ROZDZIAŁ V.

BIEGUN I BIEGUNOWA.—OGNISKA I KIEROWNICE.—STYCZNE.—OSI W ELIPSIE I W HIPERBOLI.—MIMOŚRÓD.

BIEGUN I BIEGUNOWA.

95. Widzieliśmy w us. 37-ym, że: jeżeli w jednym z dwu punktów, dzielących harmonicznie średnicę koła, wystawimy do niéj prostopadłą, to każda cięciwa koła, przechodząca przez drugi z owych dwu punktów, będzie przez ten punkt i przez owę prostopadłą do średnicy podzielona harmonicznie.

Opiérając się na tym, że dla trzech punktów, z których pewne dwa mają przedstawiać jednę parę, można znaléść jeden tylko czwarty punkt harmoniczny (us. 18), możemy przytoczoną powyżéj własność wyrazić inaczéj. Wyobraźmy sobie, że przez pewien dowolnie obrany punkt P prowadzimy różne proste, spotykające koło dane, a na każdéj takiéj prostéj dla trzech punktów: dwu punktów, w których ta prosta przecina koło, jako mających przedstawiać jednę parę, i trzeciego, punktu P, wyznaczać będziemy czwarty punkt harmoniczny. Wszystkie tak wyznaczone punkty znajdą się na pewnéj prostéj p, prostopadłéj do téj średnicy koła, która przechodzi przez punkt P. Możemy więc powiedzieć, że *miejscem gieometrycznym punktu na prostéj, przechodzącéj przez punkt stały* P *i spotykającéj koło, tworzącego z tym punktem* P *parę, harmonicznie sprzężoną z parą punktów, w których ta prosta przecina koło, jest pewna prosta, prostopadła do średnicy koła, przechodzącéj przez punkt* P.

Tak z sobą względem koła danego związane punkt P i prostą p nazywamy: punkt P — b i e g u n e m p r o s t é j p w z g l ę d e m k o ł a; prostą p — b i e g u n o w ą p u n k t u P w z g l ę d e m k o ł a. Możemy zatym powyższą własność tak jeszcze wysłowić: *wszystkie cięciwy koła, przechodzące przez ten sam punkt, są przez ten punkt i przez jego biegunową podzielone harmonicznie*, a wszczególności: *cięciwa koła jest przez jakikolwiek punkt na niéj* *) *i przez jego biegunową podzielona harmonicznie.*

---

*) Choćby zewnątrz odcinka, stanowiącego właściwą cięciwę koła (us. 37, uwaga).

96. Ponieważ punkt P i punkt przecięcia się jego biegunowéj p względem koła danego ze średnicą tego koła, przechodzącą przez punkt P (jak wiemy, prostopadle do biegunowéj), tworzą parę punktów, harmonicznie sprzężoną z parą punktów końcowych téj średnicy, przeto (us. 13):

punkt i jego biegunowa znajdują się po téj saméj stronie środka koła; biegunowa punktu, leżącego zewnątrz koła, przecina je; wmiarę, jak punkt, leżący zewnątrz koła, przybliża się do środka koła, jego biegunowa oddala się od środka koła; *biegunowa punktu na kole przechodzi przezeń i jest styczną do koła w tym punkcie;* biegunowa punktu, leżącego wewnątrz koła, nie spotyka go; wmiarę, jak punkt, leżący wewnątrz koła, przybliża się do środka koła, jego biegunowa oddala się od środka koła; *biegunową środka koła jest prosta w nieskończoności, a biegunową punktu w nieskończoności jest średnica koła.*

prosta i jéj biegun znajdują się po téj saméj stronie środka koła; biegun prostéj, nie spotykającéj koła, leży wewnątrz koła; wmiarę, jak prosta, nie spotykająca koła, przybliża się do środka koła, jéj biegun oddala się od środka koła; *biegun stycznéj do koła znajduje się na niéj i jest jéj punktem styczności do koła;* biegun prostéj, przecinającéj koło, leży zewnątrz niego; wmiarę, jak prosta, przecinająca koło, przybliża się do środka koła, jéj biegun oddala się od środka koła; *biegunem średnicy koła jest punkt w nieskończoności, a biegunem prostéj w nieskończoności jest środek koła.*

97. Wracając jeszcze do tego, cośmy mówili w us. 39-ym, możemy teraz zauważyć, że, gdy koło jest harmonicznie pokrewne z samym sobą, to oś tego pokrewieństwa jest względem owego koła biegunową punktu, będącego środkiem pokrewieństwa, i, nawzajem, środek pokrewieństwa jest względem owego koła biegunem prostéj, będącéj osią pokrewieństwa.

W przypadku, kiedy środek pokrewieństwa leży zewnątrz koła, pokrewnego z samym sobą, oś pokrewieństwa przechodzi przez punkty styczności obu tych stycznych do owego koła, które można poprowadzić ze środka pokrewieństwa, t. j. oś jest cięciwą styczności, odpowiadającą środkowi pokrewieństwa (us. 40). A więc:

a. biegunową punktu, leżącego zewnątrz koła, jest cięciwa styczności, odpowiadająca temu punktowi.

b. biegunem cięciwy koła jest punkt, dla którego ona jest odpowiadającą cięciwą styczności.

98. Mając dane jakiekolwiek przecięcie stożkowe, na jego cięciwie, przechodzącéj przez ognisko równolegle do kierownicy, jako na średnicy, zakréślmy koło. To koło jest harmonicznie pokrewne z danym przecięciem stożkowym; ognisko owo jest środkiem, a odpowiadająca mu kierownica liniją średnią tego pokrewieństwa (us. 49). Oczywiście, wyznaczenie osi tego pokrewieństwa nie przedstawia trudności. Mówiąc nadal w tym ustępie jednocześnie o przecięciu stożkowym i o kole, rozumiéć będziemy koło, harmonicznie pokrewne z tym przecięciem stożkowym.

