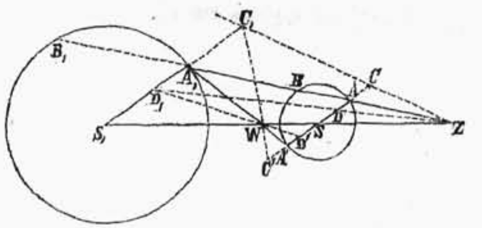
ROZDZIAŁ VII.

ŚRODKI PODOBIEŃSTWA DWU KÓŁ I OSI PODOBIEŃSTWA TRZECH KÓŁ. — TWIERDZENIA PASCAL'A I BRIANCHON'A DLA KOŁA I DLA PRZECIĘCIA STOŻKOWEGO.

ŚRODKI PODOBIEŃSTWA DWU KÓŁ. OSI PODOBIEŃSTWA TRZECH KÓŁ. TWIERDZENIA PASCAL'A I BRIANCHON'A DLA KOŁA.

139. Mając jakiekolwiek dwa koła, których środki są w punktach S i S_1 (fig. 51) — nazywać będziemy te koła, dla krótkości, odpowiednio kołem S i kołem S_1 — podzielmy odcinek SS_1 wewnętrznie i zewnętrznie w stosunku promieni tych kół (us. 8). Otrzymamy dwa punkty W i Z, posiadające widocznie tę własność, iż na każdéj prostéj, przechodzącéj czyto przez punkt W, czytéż przez punkt Z, tak spotykającéj te koła, jak i leżącéj zewnątrz nich, odcinki, zawarte między punktem odpowiednio W lub Z, a punktami przecięcia się téj prostéj z jakimikolwiek (us. 8) promieniami kół S i S_1, do siebie równoległymi (lub z przedłużeniami takich promieni), są proporcyjonalne względem promieni tych kół. Tak np.



Fg. 51.

$$WC' : WC_1 = WS : WS_1 = SA' : S_1A_1; \quad ZC : ZC_1 = ZS : ZS_1 = SA : S_1A_1.$$

Te punkty W i Z nazywają się *środkami podobieństwa* dwu kół S i S_1, piérwszy *wewnętrznym*, drugi *zewnętrznym* *).

Jeżeli dwa dane koła, znajdują się, jak na fig. 51-éj, zewnątrz siebie i jeżeli z punktu Z wyprowadzimy styczną do jednego z tych kół, np.

---

*) Uwaga. Prostym, przechodzącym przez środek podobieństwa zewnętrzny, odpowiadają w odpowiednich trójkątach podobnych odcinki, leżące po téj saméj stronie prostéj SS_1; prostym zaś, przechodzącym przez środek podobieństwa wewnętrzny, odpowiadają odcinki, leżące po różnych stronach prostéj SS_1.

do koła S, to, nazwawszy punkt styczności E, zauważymy, że ta prosta spotyka promień koła S_1, równoległy do promienia SE, w punkcie E_1 takim, iż stosunek $ZE : ZE_1$ jest równy stosunkowi promieni kół S i S_1. Że zaś, z podobieństwa trójkątów ZSE i ZS_1E_1, jest $ZE : ZE_1 = SE : S_1E_1$, a SE jest promieniem koła S, zatym S_1E_1 jest promieniem koła S_1, t. j. prosta SE jest prostopadła do promienia koła S_1 w jego punkcie końcowym, czyli jest styczną do koła S_1. Innymi słowy, przez środek podobieństwa zewnętrzny Z przechodzą obie spólne styczne zewnętrzne kół S i S_1. Taksamo można okazać, że przez środek podobieństwa wewnętrzny W przechodzą obie styczne wewnętrzne spólne kół S i S_1. — Uważając wszystkie te cztéry styczne spólne dwu kół S i S_1 jako boki czworoboku zupełnego, opisanego jednocześnie na obu kołach, moglibyśmy powiedzieć, że dwa z jego sześciu wiérzchołków leżą na prostéj, przechodzącéj przez środki tych kół, i są ich środkami podobieństwa.

Ponieważ środki podobieństwa dwu kół przedstawiają parę punktów, harmonicznie sprzężoną ze środkami tych kół, jako punktami drugiéj pary, przeto łatwo wnieść o położeniu środków podobieństwa w różnych przypadkach, jakie przedstawiać może położenie tych dwu kół względem siebie.

