ROZDZIAŁ VI.

BIEGUNOWE PUNKTÓW NA PROSTÉJ I BIEGUNY PROSTYCH, PRZECHODZĄCYCH PRZEZ TEN SAM PUNKT. — CZWOROKĄT WPISANY I CZWOROBOK OPISANY. — PUNKTY SPRZĘŻONE I PROSTE SPRZĘŻONE. — ŚREDNICE SPRZĘŻONE ELIPSY I HIPERBOLI.

BIEGUNOWE PUNKTÓW NA PROSTÉJ I BIEGUNY PROSTYCH, PRZECHODZĄCYCH PRZEZ TEN SAM PUNKT.

117. Niech punkt P (fig. 36, 37) i prosta p będą dla siebie biegunem i biegunową względem danego przecięcia stożkowego.

a. Na prostéj p (fig. 36) obierzmy jakikolwiek punkt R i po-

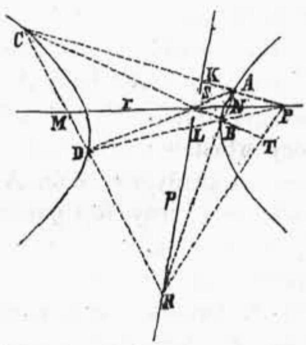


Fig. 36.

prowadźmy przez obrany punkt prostą, która przecina przecięcie stożkowe np. w punktach A i B. Proste PA i PB przecinają przecięcie stożkowe jeszcze w punktach odpowiednio C i D, a prostą p w punktach odpowiednio K i L. Ponieważ prosta p jest biegunową

b. Przez punkt P (fig. 37) poprowadźmy jakąkolwiek prostą r,

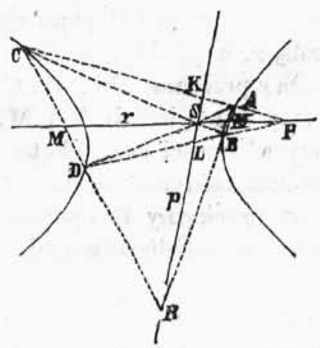


Fig. 37.

a przez punkt S, na przecięciu się jéj z p, prostą, która przecina przecięcie stożkowe np. w punktach A i D. Proste PA i PD przecinają przecięcie stożkowe jeszcze w punktach odpowiednio B i C, a prostą p w punktach odpowiednio K i L. Ponieważ punkt P jest biegunem punktu P, przeto (us. 98)

(CAPK)$=-1$, (DBPL)$=-1$,

a więc pęki promieni

R(CAPK), R(DBPL)

są harmoniczne. W tych dwu pękach oba promienie drugich par i drugie promienie piérwszych par są tymi samymi prostymi, a więc i pozostałe promienie RC i RD przedstawiają jednę prostą (us. 25), t. j. prosta CD jest cięciwą, przechodzącą przez punkt R. Jeżeli zatym cztéry punkty A, B, C i D będziemy uważali jako wiérzchołki czworokąta zupełnego (us. 31), to punkty P i R będą dwoma punktami przekątnymi; trzeci S będzie na przecięciu się boków AD i BC. Przez punkty S i P poprowadźmy prostą r, a punkty, w których ta prosta r przecina boki AB i CB, nazwijmy odpowiednio N i M. Na mocy własności czworokąta zupełnego, na każdym z boków AB i CD punkt przekątny R i punkty przecięcia się każdego z tych boków z prostą, łączącą punkty przekątne P i S, tworzą odpowiednio parę punktów, harmonicznie sprzężoną z parą wiérzchołków, leżących na tym boku (us. 32, f),

(ABRN)$=-1$, (CDRM)$=-1$,

t. j. cięciwy AB i CD przecięcia stożkowego są przez punkt R i punkty N i M podzielone harmonicznie. A więc punkty M i N znajdują się na biegunowéj punktu R (us. 98), czyli prosta r jest biegunową punktu R. Punkt R był obrany na

prostéj p, przeto (us. 98)

(CAPK)$=-1$, (BDPL)$=-1$,

a więc pęki promieni

S(CAPK), S(BDPL)

są harmoniczne. W tych dwu pękach oba promienie drugich par i drugie promienie piérwszych par są tymi samymi prostymi, a więc i pozostałe promienie SC i SB przedstawiają jednę prostą (us. 25), t. j. prosta BC jest cięciwą, przechodzącą przez punkt S. Jeżeli zatym cztéry punkty A, B, C i D będziemy uważali jako wiérzchołki czworokąta zupełnego (us. 31), to punkty P i S będą dwoma punktami przekątnymi; trzeci będzie na przecięciu się boków AB i CD. Ów trzeci punkt przekątny nazwijmy R, a punkty, w których prosta r przecina owe boki AB i CD, nazwijmy odpowiednio N i M. Na mocy własności czworokąta zupełnego, na każdym z boków AB i CD punkt przekątny R i punkty przecięcia się każdego z tych boków z prostą, łączącą punkty przekątne P i S, tworzą odpowiednio parę punktów, harmonicznie sprzężoną z parą wiérzchołków, leżących na tym boku (us. 32, f),

(ABRN)$=-1$, (CDRM)$=-1$,

t. j. cięciwy AB i CD przecięcia stożkowego są przez punkt R i punkty N i M podzielone harmonicznie. A więc punkty M i N znajdują się na biegunowéj punktu R (us. 98), czyli punkt R jest biegunem prostéj r. Prosta r była poprowadzoprostéj p, biegunowéj punktu P, a prosta r, jak przyjęliśmy, przechodzi przez punkt P. A więc, *biegunowa punktu, leżącego na pewnéj prostéj, przechodzi przez biegun téj prostéj.*

[Można łatwo wprost okazać, że punkt przekątny S (fig. 36), leży na prostéj p. Według us. 32, f, (CBTS) = —1; nadto, jak wiemy, (CAPK) = —1. Pęki przeto promieni

R(CBTS) i R(CAPK)

są harmoniczne. Gdy zaś trzy odpowiednie ich promienie są tymi samymi prostymi, to i czwarte RS i RK, czyli prosta p, są jedną prostą, t. j. punkt S leży na prostéj p.]

118. *a.* Ponieważ biegunowa punktu, leżącego na pewnéj prostéj, przechodzi przez biegun téj prostéj, więc, oczywiście, *biegunowa punktu przecięcia się dwu prostych z sobą, przechodzi przez bieguny tych prostych.*

na przez punkt P, biegun prostéj p. Okażemy, że punkt R leży na prostéj p. Jak już wiemy,

(CAPK) = —1, (BARN) = —1;

pęki przeto promieni

S(CAPK) i S(BARN)

są harmoniczne. Oba zaś tu promienie piérwszych par i piérwsze promienie drugich par są tymi samymi prostymi, a więc i pozostałe promienie, SK (czyli prosta p) i SR, przedstawiają jednę prostę, t. j. punkt R znajduje się na prostéj p. A więc, *biegun prostéj, przechodzącéj przez pewien punkt, leży na biegunowéj tego punktu.*

b. Ponieważ biegun prostéj, przechodzącéj przez pewien punkt, leży na biegunowéj tego punktu, więc, oczywiście, *biegun prostéj, łączącéj dwa punkty, znajduje się na przecięciu się biegunowych tych punktów.*

Z tych własności możnaby, jako bezpośrednie następstwa, wyprowadzić niektóre z dowiedzionych już powyżéj własności, mianowicie: że punkt, znajdujący się w obszarze zewnętrznym przecięcia stożkowego, i odpowiadająca mu cięciwa styczności są dla siebie biegunem i biegunową (us. 100); że punkty na kierownicy są biegunami prostych, przechodzących przez ognisko, i nawzajem (us. 102); że styczne w punktach, w których te proste przecinają przecięcie stożkowe, przecinają się z sobą na kierownicy (us. 104). —