Obierzmy jakikolwiek punkt P' i wyznaczmy harmonicznie z nim pokrewny punkt P. Z każdą cięciwą koła, przechodzącą przez punkt P, jest pokrewna cięciwa przecięcia stożkowego (us. 47), przechodząca przez punkt P' (us. 35, *b*). Punkty, w których prosta, przechodząca przez punkt P, przecina koło, są pokrewne z punktami, w których z tamtą pokrewna prosta, przechodząca przez punkt P', przecina przecięcie stożkowe (us. 47, *a*). Na każdéj cięciwie koła, przechodzącéj przez punkt P, dla trzech punktów: pary punktów, spólnych z kołem, i punktu P wyznaczmy czwarty punkt harmoniczny. Z tymi ostatnimi «czwartymi» punktami są pokrewne punkty na odpowiednich cięciwach pokrewnych (us. 35, *a*) przecięcia stożkowego, przechodzących przez punkt P'; każdy z nich tworzy z punktem P' parę, harmonicznie pokrewną z parą punktów na odpowiedniéj mu cięciwie, spólnych z przecięciem stożkowym (us. 35, *l*). A gdy owe czwarte punkty na cięciwach koła, przechodzących przez punkt P, leżą na jednéj prostéj (us. 95), którą nazwijmy *p*, to i tylkoco wzmiankowane z tamtymi pokrewne punkty na cięciwach przecięcia stożkowego, przechodzących przez punkt P', leżą na jednéj prostéj—nazwijmy ją *p'*— pokrewnéj z prostą *p* (us. 35, *a*). A więc *miejscem gieometrycznym punktu na prostéj, przechodzącéj przez punkt stały* P' *i spotykającéj przecięcie stożkowe, tworzącego z tym punktem* P' *parę, harmonicznie sprzężoną z parą punktów, w których ta prosta przecina przecięcie stożkowe, jest pewna prosta.*

Widzimy zatym, że ta prosta *p'* i punkt P' są tak z sobą związane względem danego przecięcia stożkowego, jak prosta *p* z punktem P względem koła. Dlatego również punkt P' nazywamy b i e g u n e m p r o s t é j *p'* w z g l ę d e m p r z e c i ę c i a s t o ż k o w e g o, a prostą *p'* b i e g u n o w ą p u n k t u P' w z g l ę d e m p r z e c i ę c i a s t o ż k o w e g o. Możemy zatym powyższą własność tak jeszcze wysłowić: *wszystkie cięciwy przecięcia stożkowego, przechodzące przez ten sam punkt, są przez ten punkt i przez jego biegunową podzielone harmonicznie* *), a wszczególności: *cięciwa przecięcia stożkowego jest przez jakikolwiek punkt na niéj i przez jego biegunową podzielona harmonicznie.*

Z tego, cośmy tu mówili, wynika jeszcze, że: jeżeli środek pokrewieństwa znajduje się w środku koła, a punkt P i prosta *p* względem tego

---

*) Uwaga. Z tego wprost wynika, że: *jeżeli punkt i prostą, będące dla siebie biegunem i biegunową względem danego przecięcia stożkowego, przyjmiemy odpowiednio jako środek i oś pokrewieństwa harmonicznego, to dane przecięcie stożkowe jest samo z sobą harmonicznie pokrewne.* (Por. us. 39, 40 i 97.)

koła są dla siebie biegunem i biegunową, to harmonicznie z punktem P pokrewny punkt P', a z prostą p pokrewna prosta p' są dla siebie biegunem i biegunową względem przecięcia stożkowego, harmonicznie z owym kołem pokrewnego.

— Objaśnić, dlaczego względem danego przecięcia stożkowego pewnemu punktowi odpowiada jedna tylko biegunowa i, nawzajem, pewnéj prostéj jeden tylko biegun.

99. Opiérając się na ogólnych zasadach pokrewieństwa harmonicznego (us. 34—36) i korzystając z wypowiedzianych w us. 47-ym niektórych wniosków z owych zasad, łatwo objaśnić, że wszystko, cośmy w us. 96-ym i 97-ym mówili o biegunie prostéj i biegunowéj punktu względem koła, stosuje się wprost odpowiednio do bieguna prostéj i do biegunowéj punktu względem przecięcia stożkowego. A więc, wszczególności, *styczna do przecięcia stożkowego i jéj punkt styczności są dla siebie biegunową i biegunem.* Tak np. biegunem prostéj p_∞ względem paraboli jest punkt P_∞ na paraboli (us. 65); biegunem każdéj asymptoty hiperboli jest punkt w nieskończoności na téjże asymptocie (us. 75). —

Prosta w nieskończoności jest względem przecięcia stożkowego biegunową punktu, w którym wszystkie przezeń przechodzące cięciwy dzielą się na połowy (us. 19). Stąd wypada ogólnie, że *przecięcia stożkowe mają środek* (por. us. 56, 70, 82). A więc, *prosta w nieskończoności i środek przecięcia stożkowego są dla siebie biegunową i biegunem.* Odpowiednio, *średnica przecięcia stożkowego i pewien punkt w nieskończoności są dla siebie biegunową i biegunem.* — W przypadku, gdy przecięcie stożkowe jest parabolą, punkt przecięcia się prostéj p_∞ z osią schodzi się razem z jednym z jéj punktów końcowych, t. j. z punktem P_∞ na paraboli; a więc punkt, tworzący z punktem na prostéj p_∞ parę, harmonicznie sprzężoną z parą punktów końcowych osi paraboli, również znajdzie się w punkcie P_∞ na paraboli (us. 13). Czyli, punkt, odpowiadający środkowi elipsy i hiperboli, i dlatego nazywany środkiem paraboli, jest punktem P_∞ na paraboli. Wszystkie przechodzące przezeń cięciwy paraboli, a więc równoległe do jéj osi, są jakby średnicami paraboli (por. us. 70). Biegunami średnic paraboli są, według tego, cośmy powyżéj powiedzieli, punkty w nieskończoności. —

100. Odpowiednio do tego, cośmy wypowiedzieli w us. 97-ym, *punkt, znajdujący się w obszarze zewnętrznym* (us. 47, 78) *przecięcia stożkowego, i odpowiadająca mu cięciwa styczności są dla siebie biegunem i biegunową.* — Wszczególności, biegunem średnicy przecięcia stożkowego jest punkt przecięcia się z sobą stycznych w punktach końcowych téj średnicy. Lecz, jak widzieliśmy (us. 96, 99), biegunem średnicy jest pewien punkt w nieskończoności. Zatym ogólnie, *styczne do przecięcia* *stożkowego w punktach końcowych jego średnicy są do siebie równoległe, a punkt w nieskończoności, znajdujący się w kierunku tych stycznych, jest biegunem owéj średnicy.* W paraboli jeden punkt końcowy średnicy jest w nieskończoności (us. 70); styczna w nim przechodzi prócz tego przez punkt w nieskończoności, w którym się spotyka ze styczną w drugim punkcie końcowym średnicy; a więc, przechodząc przez dwa punkty w nieskończoności, cała znajduje się w nieskończoności. Zatym, *jedną ze stycznych do paraboli w punktach końcowych jéj średnicy jest prosta p_∞, a punkt w nieskończoności, znajdujący się w kierunku stycznéj w drugim punkcie końcowym średnicy, jest biegunem téj średnicy.* — Z tego wogóle wynika (objaśnić, dlaczego?), że *w pewnym kierunku można poprowadzić do elipsy i do hiperboli dwie, do paraboli zaś jednę tylko styczną.*

OGNISKA. KIEROWNICE. STYCZNE.