140. Gdy weźmiemy trzy koła S, S_1, S_2 (fig. 52), jakkolwiek względem siebie położone, to każde dwa z tych trzech kół mają dwa

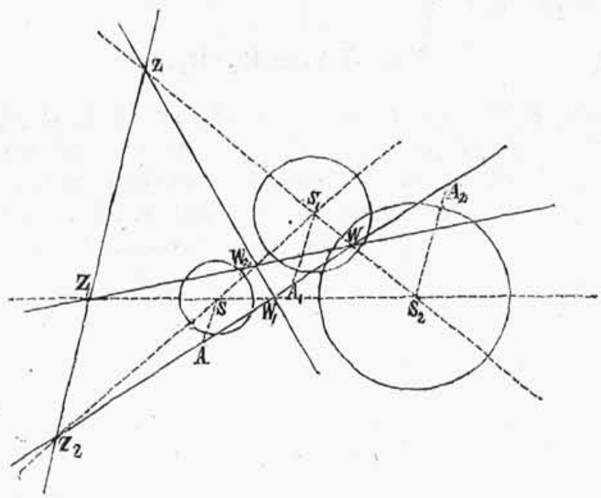


Fig. 52.

środki podobieństwa: koła S i S_1 w punktach Z_2 i W_2, koła S_1 i S_2 w punktach Z i W, nakoniec koła S_2 i S w punktach Z_1 i W_1. Dowiedziemy, że z tych sześciu punktów każde trzy punkty: Z, Z_1, Z_2; Z, W_1, W_2; W, Z_1, W_2; W, W_1, Z_2 leżą na oddzielnéj prostéj. Aby dowiéść, że np. prosta $Z_2 W_1$ przechodzi przez punkt W, poprowadźmy przez punkty S, S_1 i S_2 jakiekolwiek do siebie równoległe proste, przecinające prostą Z_2W_1 w punktach odpowiednio A, A_1 i A_2, i nazwijmy promienie kół danych odpowiednio R, R_1 i R_2. Ponieważ prosta Z_2W_1 przechodzi przez punkt Z_2, środek podobieństwa kół S i S_1, przeto

$$Z_2A : Z_2A_1 = SA : S_1A_1 = R : R_1;$$

a gdy ona przechodzi przez punkt W_1, środek podobieństwa kół S i S_2, zatym

$$W_1A : W_1A_2 = SA : S_2A_2 = R : R_2.$$

Stąd wynika, że

$$S_1A_1 : S_2A_2 = R_1 : R_2.$$

Ponieważ proste S_1A_1 i S_2A_2 są do siebie równoległe, przeto te dwie proste, prosta Z_2W_1, oraz prosta S_1S_2 utworzą trójkąty podobne, tak iż, jeżeli punkt przecięcia się prostych Z_2W_1 i S_1S_2 nazwiemy T, miéć będziemy, z podobieństwa trójkątów A_1S_1T i A_2S_2T,

$$TA_1 : TA_2 = S_1A_1 : S_2A_2.$$

Z zestawienia zaś téj proporcyi z poprzednią wynika, że

$$TA_1 : TA_2 = R_1 : R_2,$$

t. j., że prosta Z_2W_1 przechodzi przez taki punkt T, iż jéj odcinki od punktu T do punktów przecięcia się jéj z promieniami kół S_1 i S_2, do siebie równoległymi, są proporcyjonalne względem promieni tych kół; jest więc punkt T środkiem podobieństwa kół S_1 i S_2. Gdy zaś proste S_1A_1 i S_2A_2 znajdują się po różnych stronach prostéj S_1S_2, przeto jest to środek podobieństwa tych kół wewnętrzny (us. 139, uwaga), t. j. punkt T jest punktem poprzednio nazwanym W. A zatym prosta Z_2W_1 przechodzi przez punkt W. — Taksamo można dowiéść, iż każda z trzech pozostałych, powyżéj wymienionych, trójek środków podobieństwa leży na jednéj prostéj. — A więc, *sześć środków podobieństwa każdych dwu z trzech kół leżą po trzy na cztérech prostych, a mianowicie: na jednéj leżą trzy środki zewnętrzne, a na każdéj z trzech pozostałych dwa środki wewnętrzne i jeden zewnętrzny.*

Te cztéry proste nazywamy osiami podobieństwa trzech kół danych. One tworzą czworobok zupełny (us. 31), którego przekątnymi są proste, przechodzące przez każde dwa środki kół danych.

