ROZDZIAŁ IV.

KSZTAŁT ODDZIELNYCH PRZECIĘĆ STOŻKOWYCH.

KSZTAŁT ELIPSY.

51. Jeżeli *punkty na przecięciu stożkowym są bliższe ogniska niż kierownicy,* czyli, jeżeli *stosunek parametru przecięcia stożkowego do odległości ogniska od kierownicy przedstawia liczbę, mniejszą od jedności,* to wówczas przecięcie stożkowe nazywa się elipsą. Wtedy kierownica, czyli linija średnia pokrewieństwa harmonicznego, jest cała zewnątrz koła, harmonicznie pokrewnego z takim przecięciem stożkowym, t. j. z elipsą.

52. Ponieważ prosta l_s (fig. 18) nie spotyka koła, przeto wszystkie punkty na elipsie są po téj saméj stronie prostéj l_s, co punkt H (us. 13), a więc *elipsa znajduje się po téj saméj stronie kierownicy, co ognisko.*

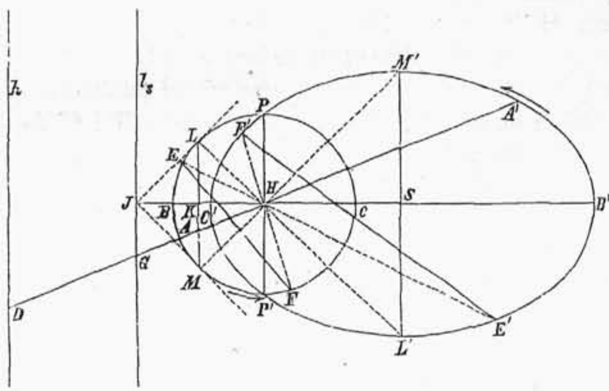

Fig. 18.

Z tego, że prosta l_s nie spotyka koła, wynika jeszcze, że z prostą l_s harmonicznie pokrewna prosta p_∞ (us. 35, *o*) nie spotyka harmonicznie z tym kołem pokrewnéj elipsy, a więc *elipsa nie rozciąga się do nieskończoności,* czyli: *wymiary elipsy są skończone.*

53. Wyznaczając punkty harmonicznie pokrewne z oddzielnymi punktami na kole, przekonamy się, że gdy punkt A opisuje koło, np. w kierunku strzałki, to punkt z nim pokrewny A′ opisuje jednocześnie elipsę w kierunku, wskazanym strzałką, tak iż odpowiadają (zob. us. 49)

punktom na kole: B, P′, C, P, B
punkty na elipsie: B′, P, C′, P′, B′,

a np. cięciwie koła EF odpowiada cięciwa elipsy E′F′.

54. Zauważmy, że we wszystkich tych położeniach, odpowiadających sobie, punkty A i A′ tworzą parę, harmonicznie sprzężoną z parą punktów: niezmiennym H i poruszającym się po osi h punktem D; nadto odległość punktu A od punktu H pozostaje taż sama, tak iż na różnych prostych DH punkt A zajmuje wciąż toż samo położenie względem punktu H. Gdy punkt A porusza się po kole od punktu B do punktu P′, to z punktów H i D jednéj pary punkt H jest stały, punkt zaś D wciąż się oddala od punktu H, z punktów zaś A i A′ drugiéj pary punkt A pozostaje w téj saméj odległości od H, a więc (us. 14) drugi punkt téj pary, t. j. punkt A′, przesuwa się w tym samym kierunku, co punkt D, czyli: punkt A′ (znajdujący się po innéj stronie punktu H, niż punkt D) wciąż się do punktu H zbliża, dążąc od położenia w B′ do P. Gdy następnie punkt A porusza się po kole od P′ do C, wówczas punkt D jest coraz bliższy punktu H, a więc i punkt A′ (znajdujący się po téj saméj stronie punktu H, co punkt D), wciąż do punktu H się zbliża, poruszając się od punktu P do C′. Zupełnie taksamo, gdy punkt A od punktu B przez P dąży do C, punkt A′, poruszając się od punktu B′ przez P′ do C′, wciąż się zbliża do ogniska H. Punkty przeto B′ i C′ na elipsie są odpowiednio najdalszym i najbliższym na niéj punktami od ogniska H. Są one pokrewne z punktami B i C na kole, najbliższym i najdalszym na nim punktami od osi h, a tymsamym od kierownicy l_s. Jest więc prosta BC prostopadłą do kierownicy i na niéj (us. 35, d, e) znajdują się punkty B′ i C′ na elipsie. A zatym, *prosta, przechodząca przez ognisko prostopadle do kierownicy, przecina elipsę w punktach, z których jeden jest najdaléj, a drugi najbliżéj ogniska.*

55. Te punkty B′ i C′, t. j. punkty przecięcia się prostéj, przechodzącéj przez ognisko H prostopadle do kierownicy, z elipsą, nazywamy wiérzchołkami głównymi elipsy; odcinek zaś téj prostéj, zawarty między punktami przecięcia się jéj z elipsą, t. j. między wiérzchołkami głównymi elipsy, nazywamy osią wielką elipsy.

Zgodnie z tym, cośmy mówili w us. 48-ym, *elipsa jest liniją symetryczną względem osi wielkiéj.*

Z tego, że elipsa jest symetryczna względem osi wielkiéj, wynika bezpośrednio, iż *styczne do elipsy w wiérzchołkach głównych są prostopadłe do osi wielkiéj.*

56. Punkt przecięcia się przedłużenia osi wielkiéj z kierownicą nazwijmy J (fig. 18), a dla trzech punktów: B, C i J znajdźmy czwarty punkt taki, iżby on z punktem J przedstawiał parę, harmonicznie sprzężoną z parą punktów B i C. Ów punkt *) nazwijmy K. Ponieważ (BCJK) $= -1$, przeto punkty, harmonicznie pokrewne z punktami B, C, J i K, utworzą szereg harmoniczny (us. 35, *l*). Z punktami B i C są pokrewne punkty B′ i C′, wiérzchołki główne elipsy, z punktem J, jako leżącym na l_s, jest pokrewny punkt P_∞ (us. 35, *n*). Jeżeli więc punkt, pokrewny z punktem K, jeszcze niewyznaczony, nazwiemy S, to

$$(B'C'P_\infty S) = -1,$$

a przeto punkt S dzieli odcinek B′C′ na połowy (us. 19). Z punktem więc K jest harmonicznie pokrewny punkt S, środek osi wielkiéj elipsy. Każda więc prosta, przechodząca przez punkt K, jest harmonicznie pokrewna z odpowiednią prostą, przechodzącą przez punkt S (us. 35, *b*).

Jeżeli punkt K przyjmiemy za środek nowego pokrewieństwa harmonicznego, a prostą l_s za jego oś, to, z uwagi, że (BCJK) $= -1$, punkty B i C, końcowe średnicy koła, będą tu z sobą pokrewne, z czego wnosimy, że w tym pokrewieństwie pomocniczym koło dane jest samo z sobą harmonicznie pokrewne (us. 39). Punkty przeto końcowe któréjkolwiek cięciwy, przechodzącéj przez punkt K, są z sobą harmonicznie pokrewne (us. 37) względem środka pokrewieństwa K i osi l_s.

Z tego wynika, że na jakiéjkolwiek prostéj, przechodzącéj przez punkt K, punkt przecięcia się jéj z prostą l_s i punkt K tworzą parę, harmonicznie sprzężoną z parą punktów, w których owa prosta przecina koło. Z tą prostą, jak widzieliśmy, jest harmonicznie pokrewna (względem środka H i osi *h*) pewna prosta, przechodząca przez punkt S, a z prostą l_s prosta p_∞. A więc, punkt przecięcia się owéj prostéj, przechodzącéj przez punkt S, z prostą p_∞, t. j. punkt P_∞, i punkt S tworzą parę, harmonicznie sprzężoną z parą punktów, w których owa prosta przecina elipsę (us. 35, *l*); jest przeto punkt S także środkiem odcinka téj prostéj, zawartego między punktami przecięcia się jéj z elipsą. Toż samo można powiedziéć o każdéj prostéj, przechodzącéj przez punkt S, gdyż harmonicznie z nią pokrewna prosta przechodzi przez punkt K. A zatym, *środek*

---

*) Ten punkt leży na przecięciu się podstawy BC z prostą, łączącą punkty styczności stycznych do koła, które z punktu J wyprowadzić można (us. 40).

osi wielkiéj elipsy jest zarazem środkiem odcinka każdéj prostéj, przezeń przechodzącéj, zawartego między punktami przecięcia się jéj z elipsą, tak iż *elipsa jest względem tego punktu liniją symetryczną.*

Punkt ten nazywamy **środkiem elipsy**. Cięciwę zaś, przezeń przechodzącą, t. j. odcinek jakiéjkolwiek prostéj, przechodzącéj przez środek, ograniczony punktami przecięcia się jéj z elipsą, nazywamy **średnicą elipsy**. Średnice elipsy są pokrewne z cięciwami koła, przechodzącymi przez punkt K (fig. 18).