101. Mając dane jakiekolwiek przecięcie stożkowe L (fig. 28), na jego cięciwie, przechodzącéj przez ognisko O równolegle do kierownicy, jako na średnicy, zakréślmy koło K. Jest ono harmonicznie pokrewne z L; środkiem pokrewieństwa jest punkt O, a kierownica k liniją średnią. Jak wiemy, prosta p_∞ jest względem K biegunową jego środka O (us. 96). Z prostą p_∞ jest pokrewna kierownica k, a punkt O, ognisko, jako środek pokrewieństwa, jest sam z sobą pokrewny (us. 35, o, c). A więc, ognisko O i kierownica k są dla siebie biegunem i biegunową względem L (us. 98), t. j. *ognisko przecięcia stożkowego i odpowiadająca temu ognisku kierownica są dla siebie biegunem i biegunową względem tego przecięcia stożkowego.*

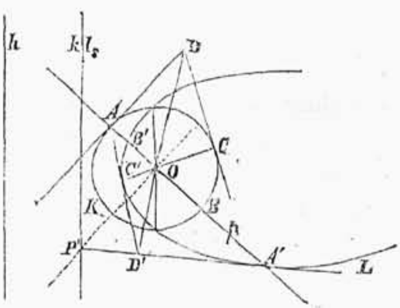

Fig. 28.

102. Poprowadźmy jakąkolwiek średnicę AB koła K. Ta prosta — nazwijmy ją p — jest prostopadła do średnicy koła, przechodzącéj przez jéj biegun względem tego koła (us. 95), który, jako biegun średnicy, znajduje się w nieskończoności (us. 96). A więc biegun P prostéj p względem K znajduje się w nieskończoności w kierunku prostéj OP′. Z prostą p, jako przechodzącą przez środek pokrewieństwa O, jest ona sama pokrewna, a z punktem w nieskończoności w kierunku prostéj OP′ jest pokrewny punkt P′ na linii średniéj (us. 35, d, n; 34, a). A więc prosta p i punkt P' są dla siebie biegunową i biegunem względem L (us. 98), t. j.

a. biegun prostéj, przechodzącéj przez ognisko przecięcia stożkowego, znajduje się na kierownicy, odpowiadającéj temu ognisku, w punkcie, w którym ją przecina prostopadła do owéj prostéj w tymże ognisku.

b. biegunowa punktu, leżącego na kierownicy przecięcia stożkowego, przechodzi przez ognisko, odpowiadające téj kierownicy, prostopadle do prostéj, łączącéj ów punkt z tymże ogniskiem.

103. Poprowadźmy dwie jakiekolwiek styczne do koła K; punkty ich styczności, A i C (fig. 28), oraz punkt przecięcia się tych stycznych, D, połączmy ze środkiem koła. Prosta OD dzieli kąt AOC na połowy.— Ze stycznymi do K są pokrewne styczne do L (us. 36, *b*), a z punktami styczności stycznych do K są pokrewne punkty styczności pokrewnych stycznych do L (us. 36, *a*; 34, *a*; 35, *a*), każda zaś z prostych, przechodzących przez punkt O, jest sama z sobą pokrewna (us. 35, *c*). A więc prosta OD' dzieli kąt A'OC' na połowy, t. j. *kąt, utworzony w ognisku przez proste, łączące to ognisko z punktami styczności dwu którychkolwiek stycznych, jest przez prostą, łączącą ognisko z punktem przecięcia się tych stycznych, podzielony na połowy* *).

104. Zauważmy, że styczna do K, AD (fig. 28), jako prostopadła do średnicy p, przechodzącéj przez punkt styczności A, jest równoległa do średnicy OP', przechodzącéj przez biegun prostéj p względem K, który się znajduje w nieskończoności (us. 96); a więc, styczna AD przechodzi (us. 6) przez biegun prostéj p względem K. Wskutek tego, pokrewna z nią styczna A'D' do L przechodzi przez pokrewny z biegunem prostéj p względem K punkt P', który jest biegunem względem L téjże prostéj p (us. 102), przechodzącéj przez punkt styczności A'. A więc, *styczna do przecięcia stożkowego przechodzi przez punkt na kierownicy, który jest biegunem cięciwy, przechodzącéj przez punkt styczności i przez ognisko, odpowiadające owéj kierownicy* **).

---

*) Uwaga. Jeżeli D'A' i D'C' są stycznymi do różnych gałęzi hiperboli, to prosta OD' dzieli kąt, spełniający kąt A'OC'. Jeżeli jednak wówczas prostą, łączącą ognisko O z punktem styczności na gałęzi dalszéj od tego ogniska O, uwzględnimy w należytym kierunku (us. 79), t. j. od punktu O przez punkt w nieskończoności do owego punktu styczności, to własność powyżéj wypowiedziana przedstawi się jako ogólna.

**) [Ponieważ zaś prosta, łącząca ów punkt na kierownicy z odpowiadającym jéj ogniskiem, jest prostopadła do téj cięciwy (us. 102), przeto łatwo sprawdzić na odpowiednim rysunku, iż własności, którąśmy przyjęli za określenie przecięcia stożkowego, t. j. własności: stosunek odległości jakiegokolwiek punktu na przecięciu stożkowym od ogniska i od kierownicy, odpowiadającéj temu ognisku, przedstawia liczbę stałą (us. 44), odpowiada własność: stosunek wstaw kątów, utworzonych przez styczną do przecięcia stożkowego, jednego z prostą, łączącą ognisko z punktem przecięcia się stycznéj z kierownicą, odpowiadającą temu ognisku, a drugiego z tąż kieierownicą, przedstawia liczbę stałą.]

