ROZDZIAŁ VIII.

PRZECIĘCIE STOŻKOWE, JAKO OPISANE PRZEZ WIÉRZCHOŁEK PĘKU HARMONICZNEGO, LUB OBWIEDZIONE PRZEZ PODSTAWĘ SZEREGU HARMONICZNEGO, JAKO LINIJA HARMONICZNIE POKREWNA Z PRZECIĘCIEM STOŻKOWYM, JAKO BIEGUNOWO WZAJEMNA Z PRZECIĘCIEM STOŻKOWYM WZGLĘDEM PRZECIĘCIA STOŻKOWEGO. — ZASADA DWOISTOŚCI.

PRZECIĘCIE STOŻKOWE POWSTAJE WSKUTEK PEWNEGO RUCHU WIÉRZCHOŁKA PĘKU HARMONICZNEGO LUB PODSTAWY SZEREGU HARMONICZNEGO.

148. Korzystając z wniosków, wyprowadzonych w us. 145-ym z twierdzeń Pascal'a i Brianchon'a, dowiedziemy tu ważnych własności charakterystycznych jakiegokolwiek przecięcia stożkowego.

a. Gdy mamy cztéry punkty: A, B, C i D, z których żadne trzy nie leżą na jednéj prostéj (zresztą jakiekolwiek), to, zgrupowawszy te punkty w dwie pary, np. A i B, C i D, możemy zawsze wyznaczyć taki punkt E, iż pęk promieni E(ABCD) jest harmoniczny. Poprowadziwszy bowiém prostą AB, a przez punkt C jakąkolwiek prostą, która niech przecina prostą AB w punkcie C', możemy na prostéj AB wyznaczyć taki punkt D', iżby szereg punktów (ABC'D') był harmoniczny. Poprowadźmy następnie prostą D'D i oznaczmy punkt jéj przecięcia się z prostą CC' przez E. Pęk promieni E(ABC'D'), czyli E(ABCD), jest widocznie harmoniczny (us. 21).

Te pięć punktów: A, B, C, D i E wyznaczają pewne przecięcie

b. Gdy mamy cztéry proste: a, b, c i d, z których żadne trzy nie przechodzą przez jeden punkt (zresztą jakiekolwiek), to, zgrupowawszy te proste w dwie pary, np. a i b, c i d, możemy zawsze wyznaczyć taką prostą e, iż szereg punktów $((ea)(eb)(ec)(ed))$ jest harmoniczny. Wyznaczywszy bowiém punkt (ab), a na prostéj c jakikolwiek punkt, który niech łączy z punktem (ab) prosta c', możemy przez punkt (ab) poprowadzić taką prostą d' iżby pęk promieni $(abc'd')$ był harmoniczny. Wyznaczmy następnie punkt $(d'd)$ i oznaczmy prostą, łączącą go z punktem (cc') przez e. Szereg punktów $((ea)(eb)(ec')(ed'))$, czyli $((ea)(eb)(ec)(ed))$, jest widocznie harmoniczny (us. 23).

Te pięć prostych: a, b, c, d i e wyznaczają pewne przecięcie stożkowe (us. 145, *a*); nazwijmy je L.

Na harmonicznie z L pokrewnym kole K, którego średnicą jest cięciwa przecięcia stożkowego L, przechodząca przez ognisko równolegle do kierownicy (us. 49), punkty A_1, B_1, C_1, D_1 i E_1, harmonicznie pokrewne z owymi punktami A, B, C, D i E na L, są takie (us. 36, *a*; 35, *m*), iż pęk $E_1(A_1B_1C_1D_1)$ jest harmoniczny. Wtedy jednak proste, łączące jakikolwiek punkt na K odpowiednio z punktami A_1, B_1, C_1 i D_1, tworzą pęk harmoniczny (us. 28); a więc także proste, łączące jakikolwiek punkt na L odpowiednio z punktami A, B, C i D przedstawiają również pęk harmoniczny (us. 35, *m*).—Przypuśćmy, że istnieje punkt F, nie leżący na L, taki, iż pęk F(ABCD) jest harmoniczny. Punkt przecięcia się prostéj FA z L, który nazwijmy G, połączmy prostymi z punktami B, C i D. Ponieważ punkt G znajduje się na L, zatym, według powyższego, pęk G(ABCD) jest harmoniczny. W tych dwu pękach harmonicznych

F(ABCD) i G(ABCD)

promienie FA i GA są tąż samą prostą FG. Poprowadźmy prostą BC (fig. 58); punkt jéj przecięcia się z ową prostą FG nazwijmy A′, a punkty przecięcia się jéj z prostymi FD i GD nazwijmy odpowiednio D′ i D″. Na prostéj BC mielibyśmy szeregi harmoniczne

(A′BCD′) i (A′BCD″);

stożkowe (us. 145, *b*); nazwijmy je L.

