ROZDZIAŁ II.

SZEREG PUNKTÓW HARMONICZNY I PĘK PROMIENI HARMONICZNY. — CZWOROBOK ZUPEŁNY I CZWOROKĄT ZUPEŁNY.

SZEREG PUNKTÓW HARMONICZNY.

8. Gdy mamy pewną, dowolnie wybraną liczbę i gdy na prostéj obierzemy pewne dwa punkty jako stałe, to, jak wiemy (us. 3, 5), istnieje na niéj jeden (tylko) punkt taki, iż stosunek odległości tego punktu od owych dwu punktów stałych przedstawia owę liczbę. Przypuśćmy więc, że mamy pewną liczbę—dla ogólności—ułamkową (dodatną lub ujemną), któréj wartość bezwzględną przedstawmy przez $\frac{m}{n}$, i że np. $m > n$. Chcemy zaś wyznaczyć na prostéj AB (fig. 2), któréj dwa punkty A i B przyjmujemy jako stałe, taki punkt, iżby stosunek odcinków od punktów A i B do owego punktu przedstawiał albo liczbę $+\frac{m}{n}$, albotéż liczbę $-\frac{m}{n}$. Aby znaléść ów punkt, poprowadźmy przez punkty A i B proste, równoległe do siebie w jakimkolwiek kierunku, i na poprowadzonéj przez punkt A oddzielmy m, a na przechodzącéj przez B oddzielmy n jednakowych jednostek *) linijowych — albo w różne strony od punktów A i B, np. AE i BF, albo w tę samę stronę, np. AE_1 i BF. Na przecięciu prostych EF i E_1F z podstawą AB otrzymamy punkty C i D, dla których, z podobieństwa odpowiednich trójkątów, wynika:

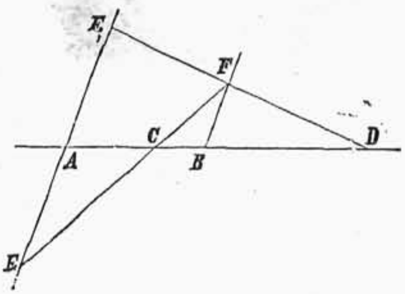

Fig 2.

$$\text{(1)} \qquad \frac{AC}{CB}=\frac{AE}{BF}=\frac{m}{n} \quad \text{i} \quad \frac{AD}{BD}=\frac{AE_1}{BF}=\frac{m}{n}.$$

---

*) Łatwo okazać, że taka jednostka może tu być jakkolwiek wybrana.

A więc punkty C i D są takie, iż (CB = — BC):

(2) $$\frac{AC}{BC} = -\frac{m}{n}, \quad \frac{AD}{BD} = +\frac{m}{n}.$$

Otrzymaliśmy dwa punkty: jeden C na odcinku AB, odpowiadający, według naszéj umowy (us. 3), liczbie ujemnéj; drugi D zewnątrz tegoż odcinka AB, odpowiadający liczbie dodatnéj, mającéj tę samę wartość bezwzględną, co tamta ujemna, któréj odpowiada punkt C.

Widzimy więc, że tu *punkt* C *wewnętrznie, a punkt* D *zewnętrznie dzielą odcinek* AB *w stosunku* $m : n$. Rozwiązaliśmy tu przeto zadanie, które mogło być tak wysłowione: *podzielić odcinek* AB *wewnętrznie i zewnętrznie w stosunku* $m : n$.

Tu punkt D wypadł z prawéj strony odcinka AB, a punkt C bliżéj punktu B niż A — dlatego, że $\frac{m}{n} > 1$ (us. 3). Gdyby $\frac{m}{n} < 1$, byłoby wprost przeciwnie.

Uwaga. Oczywiście, że różnym liczbom $\frac{m}{n}$ odpowiadają różne pary punktów C i D, dzielących odcinek wewnętrznie i zewnętrznie w jednakowym stosunku.

9. Gdy dwa punkty na prostéj dzielą pewien jéj odcinek (jeden punkt wewnętrznie, a drugi zewnętrznie) w tym samym stosunku, to mówimy, że te dwa punkty d z i e l ą h a r m o n i c z n i e ów odcinek. Zatym, na fig. 2-éj punkty C i D dzielą odcinek AB harmonicznie. Wówczas, według (1),

(3) $$\frac{AC}{CB} = \frac{AD}{BD}.$$

10. Przestawiając tu wyrazy średnie, otrzymamy $\frac{AC}{AD} = \frac{CB}{BD}$, albo $\frac{-AC}{-AD} = \frac{CB}{-BD}$, czyli

(4) $$\frac{CA}{AD} = \frac{CB}{DB}.$$

Porównywając *) związek (4) ze związkiem (3), widzimy, że związek (4) wyraża, iż odcinek CD jest przez punkty A i B podzielony harmonicznie. A więc: *jeżeli odcinek* AB *jest przez punkty* C *i* D *podzielony harmonicznie, to, nawzajem, odcinek* CD *jest przez punkty* A *i* B *podzielony harmonicznie.*

---

*) Jeżeli punkty, wchodzące do związku (3), wypiszemy w takim porządku:

A, B, C, D,

to punkty, wchodzące do związku (4), wypadnie odpowiednio wypisać tak:

C, D, A, B.

W szeregu przeto tych cztérech punktów A, B, C i D (fig. 2) są do zaznaczenia dwie pary punktów: jedna A, B, a druga C, D. Punkty któréjkolwiek pary dzielą harmonicznie odcinek, ograniczony punktami innéj pary. Dlatego mówimy, że to są **dwie pary punktów, harmonicznie z sobą sprzężone**. O cztérech zaś punktach, wypowiedzianych lub wypisanych w takim porządku, iż piérwsze dwa tworzą jednę, a pozostałe drugą parę punktów, harmonicznie z tamtą parą sprzężoną, powiadamy, iż one tworzą **szereg punktów harmoniczny**, albo, że to są **punkty harmoniczne**.

11. Z wyrażeń (2) wynika, że jeżeli punkty A, B, C i D są harmoniczne, to

$$\frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD} = -1.$$

Zamiast stosunku dwu stosunków, stanowiącego stronę lewą téj równości, zwykle pisze się, przez skrócenie: (ABCD). Gdy więc będziemy chcieli wyrazić, że dwie pary punktów, jedna A, B, a druga C, D, są harmonicznie z sobą sprzężone, czyli że cztéry punkty A, B, C i D są harmoniczne, to będziemy mogli piśmiennie to tak krótko przedstawić:

$$(ABCD) = -1.$$

Tak np., własność, wyprowadzoną w ustępie 10-ym, możemy tak zaznaczyć: jeżeli (ABCD) $= -1$, to także (CDAB) $= -1$.

— Okazać, że jeżeli (ABCD) $= -1$, to w symbolu (ABCD) można z sobą przestawić punkty téj saméj pary, t. j. zamiast symbolu (ABCD) napisać: (BACD), (ABDC), (BADC), a więc także (CDAB), (CDBA), (DCAB) i (DCBA).