141. Weźmy pod uwagę przypadek szczególny, kiedy z trzech kół S, S_1, S_2, jedno, np. koło S, jest jednocześnie styczne do obu pozostałych kół S_1 i S_2. Należy tu oddzielnie zbadać różne położenia kół względem siebie.

Jeżeli koło S jest styczne zewnętrznie tak do koła S_1 w punkcie A_1, jak i do koła S_2 w punkcie A_2, to, z uwagi, że punkt A_1 jest środkiem podobieństwa wewnętrznym *) kół S i S_1, a punkt A_2 środkiem podobieństwa wewnętrznym kół S i S_2, na prostéj A_1A_2 znajduje się środek podobieństwa zewnętrzny kół S_1 i S_2.

Jeżeli koło S jest styczne wewnętrznie tak do koła S_1, jak i do koła S_2, w punktach odpowiednio A_1 i A_2, to te punkty są środkami podobieństwa zewnętrznymi odpowiednio kół S i S_1 i kół S i S_2; a więc prosta A_1A_2 przechodzi przez środek podobieństwa zewnętrzny kół S_1 i S_2.

Jeżeli, nakoniec, koło jest styczne zewnętrznie do jednego z kół S_1 i S_2, np. do koła S_1 w punkcie A_1, a do pozostałego S_2 wewnętrznie w punkcie A_2, to punkt A_1 jest środkiem podobieństwa wewnętrznym kół S i S_1, a punkt A_2 środkiem podobieństwa zewnętrznym kół S i S_2; prosta przeto A_1A_2 przechodzi przez środek podobieństwa wewnętrzny kół S_1 S_2.

A więc, *jeżeli koło* S *jest styczne do dwu innych kół* S_1 *i* S_2, *to na prostéj, przechodzącéj przez te punkty styczności, leży środek podobieństwa kół* S_1 *i* S_2, *który jest środkiem podobieństwa zewnętrznym wrazie, gdy koło* S *jest do obu kół* S_1 *i* S_2 *styczne albo jednocześnie zewnętrznie, albo jednocześnie wewnętrznie, jest zaś środkiem podobieństwa wewnętrznym wrazie, gdy koło* S *jest styczne do jednego z kół* S_1 *i* S_2 *zewnętrznie, a do pozostałego wewnętrznie.*

142. Obierzmy na kole S (fig. 53) sześć jakichkolwiek punktów; nazywając je, bez względu na ich następstwo na kole, 1, 2, 3, 4, 5 i 6, umówmy się, aby już w wypisanym porządku uważać je jako kolejne wiérzchołki sześciokąta wpisanego w koło S, tak iż pary punktów: 1 i 4, 2 i 5, 3 i 6 tworzą pary wiérzchołków przeciwległych tego sześciokąta. Wskutek tego, parami boków przeciwległych tego sześciokąta są: (12) i (45), (23) i (56), (34) i (61). Punkt przecięcia się boków piérwszéj pary nazwijmy L, drugiéj M, trzeciéj N.

Weźmy pod uwagę punkt L, punkt przecięcia się boków przeciwległych (12) i 45). W wiérzchołkach 1, 2, 4 i 5 wystawmy styczne do koła S (fig. 54), a z punktów przecięcia się stycznych w wiérzchołkach przeciwległych, t. j. z punktów S_1 i S_2, jako ze środków, zakréślmy koła promieniami odpowiednio $(S_1 1)$ i $(S_2 2)$; ponieważ $(S_1 1) = (S_1 4)$

*) Wówczas obie spólne styczne wewnętrzne kół S i S_1 stają się jedną prostą (styczną podwójną).

i $(S_2 2) = (S_2 5)$, przeto piérwsze z tych kół przechodzi przez punkt 4, a drugie przez punkt 5, proste zaś $(S1)$ i $(S4)$ są styczne do koła S_1,

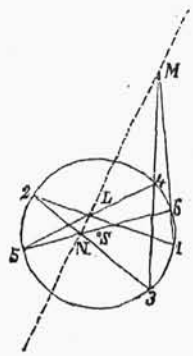


Fig. 53.