Do harmonicznie z L pokrewnego koła K, którego średnicą jest cięciwa przecięcia stożkowego L, przechodząca przez ognisko równolegle do kierownicy (us. 49), styczne a_1, b_1, c_1, d_1 i e_1, harmonicznie pokrewne z owymi stycznymi *a*, *b*, *c*, *d* i *e* do L, są takie (us. 36, *b*; 35, *l*), iż szereg $((e_1a_1)(e_1b_1)(e_1c_1)(e_1d_1))$ jest harmoniczny. Wtedy jednak punkty przecięcia się jakiéjkolwiek stycznéj do K odpowiednio ze stycznymi a_1, b_1, c_1 i d_1 tworzą szereg harmoniczny (us. 125); a więc także punkty przecięcia się jakiéjkolwiek stycznéj do L odpowiednio ze stycznymi *a*, *b*, *c* i *d* przedstawiają również szereg harmoniczny (us. 35, *l*). — Przypuśćmy, że istnieje prosta *f*, niestyczna do L, taka, iż szereg $((fa)(fb)(fc)(fd))$ jest harmoniczny. Ze styczną, wyprowadzoną z punktu (fa) do L, którą nazwijmy *g*, przecinają się styczne *b*, *c* i *d*. Ponieważ prosta *g* jest styczną do L, zatym, według powyższego, szereg $((ga)(gb)(gc)(gd))$ jest harmoniczny. W tych dwu szeregach harmonicznych

$((fa)(fb)(fc)(fd))$ i $((ga)(gb)(gc)(gd))$

punkty (fa) i (ga) są tymże samym punktem (fg). Wyznaczmy punkt (bc) (fig. 59); prostą, łączącą go z owym punktem (fg), nazwijmy a', a proste, łączące go z punktami (fd) i (gd), nazwijmy odpowiednio d' i d''. W wiérzchołku (bc) mielibyśmy pęki harmoniczne

$(a'bcd')$ i $(a'bcd'')$;

a więc punkty D' i D'' byłyby jednym punktem (us. 18), wskutek czego

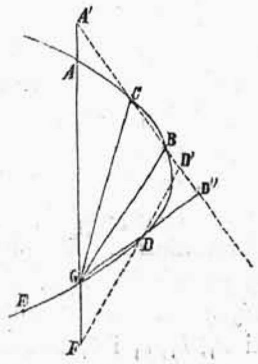

Fig. 58.

ten punkt przecięcia się prostych FD i GD, t. j. punkt D, znajdowałby się na prostéj BC, co się sprzeciwia założeniu. — Widzimy więc, że wiérzchołki wszystkich pęków harmonicznych, których promienie przechodzą odpowiednio przez stałe punkty A, B, C, D (z których żadne trzy nie leżą na jednéj prostéj), należą do tegoż samego przecięcia stożkowego L.

Widzieliśmy zaś, że jakikolwiek punkt na L może być wiérzchołkiem takiego pęku. Możemy więc powiedzieć: *poruszający się wiérzchołek pęku harmonicznego promieni, przechodzących przez odpowiednie im cztéry punkty stałe, z których żadne trzy nie leżą na téj saméj prostéj, opisuje przecięcie stożkowe;* ono przechodzi przez owe cztéry punkty stałe.

a więc proste *d'* i *d''* byłyby jedną prostą (us. 25), wskutek czego

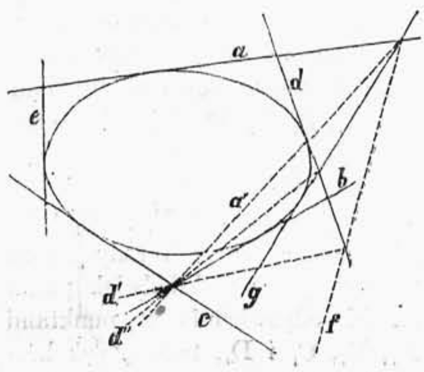

Fig. 59.

go ta prosta, łącząca punkty *(fd)* i *(gd)*, t. j. prosta *d*, przechodziłaby przez punkt *(bc)*, co się sprzeciwia założeniu. — Widzimy więc, że podstawy wszystkich szeregów harmonicznych, których punkty są na przecięciu się z odpowiednimi stałymi stycznymi *a*, *b*, *c*, *d* (z których żadne trzy nie przechodzą przez ten sam punkt), są stycznymi do tegoż samego przecięcia stożkowego L.

Widzieliśmy zaś, że jakakolwiek styczna do L może być podstawą takiego szeregu. Możemy więc powiedzieć: *poruszająca się podstawa szeregu harmonicznego punktów przecięcia się jéj z odpowiednimi im cztérema prostymi stałymi, z których żadne trzy nie przechodzą przez ten sam punkt, dotyka przecięcia stożkowego;* do niego są styczne owe cztéry proste stałe.

LINIJA HARMONICZNIE POKREWNA Z PRZECIĘCIEM STOŻKOWYM.

149. Gdy, mając jakiekolwiek przecięcie stożkowe L, jakiekolwiek punkt i prostą, będące dla siebie biegunem i biegunową względem L, przyjmiemy odpowiednio za środek i oś pokrewieństwa harmonicznego, to, jak wiemy, liniją harmonicznie pokrewną z przecięciem stożkowym L, jest ono samo (us. 98, uwaga).