12. Z wykréślenia, przeprowadzonego na fig. 2-éj, wynika łatwy sposób rozwiązania następującego zadania.

Zadanie. *Dla trzech danych punktów znaléść czwarty, któryby z nimi tworzył szereg harmoniczny.* Np., dla trzech punktów: B, C i A (fig. 3) mamy znaléść taki czwarty D, iżby (DABC) $= -1$ [wtedy także (us. 10) jest (BCDA) $= -1$]. Przez dwa z danych punktów, należące do jednéj pary, t. j. przez punkty B i C, poprowadzimy w kierunku dowolnym proste, do siebie równoległe, a przez pozostały z danych punktów, t. j. przez punkt A, poprowadzimy jakąkolwiek prostą, przecinającą te równoległe; prze-

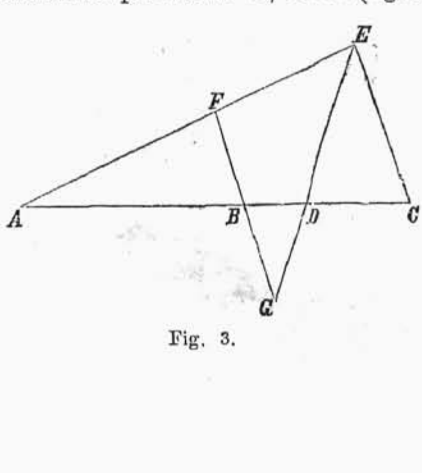

Fig. 3.

dłużymy następnie prostą FB tak, iżby BG = FB. Na przecięciu się prostych GE i AB otrzymamy żądany punkt D. —

— Zadanie. Przy takim samym, jak na fig. 3-éj, rozmieszczeniu punktów A, B i C, znaléść punkty D' i D'' takie, iżby odpowiednio (D'BAC) = — 1 i (D''CAB) = — 1.

13. Gdy (ABCD) = — 1, t. j. gdy ma miejsce związek (3), to z tego, cośmy powiedzieli w us. 3-im, wynika (jak łatwo to sprawdzić zapomocą takich, jak wyżéj, wykréśleń), że: im punkt C, znajdując się w prawéj połowie (fig. 2) odcinka AB, jest bliższy punktu B, tym punkt D jest także bliższy tego punktu B; gdy punkt C razem się schodzi z punktem B, to i punkt D także się razem z nimi schodzi; wmiarę, jak punkt C zmienia swe położenie, od punktu B dążąc do środka odcinka AB, punkt D oddala się od punktu B wprawo, dążąc do punktu P_∞, tak iż wtedy, kiedy punkt C jest w środku owego odcinka, punkt D jest w nieskończoności; gdy następnie punkt C od środka odcinka AB dąży do punktu A, to punkt D z położenia w punkcie P_∞ zdąża ku punktowi A, od lewéj jego strony, i razem z punktem C schodzi się w punkcie A. Oczywiście, że nawzajem, gdy punkt D zmienia swe położenie, także punkt C odpowiednio je zmienia. Możemy więc powiedziéć, że: *punkty* C *i* D, *tworzące parę, harmonicznie sprzężoną z parą punktów* A *i* B, *znajdują się po téj saméj stronie środka odcinka* AB, *a po różnych stronach odpowiedniego punktu końcowego tego odcinka, do ktoregoto punktu albo jednocześnie się zbliżają, albotéż jednocześnie odeń się oddalają; wrazie zaś, kiedy jeden z tych punktów* C *i* D *razem się schodzi ze środkiem odcinka* AB, *drugi z nich znajduje się w nieskończoności.*

14. Gdy (ABCD) = — 1 i punkt C, tak jak na fig. 2-éj, dzieli odcinek AB wewnętrznie, to wówczas, kiedy punkt A oddali się od punktu B i zajmie np. położenie w A_1 (fig. 4), odcinek BC stanie się względem A_1C mniejszym, niż był względem AC, a więc nowe położenie punktu D, które nazwijmy D_1, będzie bliżéj punktu B (us. 13), t. j., wskutek przesunięcia się punktu A wlewo, punkt D przesunął się również wlewo. — Jest więc $(A_1BCD_1) = -1$. Weźmy tu, zamiast punktu D_1, punkt D. Ponieważ tu punkt D_1, aby dojść do położenia w D, oddali się od punktu B, zatym zamiast punktu C wypadnie wziąć punkt dalszy

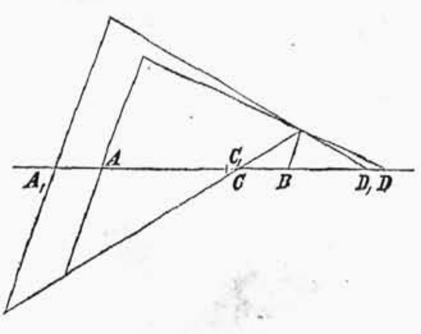

Fig. 4.

od B (us. 13), np. punkt C_1, tak iż $(A_1BC_1D) = -1$. Zestawiając zaś z sobą dwa szeregi harmoniczne punktów: A, B, C, D i A_1, B, C_1, D, widzimy, że, wskutek przesunięcia się punktu A wlewo, punkt C także się wlewo przesuwa. — Podobnie możemy sobie objaśnić, że jeżeli $(ABCD) = -1$ i punkt A pozostaje niezmiennym, to: wrazie, kiedy punkt C pozostaje niezmiennym, wskutek przesunięcia się punktu B punkt D przesunie się w tymże samym kierunku; wrazie, kiedy punkt D pozostaje niezmiennym, wskutek przesunięcia się punktu B punkt C przesuwa się w tymże samym kierunku. — A więc, *jeżeli dwie pary punktów są z sobą harmonicznie sprzężone i jeżeli jeden punkt każdéj pary pozostaje niezmiennym, to, wskutek przesunięcia się jednego z pozostałych punktów, drugi z nich jednocześnie przesuwa się w tymże samym kierunku.*

15. Niech $(ABCD) = -1$ (fig. 5), czyli $\frac{AC}{CB} = \frac{AD}{BD}$, skąd $\frac{CB}{AC} = \frac{BD}{AD}$. Jeżeli w ostatniéj proporcyi zamiast CB i BD napiszemy odpowiednio AB—AC i AD—AB, to otrzymamy

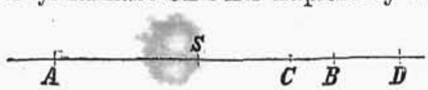

Fig. 5.

$$\frac{AB - AC}{AC} = \frac{AD - AB}{AD}, \tag{5}$$

albo, po podzieleniu obu stron przez AB,

$$\frac{1}{AC} - \frac{1}{AB} = \frac{1}{AB} - \frac{1}{AD},$$

czyli

$$\frac{2}{AB} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{AD}. \tag{6}$$

Nawzajem, ze związku (6) łatwo przejść do związku (5).

Długość AB w taki sposób, t. j. czyto zapomocą związku (5), czyteż zapomocą związku (6), związaną z długościami AC i AD, nazywamy **średnią harmoniczną** tych dwu długości AC i AD.

Jeszcze bowiém szkoła Pitagorasa taką liczbę h, która od większéj z dwu danych liczb a i b jest mniejsza o taką samę jéj część, o jaką część pozostałéj z tych liczb jest od téj pozostałéj większa, nazywała średnią harmoniczną liczb a i b. Z tego określenia, t. j. z tego, iż jednocześnie (przypuśćmy np. że $a > b$)

$$h = a - \frac{a}{n}, \quad h = b + \frac{b}{n}$$

(przy jakimkolwiek n), łatwo, rugując n z tych dwu równości, przejść do równości (5) lub (6), t. j. do równości

$$\frac{h - b}{b} = \frac{a - h}{h}, \text{ czyli } \frac{2}{h} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b},$$

wyrażających, że: «stosunek różnicy średniéj harmonicznéj i mniejszéj z danych liczb do owéj mniejszéj z liczb danych jest równy stosunkowi różnicy większéj z danych liczb i średniéj harmonicznéj do téj większéj z liczb danych» i że: «podwójna odwrotność średniéj harmonicznéj dwu liczb danych jest sumą odwrotności każdéj z tych liczb danych».

