokrewieństwa jest w punkcie zewnątrz koła, z samym sobą pokrewnego, to osią jest odpowiadająca temu punktowi cięciwa styczności.

41. Ćwiczenia.

42. Gdy środek pokrewieństwa jest w środku koła, to z tym kołem jest harmonicznie pokrewne miejsce takiego punktu, iż stosunek jego odległości od środka i od linii średniej jest stały. To miejsce geometryczne punktu jest linią krzywą, ciągłą, zamkniętą, siebie samą nie przecinającą. — 43. Nawzajem, linią harm. pokrewną z tym miejscem geometrycznym punktu, przy szczególnym położeniu osi i środka pokrewieństwa, jest koło. — 44. To miejsce geometryczne punktu nazywa się przecięciem stożkowym. Jego ognisko i kierownica. Promień wodzący. — 45. Zadanie: mając ognisko i kierownicę przecięcia stożkowego nakreślić do niego styczną we wskazanym punkcie. — 46. Liczba, którą przedstawia stosunek odległości punktu na przecięciu stożkowym od ogniska i od kierownicy, może być mniejsza od 1, równa 1, lub większa od 1. — 47. Przecięcie stożkowe jest krzywą rzędu 2-go i klasy 2-jej. Obszar zewnętrzny i wewnętrzny przecięcia stożkowego. — 48. Przecięcie stożkowe jest linią symetryczną względem prostopadłej z ogniska na kierownicę. — 49. Przecięcie stożkowe harm. pokrewne z kołem przechodzi przez punkty końcowe średnicy koła, równoległej do kierownicy. — 50. Parametr przecięcia stożkowego. Stosunek odległości punktu na przecięciu stożkowym od ogniska i od kierownicy jest równy stosunkowi parametru do odległości ogniska od kierownicy.

ROZDZIAŁ IV. KSZTAŁT ODDZIELNYCH PRZECIĘĆ STOŻKOWYCH. str. 43 — 64

51. Przypadek, kiedy przecięcie stożkowe jest elipsą. — 52. Elipsa znajduje się po tej samej stronie kierownicy, co ognisko. Wymiary elipsy są skończone. — 53. Wyznaczenie punktów na elipsie. — 54. Punkty na elipsie najdalszy i najbliższy ogniska. — 55. Wierzchołki główne i oś wielka elipsy.

Elipsa jest linią symetryczną względem osi wielkiej. Styczne w wierzchołkach głównych. — 56. Elipsa jest linią symetryczną względem środka osi wielkiej. Środek i średnice elipsy. — 57. Oś mała elipsy. Elipsa jest linią symetryczną względem osi małej. Styczne w punktach końcowych osi małej. — 58. Elipsa zwraca swą stronę wklęsłą ku środkowi. — 59. Elipsa posiada dwa ogniska i dwie odpowiadające im kierownice. — 60. Suma odległości punktu na elipsie od ognisk jest stała i równa długości osi wielkiej. — 61. Odległość ogniska elipsy od środka. Spłaszczenie elipsy. — 62. Koło jako przypadek szczególny elipsy.

63. Ćwiczenia.

64. Przypadek, kiedy przecięcie stożkowe jest parabolą. — 65. Parabola znajduje się po tej samej stronie kierownicy, co ognisko. Asymptota. Parabola posiada asymptotę, prostą w nieskończoności. — 66. Wyznaczenie punktów na paraboli. — 67. Punkt na paraboli najbliższy ognisku i kierunek, w jakim się znajduje punkt w nieskończoności na paraboli. — 68. Wierzchołek główny i oś paraboli. Parabola jest linią symetryczną względem osi. Styczna w wierzchołku głównym. — 69. Odległość wierzchołka głównego paraboli od ogniska równa się połowie parametru. — 70. Środkiem paraboli jest punkt w nieskończoności. Średnice paraboli. — 71. Parabola zwraca swą stronę wklęsłą ku osi.

72. Ćwiczenia.