Jaką będzie linija harmonicznie pokrewna z L wrazie, kiedy środek i oś pokrewieństwa nie są dla siebie biegunem i biegunową względem L, t. j. są jakimikolwiek punktem i prostą?

Niech jakikolwiek punkt H i jakakolwiek prosta *h* będą odpowiednio środkiem i osią pokrewieństwa harmonicznego, i niech będzie dane przecięcie stożkowe L. Gdy punkt poruszający się opisuje przecięcie stożkowe L, to pokrewny z nim punkt opisuje pewną liniją L', harmonicznie pokrewną z L (us. 36). — Obrawszy na L jakiekolwiek trzy punkty A, B i C, połączmy je prostymi z jakimkolwiek punktem E na L, a dla trzech prostych EA, EB, EC wykréślmy taką prostą *d*, iżby pęk promieni ((EA)(EB)(EC)*d*) był harmoniczny. Gdy punkt przecięcia się prostéj *d* z L nazwiemy D, to ten pęk harmoniczny będziemy mogli wyrazić: E(ABCD). Z punktami A, B, C, D i E na L, z których więc żadne trzy nie leżą na jednéj prostéj (us. 47, *a*), są harmonicznie pokrewne punkty odpowiednio A', B', C', D' i E' na L', z których również żadne trzy nie leżą na jednéj prostéj (us. 35, *i*), a pęk promieni E'(A'B'C'D') jest harmoniczny (us. 35, *e*, *m*). Przecięcie stożkowe L możemy uważać jako opisane przez poruszający się punkt E, wiérzchołek pęku harmonicznego promieni, przechodzących odpowiednio przez stałe punkty A, B, C i D na L. Każdemu położeniu punktu E na L odpowié położenie punktu E' na L' i w każdym z tych położeń punkt E' będzie wiérzchołkiem pęku harmonicznego promieni, przechodzących odpowiednio przez stałe punkty A', B', C' i D' na L' (us. 35, *m*, *b*). A więc linija L' może być uważana, jako opisana przez poruszający się punkt E', wiérzchołek pęku harmonicznego promieni, przechodzących odpowiednio przez stałe punkty A', B', C' i D', z których żadne trzy nie leżą na jednéj linii; jest zatym ona przecięciem stożkowym (us. 148, *a*).— Podobnie moglibyśmy tego dowiéść, opiérając się na własności, okazanéj w us. 148, *b*.

Widzimy więc, że, wogóle, *linija, harmonicznie pokrewna z przecięciem stożkowym, jest przecięciem stożkowym.*

150. Dla przykładu, wyznaczmy przecięcie stożkowe, harmonicznie pokrewne z elipsą, gdy środek pokrewieństwa jest w jednym punkcie końcowym któréjkolwiek z osi głównych elipsy, a oś pokrewieństwa jest prostopadła do téjże osi elipsy i przechodzi przez drugi jéj punkt końcowy.

Weźmy elipsę E, któréj oś wielka AA_1 (fig. 60), a mała BB_1, i niech wiérzchołek główny A będzie środkiem, a prostopadła h do AA_1 w A_1 osią pokrewieństwa. Według ogólnych zasad pokrewieństwa harmonicznego (us. 34—36), oraz na mocy wzajemnego położenia punktów szeregu harmonicznego (us. 13, 19), wniesiemy, że z punktami na E z prawéj strony prostéj BB_1, linii średniéj tego pokrewieństwa, są sprzężone punkty na przecięciu stożkowym (us. 149), pokrewnym z E, znajdujące się z prawéj strony prostéj h, a z punktami na E z lewéj strony prostéj BB_1 są pokrewne punkty z lewéj strony prostopadłéj w A do AA_1, i w obie strony to przecięcie stożkowe rozciąga się do nieskończoności. Jest więc ono hiperbolą (us. 74); nazwijmy ją H. Każdy z punktów A i A_1, jako środek i punkt na osi pokrewieństwa, jest pokrewny sam z sobą; a więc te punkty leżą na H. Ponieważ E jest liniją symetryczną względem prostéj AA', przechodzącéj przez ognisko prostopadle do kierownicy, więc i H jest liniją symetryczną względem téjże prostéj (takie samo objaśnienie, jak w us. 48-ym). Gdy zaś hiperbola H jest liniją symetryczną względem prostéj AA_1, przechodzącéj przez dwa na niéj leżące punkty A i A_1, to odcinek AA_1 jest jéj osią poprzeczną (us. 81), a punkt S jéj środkiem. Z punktami B i B_1 na E są sprzężone punkty w nieskończoności na H. A więc proste, przechodzące przez punkt S równolegle do prostych AB i AB_1, są asymptotami H (us. 92). Z równości trójkątów: ASB i utworzonego przez proste h, SA_1 i asymptotę wynika, że oś mała BB_1 elipsy jest osią sprzężoną hiperboli H (us. 91). A więc, z elipsą E jest tu sprzężona spółśrodkowa hiperbola H, któréj oś poprzeczna jest spólna z osią wielką, a oś sprzężona z osią małą elipsy, i któréj asymptoty są równoległe do prostych, łączących punkty końcowe różnych osi elipsy.