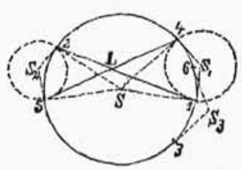


Fig. 54.

a proste $(S2)$ i $(S5)$ są styczne do koła S_2 *). Zważmy, że odcinki $(S4)$ i $(S5)$ są sobie równe; a więc można nakréślić koło styczne do prostych $(S4)$ i $(S5)$ w punktach odpowiednio 4 i 5; jego środek będzie w punkcie T przecięcia się prostéj $(S_1 4)$ z prostą $(S_2 5)$, a promieniem odcinek $(T4)$. To koło jest, w tym przypadku, styczne zewnętrznie do koła S_1 w punkcie 4, a wewnętrznie do koła S_2 w punkcie 5, a więc prosta (45) przechodzi przez środek podobieństwa wewnętrzny (us. 141) kół S_1 i S_2. Podobnie, przy pomocy koła stycznego do prostéj $(S1)$ w punkcie 1 i do prostéj $(S2)$ w punkcie 2, wniesiemy, że prosta (12) przechodzi przez środek podobieństwa wewnętrzny kół S_1 i S_2. Gdy zaś środek podobieństwa wewnętrzny kół S_1 i S_2 jest jednocześnie na prostych (12) i (45), to znajduje się on na przecięciu się tych prostych, t. j. w punkcie L. Okazaliśmy więc, że punkt L jest środkiem podobieństwa — w naszym przypadku, wewnętrznym — koła S_1, przecinającego koło S pod kątem prostym i przechodzącego przez wiérzchołki przeciwległe 1 i 4, i koła S_2, również przecinającego koło S pod kątem prostym, a przechodzącego przez wiérzchołki przeciwległe 2 i 5.

Taksamo możemy okazać, że punkt M jest środkiem podobieństwa — w naszym przypadku, zewnętrznym — koła S_1 i koła S_3, również przecinającego koło S pod kątem prostym, a przechodzącego przez wiérz-

---

*) Styczne w punktach spólnych do kół S i S_1 i do kół S i S_2 przecinają się pod kątem prostym; dlatego mówimy, że koło S przecina się pod kątem prostym tak z kołem S_1, jak i z kołem S_2.

chołki przeciwległe 3 i 6, oraz, że punkt N jest środkiem podobieństwa— w naszym przypadku, wewnętrznym — kół S_2 i S_3.

Z tego wynika, że punkty L, M i N, punkty przecięcia się boków przeciwległych sześciokąta wpisanego w koło S, leżą na jednéj z osi podobieństwa kół S_1, S_2 i S_3 (us. 140).

A zatym, *jeżeli sześć punktów, dowolnie obranych na danym kole, będziemy uważali, w pewnym dowolnym porządku, jako wiérzchołki sześciokąta, to trzy punkty przecięcia się każdéj pary boków przeciwległych tego sześciokąta, wpisanego w koło dane, leżą na jednéj prostéj.*

To twierdzenie jest szczególnym przypadkiem twierdzenia Pascal'a (1623 — 1662), odnoszącego się do jakiegokolwiek przecięcia stożkowego (por. us. 144), a ogłoszonego w r. 1640.

143. Poprowadźmy sześć jakichkolwiek stycznych do koła S (fig. 55) i nazwijmy je, w jakimkolwiek porządku, 1, 2, 3, 4, 5 i 6,

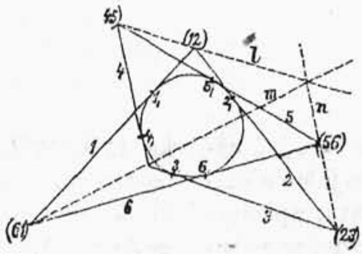


Fig. 55.

a w tym następstwie uważajmy je jako kolejne boki sześcioboku, opisanego na kole S, tak iż (12) i (45), (23) i (56), (34) i (61) są parami wiérzchołków przeciwległych. Prostą, przechodzącą przez wiérzchołki piérwszéj pary, nazwijmy *l*, drugiéj *m*, trzeciéj *n*. Te trzy proste nazywają przekątnymi głównymi sześcioboku.

Punkty styczności prostych 1, 2,... nazwijmy odpowiednio 1_1, 2_1,.... Te punkty możemy uważać jako kolejne wiérzchołki sześciokąta wpisanego w koło. Według przeto twierdzenia Pascal'a, trzy punkty przecięcia się par prostych: $(1_1 2_1)$ i $(4_1 5_1)$, $(2_1 3_1)$ i $(5_1 6_1)$, $(3_1 4_1)$ i $(6_1 1_1)$, które nazwijmy odpowiednio L, M i N, leżą na jednéj prostéj.