57. Poprowadźmy cięciwę koła, przechodzącą przez punkt K prostopadle do jego średnicy BC, t. j. cięciwę LM; jéj punkty końcowe L i M są w jednakowéj odległości tak od środka pokrewieństwa H, jak i od osi h, a przeto i od linii l_s. A więc harmonicznie z tymi punktami pokrewne punkty L′ i M′, punkty końcowe średnicy elipsy L′M′, pokrewnéj z cięciwą koła LM, są również w jednakowéj odległości od linii l_s (us. 16), a zatym i od osi h, a tymsamym leżą na prostéj równoległéj do kierownicy, czyli na prostopadłéj do osi wielkiéj elipsy. A więc z cięciwą koła, przechodzącą przez punkt K prostopadle do osi wielkiéj elipsy, jest pokrewna średnica elipsy, również prostopadła do osi wielkiéj elipsy. Tę średnicę nazywamy **osią małą elipsy**.

Jeżeli linija jest symetryczna jednocześnie względem prostéj i względem punktu (oczywiście na téj prostéj), to jest także symetryczna względem prostéj, prostopadłéj w owym punkcie (środku symetryi) do owéj prostéj (osi symetryi). Ponieważ zaś elipsa jest symetryczną względem osi wielkiéj (ns. 55) i względem środka (us. 56), przeto *elipsa jest liniją symetryczną względem osi małéj.*

Z tego bezpośrednio wynika, że *styczne do elipsy w punktach końcowych osi małéj są równoległe do osi wielkiéj* (jako prostopadłe do osi małéj).

58. Poprowadźmy cięciwę koła, np. EF (fig. 19), nie przechodzącą przez punkt K, harmonicznie pokrewny ze środkiem S. Z nią jest pokrewna cięciwa elipsy E′F′. Przez punkt K poprowadźmy prostą, przecinającą cięciwę EF w punkcie G i łuk, przez nią podparty, w punkcie J. Pokrewna z nią prosta przechodzi przez punkt S; punkt przecięcia się jéj z cięciwą E′F′ nazwijmy G′, a z łukiem elipsy, przez tę cięciwę podpartym, nazwijmy J′. Zważmy, że koło i elipsa

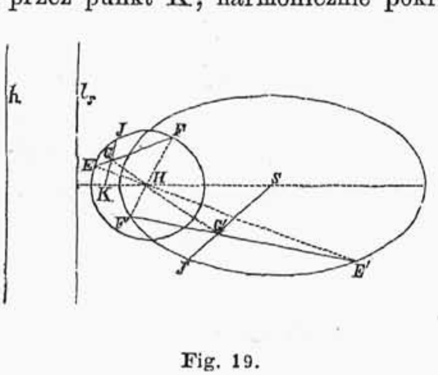

Fig. 19.

nie przecinają się z prostą l_s, przeto (us. 19; 35, uwaga) oba odpowiadające sobie odcinki KJ i SJ' są skończone. Wskutek tego, gdy punkt, poruszający się po prostéj KJ od punktu K wciąż ku punktowi J, naprzód napotyka punkt G na cięciwie, a późniéj punkt J na łuku koła, to wówczas z nim pokrewny punkt, poruszając się jednocześnie po prostéj SJ', pokrewnéj z prostą KJ (us. 35, *a*), naprzód napotyka punkt G' na cięciwie (us. 35, *f*), a późniéj punkt J' na łuku elipsy. Ma to również miejsce dla jakiegokolwiek innego punktu na cięciwie E'F' i dla odpowiadającego (t. j. leżącego na téj saméj prostéj, przechodzącéj przez punkt S) punktu na łuku elipsy E'F'. A więc, patrząc się ze środka S, mamy łuk E'F' poza cięciwą E'F'. Toż samo stosuje się do jakiegokolwiek innego łuku elipsy i podpiérającéj go cięciwy, wrazie gdy ta ostatnia nie przechodzi przez punkt S. A więc *elipsa zwraca swą stronę wklęsłą ku środkowi.*

59. Na osi wielkiéj AA' (fig. 20) elipsy wyznaczmy punkt O_1, będący w téj saméj odległości od jéj środka S, co ognisko O, i poprowadźmy do niéj prostopadłą w téj saméj odległości od środka S, co kierownica k, prostą k_1. Ponieważ elipsa jest liniją symetryczną względem osi małéj BB_1 (us. 57), przeto stosunek odległości jakiegokolwiek (us. 44) punktu na elipsie od punktu O_1 i od prostéj k_1 przedstawia *tę samę liczbę*, co stosunek odległości jakiegokolwiek punktu na elipsie od ogniska O i od kierownicy k.

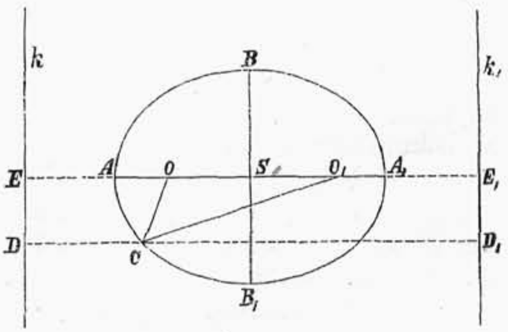

Fig. 20.

A więc, można punkt O_1 przyjąć jako ognisko, a prostą k_1 jako odpowiednią kierownicę elipsy, czyli: *elipsa posiada dwa ogniska i dwie odpowiadające im kierownice.*

60. Dla jakiegokolwiek punktu C (fig. 20) na elipsie, a wszczególności i dla jednego z wiérzchołków głównych, np. A, jest (us. 59)

$$\frac{CO}{CD} = \frac{CO_1}{CD_1}, \quad \frac{AO}{AE} = \frac{AO_1}{AE_1},$$

skąd ($AO = O_1A_1$, us. 57)

$$\frac{CO + CO_1}{DD_1} = \frac{CO}{CD}, \quad \frac{AA_1}{EE_1} = \frac{AO}{AE}.$$

A że $DD_1 = EE_1$ i, według określenia przecięcia stożkowego (us. 44), $\frac{CO}{CD} = \frac{AO}{AE}$, zatym

$$CO + CO_1 = AA_1,$$

t. j. *suma odległości jakiegokolwiek punktu na elipsie od ognisk jest stała i równa długości osi wielkiéj.*

61. Długość osi wielkiéj elipsy, t. j. długość odcinka AA_1 (fig. 20), zwykle się oznacza przez $2a$, a długość osi małéj, t. j. odcinka BB_1, przez $2b$. Zważmy, że $OB + O_1B = 2a$ (us. 60); lecz $OB = O_1B$, a więc $OB = a$. Z trójkąta zaś prostokątnego OBS mamy $OS^2 = OB^2 - BS^2$, czyli $OS^2 = a^2 - b^2$. Odcinek OS przedstawia odległość ogniska od środka; oznacza się ją zwykle literą c; jest więc w elipsie $c = \sqrt{a^2 - b^2}$. Odległość ognisk elipsy jest mniejsza od osi wielkiéj.

Stosunek różnicy między długościami osi wielkiéj i osi małéj do długości osi wielkiéj, t. j. stosunek $\frac{a-b}{a}$, nazywa się spłaszczeniem elipsy. Im elipsa jest bliższa koła (us. 62), tym jéj spłaszczenie jest mniejsze; spłaszczenie koła jest równe zeru.