Z zestawienia téj własności z własnością w us. 102, *a.* wynika łatwy sposób *wykréślenia stycznéj do przecięcia stożkowego we wskazanym na nim punkcie, gdy ognisko i odpowiadająca mu kierownica są znane.*

— Objaśnić, dlaczego *punkty przecięcia się z sobą każdéj pary stycznych w punktach końcowych cięciwy, przechodzącéj przez ognisko, leżą na kierownicy, odpowiadającéj temu ognisku.*

105. Przez punkt B na elipsie albo na hiperboli (fig. 29), których ogniska są O i O_1, poprowadźmy styczną. Punkty przecięcia się stycznéj

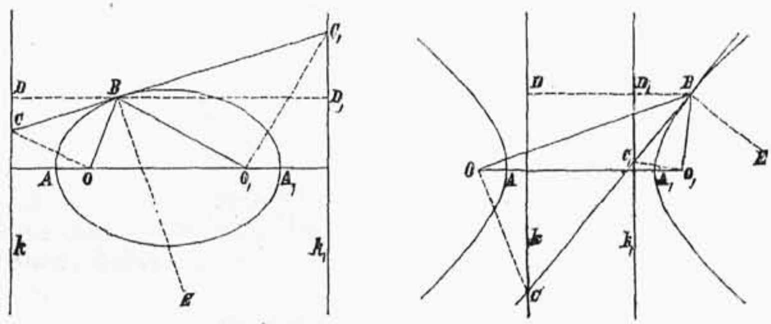

Fig. 29.

z kierownicami k i k_1, t. j. punkty C i C_1, są biegunami prostych odpowiednio BO i BO_1 (us. 104), do których proste odpowiednio CO i C_1O_1 są prostopadłe (us. 102). Poprowadźmy jeszcze przez punkt B równoległą do OO_1, która przetnie kierownice w punktach D i D_1. Mamy tu (por. us. 59, 87)

$$\frac{BO}{BD}=\frac{BO_1}{BD_1},\ \text{skąd}\ \frac{BO}{BO_1}=\frac{BD}{BD_1}=\frac{BC}{BC_1};$$

trójkąty zatym BOC i BO_1C_1 są podobne, a wszczególności kąty CBO i C_1BO_1 są równe. A więc, *w elipsie i w hiperboli proste, łączące punkt styczności stycznéj z ogniskami, tworzą ze styczną kąty równe.*

Ta styczna jest w hiperboli dwusieczną kąta OBO_1, a w elipsie jest dwusieczną kąta, spełniającego kąt OBO_1. Prostopadła zaś do stycznéj w punkcie styczności, prosta BE, tak zwana n o r m a l n a w punkcie B, jest w elipsie dwusieczną kąta OBO_1, a w hiperboli jest dwusieczną kąta, spełniającego kąt OBO_1. Możemy więc powiedzieć: *w elipsie i w hiperboli styczna i normalna są dwusiecznymi kątów spełniających się, utworzonych przez proste, łączące punkt styczności z ogniskami.*

Na téj własności opiéra się sposób *wykréślenia stycznéj do elipsy, albo do hiperboli, we wskazanym na niéj punkcie, gdy jéj ogniska są znane:* dwusieczna kąta, utworzonego przez proste, łączące punkt wskazany z ogniskami, jest normalną w elipsie, a styczną w hiperboli.

106. Przez punkt B na paraboli (fig. 30), któréj ogniskiem jest punkt O, poprowadźmy do niéj styczną. Punkt przecięcia się stycznéj z kierownicą k, t. j. punkt C, jest biegunem prostéj BO (us. 104), do któréj prosta CO jest prostopadła (us. 102). Poprowadźmy przez punkt B równoległą do osi, która przetnie kierownicę w punkcie D. Mamy tu DB = BO (us. 64); zatym trójkąty prostokątne BOC i BDC są równe, a wszczególności kąty CBO i CBD są równe. A więc, *w paraboli proste, wyprowadzone z punktu styczności stycznéj: jedna do ogniska, druga równolegle do osi, tworzą ze styczną kąty równe*, czyli, *styczna do paraboli tworzy z prostą, łączącą punkt styczności z ogniskiem, i z osią kąty równe.*

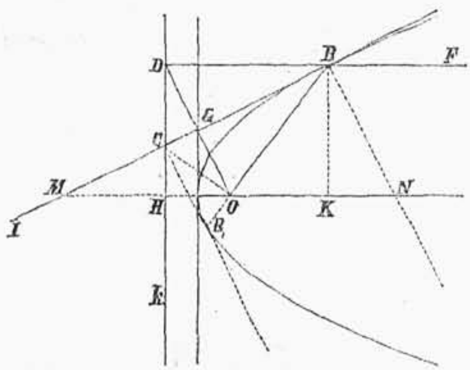

Fig. 30.

Poprowadźmy normalną w punkcie B, prostą BN. Ona, jako prostopadła do dwusiecznéj kąta DBO, jest dwusieczną kąta OBF, spełniającego kąt DBO. *W paraboli styczna i normalna są dwusiecznymi kątów spełniających się, utworzonych przez proste, wychodzące z punktu styczności stycznéj: jednę do ogniska, drugą równolegle do osi.*

Ponieważ styczna i normalna w pewnym punkcie B są dwusiecznymi kątów przyległych OBD i OBF, przeto pęk promieni B(INOF) jest harmoniczny (us. 27). Wskutek tego, te promienie wyznaczają na osi paraboli szereg punktów harmoniczny; a gdy promień BF jest równoległy do osi, zatym OM = ON (us. 24). Gdybyśmy na prostéj MN, jako na średnicy, nakréślili koło, to ono przeszłoby przez punkt B, wiérzchołek kąta prostego MBN; jest więc

$$OB = OM = ON,$$

t. j. *punkt styczności stycznéj do paraboli i punkty przecięcia się z osią stycznéj i normalnéj są jednakowo oddalone od ogniska.*

Z téj własności i z poprzedzającéj wynikają odpowiednie sposoby *wykréślenia stycznéj do paraboli we wskazanym na niéj punkcie, gdy jéj ognisko i kierunek osi są znane.*—

Wiérzchołek główny paraboli nazwijmy A (na rysunku nie można było téj litery zmieścić) i spuśćmy z punktu B prostą BK prostopadłą na oś; jest więc HK = DB. Lecz DB = BO = MO. Zatym HK = MO. Odjąwszy od tych odcinków odcinki odpowiednio HA = AO (us. 69), otrzymamy

$$AK = MA,$$

t. j. *odcinek osi paraboli, zawarty między punktem, w którym styczna do paraboli przecina oś, i spodkiem prostopadłéj, spuszczonéj na nią z punktu styczności stycznéj, jest przez wiérzchołek główny paraboli podzielony na połowy.*

Z téj własności wynika sposób *wykréślenia stycznéj do paraboli we wskazanym na niéj punkcie, gdy jéj wiérzchołek główny i kierunek osi są znane.* —