72. Przypadek, kiedy przecięcie stożkowe jest hiperbolą. — 74. Hiperbola znajduje się po obu stronach kierownicy. Prosta w nieskończoności ma dwa różne punkty wspólne z hiperbolą. — 75. Dwie asymptoty hiperboli. — 76. Wyznaczenie punktów na hiperboli. — 77. Hiperbola znajduje się w otworach dwu kątów wierzchołkiem przeciwległych, utworzonych przez asymptoty. — 78. Dwie gałęzi hiperboli. — 79. Jako cięciwę hiperboli, łączącą punkty na różnych gałęziach hiperboli, przyjmuje się odcinek prostej, przez te punkty przechodzącej, znajdujący się w obszarze zewnętrznym hiperboli. — 80. Punkty na różnych gałęziach hiperboli najbliższe ogniskom. — 81. Wierzchołki główne i oś poprzeczna hiperboli. Hiperbola jest linią symetryczną względem osi poprzecznej. Styczne w wierzchołkach głównych. — 82. Hiperbola jest linią symetryczną względem środka osi poprzecznej. Środek i średnice hiperboli. — 83. Asymptoty hiperboli przechodzą przez środek. Asymptoty hiperboli można uważać jako średnice. — 84. Hiperbola zwraca swą stronę wypukłą ku środkowi. — 85. Przypadek szczególny, kiedy asymptoty hiperboli są do siebie prostopadłe: hiperbola równoboczna. — 86. Hiperbola jest linią symetryczną względem prostopadłej w środku do osi poprzecznej. Oś poprzeczna i ta prostopadła są dwusiecznymi kątów między asymptotami. — 87. Hiperbola posiada dwa ogniska i dwie odpowiadające im kierownice. — 88. Różnica odległości punktu na hiperboli od ognisk jest stała i równa długości osi poprzecznej. — 89. Spodki prostopadłych z ognisk hiperboli na asymptoty są taksamo oddalone od środka, jak wierzchołki główne. — 90. Punkty, w których styczne w wierzchołkach głównych do hiperboli spotykają asymptoty, są taksamo oddalone od środka, jak ogniska. — 91. Oś sprzężona hiperboli. — 92. Prosta, łącząca wierzchołek główny hiperboli z punktem końcowym osi sprzężonej, jest równoległa do asymptoty. — 93. Odległość ogniska hiperboli od środka.

94. Ćwiczenia.

ROZDZIAŁ V. BIEGUN I BIEGUNOWA. OGNISKA I KIEROWNICE. STYCZNE. OSI W ELIPSIE I W HIPERBOLI. MIMOŚRÓD. . . str. 65 — 82

95. Biegun prostej i biegunowa punktu względem koła. Cięciwa jest przez jakikolwiek punkt na nią i przez jego biegunową podzielona harmonicznie. — 96. Biegunowa punktu na kole i biegun stycznej do koła. Biegunowa środka i biegun średnicy koła. Biegunowa punktu w nieskończoności i biegun prostej w nieskończoności względem koła. — 97. Biegunowa punktu zewnątrz koła i biegun cięciwy koła. — 98. Biegun prostej i biegunowa punktu względem przecięcia stożkowego. Cięciwa jest przez jakikolwiek punkt na nią i przez jego biegunową podzielona harmonicznie. Przecięcie stożkowe harmonicznie pokrewne z samym sobą. — 99. Punkt na przecięciu stożkowym i styczna w tym punkcie są biegunem i biegunową. Przecięcia stożkowe mają środek. Prosta w nieskończoności i środek, oraz średnica i punkt w nieskończoności są biegunową i biegunem. — 100. Punkt zewnątrz i odpowiadająca mu cięciwa styczności są biegunem i biegunową. Styczne w punktach końcowych średnicy są równoległe. Kierunek, w jakim się znajduje biegun średnicy.