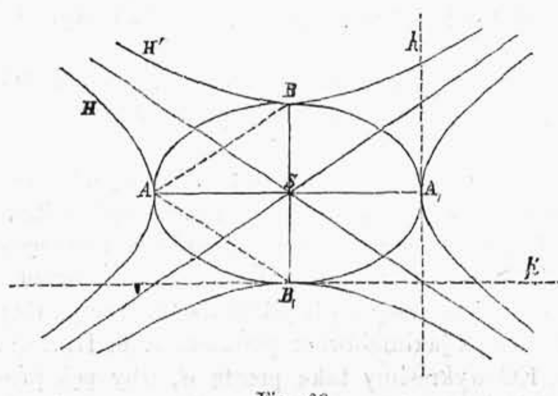

Fig. 60.

Podobnie okazać można, że w pokrewieństwie harmonicznym, którego środek jest w B, oś h' prostopadła do BB_1 w B_1, przecięciem stożkowym, pokrewnym z E, jest hiperbola H′, spółśrodkowa z E, któréj oś poprzeczna jest spólna z osią małą, a oś sprzężona z osią wielką elipsy, i któréj asymptoty są równoległe do tychże prostych, przechodzących przez punkty końcowe różnych osi elipsy.

Te więc dwie hiperbole H i H′ są, jak widzimy, spółśrodkowe, mają spólne asymptoty, i oś poprzeczna jednéj jest osią sprzężoną drugiéj, i nawzajem. A nadto, z uwagi, że każda para średnic sprzężonych hiperboli przedstawia parę promieni, harmonicznie sprzężoną z asymptotami (us. 131), z dwu średnic sprzężonych hiperboli H ta średnica, która jéj nie przecina, jest średnicą hiperboli H′, przecinającą ją, i nawzajem (us. 25, uwaga). Każda z takich dwu hiperból H i H′ nazywa się względem pozostałéj hiperbolą sprzężoną.

LINIJA BIEGUNOWO WZAJEMNA Z PRZECIĘCIEM STOŻKOWYM WZGLĘDEM PRZECIĘCIA STOŻKOWEGO.

151. Względem danego przecięcia stożkowego L każdemu punktowi odpowiada jedna prosta, jako biegunowa tego punktu (us. 98). — Gdy punkt bieżący P opisuje pewną krzywą M, to jego biegunowa p względem L, zmieniając odpowiednio swe położenia, «obwodzi» pewną inną krzywą M′ tak, iż każdemu położeniu punktu bieżącego P na M odpowiada pewne położenie stycznéj bieżącéj p do M′. — Gdy weźmiemy dwa jakiekolwiek punkty P_1 i P_2 na M, to ich biegunowe p_1 i p_2 są stycznymi do M′, a biegunem prostéj, przechodzącéj przez punkty P_1 i P_2, jest punkt przecięcia się prostych p_1 i p_2 (us. 118, *b*). Jeżeli punkt P_1 będzie coraz bliżéj przystępował do punktu P_2, to i punkt przecięcia się prostych p_1 i p_2 będzie coraz bliższy punktu styczności stycznéj p_1 do M′. Gdy przeto punkt P_2 zejdzie się razem z punktem P_1, to owa prosta, przechodząca przez punkty P_1 i P_2, stanie się styczną p' do M w P_1, punkt zaś przecięcia się prostych p_1 i p_2 zejdzie się razem z punktem styczności P′ stycznéj p_1 do M′. Ale w każdym położeniu prostéj p_2 punkt (p_1p_2) jest względem L biegunem odpowiedniéj prostéj P_1P_2, a więc i punkt P′ na M′ jest biegunem stycznéj p' do M, t. j. każdéj stycznéj do M odpowiada, jako biegun względem L, punkt na M′. — Gdy więc pewien punkt bieżący opisuje krzywą M, a jego biegunowa względem L jednocześnie obwodzi krzywą M′, to nawzajem, gdy pewna prosta bieżąca obwodzi krzywą M, jéj biegun jednocześnie opisuje krzywą M′.

Takie dwie krzywe, jak tu M i M′, posiadające tę własność, iż punktowi na jednéj z nich odpowiada, jako biegunowa względem L, styczna do pozostałéj, nazywają się dlatego **dwiema krzywymi biegunowo wzajemnymi** względem przecięcia stożkowego L, które, w takim razie, jest **kierownicą**.

152. Jeżeli krzywa M jest przecięciem stożkowym, to jaką liniją jest jéj biegunowo wzajemna M' względem przecięcia stożkowego L?