Związek przeto (5), albotéż związek (6) wyraża, że *jeżeli* (ABCD) $=$ $= -1$, *to długość odcinka* AB *jest średnią harmoniczną długości odcinków* AC *i* AD.

— Okazać, że, nawzajem: jeżeli cztéry punkty na prostéj, A, B, C i D, są takie, iż długości odcinków AB, AC i AD zadość czynią czyto związkowi (5), czytéż związkowi (6), to (ABCD) $= -1$.

Dlategoto szereg punktów A, B, C i D na prostéj taki, iż długości odpowiednich odcinków zadość czynią związkowi (3), a tymsamym związkowi (5), czyli związkowi (6), nosi nazwę «harmonicznego».

16. Jeżeli (ABCD) $= -1$ (fig. 5), czyli $\frac{AC}{CB} = \frac{AD}{BD}$, to, oznaczywszy przez S środek odcinka AB, możemy powyższą proporcyją tak napisać:

$$\frac{AS + SC}{SB - SC} = \frac{AS + SD}{SD - SB}.$$

Stąd zaś, zważając, że $AS = SB$, otrzymamy

$$AS^2 = SC . SD. \tag{7}$$

Jest więc długość AS średnią gieometryczną dwu długości SC i SD, t. j. *jeżeli dwie pary punktów są harmonicznie z sobą sprzężone, to długość połowy odcinka między punktami jednéj pary jest średnią gieometryczną dwu długości odcinków, ograniczonych przez punkt, dzielący na połowy odcinek między punktami téj pary, i przez każdy z punktów drugiéj pary.*

— Okazać, że, nawzajem: jeżeli cztéry punkty A, B, C i D na prostéj są takie, że, gdy przez S oznaczymy środek odcinka AB, między długościami odcinków AS, SC i SD ma miejsce związek (7), to (ABCD) $= -1$.

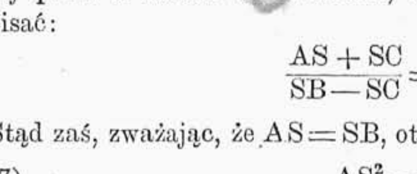

Fig. 6.

17. Opiérając się na powyższéj własności, łatwo możemy inaczéj rozwiązać zadanie us. 12-go.

Zadanie. *Dla trzech danych punktów znaléść czwarty, któryby z nimi tworzył szereg harmoniczny.* Np. jeżeli dla trzech punktów A, B, C (fig. 6) mamy znaléść taki punkt czwarty D, iżby (ABCD) $= -1$, to, zakréśliwszy na odcinku AB, jako na średnicy, półkole i z punktu C wyprowadziwszy do tego odcinka prostopadłą, wykréślimy w punkcie M, w którym ta prostopadła przecina koło, styczną MD do niego, a punkt spotkania się téj stycznéj z podstawą AB, t. j. punkt D, jest punktem szukanym. Jest bowiém $SM^2 = SC . SD$, a że SM $=$ AS, przeto ma miejsce związek (7). — Gdyby zaś dla danych punktów A, B, D należało znaléść punkt C taki, iżby (ABCD) $= -1$, to naprzód wypadłoby z punktu D poprowadzić styczną do koła, zakréślonego na AB, jako na średnicy, następnie zaś z punktu styczności M spuścić prostopadłą MC na podstawę AB, a spodek téj prostopadłéj, punkt C, będzie punktem szukanym.

18. Uwaga. Jakeśmy widzieli (us. 12, 17), dla trzech danych punktów na prostéj można zawsze znaléść taki na niéj punkt czwarty, iżby te cztéry punkty tworzyły szereg harmoniczny punktów. Z tego zaś, cośmy mówili w us. 3-im i 5-ym, wprost wynika, że *dla trzech danych punktów*: A, B *i* C *na prostéj można znaléść jeden tylko taki punkt* D, *który z punktem* C *tworzyłby parę, harmonicznie sprzężoną z parą* A, B, gdyż, jeżeli np. stosunek $\frac{AC}{BC}$ przedstawia liczbę l, to jeden jest tylko punkt D taki, iż $\frac{AD}{BD} = -l$. Związek (7) okazuje to także, gdyż, przy danych punktach A, B i C, dane są długości odcinków AS i SC, a wtedy jednę tylko można znaléść taką długość SD, któraby zadość czyniła równości (7).

19. Dla trzech punktów: A, B i S (fig. 5 lub 6) czwartym punktem, któryby wraz z punktem S przedstawiał parę, harmonicznie sprzężoną z parą punktów A i B, jest (us. 13) punkt P_∞, tak iż $(ABSP_\infty) = -1$. Nawzajem, jeżeli $(ABCP_\infty) = -1$, to AC $=$ CB. T. j. *jeżeli z cztérech punktów harmonicznych jeden jest punktem w nieskończoności, to drugi punkt, należący do jednéj z nim pary, dzieli na połowy odcinek zawarty między punktami pary pozostałéj, i nawzajem.* —

Przypuśćmy, że na prostéj punkty A i B są stałe, punkty zaś E i F zmieniają swe położenie, lecz tak, iż przy każdym jednoczesnym położeniu punktów E i F jest (ABEF) $= -1$, i że na fig. 5-éj punkt E porusza się od C do A (a więc przechodzi przez punkt S); wówczas punkt F, poruszając się po téjże prostéj od D wprawo (us. 13) do A, przechodzi przez punkt P_∞ na téj prostéj (us. 4), od którego dochodzi do punktu A z lewéj jego strony (us. 13). Widzimy zatym, że gdy punkt E przebiega odcinek skończony CA, punkt F, tworzący z nim parę, harmonicznie sprzężoną z parą punktów A i B, przebiega jednocześnie odcinek nieskończenie wielki $DP_\infty A$. — Możemy więc powiedzieć, że *wtedy tylko odcinki, przebieżone przez punkty, tworzące wciąż parę, harmonicznie sprzężoną* *z parą punktów A i B, są oba skończone, gdy na żadnym z nich nie znajduje się środek odcinka AB; gdy na jednym z tych odcinków znajduje się środek odcinka AB, to na pozostałym znajduje się punkt w nieskończoności; gdy na jednym znajduje się i środek odcinka AB i punkt w nieskończoności, to znajdują się one również i na drugim z tych odcinków.*

PĘK PROMIENI. PĘK PROMIENI HARMONICZNY.

20. Mówiliśmy dotąd (us. 1, 8—19) o **zbiorze punktów**, leżących na **jednéj prostéj;** weźmy jeszcze pod uwagę **zbiór prostych**, przechodzących przez **jeden punkt.**

Gdy proste przechodzą przez jeden punkt, to każda z nich (w obie strony nieograniczona) nazywa się promieniem. Zbiór prostych, leżących na téj saméj płaszczyźnie, a przecinających się z sobą w jednym punkcie, nazywa się pękiem promieni. Punkt przecięcia się promieni pęku nazywa się wiérzchołkiem pęku.

21. Pęk cztérech promieni, z których każdy przechodzi przez inny z cztérech punktów szeregu harmonicznego, nazywa się pękiem promieni harmonicznym. Tak np., jeżeli (ABCD) = — 1 (fig. 7), to proste *a*, *b*, *c*, *d*, przechodzące wszystkie przez tenże punkt E, jakkolwiek zewnątrz podstawy AB leżący, a oddzielnie przez punkty odpowiednio A, B, C i D, tworzą pęk harmoniczny o wiérzchołku w punkcie E. Pary promieni, jedna: *a*, *b*, druga: *c*, *d*, przechodzących przez pary odpowiednich punktów (A, B; C, D), harmonicznie z sobą sprzężone, nazywają się również (us. 10) dwiema parami promieni, harmonicznie z sobą sprzężonymi. Podobnież o cztérech promieniach, wypisanych lub wypowiedzianych we właściwym (us. 10) porządku, powiadamy, iż to są promienie harmoniczne.—

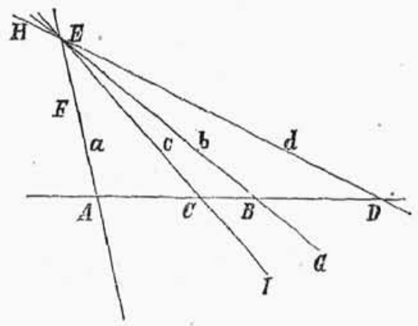

Fig. 7.