101. Ognisko i odpowiadająca mu kierownica są biegunem i biegunową. — 102. Bieguny prostych, przechodzących przez ognisko, i biegunowe punktów, leżących na kierownicy. — 103. Kąt między prostymi, łączącymi ognisko z punktami styczności dwu stycznych. — 104. Punkt przecięcia się stycznych z kierownicą jest biegunem prostej, łączącej punkt styczności z ogniskiem. [Wynikająca stąd własność ogólna przecięcia stożkowego.] Kręślenie stycznej w punkcie wskazanym. — 105. Kąty między prostymi, łączącymi punkt styczności stycznej do elipsy lub do hiperboli z ogniskiem. Kręślenie stycznej w punkcie wskazanym. — 106. Kąty między prostymi, wychodzącymi z punktu styczności stycznej do paraboli, jedną do ogniska, drugą równoległą do osi. Trzy odcinki między ogniskiem a: punktem styczności, punktem przecięcia się osi ze styczną, punktem przecięcia się osi z normalną. Dwa odcinki osi między wierzchołkiem głównym a: punktem przecięcia się stycznej, spodkiem prostopadłej z punktu styczności. Kręślenie stycznej w punkcie wskazanym. Styczne, spotykające się na kierownicy, tworzą kąt prosty. — 107. Spodki prostopadłych z ognisk elipsy lub hiperboli na styczne. Kręślenie stycznej z punktu danego zewnątrz, i stycznej, równoległej do prostej danej. — 108. Spodki prostopadłych z ogniska paraboli na styczne. Kręślenie stycznej z punktu danego zewnątrz, i stycznej, równoległej do prostej danej. — 109. Kąty między dwiema stycznymi do elipsy lub do hiperboli a prostymi, łączącymi punkt ich przecięcia się z ogniskami. — 110. Kąty między stycznymi do paraboli a prostymi, wychodzącymi z punktu ich przecięcia się, jedną do ogniska, drugą równoległą do osi. — 111. Kąt, pod którym z ogniska jest widoczny odcinek stycznej, zawarty między punktami przecięcia się jej z dwiema stycznymi stałymi.

112. Połowa osi małej w elipsie, a sprzężonej w hiperboli jest średnią geometryczną odległości ognisk od stycznej i średnią geometryczną odległości jednego z ognisk od wierzchołków głównych. — 113. Związek między parametrem elipsy i hiperboli a długościami ich osi. — 114. Inne wyrażenie liczby, określającej, według us. 44-go i 50-go, oddzielne elipsy i hiperbole. Mimośród elipsy i hiperboli. Mimośród paraboli. — 115. Przecięcia stożkowe podobne. Kąt między asymptotami w hiperbolach podobnych.

116. Ćwiczenia.

ROZDZIAŁ VI. BIEGUNOWE PUNKTÓW NA PROSTÉJ I BIEGUNY PROSTYCH, PRZECHODZĄCYCH PRZEZ TEN SAM PUNKT. CZWOROKĄT WPISANY I CZWOROBOK OPISANY. PUNKTY SPRZĘŻONE I PROSTE SPRZĘŻONE. ŚREDNICE SPRZĘŻONE ELIPSY I HIPERBOLI.	str. 83 — 103
--	---------------

117. Biegunowa punktu na prostéj przechodzi przez jéj biegun; biegun prostéj, przechodzącej przez pewien punkt leży na jego biegunowej. — 118. Biegunowa punktu przecięcia się dwu prostych; biegun prostéj, łączącej dwa punkty. Bieguny równoległych do asymptoty hiperboli leżą na téj asymptocie. — 119. Biegun prostéj, obracającej się około punktu; biegunowa punktu, poruszającego się po prostéj. — 120. Prosta, przechodząca przez punkt przecięcia się dwu stycznych, i jéj biegun oddzielają te styczne harmonicznie. — 121. Odcinek stycznej do hiperboli, zawarty między asymptotami.

122. Punkt przekątny czworokąta zupełnego wpisanego jest biegunem prostéj, łączącej pozostałe punkty przekątne; przekątna czworoboku zupełnego opisanego jest biegunową punktu przecięcia się pozostałych przekątnych. — 123. Szczególne własności harmoniczne czworokąta zupełnego wpisanego i czworoboku zupełnego opisanego. — 124. Biegunowe punktów szeregu harmonicznego tworzą pęk harmoniczny; bieguny promieni pęku harmonicznego tworzą szereg harmoniczny. — 125. Własności czterech stycznych do koła, które przecinają inną styczną do tegoż koła w punktach, tworzących szereg harmoniczny.