Na przecięciu stożkowym M wyznaczmy (podobnie, jak w us. 149-ym) takie cztéry punkty A, B, C i D, iżby proste, łączące je z pewnym punktem E na M (a tymsamym i z każdym innym na M; us. 148, *a*), tworzyły pęk promieni E(ABCD) harmoniczny. Biegunowe tych punktów A, B, C, D i E względem L oznaczmy odpowiednio przez *a*, *b*, *c*, *d* i *e*; one będą stycznymi do linii M', jako do biegunowo wzajemnéj z M względem L (us. 151), i gdy żadne trzy z punktów A, B, C i D nie leżą na jednéj prostéj, to, odpowiednio, żadne trzy z prostych *a*, *b*, *c* i *d* nie przechodzą przez jeden punkt (us. 119, *a*). Bieguny prostych EA, EB, EC, ED, jako przechodzących przez punkt E, znajdują się na prostéj *e*, w punktach w których ją przecinają odpowiednio proste *a*, *b*, *c*, *d* (us. 119, *a*; 118, *b*). A gdy proste EA, EB, EC i ED przedstawiają pęk promieni E(ABCD) harmoniczny, to ich bieguny, punkty *(ea)*, *(eb)*, *(ec)* i *(ed)*, przedstawiają szereg punktów (*(ea)(eb)(ec)(ed)*) również harmoniczny (us. 124, *b*). A więc styczną *e* do linii M' styczne do téjże linii *a*, *b*, *c* i *d* przecinają w punktach, przedstawiających szereg harmoniczny. — Zważmy, że, gdy punkt E opisuje przecięcie stożkowe M, proste, łączące każde jego położenie odpowiednio z tymi stałymi punktami A, B, C i D, wciąż tworzą pęk promieni harmoniczny. Każdemu zaś położeniu punktu E na M odpowiada inne położenie jego biegunowéj, stycznéj *e* do M', owym zaś prostym, łączącym każde położenie punktu E ze stałymi punktami A, B, C i D na M, odpowiadają, jako bieguny, punkty przecięcia się odpowiedniéj stycznéj *e* do M' ze stałymi do M' stycznymi *a*, *b*, *c* i *d*. Przeto w każdym położeniu stycznéj *e* do M' punkty przecięcia się jéj odpowiednio ze stycznymi *a*, *b*, *c* i *d* do M' przedstawiają szereg harmoniczny punktów. — Widzimy więc, że krzywa M' jest taką, iż pewne cztéry do niéj styczne stałe *a*, *b*, *c* i *d* przecinają każdą styczną do téj linii w punktach, przedstawiających odpowiednio szereg harmoniczny, tak iż krzywą M' możemy uważać, jako obwiedzioną przez poruszającą się podstawę szeregu harmonicznego punktów przecięcia się jéj z odpowiednimi cztérema prostymi stałymi, z których żadne trzy nie przechodzą przez ten sam punkt. A zatym krzywa M' jest przecięciem stożkowym (us. 148, *b*). — Taksamo moglibyśmy tego dowiéść, wychodząc z własności us. 148, *b*. przecięcia stożkowego M.

Możemy więc powiedzieć, że *liniją, biegunowo wzajemną z przecięciem stożkowym względem przecięcia stożkowego, jest przecięcie stożkowe* *).

153. Rozważmy tu, jako przykład, przecięcie stożkowe M', biegunowo wzajemne z kołem M względem koła L. — Tu mogą zajść następujące trzy przypadki:

1) Środek koła-kierownicy L leży zewnątrz koła M. W takim razie ze środka koła L można poprowadzić dwie różne styczne do koła M, których bieguny, będące punktami na przecięciu stożkowym M', leżą jednocześnie na biegunowéj (us. 118, *a*) środka koła L względem tegoż koła L, t. j. na prostéj w nieskończoności (us. 96). A więc, prosta w nieskończoności ma dwa różne punkty spólne z przecięciem stożkowym M'; jest przeto ono hiperbolą (us. 74), a jéj asymptoty są biegunowymi względem L punktów styczności owych dwu stycznych ze środka koła L do koła M.

2) Przez środek koła-kierownicy L przechodzi koło M. Wówczas ten środek koła L jest punktem styczności stycznéj do koła M, a więc biegun jéj względem L, będący punktem w nieskończoności (us. 96), leży na przecięciu stożkowym M', t. j. ono ma jeden (oddzielny) punkt w nieskończoności, jest parabolą (us. 65).

3) Środek koła-kierownicy L leży wewnątrz koła M. Wtedy ze środka koła L nie można poprowadzić stycznych do koła M, a więc na biegunowéj środka koła L względem tegoż koła M, t. j. na prostéj w nieskończoności, niéma punktów na M'. Zatym przecięcie stożkowe M' jest elipsą (us. 52), a styczne do koła L w punktach przecięcia się jego z kołem M są stycznymi do elipsy M'. —

Gdy koło M jest spółśrodkowe z kołem-kierownicą L, to przecięciem stożkowym M' jest koło spółśrodkowe z kołami L i M. I jeżeli promienie kół L, M i M' nazwiemy odpowiednio l, m i m', to (us. 95) $m' = l^2 : m$.

ZASADA DWOISTOŚCI.