Łącząc więc linijami prostymi jakikolwiek punkt, leżący zewnątrz podstawy szeregu harmonicznego, z punktami tego szeregu, otrzymamy pęk promieni harmoniczny. —

Nasz pęk promieni (fig.7) będziemy, dla krótkości, oznaczali symbolem *(abcd)*, albotéż, jeżeli wyraźnie zaznaczamy jego wiérzchołek, symbolem *)

*) Oznaczywszy prostą AD przez *e*, moglibyśmy szereg punktów (ABCD) odpowiednio tak przedstawić: *e(abcd)*. Nie używa się jednak takiego oznaczania.

E(ABCD), który, oczywiście, toż samo znaczy, co np. symbol E(FGIH). Będziemy tu rozważali tylko pęki promieni harmoniczne; dlatego, w takich symbolach, piérwsze dwie litery w nawiasie odpowiadają jednéj, a pozostałe drugiéj z dwu par promieni, harmonicznie z sobą sprzężonych.

Gdyby punkt E, t. j. wiérzchołek pęku *(abcd)*, był na nieskończenie wielkiéj odległości od podstawy AC, to te promienie byłyby do siebie równoległe (us. 6). A więc: proste, do siebie równoległe, przechodzące przez punkty szeregu harmonicznego, tworzą pęk harmoniczny.

22. Według tego, cośmy widzieli w us. 13-ym, jeżeli pęk promieni *(abcd)* jest harmoniczny, to: im promień *c*, przecinający odcinek AB (fig. 7) w prawéj jego połowie, znajduje się bliżéj promienia *b*, tym promień *d* jest także bliższy tego promienia *b*; gdy promień *c* razem się schodzi z promieniem *b*, to i promień *d* także się razem z nimi schodzi; wmiarę jak promień *c* zmienia swe położenie, od promienia *b* dążąc do tego położenia, przy jakim przecina odcinek AB w jego środku, promień *d* oddala się od promienia *b* wprawo, dążąc do położenia równoległego (us. 6) do podstawy AB, i t. d.

Zauważmy tu jeszcze, że promienie jednéj pary pęku harmonicznego przechodzą w różnych parach kątów wiérzchołkiem przeciwległych, utworzonych przez promienie drugiéj pary.

23. Połączmy na fig. 2-éj punkt F z punktem A (fig. 8). Ponieważ (ABCD) $= -1$, przeto pęk F(ABCD) jest harmoniczny. Przetnijmy te promienie jakąkolwiek prostą poprzeczną (nie przechodzącą przez wiérzchołek F), np. prostą A′B′; przetnie ona promienie *a*, *b*, *c*, *d* tego pęku harmonicznego w punktach odpowiednio A′, B′, C′, D′. Przez punkt A′ poprowadźmy prostą, równoległą do FB′, a więc tymsamym (us. 8) równoległą do EE_1, wskutek czego także $E'A' = A'E'_1$. Taksamo przeto, jak w us. 8-ym, można dowiéść, że punkty C′ i D′ dzielą odcinek A′B′ wewnętrznie i zewnętrznie w pewnym tym samym stosunku. Wprawdzie stosunek $\frac{A'C'}{B'C'}$ może przedstawiać

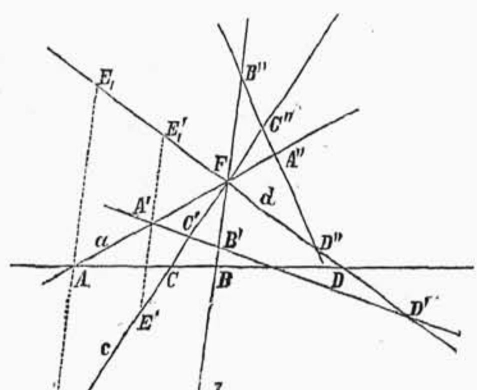

Fig. 8.

inną liczbę, niż stosunek $\frac{AC}{BC}$, lecz zawsze $\frac{A'C'}{C'B'} = \frac{A'D'}{B'D'}$, czyli $(A'B'C'D') = -1$. — Taksamo moglibyśmy także okazać, że naprzykład $(A''B''C''D'') = -1$, i t. d. — A więc, *prosta poprzeczna przecina promienie pęku harmonicznego w punktach, tworzących szereg harmoniczny.*

Ta ważna własność pęku harmonicznego promieni jest szczególnym przypadkiem ogólniejszéj własności jakiegokolwiek pęku cztérech promieni (us. 20), mianowicie: gdy pęk cztérech promieni przetniemy jakimikolwiek poprzecznymi, to dla wszystkich poprzecznych *stosunek dwu liczb*, z których jedna wyraża, w jakim stosunku jest podzielony odcinek pewnéj poprzecznéj, zawarty między dwoma promieniami, przez trzeci, a druga wyraża stosunek, w jakim tenże odcinek jest podzielony przez czwarty promień *), *jest stały*. Tę własność już wypowiada w swym dziele Pappus, żyjący w Aleksandryi w wieku IV po Chr.

24. Gdy pęk promieni *(abcd)* jest harmoniczny, a poprowadzimy prostą, równoległą do jednego z tych promieni, np. do promienia *b* (fig. 9), to ona przetnie ten promień w P_∞, tak iż wtedy $(AP_\infty CD) = -1$, skutkiem czego (us. 19) jest $DA = AC$. A zatym, *gdy prosta jest równoległa do jednego z promieni pęku harmonicznego, to drugi promień, należący z tamtym do jednéj pary, dzieli na połowy odcinek owéj równoległéj, zawarty między promieniami drugiéj pary.*

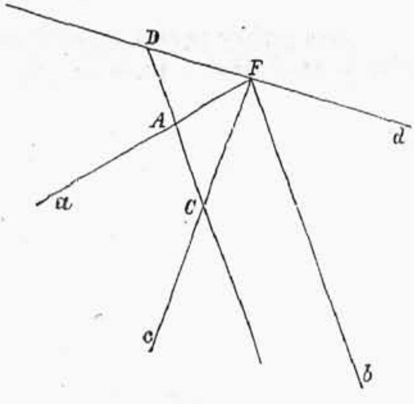

Fig. 9.

25. Zadanie. *Dla trzech danych promieni znaléść czwarty, któryby z nimi tworzył pęk harmoniczny.*

a. Gdy poprowadzimy prostą, przecinającą wszystkie trzy dane promienie, a dla trzech punktów przecięcia wyznaczymy czwarty punkt szeregu harmonicznego (us. 12, 17), to prosta, przechodząca przez ten punkt i przez wiérzchołek pęku, będzie promieniem żądanym. Jeżeli się zdarzy, że ten czwarty punkt jest P_∞, to żądany promień jest równoległy do poprowadzonéj poprzecznéj.

b. Gdy, mając dla promieni *a, b, c* wyznaczyć taki promień *d*, któryby z *c* tworzył parę, sprzężoną z parą *a, b*, poprowadzimy prostą, ró-

*) Czyli tak zwany wogóle «stosunek podwójnego podziału», albo «stosunek anharmoniczny» szeregu tych cztérech punktów przecięcia.

wnoległą do b (fig. 9), to należy na niéj, od punktu A w drugą stronę oddzielić odcinek AD równy odcinkowi AC, a, łącząc prostą otrzymany punkt D z wiérzchołkiem F, miéć będziemy promień żądany d. — Gdybyśmy zaś poprowadzili prostą, równoległą do C, to należałoby jéj odcinek, zawarty między promieniami a, b, podzielić na połowy, a prosta, łącząca punkt podziału z wiérzchołkiem, będzie żądanym promieniem d.