Poprowadźmy prostą p, równoległą do jednéj z asymptot hiperboli. Punkt przecięcia się téj asymptoty z prostą p znajduje się w nieskończoności; a więc, na biegunowéj tego punktu, przechodzącéj przez środek hiperboli, znajduje się biegun prostéj p, który nazwijmy P, jakotéż biegun owéj asymptoty, który, jako biegun stycznéj do hiperboli, jest jéj punktem styczności (us. 99). Owa więc biegunowa, jako mająca dwa punkty (środek i punkt w nieskończoności) spólne z asymptotą, jest tąż samą asymptotą. A więc punkt P, biegun prostéj p, leży na asymptocie, t. j. *bieguny, względem hiperboli, prostych, równoległych do jéj asymptoty, leżą na téjże asymptocie.*

— Objaśnić, dlaczego, *gdy poprowadzimy styczną do hiperboli w punkcie końcowym cięciwy, równoległéj do asymptoty, to ona spotyka tę asymptotę w punkcie, który jest biegunem owéj cięciwy.*

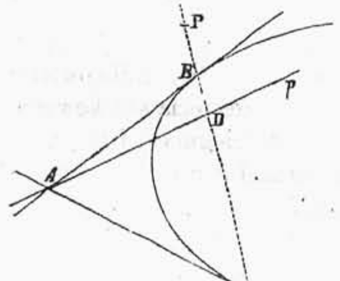
119. Wypowiedziane na początku tego ustępu własności możemy uogólnić, mówiąc, że:

a. Gdy prosta obraca się około punktu, jéj biegun porusza się po biegunowéj owego punktu.

b. Gdy punkt porusza się po prostéj, jego biegunowa obraca się około bieguna owéj prostéj.

— Objaśnić, dlaczego *cięciwy styczności wszystkich tych par stycznych do danego przecięcia stożkowego, które można wyprowadzić z różnych punktów na prostéj, przechodzą przez ten sam punkt, biegun téj prostéj.*

120. Widzieliśmy w us. 98-ym, że *cięciwa przecięcia stożkowego jest przez jakikolwiek punkt na niéj i przez biegunową tego punktu podzielona harmonicznie.* Własności téj odpowié następująca: *jakakolwiek prosta, przechodząca przez punkt przecięcia się dwu stycznych do przecięcia stożkowego, tworzy z prostą, przechodzącą przez tenże punkt i przez biegun tamtéj prostéj, parę promieni, harmonicznie sprzężoną z parą owych stycznych.* Własności téj możemy teraz dowiéść przy pomocy tego, cośmy okazali w us. 117, *b*. Jakoż, zważmy, że biegun prostéj p (fig. 38), przechodzącéj przez punkt A, punkt przecięcia się z sobą stycznych AB i AC, leży na biegunowéj punktu A, t. j. na cięciwie styczności BC (us. 100). Jeżeli więc biegunem prostéj p jest punkt P, to, jak wiemy, $(BCPD) = -1$, a więc pęk promieni A(BCPD) jest harmoniczny, c. n. d. — Aby wysłowienie tylkoco dowiedzionéj własności uczynić więcéj odpowiednim wysłowieniu własności, przytoczonéj na początku tego ustępu, możemy ją tak wyrazić: *dwie styczne do przecięcia stożkowego są przez jakąkolwiek prostą, przechodzącą przez punkt ich przecięcia się, i przez biegun téj prostéj oddzielone harmonicznie.*



Fg. 38.

121. Poprowadźmy styczną do hiperboli, nie asymptotę. Punkty przecięcia się jéj z asymptotami nazwijmy A i B (fig. 39), a przez punkt jéj styczności C i przez środek S poprowadźmy prostą. Ta prosta SC i prosta, przechodząca przez punkt S i biegun prostéj SC, tworzą parę, harmonicznie sprzężoną z asymptotami (us. 120). Biegun prostéj SC leży na przecięciu się biegunowéj punktu C, t. j. prostéj AB, z biegunową punktu S, t. j. z prostą p_∞; jest on więc punktem w nieskończoności na prostéj AC. A więc promień tego pęku, przechodzący przez biegun prostéj SC, jest równoległy do prostéj AB, wskutek czego punkt C jest środkiem odcinka AB (us. 24), t. j. *odcinek stycznéj do hiperboli, zawarty między asymptotami, jest w punkcie styczności podzielony na połowy.*

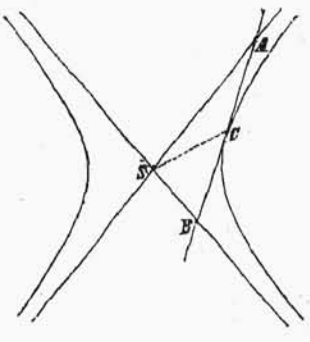


Fig. 44.

CZWOROKĄT WPISANY I CZWOROBOK OPISANY.

122. *a.* Obierzmy jakiekolwiek cztéry punkty A, B, C i D (fig. 40) na danym przecięciu stoż-

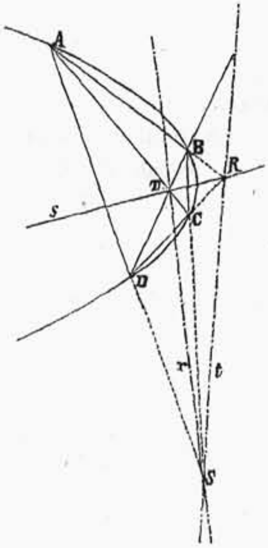


Fig. 40.

kowym. Możemy je uważać jako

b. Poprowadźmy jakiekolwiek cztéry styczne a, b, c i d (fig. 41) do danego przecięcia stoż-

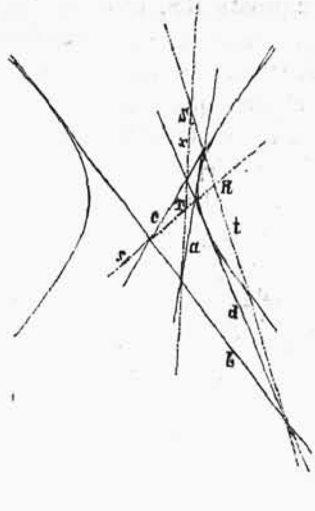


Fig. 41.

kowego. Możemy je uważać jako

wiérzchołki *) czworokąta zupełnego ABCD (us. 31); jego punkty przekątne nazwijmy R, S i T. Na mocy własności czworokąta zupełnego, na każdym z jego sześciu boków punkt przekątny i punkt przecięcia się tego boku z prostą, łączącą dwa pozostałe punkty przekątne, tworzą parę punktów, harmonicznie sprzężoną z parą wiérzchołków, leżących na tym boku (us. 32, *f*). A zatym, na którychkolwiek dwu przeciwległych bokach, np. na bokach AC i BD, punkt ich przecięcia się, t. j. punkt przekątny T, i odpowiednie punkty przecięcia się ich z prostą RS, tworzą parę punktów, harmonicznie sprzężoną z parą odpowiednio punktów A i C i punktów B i D. Cięciwy przeto AC i BD przecięcia stożkowego są przez punkt T i przez prostą RS, którą nazwijmy *t*, t. j. przez prostą, przechodzącą przez drugie punkty podziału tych cięciw, podzielone harmonicznie; zatym punkt T i prosta *t* są dla siebie biegunem i biegunową (us. 98). Taksamo możemy okazać, że punkt przekątny R i prosta *r*, że punkt przekątny S i prosta *s* są dla siebie odpowiednio biegunem i biegunową. A więc, *w czworokącie zupełnym, wpisanym w przecięcie stożkowe, każdy punkt przekątny i prosta, przechodząca przez po-*