154. W ciągu tego wykładu zauważyć mogliśmy, iż różne własności odpowiadały sobie po dwie w ten sposób, iż tam, gdzie w wysłowieniu jednéj występuje punkt, to w wysłowieniu drugiéj prosta; gdzie w jednéj:

---

*) [Możnaby także tego inaczéj dowiéść, opiérając się na własności, zaznaczonéj w ostatnim odsyłaczu na str. 70-éj — jeżeli, ograniczając się do rozważania tylko szeregów punktów i pęków promieni harmonicznych (a choćby nawet uwzględniając jeszcze szeregi punktów i pęki promieni, tworzące inwolucyje), wprowadzilibyśmy do wykładu funkcyje trygonometryczne.]

prosta przechodząca przez dwa punkty, to w drugiéj: punkt przecięcia się dwu prostych; gdzie w jednéj: szereg punktów harmoniczny, to w drugiéj: pęk promieni harmoniczny; gdzie w jednéj: punkt poruszający się po prostéj, to w drugiéj: prosta obracająca się około punktu; gdzie w jednéj: punkt leżący na przecięciu stożkowym, to w drugiéj prosta styczna do przecięcia stożkowego, i t. d. Taka wzajemna odpowiedniość dwu twierdzeń, i wogóle, dwu postępowań, stanowi tak zwaną zasadę dwoistości.

Ze wzajemnéj zależności biegunów i biegunowych względem przecięcia stożkowego, wynika, iż każda własność, udowodniona np. względem punktów, może być odrazu, bez osobnego dowodu, odniesiona odpowiednio do prostych, to jest może być oparta na prostym tak zwanym podwojeniu wysłowienia téj własności. — Z wielu innymi, ponad wyłożone w téj książce, wielce zajmującymi i doniosłego znaczenia zastosowaniami téj zasady dwoistości, nietylko dla punktów i prostych na płaszczyźnie, spotkać się można, studyjując systematyczny wykład «*Gieometryi syntetycznéj*».

DODATEK.

(Zob. str. 37.)

Płaszczyzna przecina stożek kołowy prosty według linii, która jest miejscem gieometrycznym takiego punktu, iż stosunek jego odległości od stałego punktu i od stałéj prostéj jest stały.

Weźmy stożek kołowy prosty, w obie strony nieograniczony (mający więc dwie powłoki nieograniczone), którego wiérzchołkiem jest punkt W (fig. 61 — 63), a osią prosta BC. Wpiszmy w ten stożek dwie kule, których środki są w punktach K i K′ — nazwijmy te kule odpowiednio kulami K i K′ — oraz poprowadźmy płaszczyznę S, styczną jednocześnie do obu tych kul, a przecinającą stożek; liniją *), według któréj płaszczyzna S przecina stożek, nazwijmy P. Mogą tu być trzy przypadki: *a)* albo obie kule są wpisane w tę samę powłokę stożka, a żadna z nich nie znajduje się w nieskończoności; *b)* albo jedna z tych kul jest z założenia w nieskończoności; *c)* albotéż każda z tych kul jest wpisana w inną powłokę stożka, a żadna z nich nie znajduje się w nieskończoności.

a) Obie kule K i K′ są wpisane w tę samę powłokę stożka i żadna z nich nie znajduje się w nieskończoności (fig. 61). W tym przypadku widocznie *płaszczyzna* S *przecina wszystkie tworzące stożka*. Jest ona prostopadła do płaszczyzny, wyznaczonéj przez promienie kul K i K′, idące do punktów styczności, które nazwijmy odpowiednio O i O_1. Niech ta ostatnia płaszczyzna (wyznaczona przez promienie KO i $K'O_1$), będzie płaszczyzną rysunku. Średnice kół styczności kul K i K′ ze stożkiem, znajdujące się w płaszczyźnie rysunku, nazwijmy odpowiednio DE i FG. Aby zbadać, jaką jest w tym przypadku linija P, wyznaczmy naprzód liniją przecięcia się płaszczyzny S z płaszczyzną koła styczności kuli K; tę prostą nazwijmy k. Obie te płaszczyzny są prostopadłe do płaszczyzny rysunku, wskutek czego prosta k jest prostopadła do prostych DE i OO_1. Poprowadźmy jeszcze: jakąkolwiek tworzącą stożka HI, któréj punkt styczności do K nazwijmy I, a punkt przecięcia się z S

*) Na fig. 61 — 63 prowadzić będziemy płaszczyznę S prostopadle do płaszczyzny rysunku (będzie to bowiém z innych względów najdogodniéj); wskutek tego linija P wydawaćby się winna na tych figurach jako linija prosta. Naturalnie, że, dla ocalenia przedstawienia szczegółów na rysunku, wykroczymy przeciw ścisłości: jakby przechylimy tę płaszczyznę.

oznaczmy przez L; przez punkt L równoległą do OO_1, która niech przecina prostą k w punkcie M; przez wiérzchołek W równoległą do OO_1

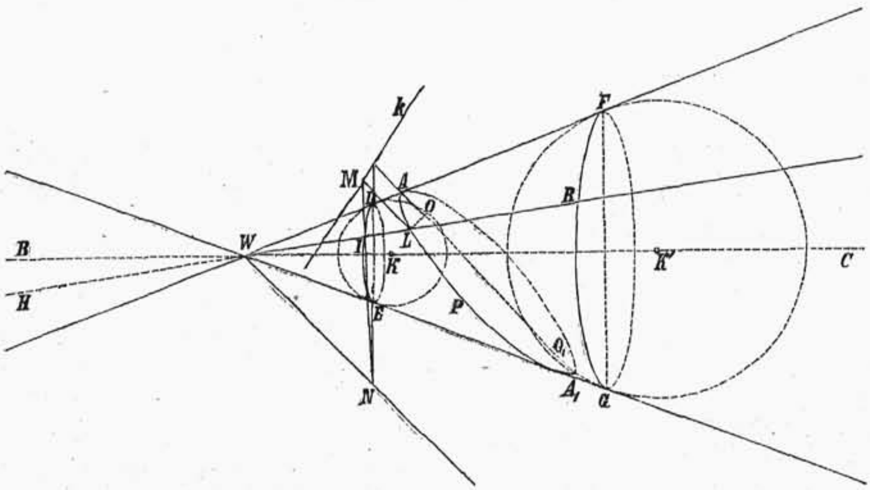

Fig. 61.