62. Przypuśćmy, że oś h (fig. 18) oddaliła się od koła danego, a tymsamym i od środka pokrewieństwa H. Wtedy w położeniu punktu A′, pokrewnego z punktem A, innego niż punkt P lub P′, zajdzie zmiana odpowiednia. Mianowicie punkt A′, oile jest pokrewny z punktami na łuku koła PCP′, znajduje się po innéj stronie punktu H, niż oddalający się punkt D, wskutek czego (us. 14) punkt A′ zbliży się do punktu H. Gdy zaś punkt A′ jest pokrewny z punktami na łuku koła PBP′, wówczas, jako znajdujący się po téj saméj stronie punktu H, co punkt D, również od punktu H się oddali. Widzimy więc, że, wskutek oddalenia się osi h, a tymsamym, *wskutek oddalenia się kierownicy od odpowiadającego jéj ogniska, punkty na elipsie zbliżają się ku punktom na kole, którego średnicą jest cięciwa elipsy, przechodząca przez owo ognisko, równolegle do kierownicy* (us. 43 i 49). Gdy zaś, wskutek oddalenia się kierownicy od ogniska H, punkt B′ zbliżył się do punktu H, to, widocznie, środek elipsy i drugie jéj ognisko jednocześnie również zbliżyły się do ogniska H.

Gdy oś h oddali się do nieskończoności, to punkt A′, pokrewny z punktem A na kole, znajdować się będzie w takiéj saméj, jak punkt A, odległości od punktu H (us. 19); a więc punkt A′ opisze toż samo koło, t. j. elipsa stanie się kołem, harmonicznie pokrewnym z samym sobą (por. us. 39), a jéj środek i drugie ognisko zejdą się razem ze środkiem koła. Zauważywszy jeszcze, że gdy oś h jest prostą w nieskończoności to wtedy prosta l_s jest również nieskończenie odległą, możemy powiedzieć, iż *koło jest przypadkiem szczególnym elipsy; wtedy ogniska jéj schodzą się z sobą razem, a obie kierownice są prostą w nieskończoności.*

63. Ćwiczenia.

1°. Dlaczego pęk promieni J(GKLM) (fig. 18) jest harmoniczny?

2°. Jakie proste tworzą pęk harmoniczny promieni, pokrewnych z promieniami pęku J(GKLM), i gdzie jego wiérzchołek?

3°. Dlaczego elipsa jest zawarta między prostymi, pokrewnymi ze stycznymi do koła w punktach B i C?

4°. Dlaczego elipsa jest zawartą między prostymi, pokrewnymi z promieniami JL i JM pęku, wzmiankowanego pod 1°? (Zob. us. 22; 35, *b*).

5°. Jaka figura jest harmonicznie pokrewna z prostokątem, wewnątrz którego, według 3° i 4°, jest zawarta elipsa?

6°. Jakimi są względem siebie cięciwy elipsy, pokrewne z cięciwami koła, przechodzącymi przez punkt J (fig. 18), lub przez inny punkt na prostéj JG?

7°. Wyznaczyć średnice elipsy, pokrewne z dwiema cięciwami koła, prostopadłymi do siebie, a innymi od BC i LM.

8°. Wyznaczyć średnicę elipsy, któraby wraz ze średnicą, równoległą do cięciwy E'F' (fig. 18), przedstawiała parę średnic elipsy, pokrewnych z parą cięciw koła, do siebie prostopadłych.

9°. Dlaczego średnica elipsy jest równoległa do średnicy koła, przecinającéj się na prostéj l_s z cięciwą koła, pokrewną z ową średnicą elipsy?

10°. Nie korzystając z tego, że elipsa jest liniją symetryczną względem środka, dowiéść, że elipsa jest liniją symetryczną względem osi małéj. (Zob. us. 27, *a*, *b*; us. 35, *m*.)

11°. Dowiéść wprost, że elipsa zwraca swą stronę wklęsłą ku ognisku. (Zob. us. 14.)

12°. Aby, mając dane ogniska O i O_1 elipsy i daną długość $2a$ jéj osi wielkiéj, większą od długości odcinka OO_1, wyznaczyć kilka punktów na téj elipsie, promieniami r i r_1, każdorazowo takimi, iżby $r + r_1 = 2a$, zakréślamy koła z punktów odpowiednio O i O_1, lubtéż z punktów odpowiednio O_1 i O, jako środków, a każde dwa punkty przecięcia się takich kół będą punktami żądanymi na elipsie. Jakiemu tu jeszcze warunkowi zadość czynić winna różnica $r - r_1$, jeżeli $r > r_1$?

KSZTAŁT PARABOLI.

64. Jeżeli *punkty na przecięciu stożkowym są jednakowo odległe od ogniska i od kierownicy*, czyli, jeżeli *stosunek parametru przecięcia stożkowego do odległości ogniska od kierownicy przedstawia jedność*, to wówczas przecięcie stożkowe nazywa się parabolą. Wtedy kierownica, czyli linija średnia pokrewieństwa harmonicznego, jest styczną do koła, harmonicznie pokrewnego z takim przecięciem stożkowym, t. j. z parabolą.

65. Ponieważ prosta l_s (fig. 21) jest styczną do koła, przeto wszystkie punkty na paraboli są po téj saméj stronie prostéj l_s, co punkt H

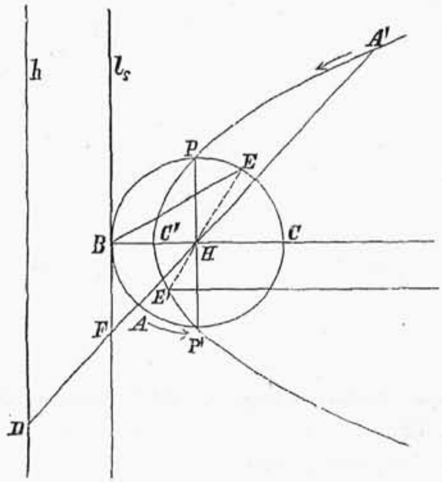

Fig 21.

(us. 13), a więc *parabola znajduje się po téj saméj stronie kierownicy, co ognisko.*

Z tego, że prosta l_s jest styczną do koła, wynika jeszcze, że harmonicznie z prostą l_s pokrewna prosta p_∞ (us. 35, *o*) jest styczną do paraboli (us. 36, *b*); a więc, *prosta w nieskończoności jest styczną do paraboli.* Punkt styczności téj prostéj jest harmonicznie pokrewny z punktem B na kole i leży w nieskończoności (us. 19). Styczna zaś do linii krzywéj w punkcie nieskończenie odległym nazywa się jéj asymptotą; możemy przeto powiedzieć, że *parabola posiada asymptotę, prostą w nieskończoności.* Widocznie więc, *parabola rozciąga się do nieskończoności.*

66. Wyznaczając punkty harmonicznie pokrewne z punktami na kole, spostrzeżemy, że gdy punkt A opisuje koło, to punkt A' opisuje jednocześnie parabolę—w kierunkach wskazanych strzałkami, tak iż odpowiadają (zob. us. 49)

punktom na kole C, P, B, P', C
punkty na paraboli C', P', P_∞, P, C'.

67. Gdy punkt A porusza się po kole od punktu C przez P do B, wówczas punkt D dla położeń punktu A od C do P wciąż się oddala od punktu H, dla położeń zaś punktu A od P do B wciąż się zbliża do punktu H. Punkt więc (us. 14) A', znajdując się naprzód po téj saméj stronie punktu H, co punkt D, a następnie, po przejściu punktu A przez punkt P, po innéj stronie punktu H, niż punkt D, wciąż się od ogniska H oddala, dążąc po paraboli od C' przez P' do P_∞. Gdy daléj punkt A dąży po kole od B przez P' do C, punkt A', dążąc od P_∞ przez P do C', wciąż się zbliża do ogniska H. Najbliższym więc ogniska jest punkt C' na paraboli; jest on pokrewny z najdalszym od osi h, a więc i od prostéj l_s, punktem C na kole. Punkt zaś P_∞ na paraboli jest pokrewny z punktem B na kole, punktem styczności kierownicy l_s. A więc prosta BC jest prostopadła do kierownicy, i na niéj (us. 35, *d*, *e*) znajduje się tak punkt C' jak i punkt P_∞ na paraboli. Zatym, *prosta, przechodząca przez ognisko prostopadle do kierownicy, przecina parabolę w punkcie, który jest najbliżéj ogniska, i na niéj leży punkt* P_∞ *na paraboli.*