126. Punkty sprzężone i proste sprzężone względem przecięcia stożkowego. — 127. Trójka punktów sprzężonych i trójka prostych sprzężonych względem przecięcia stożkowego. Trójkąt biegunowy względem przecięcia stożkowego; dwa jego boki przecinają a trzeci nie spotyka przecięcia stożkowego. — 128. Styczne i cięciwy sprzężone ze średnicą. Cięciwy sprzężone ze średnicą są przez nią podzielone na połowy. Wyznaczenie środka przecięcia stożkowego. — 129. Kręślenie stycznej, równoległej do prostéj danéj. Ilość stycznych do przecięcia stożkowego, równoległych do prostéj danéj. — 130. Para średnic sprzężonych elipsy lub hiperboli. Każda jest miejscem środków cięciw, równoległych do drugiej. Kręślenie stycznej we wskazanym punkcie. Osi główne przedstawiają parę średnic sprzężonych. — 131. Dwie średnice sprzężone hiperboli i asymptoty przedstawiają pęk harmoniczny. Jedna z dwu średnic sprzężonych hiperboli przecina ją, a druga jéj nie spotyka. Każda asymptota hiperboli przedstawia parę średnic sprzężonych. Asymptoty hiperboli równobocznej są dwusiecznymi kątów między średnicami sprzężonymi. — 132. Odcinki prostéj między hiperbolą i asymptotami są równe. — 133. Cięciwy dopełniające się elipsy lub hiperboli. — 134. Przekątne równoległoboku, opisanego na elipsie lub hiperboli, mają kierunek średnic sprzężonych. Boki równoległoboku wpisanego są równoległe do średnic sprzężonych, a jego przekątne są średnicami. — 135. Suma kątów, pod jakimi z obu ognisk hiperboli jest widoczny odcinek stycznej między asymptotami stanowi dwa kąty proste. Odległość środka od ogniska jest średnią geometryczną odległości środka od punktów przecięcia się stycznej z asymptotami. Pole trójkąta między styczną a asymptotami jest stałe. — 136. Równoległobok na średnicach sprzężonych hiperboli jest równoważny prostokątowi na osiach głównych; jego połową jest pole równoległoboku, którego przekątne są średnicami sprzężonymi hiperboli. — 137. Pole równoległoboku, którego przekątne są średnicami sprzężo-

nymi elipsy, jest równe połowie pola prostokąta na osiach głównych. Równoległobok na średnicach sprzężonych elipsy jest równoważny prostokątowi na osiach głównych.

138. Ćwiczenia.

ROZDZIAŁ VII. ŚRODKI PODOBIENSTWA DWU KÓŁ I OSI PODOBIENSTWA TRZECH KÓŁ. TWIERDZENIA PASCAL'A I BRIANCHON'A DLA KOŁA I DLA PRZECIECIA STOŻKOWEGO. str. 104 — 115

139. Środki podobieństwa dwu kół, wewnętrzny i zewnętrzny. — 140.

Osi podobieństwa trzech kół. Sześć środków podobieństwa każdych dwu z trzech kół leżą po trzy na czterech prostych. — 141. Przypadek, kiedy z trzech kół jedno jest jednocześnie styczne do obu pozostałych. — 142. Twierdzenie Pascal'a dla koła. — 143. Twierdzenie Brianchon'a dla koła.

144. Twierdzenia Pascal'a i Brianchon'a dla przecięcia stożkowego. —

145. Pięć punktów lub pięć stycznych wyznacza przecięcie stożkowe. — 146. Przypadki szczególne.

147. Ćwiczenia. (Wskazówki: do 5-go: wysokości trójkąta, opisane go na paraboli, przecinają się z sobą na kierownicy; do 6-go: hiperbola równoboczna przechodzi przez punkt przecięcia się z sobą wysokości trójkąta, w nią wpisanego.)

ROZDZIAŁ VIII. POWSTAWANIE ORGANICZNE PRZECIECIA STOŻKOWEGO. ZASADA DWOISTOŚCI. str. 116 — 124

148. Wierzchołek pęku harmonicznego promieni, przechodzących przez punkty stałe, opisuje przecięcie stożkowe; podstawa szeregu harmonicznego punktów przecięcia się jej z prostymi stałymi dotyka przecięcia stożkowego.

149. Linija, harmonicznie pokrewna z przecięciem stożkowym, jest przecięciem stożkowym. — 150. Przykład: linije harmonicznie pokrewne z elipsą przy szczególnym położeniu środka i osi pokrewieństwa. Hiperbole sprzężone.

151. Dwie krzywe begunowo wzajemne względem przecięcia stożkowego. — 152. Biegunowo wzajemna z przecięciem stożkowym względem przecięcia stożkowego jest przecięciem stożkowym. — 153. Przykład: begunowo wzajemne z kołem względem koła.

154. Zasada dwoistości.

DODATEK.

Płaszczyzna przecina stożek kołowy prosty według linii, która jest miejscem geometrycznym takiego punktu, iż stosunek jego odległości od stałego punktu i od stałej prostej jest stały str. 125 — 131

PRZEDMOWA.