(a tymsamym i do LM), przecinającą się z płaszczyzną DEI w punkcie N; nakoniec (na płaszczyźnie, wyznaczonéj przez proste WN i LM) prostą NM. Ponieważ ta ostatnia prosta leży jednocześnie na płaszczyźnie koła styczności kuli K, przeto przechodzi przez punkt I. Z podobieństwa trójkątów LIM i WIN wynika, iż

$$LI : LM = WI : WN.$$

W téj proporcyi, z uwagi, że odcinki stycznych do kuli, wychodzących z jednego punktu, zawarte między tym punktem a punktami styczności, są równe, możemy zamiast odcinka LI wziąć odcinek LO. Czyniąc to, mieć będziemy

$$LO : LM = WI : WN.$$

Gdybyśmy, zamiast tworzącéj IL, wzięli inną tworzącą, I'L', to odcinki stycznych WI' i W'I' byłyby równe, następnik zaś WN pozostałby tenże sam. A więc wartość stosunku LO : LM jest niezależna od położenia punktu L na linii P, t. j. *dla jakiegokolwiek punktu na linii* P, *według któréj płaszczyzna* S *przecina stożek, stosunek jego odległości od stałego punktu* O *i od stałéj prostéj* k *jest stały;* punkt więc O jest ogniskiem, a prosta k kierownicą tego *) przecięcia stożkowego (us. 44). Zważmy

*) $LO + LO_1 = LI + LR = IR$ (wielkość stała; por. us. 60).

jeszcze, że tu, przy każdym położeniu płaszczyzny S, jako przecinającéj wszystkie tworzące, jest WI = WE < WN (odcinka równoległéj do prostéj OO_1); przeto

$$\frac{LO}{LM} < 1,$$

t. j. *przecięcie stożkowe* P *jest elipsą* (us. 51). Jeżeli kule K i K' są do siebie styczne, to elipsa P jest *kołem;* oba jego ogniska schodzą się z sobą razem w punkcie styczności kul, a obie płaszczyzny kół o średnicach DE i FG są równoległe do płaszczyzny S, t. j. obie kierownice są na płaszczyźnie S (us. 7) prostą w nieskończoności (por. us. 62). Jeżeli kula K', wciąż malejąc, stanie się nakoniec punktem, to elipsa P stanie się *podwójnym odcinkiem ograniczonym* WG; jéj ogniska będą w punktach W i G, odpowiednimi zaś kierownicami będą prostopadłe w tychże punktach (us. 101, 13). Jeżeli obie kule K i K' stają się punktami, to elipsa P staje się *punktem* W. — Jeżeli punkt W, wierzchołek stożka, oddali się do nieskończoności, to będziemy mieli przypadek szczególny stożka, walec (nieograniczony), którego przecięcia płaszczyzną S (jak tego łatwo, w podobny sposób, jak dla stożka, wprost dowieść można) są wogóle *elipsami;* jeżeli wtedy kule K i K' są do siebie styczne, to i tu elipsa P staje się *kołem.* — Mając w ten walec nieograniczony wpisane kule K i K' do siebie styczne i oznaczywszy punkt przecięcia się płaszczyzny S z tworzącą walca EG przez A_1 (jest więc punkt A_1 punktem na kole P), przypuśćmy, że oś walca oddala się do nieskończoności. Wtedy: walec staje się dwiema płaszczyznami: płaszczyzną, przechodzącą przez prostą EG, i płaszczyzną w nieskończoności; kule K i K' rozciągają się w obie strony od płaszczyzny S do nieskończoności; nakoniec koło P staje się *dwiema prostymi, z których jedna w nieskończoności*, druga zaś (nieograniczona) przechodzi, według naszéj tu umowy, przez punkt A_1 (por. us. 41, 5°).