Jak wiadomo, punkt przecięcia się pary stycznych w punktach końcowych cięciwy BB_1, przechodzącéj przez ognisko, znajduje się na kierownicy (us. 104); a więc prosta B_1C jest styczną do paraboli w punkcie B_1. Z równości trójkątów CBO i CBD wynika, że kąty DCB i BCO są równe. Podobnie więc kąty OCB_1 i B_1CH są równe. Zatym styczne CB i CB_1 są dwusiecznymi kątów przyległych DCO i OCH; są więc do siebie prostopadłe. A więc, *każde dwie styczne do paraboli, przecinające się z sobą na kierownicy, są do siebie prostopadłe*, a nadto (us. 27, *b*), *dwie styczne do paraboli, poprowadzone z punktu na kierownicy, prosta, łącząca ten punkt z ogniskiem, i kierownica tworzą pęk promieni harmoniczny.*

107. Przez punkt B na elipsie, albo na hiperboli (fig. 31), któréj ogniska są O i O_1, poprowadźmy styczną do téj linii, prostą BC. Z ogni-

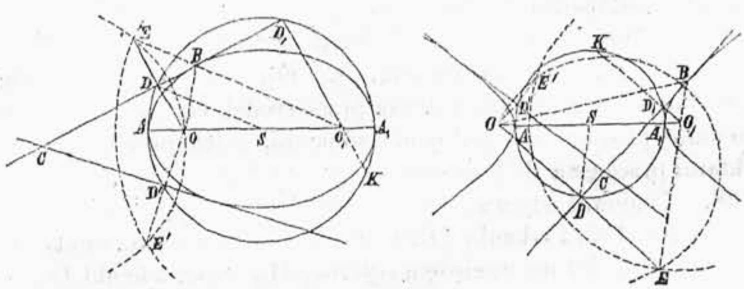

Fig. 31.

ska O spuśćmy prostopadłą na styczną, która przetnie się ze styczną w punkcie D, a z prostą BO_1 w punkcie E. Styczna BD jest dwusieczną kąta OBE (us. 105); trójkąty więc ODB i BDE są równe. Wskutek tego; $EB = OB$ i w elipsie $EO_1 = BO_1 + BO = AA_1$ (us. 60), w hiperboli zaś $EO_1 = BO - BO_1 = AA_1$ (us. 88). Połączmy punkt D ze środkiem S liniją prostą; ponieważ $DO = \frac{1}{2} EO$, przeto z podobieństwa trójkątów DOS i EOO_1 wynika, że $DS = \frac{1}{2} EO_1 = \frac{1}{2} AA_1$. Jest więc $DS = SA$. Stosuje się to także do spodka D_1 prostopadłéj, spuszczonéj z drugiego ogniska na styczną. A więc, *w elipsie i w hiperboli spodki prostopadłych, spuszczonych z ognisk na styczne, leżą na kole spółśrodkowym, przechodzącym przez wiérzchołki główne*, a nadto, *punkty symetryczne z jednym ogniskiem względem stycznych leżą na kole, zakréślonym z drugiego ogniska, jako środka, promieniem równym osi wielkiéj w elipsie, a osi poprzecznéj w hiperboli.*

Na tych własnościach opiéra się sposób *wykréślenia stycznych czyto do elipsy, czytéż do hiperboli, z punktu, leżącego zewnątrz tych linij, gdy są znane ich ogniska i długość osi wielkiéj w elipsie, a poprzecznéj w hiperboli.* Mając np. wykréślić styczne, przechodzące przez punkt C (fig. 31), zakréślamy jedno koło z punktu C, jako środka, promieniem CO, a drugie z drugiego ogniska O_1, jako środka, promieniem AA'; dwa te koła przetną się z sobą w punktach E i E'. Obie proste, łączące punkt C ze środkami odcinków OE i OE', t. j. proste CD i CD', są stycznymi żądanymi, punkty zaś w których te styczne CD i CD' przecinają proste odpowiednio O_1E i O_1E' są ich punktami styczności.

Możemy, opiérając się również na uzasadnionych tu własnościach, rozwiązać takie zadanie: *do elipsy lub do hiperboli, gdy są znane ich ogniska i długość osi wielkiéj w elipsie, a poprzecznéj w hiperboli, poprowadzić styczne, równoległe do prostéj danéj.* Przez jedno ognisko O poprowadzimy prostopadłą do danéj prostéj, a z drugiego ogniska O_1, jako środka, zakréślimy koło promieniem AA_1, przecinające owę prostopadłą w punktach F i F'. Obie proste (por. us. 100), z których jedna przechodzi przez środek odcinka OF, a druga przez środek odcinka OF', równolegle do danéj prostéj, są stycznymi żądanymi, a ich punkty styczności są punktami przecięcia się z prostymi O_1F i O_1F'.

108. Ponieważ styczna IB (fig. 30) do paraboli jest dwusieczną kąta DBO (us. 106) i odcinki DB i BO są równe, przeto punkty O i D są symetrycznie położone względem stycznéj IB, a więc odcinki DG i OG są równe, a prosta DO jest prostopadła *) do stycznéj IB. Poprowadźmy

---

*) Prosta zaś, łącząca punkt styczności stycznéj z punktem na kierownicy, symetrycznym z ogniskiem względem téj stycznéj, jest równoległa do osi (dlaczego?). — Cztéry punkty: punkt styczności stycznéj, punkt jéj przecięcia się z osią, ognisko i punkt, symetryczny z ogniskiem względem téj stycznéj, są wiérzchołkami romba.

styczną w wiérzchołku głównym paraboli; ta styczna jest do osi prostopadła (us. 68), a więc równoległa do HD. A gdy $AO = \frac{1}{2} HO$ (us. 69), zatym ta styczna przecina odcinek DO w jego środku, t. j. przechodzi przez punkt G. *W paraboli spodki prostopadłych, spuszczonych z ogniska na styczne, leżą na stycznéj w wiérzchołku głównym*, a nadto, *punkty symetryczne z ogniskiem względem stycznych leżą na kierownicy.*

Aby *wykréślić styczne do paraboli z punktu, leżącego zewnątrz téj linii, gdy jéj ognisko i wiérzchołek główny są znane* — np. z punktu I (fig. 30) — przez punkt H, znajdujący się na przedłużeniu osi, w téj saméj odległości od wiérzchołka głównego A, co ognisko O, poprowadzimy prostopadłą do osi, a z punktu I, jako środka, promieniem IO zakréślimy koło, które owę prostopadłą przetnie w punktach D i D'; obie proste, łączące punkt I ze środkami odcinków OD i OD', są stycznymi żądanymi. Punkty ich styczności znajdują się na przecięciu się odpowiednich równoległych do osi, przechodzących przez wyznaczone tu punkty D i D'.