68. Ów punkt C', punkt przecięcia się z parabolą prostéj, przechodzącéj przez ognisko prostopadle do kierownicy, nazywamy **wiérzchołkiem głównym paraboli**; odcinek zaś téj prostéj od wiérzchołka paraboli przez ognisko do nieskończoności nazywamy **osią paraboli.**

Zgodnie z tym, cośmy mówili w art. 48-ym, *parabola jest liniją symetryczną względem osi.*

Z tego bezpośrednio wynika, że *styczna do paraboli w wiérzchołku głównym jest prostopadła do osi.*

69. Ponieważ wiérzchołek główny paraboli, t. j. punkt C', znajduje się na prostopadłéj HB z ogniska H na kierownicę l_s, przeto odcinki C'H i BC', przedstawiające jego odległości odpowiednio od ogniska i od kierownicy, są (us. 64) sobie równe, tak iż $C'H = \frac{1}{2}BH$. Że zaś BH, jako promień danego koła, przedstawia parametr paraboli (us. 50), zatym *odległość wiérzchołka głównego paraboli od ogniska równa się połowie parametru.*

70. Wystawmy sobie, że na fig. 18-éj prosta l_s (a tymsamym jednocześnie i prosta h) staje się coraz bliższą koła, harmonicznie pokrewnego z odpowiednią, coraz inną, elipsą. Wtedy punkt J staje się coraz bliższym punktu B i odpowiednio punkt K, taki, iż $(CBJK) = -1$ (us. 56), staje się również (us. 13) coraz bliższym tego punktu B. Jednocześnie z odpowiednich punktów, harmonicznie pokrewnych z punktami C, B, I, K, t. j. z punktów C', B', P_∞, S (us. 56, fig. 18), punkty B', P_∞ i S stają się coraz siebie bliższe, t. j. punkty B' i S coraz więcéj się oddalają. Gdy więc, jak na fig. 21-éj punkt J zejdzie się razem z punktem B, to zejdzie się z nimi razem także punkt K (us. 13), a jednocześnie punkty B' i S znajdą się oba w nieskończoności razem z punktem P_∞. A więc w paraboli punkt S, odpowiadający środkowi osi wielkiéj elipsy, i dlatego jakby środek osi paraboli, znajduje się od wiérzchołka głównego w odległości większéj od jakiéjkolwiek wielkiéj oznaczonéj. Dlatego mówi się, że środek osi paraboli znajduje się w odległości nieskończenie wielkiéj od wiérzchołka. — Przez punkt B poprowadźmy jakąkolwiek cięciwę koła, np. BE (fig. 21). Z punktem E jest pokrewny punkt E' na paraboli, a z punktem B punkt P_∞, który jest także nieskończenie odległym środkiem osi paraboli. Z cięciwą więc BE koła jest harmonicznie pokrewna cięciwa paraboli, przechodząca przez punkt E' i przecinająca się z osią paraboli w jéj nieskończenie odległym środku, a więc równoległa do osi paraboli (us. 6). Punkt przeto P_∞ na osi paraboli, będący, według powyższego, środkiem téj osi, może być równie dobrze środkiem każdéj cięciwy paraboli, równoległéj do osi, a tymsamym, jakby środkiem paraboli, a każda z owych cięciw, równoległych do osi, jakby średnicą paraboli. Dlatego mówi się, że *środek paraboli znajduje się w kierunku jéj osi w odległości nieskończenie wielkiéj od ogniska*, wskutek czego *średnice paraboli są równoległe do osi* *).

71. Poprowadźmy jakąkolwiek cięciwę koła, np. EF (fig. 22). Z nią jest pokrewna cięciwa paraboli E'F'. Poprowadźmy prostopadłą do średnicy koła BC, prostą LJ, przecinającą jego cięciwę EF w punkcie G, a łuk, przez nią podparty, w punkcie J. Pokrewna z nią prosta przechodzi przez punkt G', leżący na cięciwie E'F', pokrewny z punktem G (us. 35, *b*, *f*), również prostopadle do osi paraboli (us. 34, *b*); punkt jéj przecięcia się z łukiem paraboli E'F' nazwijmy J', a z jéj osią L'. Ponieważ te proste LJ i L'J' nie spotykają prostéj l_s, przeto skończonemu odcinkowi jednéj odpowiada skończony odcinek drugiéj (us. 19; 35, uwaga). Wskutek tego, gdy punkt, poruszający się po prostéj LJ od punktu L wciąż ku punktowi J, naprzód napotyka punkt G na cięciwie, a późniéj punkt J na łuku koła, to wówczas harmonicznie z nim pokrewny punkt, poruszając się jednocześnie po prostéj L'J', harmonicznie z prostą LJ pokrewnéj (us. 35, *a*), naprzód napotyka punkt G' na cięci-

---

*) Uwaga. Mając wzgląd na to, że w jakkolwiek wielkiéj oznaczonéj odległości niéma jeszcze środka paraboli, mówi się także, że «parabola nie ma środka», czyli, że «parabola jest przecięciem stożkowym bez środka». Zgodnie jednak z tym, żeśmy się umówili wyrażać o prostych, do siebie równoległych, iż one spotykają się z sobą w nieskończoności (us. 6), ze względu na własności cięciw paraboli, równoległych do osi (t. j. jéj średnic), odpowiadające własnościom średnic innych przecięć stożkowych (por. us. 128, 129), wypadnie nam tu nadal przyjąć istnienie środka paraboli w nieskończoności.

wie (us. 35, f), a późniéj punkt J' na łuku paraboli. Ma to również

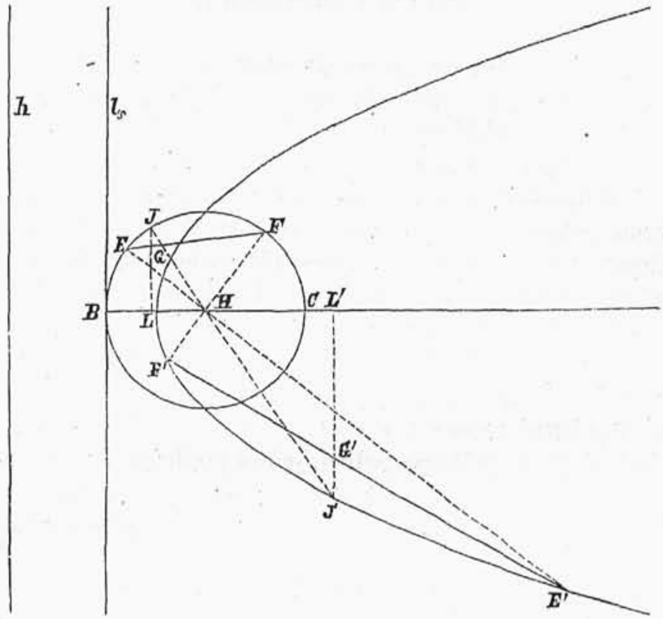

Fig. 22.

miejsce i t. d. (jak w us. 58-ym). A więc, *parabola zwraca swą stronę wklęsłą ku osi.*

72. Ćwiczenia.

1°. Dlaczego parabola jest zawarta między styczną do niéj w punkcie C' (fig. 21) i prostą p_∞?

2°. Jaka jest figura harmonicznie pokrewna z kwadratem opisanym na kole, a którego bok przechodzi przez punkt P?

3°. Jakimi względem siebie są cięciwy paraboli, pokrewne z cięciwami koła, przechodzącymi przez punkt F (fig. 21)?

4°. Wyznaczyć średnicę paraboli, pokrewną z tą cięciwą koła, która jest prostopadła do jednéj z jego cięciw, przechodzących przez punkt F (fig. 21).

5°. Dowiéść wprost, że parabola zwraca swą stronę wklęsłą ku ognisku.

6°. Aby, mając dane ognisko O i kierownicę k paraboli, wyznaczyć kilka punktów na téj paraboli, z téj saméj strony prostéj k, po któréj znajduje się punkt O, poprowadzimy równoległe do prostéj k w odległościach r, r', r'' i t. d. od k i wyznaczymy punkty przecięcia się tych prostych z kołami, zakréślonymi z punktu O, jako środka, promieniami odpowiednio r, r', r'' i t. d. Każde dwa takie punkty są punktami żądanymi. Jaka jest najmniejsza możliwa wielkość r?