boki czworoboku zupełnego *abcd* (us. 31); jego proste przekątne nazwijmy *r*, *s* i *t*. Na mocy własności czworoboku zupełnego, w każdym z jego sześciu wiérzchołków przekątna i prosta, łącząca ten wiérzchołek z punktem przecięcia się dwu pozostałych przekątnych, tworzą parę promieni, harmonicznie sprzężoną z parą boków, przechodzących przez ten wiérzchołek (us. 32, *e*). A zatym, w którychkolwiek dwu przeciwległych wiérzchołkach, np. w *(ac)* i w *(bd)*, prosta, je łącząca, t. j. przekątna *t*, i odpowiednie proste, łączące je z punktem *(rs)*, tworzą parę promieni, harmonicznie sprzężoną z parą odpowiednio stycznych *a* i *c* i stycznych *b* i *d*. Styczne przeto *a* i *c* oraz *b* i *d* do przecięcia stożkowego są przez prostą *t* i przez punkt *(rs)*, który nazwijmy T, t. j. przez punkt przecięcia się drugich promieni, oddzielających styczne, oddzielone harmonicznie; zatym prosta *t* i punkt T są dla siebie biegunową i biegunem (us. 120). Taksamo możemy okazać, że przekątna *r* i punkt R, oraz, że przekątna *s* i punkt S są dla siebie odpowiednio biegunową i biegunem. A więc, *w czworoboku zupełnym, opisanym na przecięciu stożkowym, każda przekątna i punkt przecięcia się dwu pozo-*

*) Wprawdzie w us. 117-ym mieliśmy już czworokąt zupełny, wpisany w przecięcie stożkowe, tak iż tam mogliśmy wyprowadzić te wnioski, do których tu dojdziemy. Robimy to jednak dopiéro teraz dlatego, aby jednocześnie rozważać czworobok zupełny, opisany na przecięciu stożkowym.

zostałe dwa punkty przekątne, są dla siebie biegunem i biegunową.

stałych przekątnych są dla siebie biegunową i biegunem.

123. *a.* Styczne w wiérzchołkach A, B, C i D (fig. 42) czworokąta wpisanego w dane przecięcie stożkowe, t. j. proste *a*, *b*, *c* i *d*, tworzą czworobok opisany na tymże przecięciu stożkowym, w którym pary wiérzchołków przeciwległych są: punkt *(ab)*, czyli G, i punkt *(cd)*, czyli H; punkt *(bc)*, czyli I, i punkt *(da)*, czyli K; punkt *(ac)*, czyli L, i punkt *(bd)*, czyli M.—Wiérzchołki przeciwległe jednéj pary, np. G i H, są biegunami cięciw styczności, t. j. prostych odpowiednio *g* i *h*, czyli boków AB i CD czworokąta wpisanego, przecinających się w punkcie przekątnym R; przeto biegunowa punktu R przechodzi przez te wiérzchołki G i H (us. 118, *a*), t. j. te wiérzchołki przeciwległe G i H czworoboku opisanego leżą

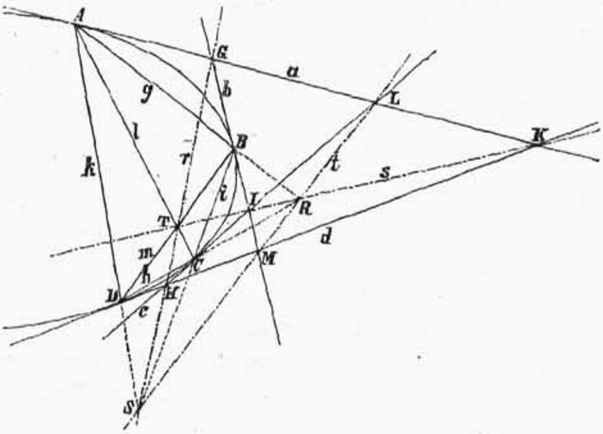


Fig. 42.

b. Punkty styczności boków *a*, *b*, *c* i *d* (fig. 42) czworoboku opisanego na danym przecięciu stożkowym, t. j. punkty A, B, C i D, tworzą czworokąt wpisany w przecięcie stożkowe, w którym trzy pary boków przeciwległych są: prosta AB, czyli *g*, i prosta CD, czyli *h*; prosta BC, czyli *i*, i prosta DA, czyli *k*; prosta AC, czyli *l*, i prosta BD, czyli *m*. — Boki przeciwległe jednéj pary, np. *g* i *h*, są, jako cięciwy styczności, biegunowymi punktów odpowiednio G i H, czyli wiérzchołków *(ab)* i *(cd)* czworoboku opisanego, leżących na przekątnéj *r*; przeto biegun prostéj *r* jest na przecięciu się boków *g* i *h* (us. 118, *b*), t. j. te boki przeciwległe *g* i *h* czworokąta wpisanego przecina-na téjże prostéj, na któréj się znajdują pozostałe punkty przekątne S i T czworokąta wpisanego (us. 122, *a*). Że zaś prosta GH — nazwijmy ją *r* — jest przekątną czworoboku opisanego, przeto możemy jeszcze powiedzićć, że przekątna *r* czworoboku zupełnego opisanego *abcd* przechodzi przez punkty przekątne S i T czworokąta zupełnego wpisanego ABCD. Taksamo, rozważając pary wiérzchołków przeciwległych I i K, oraz L i M, możemy okazać, że każda z przekątnych *s* i *t* czworoboku zupełnego opisanego przechodzi przez dwa punkty przekątne czworokąta zupełnego wpisanego, mianowicie *s* przez T i R, a *t* przez R i S. — Wskutek tego, każdy z punktów przekątnych czworokąta zupełnego wpisanego ABCD jest jednocześnie punktem przecięcia się dwu z przekątnych czworoboku zupełnego opisanego *abcd*. — Wiemy zaś, że na każdéj przekątnéj czworoboku zupełnego punkty przecięcia się jéj z pozostałymi przekątnymi tworzą parę, harmonicznie sprzężoną z parą wiérzchołków, przez które ta przekątna przechodzi (us. 32, *a*). Jest więc np. para punktów T i S harmonicznie sprzężona z parą punktów G i H. Punkty T i S są punktami przecięcia się dwu par boków przeciwległych czworokąta (pojedyńczego) ACBD, a punkty G i H są punktami przecięcia się odpowiednich par stycznych w jego wiérzchołkach przeciwległych: A i B, C i D. Podo-

ją się z sobą w tymże punkcie, w którym się przecinają pozostałe przekątne *s* i *t* czworoboku opisanego (us. 122, *b*). Że zaś punkt *(gh)* — nazwijmy go R—jest punktem przekątnym czworokąta wpisanego, przeto możemy jeszcze powiedzićć, że punkt przekątny R czworokąta zupełnego wpisanego ABCD jest w punkcie przecięcia się przekątnych *s* i *t* czworoboku zupełnego opisanego *abcd*. Taksamo, rozważając pary boków przeciwległych *i* i *k*, oraz *l* i *m*, możemy okazać, że każdy z punktów przekątnych S i T czworokąta zupełnego wpisanego jest w punkcie przecięcia się dwu przekątnych czworoboku zupełnego opisanego, mianowicie S w punkcie *(tr)*, a T w punkcie *(rs)*. — Wskutek tego, każda z przekątnych czworoboku zupełnego opisanego *abcd* przechodzi jednocześnie przez dwa punkty przekątne czworoboku zupełnego wpisanego ABCD. — Wiemy zaś, że w każdym punkcie przekątnym czworokąta zupełnego proste, łączące go z pozostałymi punktami przekątnymi, tworzą parę, harmonicznie sprzężoną z parą boków, które się w tym punkcie przecinają (us. 32, *b*). Jest więc np. para prostych *t* i *s* harmonicznie sprzężona z parą prostych *g* i *h*. Proste *t* i *s* łączą z sobą dwie pary wiérzchołków przeciwległych czworoboku (pojedyńczego) *acbd*, a proste *g* i *h* są prostymi, łączącymi punkty styczności odpowiednich par jego boków przeciwległych: *a* i *b*, *c* i *d*. Podobnie co do punktów R, T, I, K i co do punktów R, S, L, M w czworokątach odpowiednio ACDB i ABCD. — A więc, *w czworokącie zupełnym, wpisanym w przecięcie stożkowe, każda para punktów przecięcia się boków przeciwległych jest harmonicznie sprzężona z parą punktów przecięcia się z sobą każdych dwu stycznych w odpowiednich wierzchołkach przeciwległych.*

bnie co do prostych r, t, i, k i co do prostych r, s, l, m w czworobokach odpowiednio *acdb* i *abcd*. — A więc, *w czworoboku zupełnym, opisanym na przecięciu stożkowym, każda para prostych, łączących wierzchołki przeciwległe, jest harmonicznie sprzężona z parą prostych, łączących z sobą każde dwa punkty styczności odpowiednich boków przeciwległych.*