Uwaga. Dla trzech danych promieni: a, b, c można zawsze znaléść, lecz jeden tylko, taki czwarty promień d, iżby np. pęk *(abcd)* był harmoniczny (por. us. 18).

26. Jeżeli $(ABCP_\infty) = -1$, a proste do siebie równoległe, mające zresztą jakikolwiek kierunek, przechodzące przez punkty A, B, C, nazwiemy odpowiednio a, b, c, prostą zaś w nieskończoności (us. 7) nazwiemy p_∞, to (us. 21) pęk promieni $(abcp_\infty)$ jest harmoniczny. Wtedy nadto, ponieważ AC = CB, odległość równoległych a i c jest równa odległości równoległych c i b. A więc, *dwie proste do siebie równoległe, prosta do nich równoległa, przechodząca między tamtymi dwiema w jednakowéj od nich odległości, i prosta w nieskończoności tworzą pęk promieni harmoniczny.*

27. Inny szczególny pęk promieni harmoniczny tworzą dwa ramiona kąta, dwusieczna tego kąta i dwusieczna kąta przyległego. Zauważyć łatwo, że jeżeli prosta c (fig. 10) jest dwusieczną kąta AEB, to dwusieczna kąta przyległego BEG jest do prostéj c prostopadła (na mocy twierdzenia o kątach przyległych). Gdy więc poprowadzimy prostopadłą do promienia c, to ona, jako równoległa do dwusiecznéj d kąta przyległego, przecina się z nią w P_∞. Z równości zaś trójkątów ACE i CEB (mających bok spólny, łączący wiérzchołki kątów równych) wynika, że AC = CB; jest (us. 19) przeto $(ABCP_\infty) = -1$, t. j. pęk promieni *(abcd)* jest harmoniczny. A zatym, *dwa ramiona kąta, jego dwusieczna i dwusieczna kąta przyległego tworzą pęk promieni harmoniczny, a te dwusieczne są do siebie prostopadłe.*

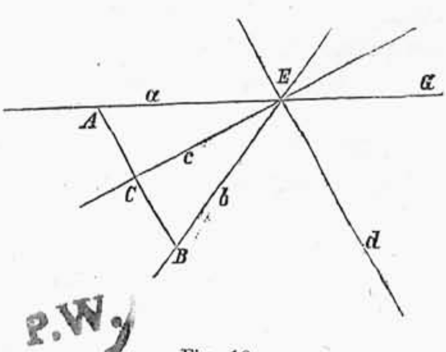

Fig. 10.

Możemy tu zauważyć, że, wogóle, gdy pęk promieni *(klmn)* jest harmoniczny, to oba promienie jednéj pary pęku znajdują się (wraz z tym promieniem drugiéj pary, którego są bliższe) w téj saméj parze kątów prostych wiérzchołkiem przeciwległych, które tworzą dwusieczna kąta między promieniami drugiéj pary i dwusieczna kąta przyległego.

— Dowiéść, że nawzajem,

a. Jeżeli promienie jednéj pary pęku harmonicznego są do siebie prostopadłe, to dzielą kąt, utworzony przez promienie drugiéj pary, i kąt doń przyległy na połowy.

b. Jeżeli z cztérech promieni dwa są do siebie prostopadłe i jeden z nich dzieli kąt między promieniami pozostałymi na połowy, to piérwsze dwa promienie tworzą parę, harmonicznie sprzężoną z parą promieni pozostałych. —

Z tego wynika, że gdybyśmy mieli dla trzech promieni a, b, c znaléść czwarty d, któryby z c tworzył parę harmonicznie sprzężoną z parą a, b, zaś promień c był dwusieczną czyto kąta między promieniami a, b, czytéż kąta przyległego, to należałoby w wiérzchołku poprowadzić prostopadłą do c, a ta prostopadła przedstawiałaby żądany promień d.—

Z własności, zaznaczonéj w tym ustępie, można także skorzystać przy rozwiązywaniu ogólnego zadania, którym już zajmowaliśmy się w us. 12-ym i 17-ym.

Zadanie. *Dla trzech danych punktów znaléść czwarty, któryby z nimi tworzył szereg harmoniczny.* Np. dla punktów A, B, C znaléść taki D, iżby $(ABCD) = -1$. Na odcinku AB, jako na średnicy, kréślimy koło, a którykolwiek jego punkt, inny niż A i B, np. punkt E, łączymy prostymi z punktem C i tym z punktów A lub B, który jest bliższy punktu C, dajmy na to—z punktem B. Z punktu E wyprowadzamy prostą, któraby z prostą EB tworzyła kąt równy kątowi CEB. Punkt spotkania się téj prostéj z podstawą AB jest żądanym punktem D. Dlaczego?

28. Mając pęk promieni $(abcd)$ harmoniczny, z jakiegokolwiek punktu S (fig. 11), jako środka, poprowadźmy koło, przechodzące przez wiérzchołek E tego pęku; ono przetnie promienie pęku w punktach odpowiednio A, B, C i D. Jeżeli te punkty połączymy prostymi z jakimkolwiek punktem E' na kole, to każde dwa z cztérech promieni pęku E'(ABCD) utworzą z sobą takież same kąty, jak odpowiednie promienie pęku E(ABCD), tak iż możemy, wyprowadziwszy pęk E'(ABCD) ze swego położenia, nadać mu takie położenie, iż wiérzchołek jego znajdzie się w punkcie E, a wszyst-

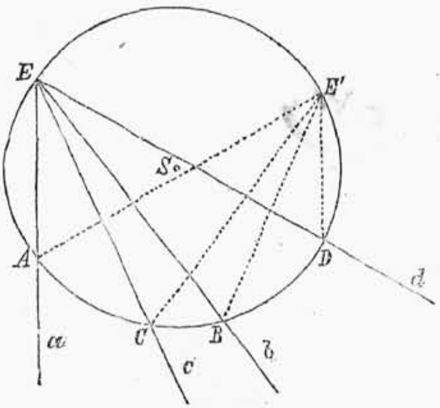

Fig. 11.

kie jego promienie zejdą się razem z odpowiednimi promieniami pęku harmonicznego E(ABCD). Jest więc pęk promieni E'(ABCD) również harmoniczny. A zatym, *jeżeli oznaczymy na kole cztéry punkty takie, iż proste, łączące je z pewnym punktem na kole, tworzą pęk promieni harmoniczny, to odpowiednie proste, łączące owe cztéry punkty z jakimkolwiek punktem na kole, przedstawiają również pęk promieni harmoniczny.*

CZWOROBOK ZUPEŁNY. CZWOROKĄT ZUPEŁNY.