KSZTAŁT HIPERBOLI.

73. Jeżeli *punkty na przecięciu stożkowym są dalsze od ogniska niż od kierownicy*, czyli, jeżeli *stosunek parametru przecięcia stożkowego do odległości ogniska od kierownicy przedstawia liczbę większą od jedności*, to wówczas przecięcie stożkowe nazywa się hiperbolą. Wtedy kierownica, czyli linija średnia pokrewieństwa harmonicznego, przecina koło, harmonicznie pokrewne z takim przecięciem stożkowym, t. j. z hiperbolą.

Uwaga. Co się zaś tyczy osi tego pokrewieństwa, to ona może się znajdować albo zewnątrz koła, albo być do niego styczną, albotéż także je przecinać; powtórzenie rozumowania na rysunkach, odpowiadających dwu pod tym względem innym przypadkom, niż ten, który tu uwidocznimy, pozostawia się czytelnikowi.

74. Ponieważ prosta l_s (fig. 23) przecina koło, przeto punkty na hiperboli znajdują się jużto po jednéj, jużtéż po drugiéj stronie prostéj l_s,

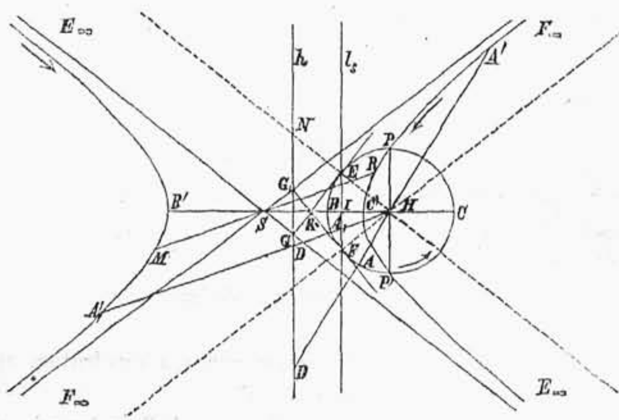

Fig. 23.

mianowicie po téj saméj, po jakiéj znajdują się pokrewne z nimi punkty na kole (us. 13), a więc *hiperbola znajduje się po obu stronach kierownicy*.

Z tego, że prosta l_s przecina koło, wynika jeszcze, iż harmonicznie z prostą l_s pokrewna prosta p_∞ (us. 35, o) przecina harmonicznie z tym kołem sprzężoną hiperbolę (us. 47, a), a więc *prosta w nieskończoności ma dwa punkty spólne z hiperbolą*. Widocznie przeto, *hiperbola rozciąga się do nieskończoności*.

75. Oznaczmy punkty spólne kierownicy i koła przez E i F. Każdy z tych punktów z odpowiednim mu punktem harmonicznie pokrewnym znajduje się na prostéj, przechodzącéj przez środek pokrewieństwa, t. j. przez punkt H (us. 34 ,*a*). Z punktem przeto E jest pokrewny punkt w nieskończoności na prostéj EH (us. 4); nazwijmy go E_∞. Odpowiednio punkt pokrewny z punktem F, czyli punkt w nieskończoności na prostéj FH, nazwijmy F_∞.

Ponieważ punkty E i E_∞ są z sobą pokrewne, piérwszy z nich jest na kole, drugi na hiperboli, z tym kołem harmonicznie pokrewnéj, przeto ze styczną do koła w punkcie E jest pokrewna styczna do hiperboli w punkcie E_∞ (us. 47, *a*). Te zaś dwie proste, dlatego, że są z sobą harmonicznie pokrewne, przecinają się z sobą na osi *h* (us. 34, *b*). Gdy więc przez punkt E poprowadzimy styczną do koła, a przez punkt G, w którym się ona z osią *h* przecina, poprowadzimy prostą, przechodzącą przez punkt E_∞, t. j. równoległą do prostéj EH (us. 6), to ta prosta GE_∞ będzie styczną do hiperboli w punkcie E_∞; będzieto więc asymptota (us. 65) hiperboli. Taksamo możemy wyznaczyć styczną do hiperboli w punkcie F_∞, czyli drugą jéj asymptotę, różną od poprzedniéj (dlaczego?). A więc, *hiperbola posiada dwie asymptoty*. One przecinają się z sobą w punkcie (S), leżącym na prostéj, przechodzącéj przez ognisko prostopadle do kierownicy (dlaczego?).

76. Wyznaczając punkty harmonicznie pokrewne z punktami na kole, przekonamy się, że gdy punkt A opisuje koło np. w kierunku strzałki, to pokrewny z nim punkt A′ opisuje jednocześnie hiperbolę w kierunku wskazanym na rysunku strzałkami, tak iż odpowiadają (zob. us. 49)

punktom na kole	B,	F,	P′,	C,	P,	E,	B
punkty na hiperboli	B′,	F_∞,	P,	C′,	P′,	E_∞,	B′.

77. Weźmy pod uwagę styczne do koła, pokrewne z asymptotami hiperboli. Punkty na ich odcinkach KE i KF, równie jak na łuku koła EBF, znajdują się po lewéj stronie (gdy, jak na naszéj figurze, oś *h* jest z lewéj strony środka pokrewieństwa H) prostéj l_s; a więc, pokrewne z nimi punkty znajdują się po lewéj stronie prostéj l_s, po przeciwnéj zaś (niż tamte punkty) stronie prostéj *h* (us. 13). A gdy na odpowiednich prostych, przechodzących przez punkt H, punkty na odcinkach EK i FK są bliższe *) osi *h* niż punkty na łuku koła EBF, przeto pokrewne z nimi punkty na lewych odcinkach asymptot $E_\infty S$ i $F_\infty S$ są bliższe **) osi *h* niż punkty na części hiperboli $E_\infty B'F_\infty$ (us. 13), t. j. cała ta część

---

*) W przypadku, gdy oś *h* przecina koło (por. us. 73, uwaga), punkty owe, po lewéj stronie osi *h* wtedy będące, są dalsze.

**) Odpowiednio (w owym przypadku) punkty, będące wtedy po prawéj stronie osi *h*, są dalsze.

hiperboli $E_\infty B'F_\infty$ jest zawarta wewnątrz kąta $E_\infty SF_\infty$, utworzonego przez odcinki $E_\infty S$ i $F_\infty S$, przypadające po lewéj stronie punktu S. — Poprowadźmy z punktu H równoległe do owych stycznych KE i KF, które przetną koło odpowiednio w punktach *) E_1 i F_1. Ponieważ na odpowiednich prostych, przechodzących przez punkt H, punkty na łukach koła EPE_1 i $FP'F_1$ są bliższe punktu H niż punkty na odpowiednich odcinkach stycznych: od E wprawo do nieskończoności i od F wprawo do nieskończoności, przeto pokrewne z nimi punkty na częściach hiperboli $E_\infty P'E_1'$ i $F_\infty PF_1'$ są bliższe punktu H niż punkty na odpowiednich odcinkach asymptot, przypadających po prawéj stronie prostéj l_s. Proste zaś, przechodzące przez punkt H, przecinające łuk koła E_1CF_1, będący po prawéj stronie kierownicy poza punktem H, spotykają odpowiednie odcinki stycznych do koła, t. j. odcinki: od nieskończoności przez G do K i od nieskończoności przez G_1 do K, po przeciwnéj stronie kierownicy; a więc (us. 13), punkty na części hiperboli $E_1'C'F_1'$, jako znajdujące się między kierownicą a punktem H, są bliższe punktu H niż odpowiednie punkty (t. j. leżące na owych prostych, przechodzących przez punkt H) na odcinkach asymptot po przeciwnéj stronie kierownicy [między kierownicą (us. 35, *o*) a punktem S]. A więc cała część hiperboli $F_\infty C'E_\infty$ leży wewnątrz kąta $F_\infty SE_\infty$, utworzonego przez odcinki asymptot, przecinające kierownicę. — Możemy więc powiedzieć, że *część hiperboli $F_\infty C'E_\infty$ leży w otworze tego kąta $F_\infty SE_\infty$, utworzonego przez asymptoty, w którego otworze znajduje się ognisko H; pozostała zaś część hiperboli $E_\infty B'F_\infty$ leży w otworze kąta $E_\infty SF_\infty$, utworzonego przez asymptoty, z tamtym kątem wiérzchołkiem przeciwległego* **).