Dowiedliśmy tu, że szeregi punktów (RSLM), (STGH), (TRIK) i pęki promieni *(rslm)*, *(stgh)*, *(trik)* są harmoniczne. Zauważmy, że punkty któregokolwiek z tych szeregów i promienie odpowiedniego z tych pęków, np. punkty R, S, L, M i proste r, s, l, m są tu dla siebie odpowiednio biegunami i biegunowymi. A więc: biegunowe punktów tych szeregów harmonicznych przedstawiają pęki harmoniczne, a bieguny promieni tych pęków harmonicznych przedstawiają szeregi harmoniczne. Takiż związek zachodzi na fig. 38-éj (prosta AP jest biegunową punktu D; us. 118, *a*) między punktami szeregu harmonicznego (BCDP) i odpowiednimi promieniami pęku harmonicznego A(BCPD).

124. Okażemy, że tylkoco zaznaczone własności biegunowych punktów wymienionych powyżéj szeregów harmonicznych i biegunów promieni wymienionych powyżéj pęków harmonicznych są ogólne.

Mając dane jakiekolwiek przecięcie stożkowe L, na jego cięciwie, przechodzącéj przez ognisko O równolegle do kierownicy, jako na średnicy, zakréślmy koło K. Ono jest harmonicznie pokrewne z L; ognisko owo jest środkiem, a odpowiadająca mu kierownica liniją średnią tego pokrewieństwa (us. 49). Weźmy

jakikolwiek szereg punktów harmoniczny, (ABCD). Punkty pokrewne z punktami A, B, C, D oznaczmy przez A_1, B_1, C_1, D_1. One tworzą również szereg harmoniczny (us. 35, *l*). Podstawę szeregu $(A_1B_1C_1D_1)$ nazwijmy p, a jéj biegun względem K nazwijmy P. Biegunowe punktów A_1, B_1, C_1, D_1 względem K — nazwijmy je odpowiednio a_1, b_1, c_1, d_1 — przechodzą przez punkt P (us. 119, *b*), a są

jakikolwiek pęk promieni harmoniczny, *(abcd)*. Proste pokrewne z prostymi a, b, c, d oznaczmy przez a_1, b_1, c_1, d_1. One tworzą również pęk harmoniczny (us. 35, *m*). Wiérzchołek pęku $(a_1b_1c_1d_1)$ nazwijmy P, a jego biegunową względem K nazwijmy p. Bieguny prostych a_1, b_1, c_1, d_1 względem K — nazwijmy je odpowiednio A_1, B_1, C_1, D_1 — znajdują się na prostéj p (us. 119, *a*) i na prostopadłe (us. 95) do promieni pęku (us. 21) harmonicznego $O(A_1B_1C_1D_1)$. Wskutek tego, każde dwa z promieni pęku $(a_1b_1c_1d_1)$ tworzą z sobą takież same kąty, jak odpowiednie promienie tego pęku $O(A_1B_1C_1D_1)$, tak iż te dwa pęki do siebie przystaćby mogły; przeto pęk promieni $(a_1b_1c_1d_1)$ jest harmoniczny. Z prostymi a_1, b_1, c_1, d_1, jako z biegunowymi względem K punktów A_1, B_1, C_1, D_1, są pokrewne biegunowe względem L punktów pokrewnych A, B, C, D (us. 98); nazwijmy je odpowiednio a, b, c, d. Ponieważ zaś, jak widzieliśmy, pęk promieni $(a_1b_1c_1d_1)$ jest harmoniczny, zatym (us. 35, *m*) pęk promieni $(abcd)$ jest również harmoniczny, c. n. d.

prostopadłych (us. 95) z O na promienie pęku harmonicznego $(a_1b_1c_1d_1)$. Wskutek tego, każde dwa z promieni pęku $O(A_1B_1C_1D_1)$ tworzą z sobą takież same kąty, jak odpowiednie promienie tego pęku $(a_1b_1c_1d_1)$; jest zatym pęk promieni $O(A_1B_1C_1D_1)$ harmoniczny, a przeto (us. 23) szereg punktów $(A_1B_1C_1D_1)$ jest harmoniczny. Z punktami A_1, B_1, C_1, D_1, jako z biegunami względem K prostych a_1, b_1, c_1, d_1, są pokrewne bieguny względem L prostych pokrewnych a, b, c, d (us. 98); nazwijmy je odpowiednio A, B, C, D. Ponieważ zaś, jak widzieliśmy, szereg punktów $(A_1B_1C_1D_1)$ jest harmoniczny, zatym (us. 35, *l*) szereg punktów (ABCD) jest również harmoniczny, c. n. d.

Możemy więc powiedzieć ogólnie, że:

a. biegunowe punktów szeregu harmonicznego przedstawiają pęk promieni harmoniczny.

b. bieguny promieni pęku harmonicznego przedstawiają szereg punktów harmoniczny.

125. Tak np. wiemy, że gdy cztéry punkty na kole są takie, iż proste, łączące je z pewnym punktem na kole, tworzą pęk promieni harmoniczny, to proste, łączące owe cztéry punkty z jakimkolwiek innym punktem na kole, przedstawiają również pęk promieni harmoniczny (us. 28). Niech takimi cztérema stałymi punktami na kole (fig. 43) będą punkty A, B, C i D, t.j. niech proste, łączące je z pewnym punktem E na kole, tworzą pęk promieni harmoniczny E(ABCD). Biegunowymi punktów A, B, C, D i E są styczne w tych punktach, t. j. odpowiednio proste a, b, c d i e, biegunami zaś prostych EA, EB, EC i ED

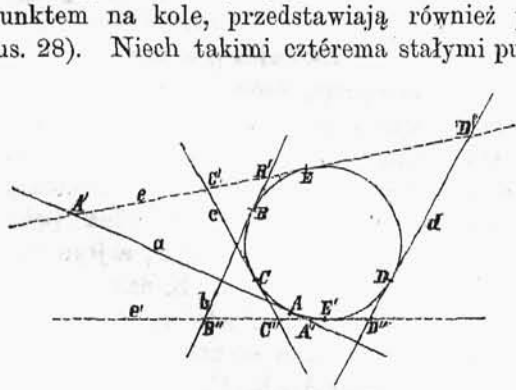


Fig. 43.

są punkty odpowiednio A', B', C' i D' (us. 100); te przeto punkty, jako bieguny promieni pęku harmonicznego, przedstawiają (us. 124, *b*) szereg punktów harmoniczny, (A'B'C'D') = — 1. Wówczas atoli jakąkolwiek inną styczną *e'* do koła, któréj punkt styczności nazwijmy E', też same cztéry styczne stałe: *a*, *b*, *c* i *d* przecinają w punktach, tworzących szereg punktów również harmoniczny, (A''B''C''D'') = — 1; te bowiém punkty: A'', B'', C'' i D'' są biegunami promieni pęku harmonicznego E'(ABCD). A zatym, *jeżeli poprowadzimy cztéry styczne do koła takie, iż punkty przecięcia się ich z pewną styczną tworzą szereg punktów harmoniczny, to odpowiednie punkty przecięcia się owych cztérech stycznych z jakąkolwiek styczną do koła przedstawiają również szereg punktów harmoniczny.* Ta własność stycznych do koła odpowiada własności punktów na kole, wypowiedzianéj w us. 28-ym.