Wykładając przez oba półrocza r. a. 187⁸/₉ na Uniwersytecie warszawskim ogólny kurs geometryi syntetycznej, doszedłem był wówczas do przekonania, iż bardzo byłaby pożyteczna niewielka książka, obejmująca, jako pewną całość, przedstawienie własności najprostszych zespołów punktów i prostych, wraz z ich zastosowaniami do przecięć stożkowych. Dopóki bowiem syntetyczne traktowanie głównych własności przecięć stożkowych nie będzie uwzględniane w nauczaniu średnim, tylko przeczytanie odpowiedniej książki może dać studentom matematyki pożądaną sposobność zaznajomienia się uprzedniego z charakterem takich badań przy rozpoczynaniu kursu systematycznego geometryi syntetycznej i rozbudzić zamięlowanie ogólniejsze do studyjów w tym kierunku, zgoła u nas przy egzaminach nie obowiązujących i jakkolwiek samodzielnie dotąd nieuprawianych. W celu wypracowania właśnie takiego dziełka prowadziłem na Uniwersytecie wykłady odpowiednie w r. a. 188²/₃; następnie zaś, opuściwszy jeszcze involucyję, a oparzony się wyłącznie na zespoleniu harmonicznym punktów i prostych, poddałem tak przygotowany kurs ostatecznej próbie wykładowej w bieżącym r. a. 188⁴/₅. Wprawdzie więc ta praca powstała w audytoryjum zakładu wyższego i wprawdzie wiele zawdzięczam temu, żem ją w nim mógł przeprowadzać przez wykład — lecz jest ona tylko przygotowaniem do systematycznego wykładu ogólnego geometryi syntetycznej, a właściwe miejsce dla takiego kursu, jaki ta książka przedstawia, jest w szkole średniej ogólnej. Czy zaś ona mogłaby być odpowiednim podręcznikiem szkolnym — o tym sądzić nie moją już rzeczą. Powiem tylko, że przy ostatecznej redakcyi miałem to wciąż na myśli.

Dlatego, pilnie strzegąc ścisłego ciągu w układzie całości, oile można najprzystępniejszej, starałem się usilnie o należyte stopniowanie przy wprowadzaniu nowych pojęć i przy podawaniu dowodzeń, a przecięcie stożkowe wwiódłem przy pomocy koła. Tymi względami tłumaczy się np. że: nie wprowadzam funkcyj trygonometrycznych, idąc co do tego za przykładem kilku poważnych autorów podobnych dzieł elementarnych; przecięcia stożkowe uwzględniam jaktylko można najwstępniej; aby nie odrazu dwa nowe pojęcia, pokrewieństwa harmonicznego i biegunów i biegunowych, zjawiały się w układzie, rzecz o istnieniu środka i średnic przecięcia stożkowego w rozdziale IV opieram na drugim pokrewieństwie harmonicznym pomocniczym; jaknajwcześniej mówię dość szczegółowo w rozdziale IV o kształcie elipsy, paraboli i hiperboli, co było możliwe tylko dzięki prostej własności, wypowiedzianej i uzasadnionej w ustępie 14-ym, a z którą nigdzie się nie spotkałem; chociaż w rozdziale V wprowadziłem biegunową punktu i biegun prostej, to jednak nad biegunowymi punktów na prostej i biegunami prostych, przechodzących przez jeden punkt, zastanawiam się dopiero w rozdziale VI, i t. d. Samo się przez się rozumie, że opracowanie w szczegółach, a bez uwzględnienia inwolucyi punktów lub prostych, uprzednio obmyślanego takiego właśnie układu tej książki, jaki w niej zachowałem, wywołało potrzebę podania wielu nowych dowodów prawd ogólnie znanych (z ważniejszych np. uzasadnienia kilku własności w rozdziale IV, dowody własności w us. 110-ym, 133-im, 137-ym, 149-ym, 152-im — przynajmniej nie znalazłem ich w żadnym z wielu dzieł, w których szukałem). Podane zaś tu powolnie przygotowane wyprowadzenie biegunowo wzajemnej z przecięciem stożkowym względem przecięcia stożkowego przy pomocy tylko harmonicznego związku czterech punktów i czterech prostych *), a timsamym możność wypo-

*) *O przekształceniu koła na przecięcie stożkowe* M. A. Baranieckiego (*Rozprawy i sprawozdania z posiedzeń wydz. mat.-przyr. akademii umiejętności w Krakowie*, t. XIII).

wiedzenia zasady dwoistości w kursie tak elementarnym, jest, jak miemam, najwłaściwszym jego zamknięciem.