78. Hiperbola, jak każde przecięcie stożkowe, jest liniją ciągłą i zamkniętą (us. 42). Punkty np. H i C znajdują się w jéj obszarze wewnętrznym (us. 47), tak iż przez nie nie można poprowadzić stycznéj do hiperboli. Takie zaś punkty, jak np. D, S, G, N, należą do obszaru zewnętrznego hiperboli i z nich można po dwie styczne do hiperboli poprowadzić.

Chociaż hiperbola jest liniją ciągłą zamkniętą, to jednak mówi się, że hiperbolę składają d w i e g a ł ę z i, rozumiejąc przez oddzielną gałąź hiperboli każdą z dwu jéj części, ograniczonych dwoma jéj punktami w nieskończoności. Jednę więc gałąź hiperboli stanowi część $F_\infty C'E_\infty$, a drugą część $E_\infty B'F_\infty$, z których piérwsza jest pokrewna z łukiem koła

---

*) Niech czytelnik oznaczy te punkty E_1 i F_1 i znajdzie pokrewne z nimi punkty E_1' i F_1'. — Dlaczego proste HE_1' i HF_1' przecinają się z asymptotami odpowiednio SE_∞ i SF_∞ na kierownicy?

**) Możnaby téj własności dowiéść przy pomocy obrotu prostéj około punktu K od położenia KE przez KBC do położenia KF — jak mianowicie?

FCE, a druga z łukiem EBF. Zauważyć tu jeszcze należy, że część $F_\infty P$ gałęzi $F_\infty C'E_\infty$ jest pokrewna z łukiem koła FP', część PC'P' z łukiem P'CP, część nakoniec $P'E_\infty$ z łukiem PE.

79. Z cięciwą koła, łączącą z sobą którekolwiek dwa punkty na łuku EBF, lub łączącą z sobą którekolwiek dwa punkty na łuku ECF, jest pokrewna cięciwa hiperboli, będąca odcinkiem skończonym prostéj, przechodzącéj przez punkty na hiperboli, pokrewne z owymi punktami na kole (us. 35, *e*), ograniczonym przez te punkty (us. 19); znajduje się przeto ona w obszarze wewnętrznym hiperboli (us. 78). Ze skończonym zaś odcinkiem prostéj, łączącéj którykolwiek punkt na łuku EBF z którymkolwiek na łuku ECF, jako przecinającym się z prostą l_s, jest właściwie (us. 35, *n*) pokrewny nieskończenie wielki odcinek prostéj, idący od punktu na jednéj gałęzi hiperboli, pokrewnego z jednym punktem końcowym takiéj cięciwy koła, przez P_∞ (us. 19; us. 35, uwaga) do punktu na drugiéj gałęzi, pokrewnego z drugim punktem końcowym owéj cięciwy koła; ten odcinek znajduje się téż w obszarze wewnętrznym hiperboli. Zamiast niego jednak, uważa się wtedy za cięciwę hiperboli ów właśnie odcinek skończony téj prostéj, zawarty między wzmiankowanymi punktami na gałęziach hiperboli, a więc znajdujący się w jéj obszarze zewnętrznym. Tak w tym przypadku pojmowaną «cięciwę» hiperboli nazywać nawet (us. 35, *a*) będziemy pokrewną z cięciwą koła, łączącą punkty pokrewne z punktami końcowymi takiéj cięciwy hiperboli.

80. Gdy punkt A porusza się po kole od punktu F do punktu P', wówczas punkt D wciąż się oddala od punktu H; punkt więc (us. 14) A', znajdujący się po innéj stronie punktu H, niż punkt D, wciąż się zbliża do punktu H, dążąc od punktu F_∞ do punktu P. Gdy punkt A porusza się daléj od P' do C, punkt D staje się coraz bliższym punktu H, a więc punkt A', znajdujący się po téj saméj stronie punktu H, co punkt D, również coraz się zbliża do punktu H, przechodząc od punktu P do punktu C'. Gdy zaś punkt A porusza się w dalszym ciągu od punktu C przez P do E, to podobnie objaśnić można, że punkt A', idąc od punktu C' przez P' do E_∞, wciąż się oddala od ogniska H. — Gdy następnie punkt A porusza się od punktu E do punktu B, to punkt D jest coraz bliższy punktu H; przeto i punkt A', znajdujący się po téj saméj stronie punktu H, co punkt D, staje się coraz bliższym punktu H, dążąc od punktu E_∞ do punktu B'. Odpowiednio nakoniec, gdy punkt A przechodzi od punktu B do F, punkt A', dążąc od punktu B' do F_∞, wciąż się oddala od ogniska H. — Widzimy z tego, że na hiperboli najbliższe ogniska są: punkt C' na gałęzi $F_\infty C'E_\infty$ i punkt B' na gałęzi $E_\infty B'F_\infty$. Punkty te są pokrewne z punktami B i C na kole, najdalszymi od kierownicy punktami na dwu łukach koła, podpartych przez jéj odcinek EF, cięciwę tego koła. Jest więc prosta BC prostopadła do kierownicy i na niéj (us. 35, *d*, *e*) znajdują się punkty B' i C' na hiperboli. A zatym, *prosta, przechodząca przez ognisko prostopadle do kierownicy, przecina obie gałęzi hiperboli w punktach, najbliższych na nich od ogniska.*

81. Te punkty, w których prosta, przechodząca przez ognisko prostopadle do kierownicy, przecina gałęzi hiperboli w punktach najbliższych na nich od ogniska, t. j. punkty B' i C', nazywamy wiérzchołkami głównymi hiperboli; odcinek zaś téj prostéj, zawarty między wiérzchołkami głównymi hiperboli, nazywamy osią poprzeczną hiperboli.

Zgodnie z tym, cośmy mówili w us. 48-ym, *hiperbola jest liniją symetryczną względem osi poprzecznéj.*

Z tego wynika bezpośrednio, że *styczne do hiperboli w wiérzchołkach głównych są prostopadłe do osi poprzecznéj.*

82. Punkt przecięcia się osi poprzecznéj z kierownicą nazwijmy I (fig. 23), a dla trzech punktów B, C i I wyznaczmy czwarty punkt taki, iżby on z punktem I przedstawiał parę, harmonicznie sprzężoną z parą punktów B i C. Owym czwartym punktem jest punkt spotkania się stycznych do koła w punktach E i F (us. 40); nazwaliśmy go już K. Ponieważ (BCIK) = — 1, przeto punkty, harmonicznie pokrewne z punktami B, C, I i K, utworzą szereg harmoniczny punktów (us. 35, *l*). Z punktami B, C i I są pokrewne punkty B', C' i P_∞, z punktem zaś K jest pokrewny punkt S (us. 75), w którym się asymptoty hiperboli z sobą przecinają (us. 35, *f*). Jest więc

$$(B'C'P_\infty S) = -1,$$

a więc (us. 19) punkt, harmonicznie pokrewny z punktem K, jest środkiem osi poprzecznéj hiperboli. Wszelka więc prosta, harmonicznie pokrewna z prostą, przechodzącą przez punkt K, przechodzi przez punkt S (us. 35, *b*).

Przyjmijmy punkt K i prostą l_s za środek i oś nowego pokrewieństwa harmonicznego. Jak widzieliśmy, jest (BCIK) = — 1, t. j. punkty końcowe średnicy koła BC są wtedy z sobą pokrewne, a więc, w tym pokrewieństwie pomocniczym, koło dane jest samo z sobą harmonicznie pokrewne (us. 39). Wskutek tego, punkty spólne z kołem któréjkolwiek cięciwy, przechodzącéj przez punkt K (us. 37, uwaga), są z sobą harmonicznie pokrewne względem środka K i osi l_s.