PUNKTY SPRZĘŻONE I PROSTE SPRZĘŻONE. ŚREDNICE SPRZĘŻONE ELIPSY I HIPERBOLI.

126. Dwa punkty, z których każdy leży na biegunowéj punktu pozostałego, nazywają się punktami sprzężonymi względem przecięcia stożkowego danego; dwie proste, z których każda przechodzi przez biegun prostéj pozostałéj, nazywają się prostymi sprzężonymi *) względem przecięcia stożkowego danego. Tak np. na fig. 42-éj punkty S i T, punkty R i G, punkty K i A, proste *s* i *t*, proste *r* i *g*, proste *k* i *a* są sprzężone; podobnie np. ognisko przecięcia stożkowego i jakikolwiek punkt na kierownicy, odpowiadającéj temu ognisku, są punktami sprzężonymi, a jakiekolwiek dwie proste, przechodzące przez ognisko, do siebie prostopadłe, są prostymi sprzężonymi (us. 102).

Z tego, cośmy mówili w us. 117-ym, wynika, że:

a. *z punktem danym są sprzężone punkty, leżące na biegunowéj punktu danego*, czyli: *bieguny prostych, przechodzących przez punkt dany.*

b. *z prostą daną są sprzężone proste, przechodzące przez biegun prostéj danéj*, czyli: *biegunowe punktów, znajdujących się na prostéj danéj.*

Oczywiście, że (us. 98, 120):

c. *para punktów sprzężonych i dwa punkty, w których prosta, łą-*

d. *para prostych sprzężonych i dwie styczne, wyprowadzone z pun-*

*) Albo: promieniami sprzężonymi.

cząca te punkty sprzężone, przecina przecięcie stożkowe, tworzą szereg punktów harmoniczny.

ktu przecięcia się tych prostych sprzężonych do przecięcia stożkowego, tworzą pęk promieni harmoniczny.

Uwaga. *Z dwu prostych sprzężonych przynajmniéj jedna przecina przecięcie stożkowe,* gdyż jeżeli jedna z nich nie spotyka przecięcia stożkowego, to jéj biegun leży wewnątrz tego przecięcia stożkowego (us. 96, 99); mogą jednak obie przecinać przecięcie stożkowe (np. na fig. 42-éj proste r i s).

127. *a.* Jeżeli, mając punkt R, na jego biegunowéj r obierzemy jakikolwiek punkt S, to jego biegunowa s przechodzi przez punkt R (us. 117, *a*); biegunowa zaś punktu przecięcia się prostych r i s, który nazwijmy T, przechodzi przez punkty R i S (us. 118, *a*). Trzy więc te punkty R, S i T są takie, iż biegunowa któregokolwiek z nich przechodzi przez dwa pozostałe, czyli którykolwiek z nich jest sprzężony z każdym z pozostałych. O takich trzech punktach mówimy, iż one tworzą trójkę punktów sprzężonych względem przecięcia stożkowego danego. Takie trójki punktów sprzężonych przedstawiają np. na fig. 42-éj: punkty R, S i T; punkty K, S i *(ks)*, i t. d.

b. Jeżeli, mając prostą r, przez jéj biegun R poprowadzimy jakąkolwiek prostą s, to jéj biegun S znajduje się na prostéj r (us. 117, *b*); biegun zaś prostéj, przechodzącéj przez punkty R i S, którą nazwijmy t, znajduje się na przecięciu się prostych r i s (us. 118, *b*). Trzy te proste r, s i t są takie, iż biegun któréjkolwiek z nich znajduje się na przecięciu się dwu pozostałych, czyli którakolwiek z nich jest sprzężona z każdą z pozostałych. O takich trzech prostych mówimy, iż one tworzą trójkę prostych *) sprzężonych względem przecięcia stożkowego danego. Takie trójki prostych sprzężonych przedstawiają np. na fig. 42-éj: proste r, s i t; proste k, s i KS, i t. d.

Już z tego, cośmy okazali w us. 122-ym, wynika że:

punkty przekątne czworokąta zupełnego, wpisanego w przecięcie stożkowe, tworzą trójkę punktów sprzężonych.

proste przekątne czworoboku zupełnego, opisanego na przecięciu stożkowym, tworzą trójkę boków sprzężonych.

Trójkąt, którego wierzchołki tworzą trójkę punktów sprzężonych, czyli trójkąt, którego boki tworzą trójkę prostych sprzężonych, nazywa się trójkątem biegunowym **) względem przecięcia

*) Albo: trójkę promieni.

**) Albo: trójkątem z sobą samym sprzężonym.

stożkowego danego. *Z boków trójkąta biegunowego dwa przecinają przecięcie stożkowe, a pozostały go nie spotyka.* Boki bowiém trójkąta biegunowego są po dwa sprzężone; a więc, według uwagi na końcu ustępu poprzedzającego, dwa z boków trójkąta, które nazwijmy r, s, t, np. boki r i s, przecinają przecięcie stożkowe. Bieguny przeto tych boków, t. j. wiérzchołki przeciwległe odpowiednio R i S, znajdują się zewnątrz przecięcia stożkowego (us. 96, 99). Wskutek tego, że bok r, jako cięciwa przecięcia stożkowego, jest przez wiérzchołek S i jego biegunową s, przecinającą się z tym bokiem r w trzecim wiérzchołku T, podzielony harmonicznie (us. 98), i ponieważ na cięciwie r punkt S znajduje się zewnątrz przecięcia stożkowego, — ów punkt T znajduje się w jego obszarze wewnętrznym, t. j. jego biegunowa t nie spotyka danego przecięcia stożkowego.

128. Jak wiemy, biegun średnicy przecięcia stożkowego znajduje się w nieskończoności (us. 99), a kierunek, w którym się ten biegun znajduje, wskazuje styczna do przecięcia stożkowego w punkcie końcowym średnicy (us. 100). A więc ta styczna i każda prosta, do niéj równoległa, przechodzą przez biegun owéj średnicy (us. 6), t. j. *styczna do przecięcia stożkowego w punkcie końcowym jego średnicy i wszystkie proste, do téj stycznéj równoległe, są sprzężone z ową średnicą.*

Jeżeli prosta, sprzężona z pewną średnicą przecięcia stożkowego, przecina je, to ona jest jego cięciwą sprzężoną ze średnicą. *Cięciwy przecięcia stożkowego, sprzężone z pewną średnicą, są przez tę średnicę podzielone na połowy,* gdyż przechodzą przez jéj biegun, którym jest punkt w nieskończoności (us. 99, 19). — Oczywiście, że dwie cięciwy przecięcia stożkowego, do siebie równoległe, wyznaczają średnicę z nimi sprzężoną. Na mocy tego łatwo, *mając dane przecięcie stożkowe wyznaczyć jego środek* przy pomocy wykréślenia dwu jakichkolwiek średnic. —

W elipsie i w hiperboli istnieją dwie styczne, sprzężone z pewną średnicą. W paraboli, ze względu na to, że jeden punkt końcowy każdéj średnicy znajduje się w nieskończoności, styczna w tym punkcie, jako przechodząca przez drugi punkt w nieskończoności, biegun średnicy, jest cała w nieskończoności, t. j. *w paraboli jedną styczną, sprzężoną ze średnicą, jest prosta w nieskończoności* (sprzężona z każdą średnicą), a więc *można wyznaczyć tylko jednę styczną do paraboli, sprzężoną z pewną jéj średnicą.*

129. Z tych własności cięciw i stycznych, sprzężonych ze średnicą, wynika łatwy sposób *wykréślenia do danego przecięcia stożkowego stycznéj, równoległéj do prostéj danéj.* Mianowicie, poprowadziwszy jakąkolwiek cięciwę, nie średnicę, równoległą do prostéj danéj, a następnie średnicę, przechodzącą przez środek téj cięciwy, w jéj punkcie końcowym wykréślimy równoległą do prostéj danéj, która będzie styczną żądaną. *Stycznych, równoległych do prostéj danéj, można poprowadzić: do elipsy zawsze dwie, do hiperboli conajwięcéj dwie* (po jednéj wrazie, gdy dana prosta jest równoległa do asymptoty *), gdyż wtedy cięciwa równoległa, którą mamy dzielić na połowy, jest nieskończenie wielka; us. 118), *do paraboli conajwięcéj jednę* (żadnéj wrazie, gdy dana prosta ma kierunek średnic paraboli). (Por. us. 100 i 128.)