Zważmy, że biegunem prostéj $(1_1 2_1)$ jest (us. 97, *b*) punkt (12), biegunem zaś prostéj $(4_1 5_1)$ punkt (45); biegunowa więc punktu L przechodzi (us. 118, *a*) przez punkty (12) i (45), t. j. jest prostą *l*. Podobnie okazać można, że biegunowymi punktów M i N są proste *m* i *n*. A ponieważ punkty L, M i N leżą na jednéj prostéj, więc proste *l*, *m* i *n* przechodzą przez jeden punkt (us. 119, *b*).

A zatym, *jeżeli sześć stycznych, dowolnie poprowadzonych do koła danego, będziemy uważali, w pewnym dowolnym porządku, jako boki sześcioboku, to trzy proste, przechodzące przez każdą parę wiérzchołków przeciwległych tego sześcioboku, opisanego na kole danym, przechodzą przez jeden punkt.*

To twierdzenie jest szczególnym przypadkiem twierdzenia, odnoszącego się do jakiegokolwiek przecięcia stożkowego (por. us. 144), które z twierdzenia Pascal'a, w sposób podobny w zasadzie do powyższego, wyprowadził w r. 1806 Brianchon, ówcześnie uczeń Szkoły politechnicznéj w Paryżu.

TWIERDZENIA PASCAL'A I BRIANCHON'A DLA PRZECIĘCIA STOŻKOWEGO.

144. Mając dane jakiekolwiek przecięcie stożkowe L, obierzmy na nim sześć jakichkolwiek punktów i nazwijmy je w dowolnym porządku 1, 2, 3, 4, 5, 6, a w tym już następstwie uważajmy je jako wiérzchołki kolejne sześciokąta, wpisanego w L., Na jego cięciwie, przechodzącéj przez ognisko równolegle do kierownicy, jako na średnicy, zakréślmy koło K. Ono jest harmonicznie pokrewne z L; ognisko owo jest środkiem, a odpowiadająca mu kierownica liniją średnią tego pokrewieństwa (us. 49). Z punktami 1, 2,... na L są pokrewne pewne punkty, które nazwijmy odpowiednio $1_1, 2_1, \ldots$ na K (us. 36, *a*); tak iż z sześciokątem 123456 wpisanym w L jest pokrewny sześciokąt $1_1 2_1 3_1 4_1 5_1 6_1$ wpisany w K. Z punktami przecięcia się par boków przeciwległych: (12) i (45), (23) i (56), (34) i (61) są sprzężone punkty przecięcia się par boków (sprzężonych; us. 35, *c*)

Mając dane jakiekolwiek przecięcie stożkowe, poprowadźmy do niego sześć jakichkolwiek stycznych i nazwijmy je w dowolnym porządku 1, 2, 3, 4, 5, 6, a w tym już następstwie uważajmy je jako boki kolejne sześcioboku, opisanego na L. Na jego cięciwie, przechodzącéj przez ognisko równolegle do kierownicy, jako na średnicy, zakréślmy koło K. Ono jest harmonicznie pokrewne z L; ognisko owo jest środkiem, a odpowiadająca mu kierownica liniją średnią tego pokrewieństwa (us. 49). Ze stycznymi 1, 2,... do L są pokrewne pewne styczne, które nazwijmy odpowiednio $1_1, 2_1, \ldots$ do K (us. 36, *b*), tak iż z sześciobokiem 123456 opisanym na L jest pokrewny sześciobok $1_1 2_1 3_1 4_1 5_1 6_1$ opisany na K. Z prostymi, przechodzącymi przez pary wiérzchołków przeciwległych: (12) i (45), (23) i (56), (34) i (61), są sprzężone proste, przechodzące przez pary wiérzchołków (sprzężoprzeciwległych: $(1_1 2_1)$ i $(4_1 5_1)$, $(2_1 3_1)$ i $(5_1 6_1)$, $(3_1 4_1)$ i $(6_1 1_1)$ (us. 35, *f*). A ponieważ te ostatnie trzy punkty leżą na jednéj prostéj (us. 142), więc i trzy poprzednie punkty, t. j. trzy punkty przecięcia się par boków przeciwległych sześciokąta 123456, leżą na jednéj prostéj (us. 35, *a*). A zatym:

(Twierdzenie Pascal'a.) *Jeżeli sześć punktów, dowolnie obranych na danym przecięciu stożkowym, będziemy uważali, w pewnym dowolnym porządku, jako wiérzchołki sześciokąta, to trzy punkty przecięcia się każdéj pary boków przeciwległych tego sześciokąta, wpisanego w przecięcie stożkowe dane, leżą na jednéj prostéj.* Albo, krócéj: trzy pary boków przeciwległych sześciokąta, wpisanego w przecięcie stożkowe, przecinają się w punktach, leżących na jednéj prostéj.