Aby *do paraboli, któréj ognisko i wiérzchołek główny są znane, poprowadzić styczną, równoległą do prostéj danéj*, spuścimy z ogniska prostopadłą na daną prostą, a prosta, przechodząca przez punkt przecięcia się owéj prostopadłéj ze styczną w wiérzchołku głównym równolegle do danéj prostéj, jest styczną żądaną (jedyną możliwą, us. 100); jéj punkt styczności łatwo znajduje się na jéj przecięciu się z równoległą do osi, przechodzącą przez punkt symetryczny z ogniskiem względem téj stycznéj.

109. Poprowadźmy dwie styczne do elipsy, albo do hiperboli; punkty ich styczności nazwijmy B i C (fig. 31), a punkt ich przecięcia się

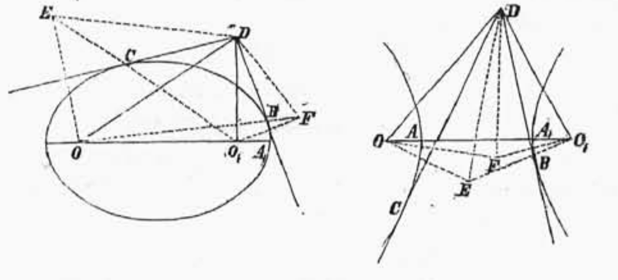

Fig. 32.

oznaczmy przez D. Połączmy punkt D z ogniskiem O i O_1 i wyznaczmy punkt E, symetryczny z punktem O względem stycznéj DC, oraz punkt F, symetryczny z punktem O_1 względem stycznéj DB. Odcinki OF i O_1E, jako równe AA_1 (us. 107), są sobie równe; nadto $OD = DE$,

$O_1D = DF$; trójkąty przeto ODF i O_1DE są równe. Z tego wynika, że kąty ODF i O_1DE są równe, że więc i kąty ODE i O_1DF, a także i ich połowy, t. j. kąty ODC i O_1DB są równe. A zatym, *w elipsie i w hiperboli proste, łączące punkt przecięcia się dwu stycznych z ogniskami, tworzą z tymi stycznymi kąty równe.*

110. Poprowadźmy dwie styczne do paraboli, których punkty styczności są w B i C (fig. 33), punktem zaś ich przecięcia się jest punkt D. Przez punkt D poprowadźmy prostą DE, równoległą do osi, i prostą przez ognisko O, z którego spuśćmy prostopadłe: OF na styczną DB i OG na styczną DC. Spodki tych prostopadłych, t. j. punkty F i G, znajdą się na stycznéj w wiérzchołku głównym (us. 108), która jest prostopadła do osi (us. 68). Na odcinku OD, jako na średnicy, zakréślmy koło; ono przejdzie przez punkty F i G. To koło przetnie prostą DE, równoległą do osi, w punkcie H, a prosta OH, jako tworząca kąt prosty z prostą DE, jest równoległa do prostéj FG. Wskutek tego, łuki HF i GO, jako zawarte między cięciwami równoległymi, są równe, a więc kąty HDF i GDO są sobie równe. A zatym, *w paraboli prosta, łącząca punkt przecięcia się dwu stycznych z ogniskiem, i prosta, przechodząca przez tenże punkt równolegle do osi, tworzą z tymi stycznymi kąty równe.*

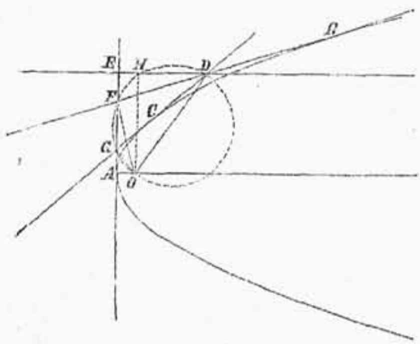

Fig. 33.

111. Mając dwie stałe styczne do danego przecięcia stożkowego, których punkty styczności niech będą B i C (fig. 34), poprowadźmy jakąkolwiek inną styczną do tegoż przecięcia stożkowego. Punkt jéj styczności nazwijmy D, a punkty spotkania się jéj ze stycznymi stałymi E i F. Jak wiemy (us. 103), kąty BOE i EOD są sobie równe, jakoteż kąt DOF jest równy kątowi FOC, Wskutek tego, kąt EOF, pod którym z ogniska O widzimy odcinek EF stycznéj, zawarty między stycznymi stałymi, jest stale równy połowie kąta,

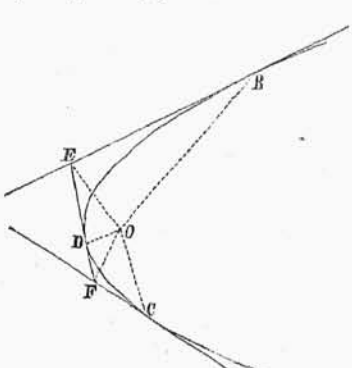

Fig. 34.

BOD + DOC, utworzonego przez promienie OB i OC, uważanego od strony owéj stycznéj EF. A więc, *odcinek każdéj stycznéj do przecięcia stożkowego, ograniczony punktami przecięcia się jéj z dwiema stałymi do niego stycznymi, jest z jego ogniska widoczny wciąż pod kątem równym połowie kąta, utworzonego przez proste, łączące to ognisko z punktami styczności stycznych stałych, uważanego od strony widzianéj stycznéj.*—Przy pewnych stycznych stałych, kąt, pod którym widzimy z ogniska inne styczne, może mieć w elipsie dwie wartości spełniające się (jak to łatwo okazać), zależnie od tego, czy owa styczna, na którą z ogniska patrzymy, jest po téj saméj stronie owego ogniska, co punkt przecięcia się z sobą stycznych stałych, czytéż po innéj stronie. — Wrazie, gdy mamy styczne do różnych gałęzi hiperboli, należy miéć na względzie to, cośmy zastrzegli w uwadze do us. 102-go, t. j. trzeba rozważać te odcinki prostych, łączących ognisko z punktami styczności stycznych, które się znajdują w obszarze wewnętrznym hiperboli.

Z powyższéj własności wynika w szczególnym przypadku, że *w elipsie i w hiperboli odcinek każdéj stycznéj, ograniczony przez styczne w wiérzchołkach głównych, jest z ogniska widoczny wciąż pod kątem prostym.*

OSI W ELIPSIE I W HIPERBOLI. MIMOŚRÓD.