29. Poznane dotąd (us. 12, 17, 25, 27) sposoby wyznaczenia dla trzech punktów danych czwartego, tworzącego z nimi szereg harmoniczny, lub dla trzech promieni danych czwartego, tworzącego z nimi pęk harmoniczny, wymagały, przy uskuteczniania wykréśleń, albo wprost, albo pośrednio (prowadzenie równoległéj, prostopadłéj, dzielenie odcinka na połowy, kréślenie kąta równego innemu) użycia cyrkla. Wyłożymy teraz sposób rozwiązania obu tych zadań przy pomocy samego tylko linijału.

a. Zadanie. *Dla trzech punktów:* A, B i C (fig. 12) *znaléść taki czwarty punkt* D, *iżby para punktów* C, D *była harmonicznie sprzężona z parą* A, B.

b. Zadanie. *Dla trzech promieni: a, b i c* (fig. 12) *znaléść taki czwarty promień d, iżby para promieni c, d była harmonicznie sprzężona z parą a, b.*

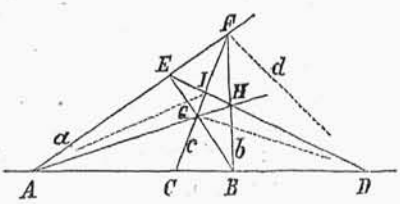

Fig. 12.

Przez punkt C, z którym punkt poszukany ma tworzyć parę, poprowadźmy prostą dowolną CF, a z jednego z punktów A i B, np. z punktu A, poprowadźmy dwie dowolne proste, AF i AG, które przecinają prostą CF w punktach F i G. Te punkty połączmy z punktem B prostymi BF i BG, które przetną pro-

Na promieniu *c*, z którym promień szukany ma tworzyć parę, obierzmy punkt dowolny G, a na jednym z promieni *a* i *b*, np. na promieniu *a*, obierzmy dwa dowolne punkty, A i E, które połączmy z punktem G prostymi AG i EG. Te proste przetną się z promieniem *b* w punktach H i B, które połączmy ste odpowiednio AG i AF w punktach H i E. Punkt przecięcia się prostéj, łączącéj tak wyznaczone punkty H i E z podstawą AB, jest szukanym punktem D.

z punktami odpowiednio E i A prostymi EH i AB. Prosta, łącząca punkt przecięcia się tak wyznaczonych prostych EH i AB z wiérzchołkiem F, jest szukanym promieniem d.

Żeby dowiéść, że odpowiednio punkt D lub promień d przedstawiają rozwiązanie zadania, przypuśćmy, żeśmy dla trzech promieni a, b i c wyznaczyli czwarty promień k pęku harmonicznego $(abck)$, i również, żeśmy dla promieni GA, GB, GC, z których piérwsze dwa należą do jednéj pary, wyznaczyli czwarty promień l pęku harmonicznego o wiérzchołku w punkcie G. Promienie obu tych pęków przetną poprzeczną AB w punktach, tworzących szeregi harmoniczne (us. 23). Lecz trzy z tych punktów, A, B i C, są też same dla obu pęków i w obu razach punkty A i B są punktami jednéj pary; a więc (us. 18) owe czwarte promienie k i l przecinają się z prostą AB w tymże samym punkcie, należącym do téjże, co punkt C, pary. Też same atoli pęki harmoniczne, jeden $(abck)$ o wiérzchołku w punkcie F, drugi (GA, GB, GC, l) o wiérzchołku w punkcie G, przecinają poprzeczną EH w punktach, tworzących szeregi harmoniczne. Lecz trzy z punktów przecięcia się promieni tych pęków z prostą EH, t. j. punkty E, H i I, są spólne, a ze względu na każdy z tych pęków punkty E i H należą do jednéj pary, a więc i owe czwarte promienie k i l przecinają się w tym samym punkcie z prostą EH. Gdy zaś, jak widzimy, punkt spotkania się promieni k i l leży jednocześnie na obu prostych AB i EH, przeto jest nim punkt, w którym się te proste przecinają, t. j. punkt D. Zatym, rzeczywiście, punkt D tworzy z punktem C parę, harmonicznie sprzężoną z parą punktów A i B, a promień d tworzy z promieniem c parę, harmonicznie sprzężoną z parą promieni a i b — czego należało dowiéść.

30. Widzieliśmy, że na figurze 12-éj jest $(ABCD) = -1$, $(EHID) = -1$. Zauważmy nadto, że, poprowadziwszy promień AI, otrzymamy pęk A(EHID), którego promienie przechodzą przez punkty szeregu harmonicznego. Jest więc ten pęk A(EHID) harmoniczny (us. 21), a przeto punkty przecięcia się jego z poprzeczną FG utworzą trzeci taki szereg harmoniczny $(FGIC) = -1$ (us. 23).

I podobnie, jak dwu tym szeregom harmonicznym,

(8) $$(EHID) = -1, \quad (FGIC) = -1,$$

odpowiada jeden pęk harmoniczny o wiérzchołku w punkcie A, tak również odpowiada obu jeden pęk harmoniczny o wiérzchołku w punkcie B. Możemy zaś dla trzeciego szeregu

(9) $$(ABCD) = -1$$

przyjąć, jako odpowiedni, pęk harmoniczny o wiérzchołku w punkcie I.

Podstawami szeregów (8) i (9) są proste

(10) EH, FG, AB,

wiérzchołki zaś pęków wspomnianych są w punktach

(11) A, B, I.

Zauważyć tu możemy, że:

a. piérwsze dwie z prostych (10) przecinają się w trzecim z punktów (11).

b. z połączenia piérwszych dwu z punktów (11) otrzymujemy trzecią z prostych (10).

Weźmy pod uwagę czworokąt EFHG. W nim:

c. piérwsze dwie z prostych (10) łączą z sobą przeciwległe wiérzchołki: E z H, F z G.

d. piérwsze dwa z punktów (11) są punktami przecięcia się przeciwległych boków: EF z GH, EG z FH.

Widzimy więc, że:

e. jeżeli weźmiemy pod uwagę sześć (us. *b*, *c*) punktów: E, H, F, G, A, B, to proste (10), podstawy szeregów harmonicznych, łączą kolejno każdą parę tych punktów, z których piérwsze cztéry są wiérzchołkami czworokąta EFHG.

f. jeżeli weźmiemy pod uwagę sześć (us. *a*, *d*) prostych, EF, GH, EG, FH, EH, FG, to punkty (11), wiérzchołki pęków harmonicznych, są punktami przecięcia się kolejno każdéj pary tych prostych, z których piérwsze cztéry są bokami czworokąta EFHG.

31. Aby w piérwszym razie o pozostałych dwu z tych sześciu punktów, a w drugim razie o pozostałych dwu z tych sześciu prostych, można było podobnie się wyrażać, jak o piérwszych cztérech odpowiednio punktach lub prostych, wprowadzimy nowe pojęcia: «czworoboku zupełnego» i «czworokąta zupełnego».

Czworobokiem zupełnym nazywamy figurę, utworzoną przez cztéry proste na płaszczyźnie, z których żadne trzy nie przechodzą przez ten sam punkt.

Wszystkie możliwe punkty przecięcia się każdych dwu z tych cztérech prostych przedstawiają sześć «wiérzchołków» czworoboku zupełnego.

Czworokątem zupełnym nazywamy figurę, utworzoną przez cztéry punkty na płaszczyźnie, z których żadne trzy nie leżą na téj saméj prostéj.

Wszystkie możliwe proste, łączące każde dwa z tych cztérech punktów, przedstawiają sześć «boków» czworokąta zupełnego.

Niech cztéry proste («boki») 1, 2, 3 i 4 (fig. 13) tworzą czwo-

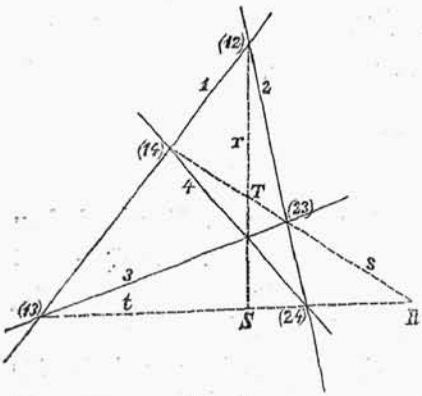

Fig. 13.

robok zupełny. Wiérzchołkami jego są punkty: (12), (13), (14), (23), (24) i (34).