nych; us. 35, *f*) przeciwległych: $(1_1 2_1)$ i $(4_1 5_1)$, $(2_1 3_1)$ i $(5_1 6_1)$, $(3_1 4_1)$ i $(6_1 1_1)$ (us. 35, *e*). A ponieważ te ostatnie trzy proste przechodzą przez jeden punkt (us. 143), więc i trzy poprzednie proste, t. j. trzy proste, łączące pary wiérzchołków przeciwległych sześcioboku 123456, przechodzą przez jeden punkt (us. 35, *b*). A zatym:

(Twierdzenie Brianchon'a.) *Jeżeli sześć stycznych, dowolnie poprowadzonych do danego przecięcia stożkowego, będziemy uważali, w pewnym dowolnym porządku, jako boki sześcioboku, to trzy proste, przechodzące przez każdą parę wiérzchołków przeciwległych tego sześcioboku, opisanego na przecięciu stożkowym danym, przechodzą przez jeden punkt.* Albo, krócéj: trzy proste, przechodzące przez pary wiérzchołków przeciwległych sześcioboku opisanego na przecięciu stożkowym, przecinają się w jednym punkcie.

Sześciobok, wpisany w przecięcie stożkowe, nazywają często, przez skrócenie, «sześciobokiem Pascal'a», a sześciobok, opisany na przecięciu stożkowym, «sześciobokiem Brianchon'a».

145. Z tych twierdzeń wynika, że odpowiednio:

a. Pięć punktów wyznacza przecięcie stożkowe, t. j. zapomocą pięciu punktów, mających należéć do przecięcia stożkowego *), można wyznaczyć ilekolwiek na nim punktów. Jakoż, gdy są dane punkty A, B, C, D, E (fig. 56), poprowadźmy przez którykolwiek z nich, np. przez A, jakąkolwiek prostą AF.

b. Pięć stycznych wyznacza przecięcie stożkowe, t. j. zapomocą pięciu prostych, mających być stycznymi do przecięcia stożkowego *), można wyznaczyć ilekolwiek do niego stycznych. Jakoż, gdy są dane styczne *a*, *b*, *c*, *d*, *e* (fig. 57), na którékolwiek z nich, np. na *a*, obierzmy jakikolwiek punkt L.

*) Z nich więc żadne trzy nie leżą na jednéj prostéj (us. 47, *a*).

*) Z nich więc żadne trzy nie przechodzą przez ten sam punkt (us. 47, *b*).

Uważając punkty: A, B, C, D, E i szukany jako np. kolejne wiérz-

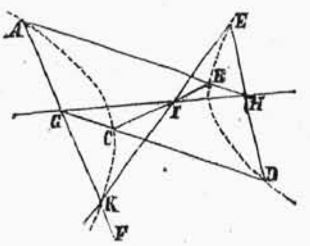


Fig. 56.

chołki sześciokąta Pascal'a, poprowadźmy prostą przez dwa punkty: G, punkt przecięcia się prostych AF i CD, i H, punkt przecięcia się prostych AB i DE, t. j. prostą GH, i wyznaczmy punkt jéj przecięcia się z prostą BC, punkt I. Punkt przecięcia się prostych IE i GA, t. j. punkt K, wraz z punktami A, B, C, D i E leży na tymże przecięciu stożkowym. — Przyjmując inne po sobie następstwo pięciu danych punktów i szóstego szukanego, mającego leżéć na prostéj AF, a także prowadząc inną prostą przez punkt A, lub przez inny z danych punktów, wyznaczać będziemy coraz inne punkty, leżące na tymże przecięciu stożkowym.