130. Pośród cięciw, sprzężonych z pewną średnicą elipsy lub hiperboli, jest jedna, przechodząca przez środek, a więc także średnica. Przedstawia zatym ona, wraz z tamtą średnicą, odpowiednio p a r ę ś r e d n i c s p r z ę ż o n y c h e l i p s y, lub p a r ę ś r e d n i c s p r z ę ż o n y c h h i p e r b o l i. [Jako średnicę paraboli, sprzężoną z którąkolwiek z jéj średnic (które wszystkie są do siebie równoległe; us. 70), możnaby przyjąć prostą w nieskończoności (por. us. 128).]

Ponieważ z dwu średnic sprzężonych każda przechodzi przez biegun pozostałéj, a bieguny te są punktami w nieskończoności, przeto *w elipsie i w hiperboli para średnic sprzężonych i prosta w nieskończoności przedstawiają trójkąt biegunowy.*

Według tego, cośmy wyżéj mówili (us. 128), *z dwu średnic sprzężonych elipsy lub hiperboli każda jest miejscem gieometrycznym środków cięciw, równoległych do średnicy pozostałéj, i jest równoległa do stycznych w jéj punktach końcowych.* Aby więc, *mając daną elipsę lub hiperbolę, wykréślić średnicę, sprzężoną z daną średnicą*, należy poprowadzić cięciwę, równoległą do danéj, a przez środek téj cięciwy i przez środek danéj średnicy poprowadzona prosta będzie żądaną średnicą.

Z téjże własności średnic sprzężonych wynika łatwy sposób *wykréślenia do danéj elipsy lub do danéj hiperboli stycznéj we wskazanym punkcie* **). Poprowadziwszy przez punkt dany średnicę i wyznaczywszy średnicę sprzężoną z tamtą, do téj ostatniéj przez punkt wskazany poprowadzimy równoległą, która będzie styczną żądaną. —

Ponieważ styczne w punktach końcowych osi wielkiéj w elipsie, lub poprzecznéj w hiperboli (któreto osi są średnicami), t. j. w wiérzchołkach głównych, są prostopadłe do tych osi (us. 55, 81), zatym średnice, sprzężone z tymi osiami, są również do nich prostopadłe. Są więc nimi: oś

---

*) Por. także us. 131.

**) Aby, *mając daną parabolę i wskazany na niéj punkt, wykréślić styczną w tym punkcie*, poprowadzimy jakiekolwiek dwie cięciwy do siebie równoległe; prosta, łącząca ich środki, wskaże kierunek osi (us. 128, 70). Następnie, poprowadziwszy przez jakikolwiek punkt na paraboli prostą o kierunku prostopadłym do kierunku osi, i wyznaczywszy środek odcinka téj prostopadłéj, przedstawiającego cięciwę paraboli, możemy łatwo wykréślić oś paraboli i wyznaczyć jéj wiérzchołek główny, a tymsamym to zadanie sprowadzić do rozważanego w us. 106-ym.

mała w elipsie (us. 57) i oś sprzężona w hiperboli (us. 91). *W elipsie osi wielka i mała, a w hiperboli osi poprzeczna i sprzężona przedstawiają parę średnic sprzężonych.* Tę parę średnic nazywamy średnicami głównymi, albotéż osiami głównymi odpowiednio elipsy i hiperboli. —

131. Poprowadźmy w jakimkolwiek punkcie A (fig. 44) na hiperboli do niéj styczną i poprowadźmy dwie średnice, jednę AB przez punkt styczności, drugą CD, równoległą do téj stycznéj; one przedstawiają parę średnic sprzężonych (us. 128, 130). Punkty przecięcia się téj stycznéj z asymptotami nazwijmy E i F; odcinki AE i AF są równe (us. 121), a więc pęk promieni S(EFAC) jest harmoniczny, t. j. *dwie średnice sprzężone hiperboli przedstawiają parę promieni, harmonicznie sprzężoną z asymptotai.* Wskutek tego, z dwu średnic sprzężonych jedna przechodzi w tych kątach wiérzchołkiem przeciwległych, utworzonych przez asymptoty (us. 22), w których niéma punktów na hiperboli (us. 77), t. j. *jedna z dwu średnic sprzężonych hiperboli przecina ją, a druga jéj nie spotyka.* Za jéj długość przyjmuje się długość odcinka stycznéj, równoległéj do téj średnicy, zawartego między asymptotami (por. us. 91, 121), t. j. odcinka EF, tak iż SC = SD = AE.

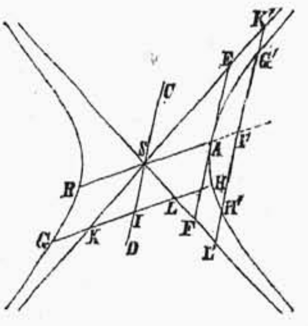


Fig. 44.

Z tego, że para średnic sprzężonych i asymptoty tworzą pęk harmoniczny, wynika, iż, wmiarę tego, jak jedna ze średnic sprzężonych hiperboli zbliża się do jednéj z asymptot (por. us. 83), druga również zdąża do téjże asymptoty, tak iż, gdy jedna zejdzie się razem z asymptotą, to i druga jednocześnie z nimi razem się zejdzie (us. 22). Wskutek tego, *każdą z asymptot hiperboli można uważać jako parę średnic sprzężonych.* —

W hiperboli równobocznéj asymptoty są do siebie prostopadłe (us. 85). Jakiekolwiek przeto dwie średnice sprzężone hiperboli równobocznéj tworzą z asymptotami pęk promieni harmoniczny, w którym dwa promienie jednéj pary są do siebie prostopadłe; a więc (us. 27, *a*), *asymptoty hiperboli równobocznéj są dwusiecznymi kątów utworzonych przez jakąkolwiek parę średnic sprzężonych.*

132. Mając jakąkolwiek cięciwę GH (lub G'H') hiperboli (fig. 44), zauważmy, że średnica, sprzężona z tą cięciwą, dzieli ją w punkcie I na połowy; jest więc GI = IH. Z tego zaś, że pęk S(KLDA) jest harmoniczny, wynika, iż KI = IL. A zatym GK = LH, t. j. *odcinki* *prostéj, przecinającéj hiperbolę, zawarte między hiperbolą i asymptotami, są sobie równe.*

Z téj własności wynika łatwy sposób wyznaczenia punktów na hiperboli, gdy są dane: asymptoty i jeden punkt na hiperboli. —

133. Mając średnicę AB (fig. 45) elipsy, albo hiperboli, połączmy jéj punkty końcowe z jakimkolwiek punktem C na krzywéj prostymi AC

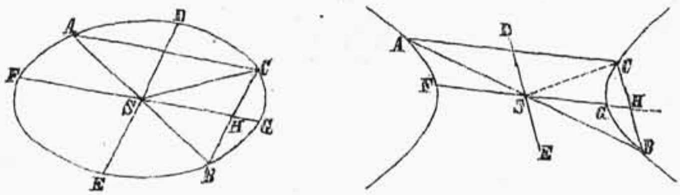


Fig. 45.

i BC i poprowadźmy przez środek cięciwy AC średnicę DE, a nadto średnicę FG, równoległą do AC, a więc sprzężoną ze średnicą DE. Punkty przecięcia się promieni pęku harmonicznego S(ACDG) z prostą BC tworzą szereg harmoniczny, t. j. cięciwa BC jest przez punkt przecięcia się jéj ze średnicą ED i przez jego biegunową (przechodzącą przez punkt H) podzielona harmonicznie (us. 98). Lecz biegunowe punktów na prostéj ED są równoległe do prostéj SG (us. 119, *b*); a więc punkt na ED, którego biegunowa przecina cięciwę BC w punkcie H, jest biegunem prostéj FG, czyli jest punktem w nieskończoności. Cięciwa zatym CB jest równoległa do średnicy DE. A więc, *cięciwy, łączące którykolwiek punkt na elipsie lub na hiperboli z punktami końcowymi jakiéjkolwiek średnicy, są równoległe do dwu średnic sprzężonych.* Takie dwie cięciwy nazywamy c i ę c i w a m i d o p e ł n i a j ą c y m i s i ę.