112. Jakeśmy widzieli w us. 107-ym, w elipsie i w hiperboli spodki prostopadłych, spuszczonych z ognisk na styczne, znajdują się na kole spółśrodkowym, przechodzącym przez wiérzchołki główne. Tak np. spodki prostopadłych OD i O_1D_1 (fig. 31) na tę samę styczną w B leżą na owym kole o średnicy AA_1. Łatwo uzasadnić, że $O_1K = OD$. Wiemy zaś, że $O_1K \cdot O_1D_1 = O_1A \cdot O_1A_1$, a więc

$$(1) \qquad OD \cdot O_1D_1 = O_1A \cdot O_1A_1.$$

Ponieważ iloczyn $O_1A \cdot O_1A_1$ jest niezależny od położenia stycznéj, przeto ta równość nam wskazuje, iż iloczyn $OD \cdot O_1D_1$, t. j. pole prostokąta wystawionego na odległościach ognisk od stycznéj, ma dla wszystkich stycznych pewną tę samę wartość — jest stałe. Zbadajmy, czy téj wartości stałéj nie możnaby bliżéj określić.

Dla stycznéj w B odległości OD i O_1D_1 są różne. Kiedyby one były sobie równe? — W elipsie one będą równe wtedy, kiedy styczna jest równoległa do osi wielkiéj AA_1. Natenczas będą one równe długości prostopadłéj ze środka elipsy na tę styczną, któréjto prostopadłéj spodek będzie punktem styczności, t. j. będą równe połowie osi małéj elipsy (us. 57), a więc wartość iloczynu $OD \cdot O_1D_1$ jest w elipsie równa kwadratowi połowy osi małéj. — W hiperboli odległości obu ognisk od stycznéj będą oczywiście wtedy równe, kiedy styczna przechodzi przez środek (us. 82), t. j., kiedy jest asymptotą (us. 83); są one wtedy równe połowie osi sprzężonéj hiperboli (us. 91, uwaga), a więc wartość iloczynu $OD \cdot O_1D_1$ jest w hiperboli równa kwadratowi połowy osi sprzężonéj.

Powiemy więc ogólnie: *w elipsie i w hiperboli pole prostokąta, wystawionego na odległościach ognisk od stycznéj, jest stałe, równoważne w elipsie kwadratowi na połowie osi małéj, w hiperboli zaś kwadratowi na połowie osi sprzężonéj.* —

Na mocy téj własności, według (1), iloczyn $O_1A \cdot O_1A_1$ równy jest kwadratowi osi małéj w elipsie, a osi sprzężonéj w hiperboli; a więc, *w elipsie połowa długości osi małéj, a w hiperboli połowa długości osi sprzężonéj jest średnią gieometryczną odległości jednego z ognisk od wiérzchołków głównych.*

113. Mając elipsę, albo hiperbolę, poprowadźmy kierownicę k (fig. 35), odpowiadającą ognisku O, cięciwę PP′, prostopadłą do osi AA_1

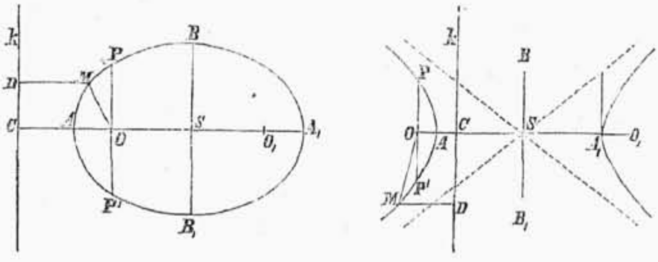

Fig. 35.

w ognisku, któréj więc długość przedstawia podwójny parametr (us. 50), oraz w elipsie oś małą BB_1 (us. 57), a w hiperboli oś sprzężoną BB_1 (us. 92). Zgodnie z określeniem przecięcia stożkowego (us. 44), mamy tu (us. 50):

$$\frac{AO}{AC} = \frac{A_1O}{A_1C} = \frac{OP}{OC},$$

skąd

$$AC = \frac{OC}{OP} \cdot AO, \quad A_1C = \frac{OC}{OP} \cdot A_1O.$$

Z proporcyi zaś $\frac{AO}{AC} = \frac{A_1O}{A_1C}$ wynika (z podwójnego znaku górny odnosi się do elipsy, dolny do hiperboli)

$$\frac{AC + AO}{AC} = \frac{A_1C + (A_1C \mp OC)}{A_1C},$$

czyli

$$\frac{OC}{AC} = \frac{2A_1C \mp OC}{A_1C},$$

skąd

$$OC \,.\, (A_1C \pm AC) = 2AC \,.\, A_1C.$$

Podstawmy w obu stronach téj równości zamiast AC i A_1C wypisane powyżéj ich wyrażenia; po podzieleniu obu stron przez spólny czynnik i po pomnożeniu ich przez OP, otrzymamy

$$OP \,.\, (A_1O \pm AO) = 2AO \,.\, A_1O,$$

czyli

$$OP \,.\, AA_1 = 2AO \,.\, A_1O.$$

Zważmy, że $AO \,.\, A_1O = SB^2$ (us. 112); a więc

$$OP \,.\, AA_1 = 2 \,.\, SB^2.$$

Jest przeto $2OP \,.\, AA_1 = (2SB)^2 = BB_1{}^2$, czyli

$$2OP : BB_1 = BB_1 : AA_1.$$

A zatym, *w elipsie długość osi małéj jest średnią gieometryczną długości osi wielkiéj i podwójnego parametru;* odpowiednio: *w hiperboli długość osi sprzężonéj jest średnią gieometryczną długości osi poprzecznéj i podwójnego parametru.* W paraboli zaś, jak wiemy (us. 69), parametr wyraża podwójną odległość wiérzchołka głównego od ogniska. —

W us. 61-ym i 93-im wprowadziliśmy oznaczenia: $AA_1 = 2a$, $BB_1 = 2b$. Jeżeli jeszcze długość odcinka OP, przedstawiającą parametr, nazwiemy p, to, zamiast $OP \,.\, AA_1 = 2 \,.\, SB^2$, będziemy mogli napisać $p \,.\, 2a = 2 \,.\, b^2$, czyli $p \,.\, a = b^2$, skąd

$$p = \frac{b^2}{a}.$$

Tento wzór służy zwykle do wyrażenia związku między parametrem elipsy lub hiperboli i połowami osi tych linij.