Na każdym boku leżą trzy wiérzchołki.

Każde dwa wiérzchołki, nie leżące na tym samym boku, nazywają się «wiérzchołkami przeciwległymi». Jest ich trzy pary:

(12) i (34), (23) i (14), (13) i (24).

Proste, łączące z sobą dwa wiérzchołki przeciwległe, nazywają się «prostymi przekątnymi». Jest ich trzy; w porządku wypisanych powyżéj par wiérzchołków przeciwległych są one:

$r, \quad s, \quad t.$

Trzy punkty przecięcia się z sobą każdych dwu z tych przekątnych są:

R, punkt przecięcia się przek. s i t,
S " " " " t i r,
T " " " " r i s.

Niech cztéry punkty («wiérzchołki») 1, 2, 3 i 4 (fig. 14) tworzą

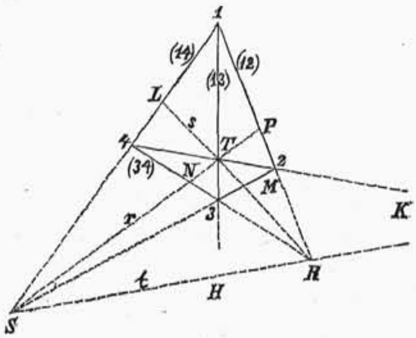

Fig. 14.

czworokąt zupełny. Bokami jego są proste: (12), (13), (14), (23), (24) i (34).

W każdym wiérzchołku schodzą się trzy boki.

Każde dwa boki, nie schodzące się w tym samym wiérzchołku, nazywają się «bokami przeciwległymi». Jest ich trzy pary:

(12) i (34), (23) i (14), (13) i (24).

Punkty przecięcia się dwu boków przeciwległych nazywają się «punktami przekątnymi». Jest ich trzy; w porządku wypisanych powyżéj par boków przeciwległych są one:

R, S, T.

Trzy proste, łączące z sobą każde dwa z tych punktów przekątnych, są:

r, łącząca punkty przekątne S i T,
s " " " T i R,
t " " " R i S.

Wyszedszy z któregokolwiek boku, można trzema sposobami, przechodząc w wiérzchołkach do innych boków, obéjść je wszystkie i wrócić do boku, z którego się wyszło. W ten sposób powstaną trzy «czworoboki pojedyńcze»:

1234, 1342, 1423,

czyli, jeżeli je wyrażamy zapomocą wiérzchołków,

(12)(23)(34)(41), (13)(34)(42)(21), (14)(42)(23)(31).

(Wykréślić je oddzielnie.)

Wyszedszy z któregokolwiek wiérzchołka, można trzema sposobami, przechodząc po bokach do innych wiérzchołków, obéjść je wszystkie i wrócić do wiérzchołka, z którego się wyszło. W ten sposób powstaną trzy «czworokąty pojedyńcze»:

1234, 1342, 1423,

czyli, jeżeli je wyrażamy zapomocą boków,

(12)(23)(34)(41), (13)(34)(42)(21), (14)(42)(23)(31).

(Wykréślić je oddzielnie.)

32. Wracając do tego, cośmy powiedzieli na końcu us. 30-go, widzimy teraz, że:

sześć punktów, wzmiankowanych pod *e.* w us. 30-ym, są (fig. 12) sześcioma wiérzchołkami czworoboku zupełnego, utworzonego przez proste: AF, FB, BE, HA;

trzy proste (10), EH, FG i AB, są prostymi przekątnymi tegoż czworoboku zupełnego, przecinające się po dwie w punktach I, C, D.

sześć prostych, wzmiankowanych pod *f.* w us. 30-ym, są (fig. 12) sześcioma bokami czworokąta zupełnego, utworzonego przez punkty: E, F, H, G;

trzy punkty (11), A, B i I, są punktami przekątnymi tegoż czworokąta zupełnego, połączone z sobą po dwa prostymi AB, BI, IA.

Jakeśmy widzieli w us. 29-ym i 30-ym,

a. na przekątnych (10) zachodzą szeregi harmoniczne punktów:

(EHID), (FGIC), (ABCD),

czyli — na fig. 13-éj — szeregi harmoniczne punktów:

((14)(23)TR), ((12)(34)TS), ((13)(24)SR).

Własność tę możemy teraz tak wysłowić: *na każdéj przekątnéj czwo-*

b. w punktach przekątnych (11) zachodzą pęki harmoniczne promieni *):

A(EHID), B(FGIC), I(ABCD),

czyli — na fig. 14-éj — pęki harmoniczne promieni:

S((14)(23)*rt*), R((12)(34)*st*), T((13)(24)*rs*).

Własność tę możemy teraz tak wysłowić: *w każdym punkcie przeką-*

*) Piérwsze dwa z tych pęków można także tak wyrazić: A(FGIC), B(EHID) (por. us. 30).

roboku zupełnego punkty przecięcia się jéj z pozostałymi przekątnymi tworzą parę, harmonicznie sprzężoną z parą wiérzchołków, przez które ta przekątna przechodzi.

tnym czworokąta zupełnego, promienie, łączące go z pozostałymi punktami przekątnymi, tworzą parę, harmonicznie sprzężoną z parą boków, które w tym punkcie przekątnym się schodzą.

Z tych własności wyprowadzimy inne.

c. Proste, łączące punkty (fig. 13) tylkoco wypisanych szeregów harmonicznych z punktami odpowiednio S, R, T, tworzą pęki promieni

S((14)(23)rt), R((12)(34)st), T((13)(24)rs)

harmoniczne (us. 21). A więc, *w czworoboku zupełnym każde dwie przekątne tworzą z prostymi, które punkt ich przecięcia się łączą z dwoma wiérzchołkami pozostałymi, dwie pary promieni, harmonicznie z sobą sprzężone.* Zauważyć należy, iż tylko ostatni z wypisanych tu pęków jest jednoznaczny z ostatnim z pęków pod *b*.

d. Punkty przecięcia się promieni (fig. 14) tylkoco wypisanych pęków harmonicznych z prostymi odpowiednio s, r, t tworzą szeregi punktów

(LMTR), (PNTS), (HKSR)

harmoniczne (us. 23). A więc, *w czworokącie zupełnym każde dwa punkty przekątne tworzą z punktami, w których prosta, je łącząca, przecina dwa boki pozostałe, dwie pary punktów, harmonicznie z sobą sprzężone.* Zauważyć należy, iż tylko ostatni z wypisanych tu szeregów jest jednoznaczny z ostatnim z szeregów pod *a*.

e. Proste, łączące punkty każdego z szeregów harmonicznych pod *a*. z którymkolwiek z wiérzchołków czworoboku, leżących zewnątrz podstawy szeregu, tworzą pęki harmoniczne, które będziemy mogli tak omówić: *w każdym z wiérzchołków czworoboku zupełnego przekątna i prosta, łącząca ten wiérzchołek z punktem przecięcia się dwu pozostałych przekątnych, tworzą parę promieni, harmonicznie sprzężoną z parą boków, przechodzących przez ten wiérzchołek.*

f. Punkty przecięcia się każdego z pęków harmonicznych pod *b*. z którymkolwiek z boków czworokąta, nie przechodzących przez wiérzchołek pęku, tworzą szeregi harmoniczne, które będziemy mogli tak omówić: *na każdym z boków czworokąta zupełnego punkt przekątny i punkt przecięcia się tego boku z prostą, łączącą dwa pozostałe punkty przekątne, tworzą parę punktów, harmonicznie sprzężoną z parą wiérzchołków, leżących na tym boku.*

33. Ćwiczenia.