134. Wystawmy sobie, że czworobok *acbd* (fig. 42), opisany na elipsie lub na hiperboli, jest równoległobokiem (fig. 46); wówczas wierzchołki G i H (fig. 42), oraz przekątna *r* znajdują się w nieskończoności,

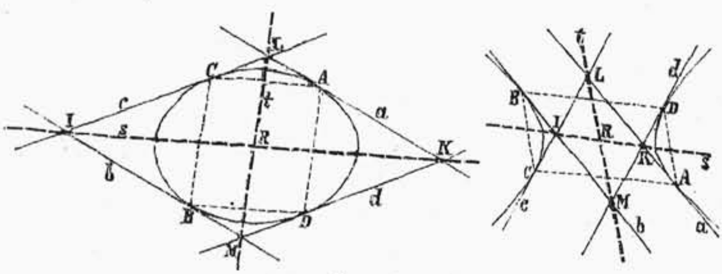


Fig. 46.

chołki G i H (fig. 42), oraz przekątna *r* znajdują się w nieskończoności, a punkt przecięcia się przekątnych s i t, t. j. punkt R, jako biegun prostéj r, jest środkiem odpowiednio elipsy lub hiperboli. Wskutek tego, przekątne s i t, sprzężone z sobą (us. 126), są średnicami sprzężonymi (us. 130). Zatym, *przekątne równoległoboku, opisanego na elipsie lub na hiperboli, mają kierunek średnic sprzężonych.* Jeżeli te przekątne równoległoboku opisanego mają kierunek osi głównych, to ten równoległobok jest rombem.

Punkt spotkania się prostych AD i BC (t. j. punkt S; fig. 42) znajduje się na przecięciu się prostéj w nieskończoności r ze średnicą t, punkt zaś spotkania się prostych AC i BD na przecięciu się téjże prostéj r ze średnicą s; a więc *boki równoległoboku, wpisanego w elipsę lub w hiperbolę, są równoległe do średnic sprzężonych.* Nadto, punkt przecięcia się prostych AB i CD znajduje się w punkcie R (por. fig. 42), t. j. *przekątne równoległoboku, wpisanego w elipsę lub w hiperbolę, są średnicami.* — Z zestawienia z sobą tych własności równoległoboku wpisanego w elipsę lub w hiperbolę wynika, jako bezpośredni wniosek, to, czegośmy wprost dowiedli w us. 133-ym. — Zauważymy tu jeszcze, że średnice AB i CD równoległoboku wpisanego niekoniecznie są z sobą sprzężone *); widoczne to jest np. na fig. 46-éj prawéj, na któréj średnica AB przecina się ze stycznymi, przechodzącymi przez punkty końcowe średnicy CD.

135. W us. 111-ym widzieliśmy, że kąt pod którym z ogniska jest widoczny odcinek jakiéjkolwiek stycznéj do przecięcia stożkowego, zawarty między dwiema stałymi stycznymi, jest równy połowie kąta, utworzonego przez proste, łączące punkty styczności stycznych stałych z tym ogniskiem, uważanego w stronę owego odcinka. Jeżeli więc owym przecięciem stożkowym jest hiperbola, a stycznymi stałymi jéj asymptoty, to, oznaczywszy przez k kąt między asymptotami, w którym przypada gałąź hiperboli, odcinek CD (fig. 47) jakiéjkolwiek stycznéj widzimy z ogniska O pod kątem $\frac{360^0 - k}{2}$, z ogniska zaś O_1 pod kątem $\frac{k}{2}$ (por. uwagę w us. 103). A więc, *suma kątów, pod jakimi jest widoczny z obu ognisk hiperboli odcinek jakiéjkolwiek do niéj stycznéj, zawarty między asymptotami, jest równa dwu kątom prostym.*

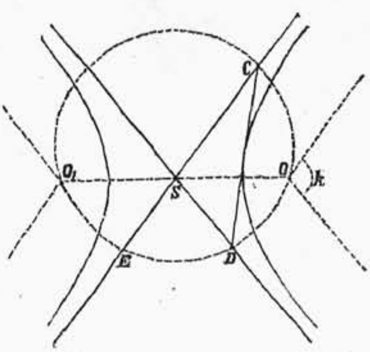


Fig. 47.

*) Nie zmieniając bowiém np. stycznych a i b, możemy zastąpić styczne c i d przez jakiekolwiek, do siebie równoległe, t. j. przy stałéj tu średnicy AB średnica CD będzie coraz inna.

Wskutek tego, można przez punkty C, O, D i O_1 poprowadzić koło; jego środek znajduje się widocznie na osi sprzężonéj, względem któréj asymptoty są symetrycznie położone. Jeżeli więc odpowiadający punktowi D punkt na drugiéj asymptocie (t. j. jeden z punktów przecięcia się jéj z kołem) nazwiemy E, to $SD = SE$. Ponieważ zaś $SC . SE = SO . SO_1 = SO^2$, zatym

$$SC . SD = SO^2,$$

t. j. *odległość środka hiperboli od ogniska jest średnią gieometryczną odległości środka od punktów przecięcia się jakiéjkolwiek stycznéj z asymptotami.*

Poprowadźmy inną styczną do hiperboli, któréj punkty przecięcia się z asymptotami nazwijmy C' i D'. Trójkąty CSD i C'SD' mają spólny kąt; pola więc ich są proporcyjonalne względem iloczynów z ramion tego kąta, t. j.

$$\triangle CSD : \triangle C'SD' = (CS . SD) : (C'S . SD').$$

Lecz $CS . SD = C'S . SD' = SO^2$; zatym

$$\triangle CSD = \triangle C'SD',$$

t. j. *pole trójkąta, utworzonego przez jakąkolwiek styczną do hiperboli i przez asymptoty, jest stałe.*

136. Przez jakikolwiek punkt A na hiperboli (fig. 48) poprowadźmy średnicę AB i styczną EF. Styczna EF jest prostą sprzężoną ze średnicą AB (us. 128), a średnica CD, poprowadzona równolegle do téjże stycznéj, jest średnicą sprzężoną ze średnicą AB (us. 130). Odcinek CD, równy odcinkowi stycznéj w A lub w B, zawartemu między asymptotami, przedstawia wielkość téj średnicy (us. 131). Jeżeli przez drugi punkt końcowy średnicy AB, t. j. przez punkt B, poprowadzimy styczną GH, a punkty przecięcia się jéj z asymptotami, G i H, połączymy prostymi odpowiednio z punktami przecięcia się stycznéj w A z asymptotami, t. j. z punktami E i F, to otrzymamy równoległobok EGHF, którego boki są równoległe do średnic sprzężonych AB i CD i im równe. Pole tego równoległoboku jest cztéry razy większe od pola trójkąta GSH. — Weźmy inną parę średnic sprzężonych, A'B' i C'D'; w punktach końcowych téj z nich, która spotyka hiperbolę, poprowadźmy styczne, a odpowiednie punkty przecięcia się ich z asymptotami: E' z G', F' z H' połączymy prostymi; pole równole-

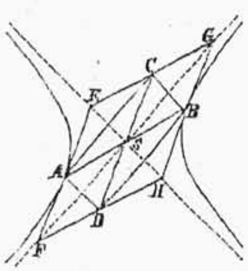


Fig. 48.

głoboku E'G'H'F', mającego boki równoległe do średnic sprzężonych A'B' i C'D' i im równe, jest podobnie cztéry razy większe niż trójkąta G'SH'. — Wiemy zaś, że trójkąty GSH i G'SH' są równoważne; a więc, równoległoboki EGHF i E'G'H'F' są także równoważne. A zatym, *pole równoległoboku, którego boki są równoległe do średnic sprzężonych hiperboli i im równe, jest stałe.* Jednym z takich równoległoboków jest prostokąt (w hiperboli równobocznéj kwadrat), którego boki są równe osiom głównym i do nich równoległe; przeto pole każdego z owych równoległoboków jest *równe iloczynowi osi głównych hiperboli.* Zauważymy jeszcze, że w każdym równoległoboku, mającym boki równoległe do średnic sprzężonych hiperboli i przechodzące przez punkty końcowe tych średnic, przekątnymi są asymptoty.