Zauważmy, że, przy obranym następstwie pięciu danych punktów i szukanego na AF, istnieje na téj prostéj jeden tylko taki punkt K, iż punkty przecięcia się par boków przeciwległych sześciokąta ABCDEK znajdują się na jednéj prostéj. A więc, pięć pun-

Uważając styczne: *a*, *b*, *c*, *d*, *e* i szukaną jako np. kolejne bo-

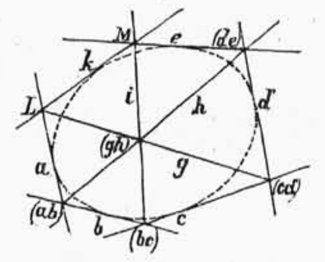


Fig. 57.

ki sześcioboku Brianchon'a, punkt przecięcia się dwu prostych: *g*, przechodzącéj przez punkty L i *(cd)*, i *h*, przechodzącéj przez punkty *(ab)* i *(de)*, t. j. punkt *(gh)*, i punkt *(bc)* połączmy prostą *i*, która styczną *e* przetnie w M. Prosta, przechodząca przez punkty M i L, t. j. prosta *k*, wraz z prostymi *a*, *b*, *c*, *d* i *e* jest styczna do tegoż przecięcia stożkowego. — Przyjmując inne po sobie następstwo pięciu danych stycznych i szóstéj szukanéj, mającéj przejść przez punkt L, a także obiérając inny punkt na stycznéj *a*, lub na innéj z danych stycznych, wyznaczać będziemy coraz inne proste, styczne do tegoż przecięcia stożkowego.

Zauważmy, że, przy obranym następstwie pięciu danych stycznych i szukanéj z L, istnieje przez ten punkt przechodząca jedna tylko taka prosta *k*, iż proste, przechodzące przez pary wiérzchołków przeciwległych sześcioboku *abcdek*, przechodzą przez jeden punkt. A więc, pięć któw wyznacza jedno tylko przecięcie stożkowe.

146. Jeżeli dwa po sobie następujące wiérzchołki sześcioboku Pascal'a schodzą się z sobą razem, to wtedy mamy pięciokąt, wpisany w przecięcie stożkowe, i styczną w jednym z wiérzchołków, który możemy uważać jako punkt podwójny (por. us. 47). A więc, *punkt przecięcia się stycznéj w jednym z wiérzchołków pięciokąta, wpisanego w przecięcie stożkowe, i boku przeciwległego, leży na prostéj, przechodzącéj przez dwa punkty przecięcia się pozostałych par boków przeciwległych.*

Z tego wynika, że: *gdy danych jest pięć punktów, mających leżéć na przecięciu stożkowym, to możemy przez którykolwiek z nich poprowadzić styczną do tegoż przecięcia stożkowego w owym punkcie*, a także, że: *cztéry punkty i styczna w jednym z tych punktów wyznaczają przecięcie stożkowe.*

stycznych wyznacza jedno tylko przecięcie stożkowe.

Jeżeli dwa po sobie następujące boki sześcioboku Brianchon'a schodzą się z sobą razem, to wtedy mamy pięciobok, opisany na przecięciu stożkowym, i punkt styczności jednéj ze stycznych, którą możemy uważać jako prostą podwójną (por. us. 47). A więc, *prosta, przechodząca przez punkt styczności jednego z boków pięcioboku, opisanego na przecięciu stożkowym, i przez wiérzchołek przeciwległy, przechodzi przez punkt przecięcia się dwu prostych, przechodzących przez pozostałe pary wiérzchołków przeciwległych.*

Z tego wynika, że: *gdy danych jest pięć prostych, mających być stycznymi do przecięcia stożkowego, to możemy na któréjkolwiek z nich oznaczyć punkt styczności z tymże przecięciem stożkowym owéj stycznéj*, a także, że: *cztéry styczne i punkt styczności jednéj z tych stycznych wyznaczają przecięcie stożkowe.*

Czytelnik sam wyprowadzi odpowiednie wnioski dla:

czworokąta, wpisanego w przecięcie stożkowe, i stycznych w dwu wiérzchołkach tego czworokąta,

czworoboku, opisanego na przecięciu stożkowym, i punktów styczności dwu boków tego czworoboku,

jak również dla *dwu trójkątów: jednego, wpisanego w przecięcie stożkowe, a drugiego opisanego na tymże przecięciu stożkowym i takiego, iż jego boki przechodzą przez wiérzchołki trójkąta wpisanego.*

147. Ćwiczenia.

1°. *a.* Przez jeden z pięciu punktów danych, z których żadne trzy nie leżą na jednéj prostéj, 1) poprowadziwszy dowolną prostą, oznaczyć na niéj drugi punkt, należący do przecięcia stożkowego, wyznaczonego przez dane punkty; 2) poprowadzić styczną do tegoż przecięcia stożkowego.

b. Na jednéj z pięciu prostych danych, z których żadne trzy nie przechodzą przez jeden punkt, 1) obrawszy dowolnie punkt, poprowadzić przez ten punkt drugą styczną do przecięcia stożkowego, wyznaczonego przez dane proste, jako styczne; 2) oznaczyć jéj punkt styczności do tegoż przecięcia stożkowego.