Z tego wynika, że na jakiéjkolwiek prostéj, przechodzącéj przez punkt K, a spotykającéj koło, punkt przecięcia się jéj z prostą l_s i punkt K tworzą parę, harmonicznie sprzężoną z parą punktów, w których ta prosta przecina koło. Z tą prostą, jak widzieliśmy, jest harmonicznie pokrewna (względem środka H i osi *h*) pewna prosta, spotykająca hiperbolę (us. 47, *a*) i przechodząca przez punkt S, a z prostą l_s prosta p_∞. A więc, punkt przecięcia się owéj prostéj, przechodzącéj przez punkt S, z prostą p_∞, t. j. punkt P_∞, i punkt S tworzą parę, harmonicznie sprzężoną z parą punktów, w których ta prosta przecina hiperbolę (us. 35, *l*); jest przeto punkt S także środkiem odcinka téj prostéj, zawartego między punktami przecięcia się jéj z hiperbolą. A zatym, *środek osi poprzecznéj hiperboli jest zarazem środkiem odcinka każdéj prostéj, przezeń przechodzącéj, a spotykającéj hiperbolę, zawartego między punktami przecięcia się jéj z hiperbolą*, tak iż *hiperbola jest względem tego punktu liniją symetryczną*. Punkt ten nazywamy **środkiem hiperboli**. Cięciwę zaś, przezeń przechodzącą (us. 79), t. j. odcinek jakiéjkolwiek prostéj, przezeń przechodzącéj, a spotykającéj hiperbolę, ograniczony punktami przecięcia się jéj z hiperbolą, nazywamy **średnicą hiperboli**; odcinek więc np. MR (fig. 23) jest średnicą hiperboli.

83. Widzieliśmy tu, że *asymptoty hiperboli przecinają się z sobą w jéj środku*. Z tego wynika, że *styczne do hiperboli, wyprowadzone ze środka, są jéj asymptotami*.

Zauważmy jeszcze, że średnica hiperboli łączy z sobą punkty, na różnych jéj gałęziach będące. Każda zaś asymptota, jako styczna do hiperboli, posiada z hiperbolą dwa punkty spólne, schodzące się z sobą razem, które są jednocześnie punktami na obu gałęziach hiperboli (us. 78, 76); a więc *każdą asymptotę hiperboli można uważać jako jéj średnicę*.

84. Poprowadźmy cięciwę koła BC (fig. 24), nie przechodzącą

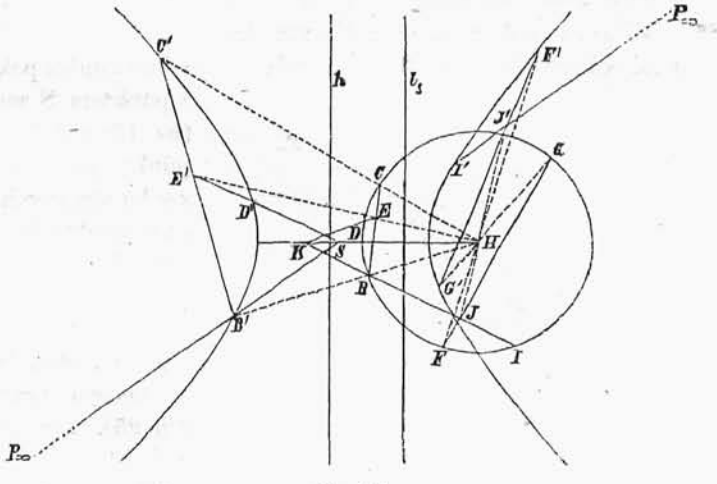

Fig. 24.

przez punkt K, harmonicznie pokrewny ze środkiem S, i taką, iżby jéj punkty końcowe B i C były po téj saméj stronie kierownicy l_s, co środek S. Z nią jest pokrewna cięciwa B'C' hiperboli. Przez punkt K poprowadźmy prostą, przecinającą cięciwę BC w punkcie E i łuk, przez nią podparty, w punkcie D. Pokrewna z nią prosta, przechodząca przez punkt S, niech przecina cięciwę B'C' w punkcie E' i łuk, przez nią podparty, w punkcie D'. Gdy punkt porusza się po prostéj KE od punktu K wciąż ku punktowi E, to wówczas pokrewny z nim punkt, poruszający się po prostéj SE, harmonicznie pokrewnéj z prostą KE, również przebiega odcinek skończony (us. 19; 35, uwaga), tak iż oba te punkty, poruszając się po odpowiednich prostych, naprzód napotykają punkty na łukach, a późniéj punkty na podpiérających je cięciwach (us. 35, *a*). Jest więc punkt D' bliższy środka S, niż punkt E'. Ma to również miejsce dla jakiegokolwiek innego punktu na łuku hiperboli B'C' i odpowiedniego punktu na podpiérającéj go cięciwie, tak iż, patrząc się ze środka S, mamy cięciwę B'C' poza łukiem B'C'. Toż samo stosuje się do jakiegokolwiek łuku téj gałęzi i podpiérającéj go cięciwy. A więc, gałąź hiperboli, znajdująca się po téj saméj stronie prostéj l_s, co środek, jest wypukła względem środka. — Ponieważ hiperbola jest liniją symetryczną względem środka, przeto i druga jéj gałąź jest również wypukła względem środka. [Moglibyśmy tego wprost dowieść, podobnie jak poprzednio; należałoby tylko zważać na to, że, gdy punkt przebiega odcinek skończony KJI, to przechodzi przez punkt na prostéj l_s, a więc pokrewny z nim punkt przebiega jednocześnie odcinek nieskończenie wielki $SP_\infty J'I'$ (us. 19; 35, uwaga).] — A więc, *hiperbola zwraca swą stronę wypukłą ku środkowi*.

85. W przypadku szczególnym, kiedy środek hiperboli znajdzie się na osi pokrewieństwa *h* (fig. 25), zejdzie się z nim również pokrewny z punktem S punkt K (us. 13; us. 35, *c*), t. j. punkt przecięcia się z sobą stycznych do koła w punktach, w których kierownica przecina koło. Ponieważ jest $(NHEE_\infty) = -1$ (fig. 23, 25), przeto, w naszym przypadku (fig. 25), para promieni *h* i B'C' i para KE i SE_∞ tworzą pęk promieni harmoniczny (us. 21). Promienie piérw-

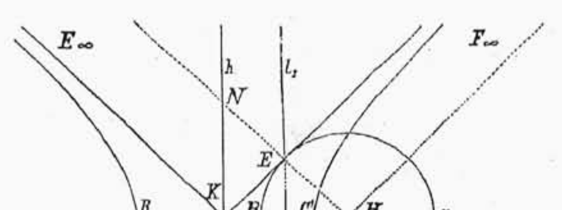

Fig 25.

széj pary są do siebie prostopadłe; zatym promień B'C' dzieli kąt między promieniami drugiéj pary na połowy (us. 27, *a*), a więc punkt przecięcia się asymptoty SE_∞ z prostą l_s jest taksamo oddalony od prostéj B'C', jak punkt E na kierownicy, t. j. asymptota SE_∞ przechodzi przez punkt F, czyli schodzi się razem ze styczną do koła KF. Podobnie asymptota SF_∞ schodzi się razem ze styczną do koła KE. Równoległobok, utworzony przez asymptoty i przez proste HE i HF (us. 75), jest tu kwadratem; przeto kąt ESF, czyli *kąt, utworzony przez asymptoty, jest prosty.*

Hiperbola, któréj asymptoty są do siebie prostopadłe, nazywa się hiperbolą równoboczną.

86. Ponieważ hiperbola jest liniją symetryczną jednocześnie względem osi poprzecznéj (us. 81) i względem środka (us. 82), zatym *hiperbola jest liniją symetryczną względem prostopadłéj w środku do osi poprzecznéj.* Ta prostopadła, jako przechodząca w kącie przyległym z każdym z kątów wiérzchołkiem przeciwległych, utworzonych przez asymptoty i obejmujących gałęzi hiperboli (us. 77), nie spotyka hiperboli.