114. Ponieważ kierownica jest biegunową ogniska (us. 101), przeto (us. 98) odcinek AA_1 (fig. 35) jest przez punkty C i O podzielony harmonicznie, a więc

$$CS \,.\, OS = AS^2, \quad \text{czyli} \quad \frac{AS}{CS} = \frac{OS}{AS},$$

skąd

$$\text{dla elipsy:} \quad \frac{AS - OS}{CS - AS} = \frac{OS}{AS}; \quad \text{dla hiperboli} \quad \frac{OS - AS}{AS - CS} = \frac{OS}{AS};$$

jest więc ogólnie

$$\frac{AO}{AC}=\frac{OS}{AS}.$$

A że stosunek $\frac{AO}{AC}$, jako stosunek odległości punktu na przecięciu stożkowym od ogniska i od kierownicy, jest stały dla wszystkich punktów tego przecięcia stożkowego (us. 44), a nadto jest równy stosunkowi parametru przecięcia stożkowego do odległości ogniska od kierownicy (us. 50), przeto, gdy M jest jakimkolwiek punktem na elipsie lub na hiperboli, mamy

$$\frac{MO}{MD}=\frac{OP}{OC}=\frac{OS}{AS}.$$

T. j. *liczba stała, właściwa oddzielnéj elipsie lub hiperboli, przedstawiona przez stosunek odległości jakiegokolwiek na niéj punktu od ogniska i od kierownicy, odpowiadającéj temu ognisku, lubtéż przez stosunek parametru do odległości ogniska od odpowiadającéj mu kierownicy, jest również przedstawiona przez stosunek odległości ogniska od środka do połowy długości osi wielkiéj w elipsie, a poprzecznéj w hiperboli.*

Liczbę, którą w elipsie lub w hiperboli wyraża stosunek odległości środka od ogniska i od wiérzchołka głównego, nazywamy *) **mimośrodem** odpowiednio elipsy lub hiperboli. Z każdego z powyższych dwu innych wyrażeń téj liczby wprost (według określenia; us. 51, 73) wynika, że *mimośród elipsy jest mniejszy od jedności*, a *mimośród hiperboli jest większy od jedności*. Ponieważ każdemu z owych dwu innych wyrażeń mimośrodu elipsy lub hiperboli odpowiada w paraboli stosunek przedstawiający jedność (us. 64), przeto mówimy także, że *mimośród paraboli jest jednością*.

Według oznaczeń, wprowadzonych w us. 61-ym i 93-im, jest $OS=c$, zaś $AS=a$ i $SB=b$; a więc, gdy mimośród nazwiemy e, w elipsie i w hiperboli $\frac{MO}{MD}=\frac{OP}{OC}=\frac{c}{a}=e$, czyli

(2) w elipsie $e=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$, w hiperboli $e=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$.

W hiperboli równobocznéj jest $e=\sqrt{2}$ (por. us. 93).

115. Przecięcia stożkowe, których mimośród przedstawia tęż samę liczbę, nazywają się **podobnymi**. Z tego, cośmy tylkoco mówili o wartościach, jakie może mieć mimośród, wynika, że tylko elipsa z elipsą, a hi-

---

*) Niekiedy «mimośrodem» nazywają w elipsie i w hiperboli odległość środka od ogniska; wtedy stosunek téj odległości do odległości środka od wiérzchołka głównego nazywają «mimośrodem liczebnym».

perbola z hiperbolą mogą być podobne, a nadto, że *wszystkie parabole są podobne*. — Z wyrażeń (2) dla mimośrodu e wynika, że jeżeli dwie elipsy lub dwie hiperbole są podobne i a i b mają w jednéj wartości odpowiednio a_1 i b_1, a w drugiéj wartości a_2 i b_2, zaś $a_1 : a_2 = m$, czyli $a_1 = a_2 m$, to, aby e zachowywało tę samę wartość, winno być $b_1 = b_2 m$, czyli $b_1 : b_2 = m$. Jest więc wtedy

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}.$$

A więc, *w elipsach podobnych i w hiperbolach podobnych stosunek odpowiednich osi jest stały.*

Jeżeli dwu hiperbolom podobnym nadamy takie położenie, iż ich środki zejdą się z sobą razem, a osi poprzeczne będą miały ten sam kierunek, to wówczas z podobieństwa trójkątów prostokątnych SAI (fig. 27) i odpowiedniego SA'I', w których ramiona kątów prostych są proporcyjonalne (por. us. 91), wynika, iż wówczas ich asymptoty schodzą się z sobą razem. A zatym, *kąt zawarty między asymptotami hiperboli jest tenże sam dla wszystkich hiperból podobnych.*

116. Ćwiczenia.

[Wykonać wykréślenia, wzmiankowane w us. **104**, **105**, **106**, **107** i **108**, mając tylko te dane, które są tam wyraźnie wskazane.]

1°. Wiedząc, że z trzech danych punktów na prostéj dwa są ogniskami, a trzeci wiérzchołkiem głównym odpowiednio (zależnie od położenia ostatniego punktu względem dwu poprzednich) albo elipsy, albo hiperboli,

1) poprowadzić dwie styczne, do siebie prostopadłe;

2) dwie styczne, tworzące z sobą kąt dowolnie dany;

3) wyznaczyć kilka punktów na téj krzywéj.

2°. Mając dane ognisko i wiérzchołek główny paraboli,

1) poprowadzić dwie styczne, do siebie prostopadłe;

2) dwie styczne, tworzące z sobą kąt dowolnie dany;

3) wyznaczyć kilka punktów na téj paraboli.

3°. Jeżeli wiérzchołek kąta prostego opisuje koło, a jedno jego ramię wciąż przechodzi przez punkt stały (dwa przypadki: punkt stały znajduje się albo wewnątrz, albotéż zewnątrz owego koła), to jakiéj linii dotyka drugie ramię kąta i czym są dla niéj ten punkt stały i długość średnicy owego koła?

4°. Jeżeli wiérzchołek kąta prostego porusza się po prostéj, a jedno jego ramię wciąż przechodzi przez punkt stały, to jakiéj linii dotyka drugie ramię kąta i czym są dla niéj ten punkt stały i owa prosta?

5°. Własność *ogólną ustępu* 111-*go sprawdzić na* hiperboli w przypadku, kiedy dwie styczne stałe są stycznymi do jednéj gałęzi, a z jednego lub z drugiego ogniska patrzymy się na odcinek stycznéj do drugiéj gałęzi, oraz w przypadku, kiedy styczne stałe są stycznymi do różnych gałęzi hiperboli.

6°. Jeżeli punkt *D* na *fig*. 33-éj, t. j. punkt przecięcia się dwu stycznych do paraboli, znajduje się na kierownicy, to jakie wówczas położenie względem stycznéj w wiérzchołku głównym zajmuje środek koła, zakréślonego na odcinku OD, jako na średnicy, oraz jakim, *wskutek tego*, jest kąt FDG?