Co się tyczy podstawy tego wykładu, oparcia wywodu własności przecięć stożkowych na ich harmonicznym pokrewieństwie z kołem, to, ogólniej wprowadzie, myśl ta była podana i rozwinięta jeszcze przez de La Hire'a w dziele *Nouvelle méthode en géométrie pour les sections des superficies coniques et cylindriques* (r. 1673); mianowicie w drugiej części tego dzieła, noszącej osobny tytuł, *Planiconiques*, jest podana pierwsza w nauce metoda, dostatecznie ogólna, przekształcania figur na inne figury tegoż rodzaju, a szczególności przekształcania koła w jego płaszczyźnie na przecięcie stożkowe. Metoda de La Hire'a wychodzi na jedno z tym, co Poncelet w *Traité des propriétés projectives des figures* (r. 1822) nazwał homologiją. — Nie mogąc tu podawać różnych szczegółów historycznych co do téj kwestyi, wspomnę jednak o tym, jak ją uwzględnia Steiner, który tak wielki wpływ wywarł na uprawianie metod syntetycznych w geometrii. Steiner, niezależnie od specjalnych (do dalszych studyjów można czytelnikowi zalecić przedewszystkim jego: *Die Theorie der Kegelschnitte, gestützt auf projectivische Eigenschaften*, wyd. pośm. Schröter'a, r. 1867), prowadził stale na uniwersytecie berlińskim wykłady popularniejsze, z których powstało słusznie cenione ogólnie dzieło: *Die Theorie der Kegelschnitte in elementarer Darstellung* (wyd. pośm. Geiser'a, r. 1867). Owóż, sądząc z téj książki, Steiner wprowadzał wprowadzie do wykładu elementarnego przekształcenie koła na przecięcie stożkowe, ale późno: jako linią biegunowo wzajemną z kołem względem koła (§ 23). Dopiero A. Milinowski, z wielkim zamiłowaniem rozwijający myśl Steiner'a uprząstępnienia nauki o przecięciach stożkowych, w bardzo pożytecznym dla nauczycieli dziele, *Elementar-synthetische Geometrie der Kegelschnitte* (r. 1882), rozważa (n^o. 122) przecięcie stożkowe jako figurę homologiczną z kołem w przypadku najprostszym, mianowicie, gdy dwa punkty, jeden na przecięciu stożkowym, drugi na kole, tworzą parę harmonicznie sprzężoną

z punktem na osi i środkiem. To właśnie przekształcenie znajdzie czytelnik w us. 42-im, ze znacznym jednak uproszczeniem *) odpowiedniego udowodnienia. —

Zaznaczę jeszcze: że mój książki nie ułożyłem tak, aby naprzód podać własności koła, a następnie dopiero zastosować je do przecięcia stożkowego, gdyż taki układ, z łatwych do zrozumienia pobudek, wydaje mi się niewłaściwym pod względem dydaktycznym; że we wprowadzeniu, zaraz w rozdziale I, odcinków ujemnych kierowałem się uwagami, wypowiedzianymi przez Charles'a w przedmowie do *Traité de géométrie supérieure* (r. 1852); że, nie uwzględniając w tej książce inwolucyi punktów lub prostych, nie miałem powodu mówić o osi pierwiastkowej dwu kół, a tym samym i układu kół; że, nakoniec, przy opracowywaniu tego kursu korzystałem niejednokrotnie z przytoczonych powyżej dzieł, a nadto kilkanaście ćwiczeń wziąłem z części drugiej *Leitfaden der ebenen Geometrie* Huberta Müller'a (r. 1875), a parę z *Die fundamentaltheorien der neueren Geometrie* etc. Seeger'a (r. 1880). —

Rysunki do tej książki wykonał pracownice a dokładnie mój niegdyś uczeń, dziś przyjaciel, p. Michał Bobiński, inżynier; za pracę, jaką miał nad nimi, mogę mu tylko wyrazić moję wdzięczność prawdziwą. Szkoda jednak, że nie wszystkie one zostały należycie starannie i jednostajnie wycięte.

ERRATA.

str. 30	wiersz 16	od dołu	zamiast	D	powinno być	E
" 77	" 13	od góry	"	102	"	103
" 60	figura 25		zamiast lewego	B	"	B'

*) O przekształceniu koła etc.