— Objaśnić, dlaczego:

a. Oś poprzeczna hiperboli i prostopadła do niéj w jéj środku są dwusiecznymi kątów między asymptotami. Te więc cztéry proste *) tworzą pęk promieni harmoniczny (us. 27, *b*).

b. W każdym przypadku **) *hiperbola jest symetryczna tylko względem dwu prostych: osi poprzecznéj i prostopadłéj do niéj w jéj środku.*

87. Na osi poprzecznéj hiperboli AA_1 (fig. 26) wyznaczmy punkt O_1, będący w téj saméj odległości od jéj środka S, co ognisko O, i poprowadźmy do niéj prostopadłą, w téj saméj odległości od środka S, co kierownica k, prostą k_1. Ponieważ hiperbola jest liniją symetryczną względem prostopadłéj w środku S do osi poprzecznéj AA_1 (us. 86), przeto stosunek odległości jakiegokolwiek punktu na hiperboli od punktu O_1 i od prostéj k_1 przedstawia *tę samę liczbę*, co stosunek odległości jakiegokolwiek punktu na hiperboli od ogniska O i od kierownicy k. A więc można punkt O_1 przyjąć jako ognisko,

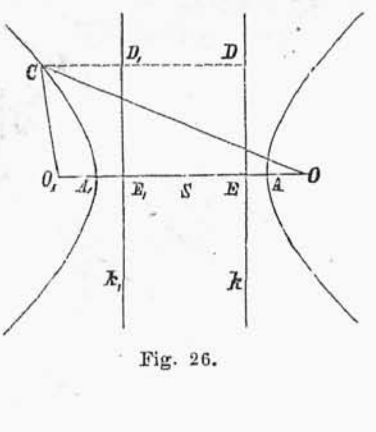

Fig. 26.

*) Por. us. 131.

**) Niéma tu więc, pod tym względem, takiego przypadku szczególnego, jaki co do elipsy przedstawia koło.

a prostą k_1 jako odpowiednią kierownicę hiperboli, czyli: *hiperbola posiada dwa ogniska i dwie odpowiadające im kierownice.*

88. Dla jakiegokolwiek punktu C (fig. 26) na hiperboli, a wszczególności i dla jednego z wiérzchołków głównych, np. A_1, jest (us. 87)

$$\frac{CO}{CD}=\frac{CO_1}{CD_1},\quad \frac{A_1O}{A_1E}=\frac{A_1O_1}{A_1E_1},$$

skąd

$$\frac{CO-CO_1}{D_1D}=\frac{CO}{CD},\quad \frac{A_1A}{E_1E}=\frac{AO}{AE}.$$

$D_1D=E_1E$ i, według określenia przecięcia stożkowego (us. 44), $\frac{CO}{CD}=\frac{AO}{AE}$, zatym $CO-CO_1=A_1A$. Gdyby punkt C był na innéj gałęzi hiperboli, to byłoby $CO_1-CO=A_1A$. A więc ogólnie

$$\pm(CO-CO_1)=A_1A,$$

t. j. *różnica odległości jakiegokolwiek punktu na hiperboli od ognisk jest stała i równa długości osi poprzecznéj.*

89. Wszczególności, różnica odległości każdego z dwu punktów w nieskończoności na hiperboli (us. 74) od jéj ognisk, czyli różnica odległości punktu styczności asymptoty hiperboli (us. 75) od jéj ognisk jest równa długości osi poprzecznéj. Proste, łączące taki punkt z ogniskami, są do siebie i do asymptoty, przezeń przechodzącéj, równoległe (us. 6). Gdy więc z ognisk O i O_1 (fig. 27) poprowadzimy równoległe do asymptoty np. SF_∞, i z ogniska np. O spuścimy prostopadłą OG na owę równoległą, przechodzącą przez drugie ognisko O_1, to odcinek $O_1G=A_1A$, a więc odcinek $SH=SA$, t. j. (us. 81, 86) *spodki prostopadłych z ognisk na asymptoty hiperboli są w téj saméj odległości od środka, co wiérzchołki główne.*

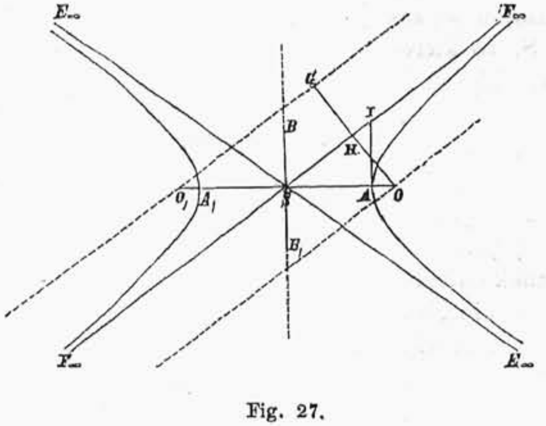

Fig. 27.

90. Poprowadźmy w wiérzchołku A (fig. 27) styczną do hiperboli, która się z asymptotą przecina w punkcie I. Trójkąty prostokątne ISA i OHS mają spólny kąt S i odpowiednie boki SA i HS równe, a więc przeciwprostokątne są równe, SI = SO, t. j. (us. 81, 86) *punkty spotkania się stycznych do hiperboli w jéj wiérzchołkach głównych z asymptotami są w téj saméj odległości od środka, co ogniska.*

91. Na prostopadłéj do osi poprzecznéj hiperboli w jéj środku, która jest jedną z dwu osi symetryi hiperboli i nie spotyka hiperboli (us. 86), oddzielmy w obie strony od środka części SB = SB_1, równe odcinkowi stycznéj do hiperboli w wiérzchołku głównym, zawartemu między wiérzchołkiem i punktem spotkania się z asymptotą, t. j. odcinkowi AI *). Długość tego odcinka BB_1 na prostopadłéj w środku do osi poprzecznéj, równa długości odcinka stycznéj w wiérzchołku głównym, zawartego między asymptotami, nazywa się osią sprzężoną **) hiperboli.

Wrazie, kiedy asymptoty są do siebie prostopadłe, trójkąt SIA jest równoramienny, a więc SA = AI = SB, czyli $A_1A = BB_1$. A więc (us. 85), *w hiperboli równobocznéj osi poprzeczna i sprzężona są jednakowéj długości.*

92. Zauważmy jeszcze, że trójkąty BSA i SIA (fig. 27) są równe; zatym kąt BAS jest równy mniejszemu z kątów, jaki tworzy którakolwiek (us. 86, *a*) z asymptot z osią poprzeczną. A więc, *prosta, łącząca wiérzchołek główny hiperboli z punktem końcowym osi sprzężonéj, jest równoległa do asymptoty.*

93. Długość osi poprzecznéj hiperboli, t. j. długość odcinka AA_1, zwykle oznacza się przez $2a$, a długość osi sprzężonéj, t. j. odcinka BB_1, przez $2b$. W trójkącie prostokątnym SAI jest $SA = a$, $AI = SB = b$, przeciwprostokątna zaś SI jest równa odcinkowi SO (us. 90), przedstawiającemu odległość ogniska od środka. Oznacza się ją zwykle literą c; jest więc w hiperboli $c = \sqrt{a^2 + b^2}$. W hiperboli odległość ognisk jest większa od osi poprzecznéj. — W hiperboli równobocznéj $a = b$ (us. 91), a więc $c = a\sqrt{2}$.

94. Ćwiczenia.

1°. Poprowadzić styczne do hiperboli w punktach P i P′ (fig. 23).

2°. Jakiemu z «czworoboków pojedyńczych» (us. 31) na fig. 13-éj odpowiada figura, harmonicznie pokrewna z kwadratem, opisanym na kole (fig. 23), a którego bok przechodzi przez punkt P? Jakie figury odpowiadają podobnie innym czworobokom pojedyńczym na fig. 13-éj?

3°. Okazać wprost, że gałąź hiperboli, bliższa ogniska H, zwraca ku niemu swą stronę wklęsłą, a dalsza zwraca ku niemu swą stronę wypukłą.

---

*) Por. us. 131.
Uwaga. Jest zatym długość SB także równa OH, t. j. odległości ogniska od asymptoty.

**) Por. us. 130, 131 i 150.

4°. Dlaczego obie styczne, jakie można poprowadzić do hiperboli z punktów jéj obszaru zewnętrznego, znajdujących się w otworach tych kątów między asymptotami, w których leżą gałęzi hiperboli, są stycznymi do jednéj gałęzi, zaś z innych punktów są stycznymi do różnych gałęzi hiperboli?

5°. Dane są dwa ogniska O i O_1 hiperboli, oraz warunek, iż długość jéj osi poprzecznéj jest równa długości boku kwadratu, którego przekątna $= OO_1$. Jakato będzie hiperbola?

6°. Wypowiedziéć i uzasadnić własności hiperboli, analogiczne z własnościami elipsy, wskazanymi w us. 63-im pod 6°, 7°, 8°, 9° i 12°, a w ostatniéj wyznaczyć warunek, któremu zadość czyni suma $r+r_1$.