1°. Miejsce gieometryczne punktu na płaszczyźnie, dla którego stosunek jego odległości od dwu punktów stałych jest stały, jest kołem; odcinek wyznaczony przez to koło na prostéj, przechodzącéj przez punkty stałe, jest jego średnicą.

2°. W wiérzchołku równoległoboku dwa jego boki, przekątna, przechodząca przez ten wiérzchołek, i równoległa do przekątnéj pozostałéj tworzą pęk promieni harmoniczny. (Stąd wynika sposób wykréślenia dla trzech danych promieni czwartego, tworzącego z nimi pęk promieni harmoniczny.)

3°. Miejscem gieometrycznym punktu, dla którego stosunek jego odległości od dwu prostych stałych jest stały, jest układ dwu prostych *), tworzących z prostymi stałymi pęk promieni harmoniczny.

4°. *a.* Dane są trzy przekątne czworoboku zupełnego i jeden jego bok; wykréślić ten czworobok zupełny.

b. Dane są trzy punkty przekątne czworokąta zupełnego i jeden jego wiérzchołek; wykréślić ten czworokąt zupełny.

5°. *a.* Dany jest jeden z punktów szeregu harmonicznego i trzy proste, nie przechodzące przez jeden punkt, na których mają odpowiednio leżéć pozostałe punkty tego szeregu; wyznaczyć je.

b. Dany jest jeden z promieni pęku harmonicznego i trzy punkty, nie leżące na jednéj prostéj, przez które mają odpowiednio przechodzić pozostałe promienie tego pęku; wykréślić je.

6°. Zauważmy uprzednio, że:

[*a*]. Gdy, mając trójkąt ABC, poprowadzimy poprzeczną (nie przechodzącą przez żaden z wiérzchołków trójkąta), która boki AB, BC i CA (lub ich przedłużenia) przecina w punktach odpowiednio C′, A′ i B′, to, poprowadziwszy przez wiérzchołek np. A równoległą do owéj poprzecznéj, a punkt przecięcia się jéj z bokiem BC nazwawszy D, miéć będziemy:

$$\frac{B'C}{B'A}=\frac{A'C}{A'D},\quad \frac{C'A}{C'B}=\frac{A'D}{A'B},$$

a więc

$$\frac{A'B}{A'C}\cdot\frac{B'C}{B'A}\cdot\frac{C'A}{C'B}=+1; \tag{1}$$

I nawzajem, jeżeli na bokach AB, BC i CA trójkąta ABC obierzemy takie punkty, odpowiednio C′, A′ i B′, iż ma miejsce związek (1), to punkty A′, B′ i C′ leżą na jednéj prostéj; w przeciwnym bowiém razie, oznaczywszy punkt przecięcia się prostéj A′B′ z bokiem AB przez C_1, mielibyśmy, według (1),

---

*) Gdy ów stosunek jest $m:n$, to, prowadząc równoległe do prostych stałych w odległościach odpowiednio n i m, otrzymamy na ich przecięciach punkty, należące do tego miejsca gieometrycznego.

$$\frac{C_1A}{C_1B} = \frac{C'A}{C'B}, \text{ skąd } \frac{AC_1 + C_1B}{C_1B} = \frac{AC' + C'B}{C'B}, \text{ czyli } \frac{AB}{C_1B} = \frac{AB}{C'B}.*)$$

[b]. Gdy punkt E, nie schodzący się razem z żadnym z wiérzchołków trójkąta ABC, połączymy prostymi z wiérzchołkami A, B i C, a punkty przecięcia się tych prostych z bokami przeciwległymi nazwiemy odpowiednio A', B' i C', to miéć będziemy

$$\frac{\triangle AEB}{\triangle AEC} = \frac{A'B}{A'C}, \quad \frac{\triangle BEC}{\triangle BEA} = \frac{B'C}{B'A}, \quad \frac{\triangle CEA}{\triangle CEB} = \frac{C'A}{C'B},$$

a więc

$$(2) \qquad \frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{C'B} = -1.$$

I nawzajem, jeżeli na bokach AB, BC i CA trójkąta ABC obierzemy takie punkty, odpowiednio C', A' i B', iż ma miejsce związek (2), to proste AA', BB' i CC' przechodzą przez jeden punkt; w przeciwnym bowiém razie, prosta, łącząca punkt przecięcia się prostych AA' i BB' z wiérzchołkiem C, przecinałaby bok AB w punkcie C_1, innym niż C', i byłoby, według (2),

$$\frac{C_1A}{C_1B} = \frac{C'A}{C'B}, \text{ a więc } \frac{AB}{C_1B} = \frac{AB}{C'B}.$$

Wiedząc to, okazać, że:

a. Gdy pod [a], zamiast jednego z punktów A', B' i C', np. zamiast A', weźmiemy taki punkt A'', iż (BCA'A'') = —1, to proste AA'', BB' i CC' przechodzą przez jeden punkt.

b. Gdy pod [b], zamiast jednego z punktów A', B' i C', np. zamiast A', weźmiemy taki punkt A'', iż (BCA'A'') = —1, to punkty A'', B' i C' leżą na jednéj prostéj.

7°. *a*. Gdy pod [a] wyznaczymy takie punkty A'', B'' i C'', iż (BCA'A'') = —1, (CAB'B'') = —1, (ABC'C'') = —1, to proste AA'', BB'' i CC'' przechodzą przez jeden punkt.

b. Gdy pod [b] wyznaczymy takie punkty A'', B'' i C'', iż (BCA'A'') = —1, (CAB'B'') = —1, (ABC'C'') = —1, to te punkty A'', B'' i C'' leżą na jednéj prostéj.

---

*) Opiérając się na tak okazanéj własności odwrotnéj, można łatwo dowiéść, że:

Trzy proste, łączące środki boków trójkąta z wiérzchołkami przeciwległymi, przecinają się w jednym punkcie.

Trzy wysokości trójkąta przecinają się w jednym punkcie.

Trzy dwusieczne kątów trójkąta przecinają się w jednym punkcie.

Trzy prostopadłe do boków trójkąta w ich środkach (jako będące wysokościami trójkąta, którego boki łączą spodki tych prostopadłych) przecinają się w jednym punkcie.

Gdy koło jest wpisane w trójkąt wewnętrznie lub zewnętrznie, to trzy proste, łączące wiérzchołki trójkąta z punktami styczności boków przeciwległych, przecinają się w jednym punkcie.

8°. Gdy poprowadzimy trzy wysokości trójkąta, to każdy jego bok przez odpowiadającą mu wysokość i przez prostą, przechodzącą przez spodki dwu pozostałych wysokości, jest podzielony harmonicznie.

9°. Gdy poprowadzimy trzy wysokości trójkąta i trzy proste, przechodzące przez każde dwa spodki tych wysokości, to w każdym ze spodków zachodzi pęk promieni harmoniczny.

10°. Gdy środek boku trójkąta połączymy prostymi z przeciwległym wiérzchołkiem i ze środkami boków pozostałych, to ów bok i te trzy proste utworzą pęk promieni harmoniczny.

11°. Jaka własność trójkąta tak odpowiada własności 8°, jak własność 10° własności 9°?

12°. Gdy poprowadzimy trzy wysokości trójkąta i trzy proste, przechodzące przez każde dwa spodki tych wysokości, to trzy punkty przecięcia się każdéj z tych ostatnich prostych z odpowiednim pozostałym bokiem trójkąta leżą na jednéj prostéj.