2°. *a*. Mając dane cztéry punkty i styczną w jednym z nich, wyznaczające przecięcie stożkowe, 1) poprowadziwszy dowolnie przez jeden z tych punktów prostą, oznaczyć na niéj drugi punkt, należący do tegoż przecięcia stożkowego; 2) poprowadzić styczną do tegoż przecięcia stożkowego w jednym z tych trzech punktów danych, przez które nie przechodzi styczna dana.

b. Mając dane cztéry styczne i punkt styczności jednéj z nich, wyznaczające przecięcie stożkowe, i t. d.

3°. *a*. Mając dane trzy punkty i styczne w dwu z nich, wyznaczające przecięcie stożkowe, 1) poprowadziwszy dowolnie przez jeden z tych punktów prostą, oznaczyć na niéj drugi punkt, należący do tegoż przecięcia stożkowego; 2) poprowadzić styczną do tegoż przecięcia stożkowego w pozostałym z danych punktów.

b. Mając dane trzy styczne i punkty styczności dwu z nich, wyznaczające przecięcie stożkowe, i t. d.

4°. Mając dane cztéry proste, z których żadne trzy nie przechodzą przez jeden punkt, a żadne dwie nie są do siebie równoległe, zaś jako piątą przyjmując prostą w nieskończoności, poprowadzić kilka stycznych do przecięcia stożkowego, wyznaczonego przez owe pięć prostych, jako styczne, i oznaczyć kilka punktów na tym przecięciu stożkowym. Dlaczego dany tu jest warunek, aby nie było stycznych do siebie równoległych?

5°. Poprowadziwszy trzy styczne do paraboli, proste a, b, c, wystawmy w punktach, w których dwie z nich, np. a i c, przecinają się z kierownicą, prostopadłe do nich: a' do a i c' do c (dlaczego te proste a' i c' są stycznymi do paraboli?). Te pięć prostych i prosta p_∞, w dowolnym następstwie wzięte, tworzą sześciobok Brianchon'a. Przyjąwszy takie następstwo boków: a, b, c, c', p_∞, a', wykréślić proste, łączące wierzchołki przeciwległe tego sześcioboku, objaśnić, czym dwie piérwsze z nich są dla trójkąta abc, opisanego na paraboli, oraz wyznaczyć położeniepunktu, w którym się te proste i odpowiednia trzecia (str. 26, odsyłacz) przecinają, względem kierownicy (wypowiedziéć to jako twierdzenie).

6°. Obierzmy trzy takie punkty A, B, C i tak poprowadźmy dwie proste d i e, do siebie prostopadłe, których punkty w nieskończoności nazwijmy odpowiednio D_∞ i E_∞, iżby żadne trzy z tych pięciu punktów nie leżały na jednéj prostéj. Jakimi są względem siebie proste, poprowadzone z jakiegokolwiek punktu na płaszczyźnie do punktów D_∞ i E_∞, i jakie szczególne przecięcie stożkowe wyznaczają takie punkty A, B, C, D_∞ i E_∞? — Oznaczmy przez F punkt spotkania się z sobą wysokości trójkąta ABC i rozważajmy sześciobok: $ABCFD_\infty E_\infty$. Oznaczmy punkty spotkania się boków przeciwległych:

AB z FD_∞ przez G, BC z $D_\infty E_\infty$ przez H_∞, CF z $E_\infty A$ przez I (na jakich prostych leży punkt H_∞?). Jeżeliby punkty G, H_∞ i I leżeć miały na jednéj prostéj, to jakąby winna być prosta GI względem prostéj BC? — Jaką w trójkącie AFG jest prosta AE_∞ (czyli AI) względem FG (czyli FD_∞), oraz prosta CF (czyli FI) względem AG (czyli AB), i dlaczego? Czym więc dla trójkąta AFG jest punkt przecięcia się prostych AI i FI, a wskutek tego, czym jest w tym trójkącie prosta GI? Jakimi więc są proste GI i BC względem prostéj AF, a wskutek tego względem siebie? Czy zatym rozważany sześciobok jest sześciobokiem Pascal'a, a więc czy nasze szczególne przecięcie stożkowe przechodzi przez punkt F? (wypowiedzieć to jako twierdzenie).