Czworokąt ACBD (fig. 48), którego przekątnymi są średnice sprzężone, jest — jak to łatwo objaśnić — równoległobokiem, mającym boki równoległe odpowiednio do prostych FG i EH, a pole równe połowie pola równoległoboku EGHF. A więc, *pole równoległoboku, którego przekątnymi są średnice sprzężone hiperboli, jest stałe,* mianowicie *równe połowie iloczynu osi głównych hiperboli,* a boki każdego takiego równoległoboku są równoległe do asymptot. —

137. Poprowadźmy w elipsie dwie pary średnic sprzężonych, jednę AB i CD (fig. 49), drugą A'B' i C'D'. Połączmy z sobą prostymi punkty: A z C' i A' z C. Przez punkt I, środek cięciwy AC', poprowadźmy średnicę KL, oraz poprowadźmy średnicę MN, równoległą do cięciwy AC'. Pęk promieni S(AC'KM) jest harmoniczny, a więc bieguny prostych AB, C'D', KL i MN przedstawiają szereg punktów harmoniczny (us. 124). Zważmy, że bieguny tych prostych, średnic, znajdują się w kierunkach odpowiednich średnic, z nimi sprzężonych (us. 130), t. j. na prostych odpowiednio CD, A'B', MN i KL, które wszystkie przechodzą przez tenże punkt S. Pęk więc S(CA'MK), jako utworzony przez promienie, przechodzące przez punkty szeregu harmonicznego, jest harmoniczny (us. 21). Wskutek tego, prosta A'C przecina promienie tego pęku w punktach, tworzących szereg harmoniczny. Oznaczywszy więc przez O punkt przecięcia się prostych KL i A'C, widzimy, że punkt spotkania się prostych A'C i MN tworzy z punktem O parę, harmonicznie sprzężoną z parą punktów A' i C, t. j. cięciwa A'C jest przez punkt przecięcia się jéj ze średnicą MN i przez jego biegunową (przechodzącą

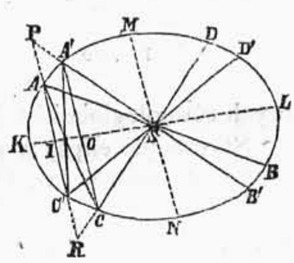


Fig. 49.

przez punkt O) podzielona harmonicznie (us. 98). Lecz biegunowe punktów na prostéj MN są równoległe do prostéj KL (us. 119, *b*); a więc punkt na prostéj MN, którego biegunowa przecina cięciwę A'C w punkcie O, jest biegunem prostéj KL, czyli jest punktem w nieskończoności. Cięciwa zatym A'C jest równoległa do cięciwy AC'.

Ponieważ cięciwa A'C, na mocy tego, cośmy tylkoco dowiedli, jest sprzężona ze średnicą KL, przeto A'O = OC. Łatwo już okazać, że, jeżeli punkty spotkania się prostéj AC' z prostymi SA' i SC nazwiemy odpowiednio P i R, to AP = C'R, AR = C'P, a następnie, że trójkąty ASR i C'SP są równoważne, oraz że trójkąty A'C'P i ACR są także równoważne. Wskutek zaś tego, trójkąty ACS i A'C'S są równoważne.

Trójkąt ACS ma pole cztéry razy mniejsze od pola równoległoboku ACBD (fig. 50), którego przekątnymi są średnice sprzężone AB i CD. Podobnie pole równoległoboku A'C'B'D', którego przekątnymi są średnice sprzężone A'B' i C'D', ma pole cztéry razy większe od pola trójkąta A'C'S. Za równoważnością więc trójkątów ACS i A'C'S idzie równoważność równoległoboków ACBD i A'C'B'D', t. j. *pole równoległoboku, którego przekątnymi są średnice sprzężone elipsy, jest stałe.* Jednym z takich równoległoboków jest romb, którego przekątnymi są osi główne; przeto pole każdego z owych równoległoboków jest *równe połowie iloczynu osi głównych elipsy.*

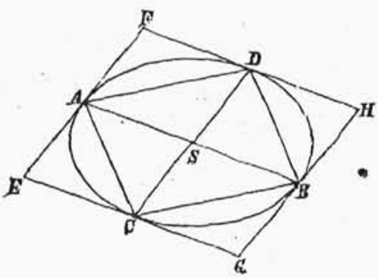


Fig. 50.

Styczne do elipsy w punktach końcowych średnicy są równoległe do średnicy sprzężonéj (us. 130); czworokąt zatym EGHF (fig. 50), utworzony przez styczne w punktach końcowych średnicy AB i średnicy CD, jest równoległobokiem, którego boki są równoległe do tych średnic i im równe. Pole takiego równoległoboku jest widocznie dwa razy większe od pola równoległoboku, którego przekątnymi są średnice sprzężone, a więc także *pole równoległoboku, którego boki są równoległe do średnic sprzężonych elipsy i im równe, jest stałe;* jest ono *równe iloczynowi osi głównych elipsy.*

138. Ćwiczenia.

[Wykonać wykréślenia, wzmiankowane w us. 128, 129, 130 i 132.]

1°. Dlaczego proste, z sobą sprzężone względem przecięcia stożkowego, przechodzące przez jego ognisko, są do siebie prostopadłe?

2°. Dlaczego, jeżeli dla każdego z cztérech punktów na prostéj, tworzących szereg harmoniczny, wyznaczymy na innéj, dowolnie wziętéj prostéj, punkt sprzężony względem danego przecięcia stożkowego, to owe cztéry punkty przedstawią szereg harmoniczny?

3°. Dla danego punktu wyznaczyć kierunek jego biegunowéj względem danego przecięcia stożkowego i wykréślić tę biegunową. — Znaléść biegun danéj prostéj względem danego przecięcia stożkowego.

4°. Okazać, że prosta, przechodząca przez punkt, leżący zewnątrz przecięcia stożkowego, i przez środek cięciwy styczności, odpowiadającéj temu punktowi, jest sprzężona z ową cięciwą.

5°. Przez każdy z dwu punktów, w których dwie styczne do przecięcia stożkowego, do siebie równoległe, przecina styczna dowolna, i przez środek przecięcia stożkowego poprowadźmy proste; okazać, że te proste przedstawiają parę średnic sprzężonych.

6°. Punkty końcowe średnicy przecięcia stożkowego są A i B, zaś C jest punktem na średnicy, sprzężonéj ze średnicą AB; proste CA i CB przecinają przecięcie stożkowe jeszcze w punktach odpowiednio D i E; okazać (przy pomocy własności czworokąta zupełnego), że cięciwa DE jest równoległa do średnicy AB, oraz, że cięciwy AE i BD przecinają się z sobą w punkcie, leżącym na téjże średnicy, co punkt C, i sprzężonym z punktem C.