b) Jedna z kul K i K', wpisanych w stożek, jest w nieskończoności. Jeżeli wystawimy sobie, że kula K' na fig. 61-éj oddaliła się do nieskończoności, to wówczas punkt, w którym dotyka się jéj płaszczyzna S, t. j. punkt O_1, znajduje się w nieskończoności, jak również i punkt przecięcia się prostych OO_1 i WE. Te zatym dwie proste są do siebie równoległe (us. 6), wskutek czego płaszczyzna S nie przecina jedynie tworzącéj WE (fig. 62). Możemy więc powiedzieć, że mamy tu do rozważenia przypadek, kiedy *płaszczyzna* S *jest równoległa do jednéj tworzącéj stożka.* Punkt, w którym płaszczyzna S dotyka kuli K, nazwijmy O. Niech ten punkt O i owa tworząca WE, do któréj płaszczyzna S jest równoległa, będą w płaszczyźnie rysunku. Aby zbadać, jaką w tym przypadku jest linija P, wyznaczmy naprzód liniją przecięcia się płaszczyzny S z płaszczyzną koła o średnicy DE (ta średnica w płaszczyźnie rysunku), według którego kula K dotyka się stożka; tę prostą nazwijmy *k.* Obie te płaszczyzny są prostopadłe do płaszczyzny rysunku, wskutek czego prosta *k* jest prostopadła do DE i do prostéj, przechodzącéj przez punkt O równolegle do WE. Poprowadźmy jeszcze: jakąkolwiek tworzącą, inną niż WE, np. tworzącą HI, któréj punkt styczności do K nazwijmy I, a punkt przecięcia się z S oznaczmy przez L; przez

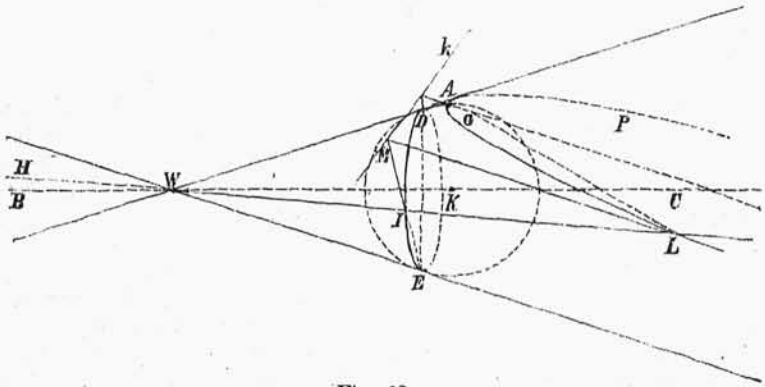

Fig. 62.

punkt L równoległą do WE, która niech przecina prostą k w punkcie M; nakoniec (na płaszczyźnie, wyznaczonéj przez proste WE i LM) prostą EM. Ponieważ ta ostatnia prosta leży jednocześnie na płaszczyźnie koła styczności kuli K, przeto przechodzi przez punkt I. Z podobieństwa trójkątów LIM i WIE wynika, iż

$$LI : LM = WI : WE.$$

W téj proporcyi, zamiast odcinka stycznéj LI, możemy wziąć na stycznéj z tegoż punktu L odcinek LO. Czyniąc to, mieć będziemy

$$LO : LM = WI : WE.$$

Gdybyśmy, zamiast tworzącéj LI, wzięli inną, LI′, to odcinki WI i WI′ byłyby równe. A więc wartość stosunku LO : LM jest niezależna od położenia punktu L na linii P, t. j. *dla jakiegokolwiek punktu na linii* P, *według któréj płaszczyzna* S *przecina stożek, stosunek jego odległości od stałego punktu* O *i od stałéj prostéj* k *jest stały;* punkt więc O jest ogniskiem, a prosta k kierownicą tego przecięcia stożkowego. Zważmy jeszcze, że tu, przy każdym położeniu płaszczyzny S, jako równoległéj do pewnéj jednéj kierownicy WE stożka, jest WI = WE; przeto

$$\frac{LO}{LM} = 1,$$

t. j. *przecięcie stożkowe* P *jest parabolą* (us. 64). Jeżeli kula K staje się punktem, to parabola P staje się *podwójnym odcinkiem, w jednym kierunku nieograniczonym*, t. j. od punktu W do nieskończoności; jéj ognisko jest w punkcie W, a kierownicą prostopadła w W do WE. — Jeżeli wierzchołek stożka, punkt W, oddali się do nieskończoności, to stożek stanie się walcem; o przecięciu go płaszczyzną S, styczną do kuli K, a równoległą do jego tworzącéj, może być wogóle mowa tylko w takim razie, kiedy i kula K znajdzie się w nieskończoności. Wówczas bowiém jakakolwiek płaszczyzna, przechodząca w skończonéj odległości, równoległa do osi walca, może być uważana za styczną do kuli w nieskończoności, wpisanéj w ten walec (us. 6). Wskutek tego, w tym razie parabola P staje się *parą prostych równoległych, w obie strony nieograniczonych* (parą tworzących walca); ogniska jéj, a więc i kierownice (us. 101) są punktem i prostą w nieskończoności (us. 4, 7, 13). — Jeżeli kąt między tworzącą a osią stożka, wciąż się powiększając, stanie się nakoniec prostym, to będziemy mieli przypadek szczególny stożka, płaszczyznę (nieograniczoną) około punktu W. Wówczas kula K rozciąga się od téj płaszczyzny do nieskończoności, a jeżeli może być mowa o przecięciu owéj płaszczyzny płaszczyzną S, styczną do téj kuli K i do kuli, która cała jest w nieskończoności (t. j. o linii, do któréj zdąża parabola P wmiarę, jak kąt między osią a tworzącą stożka, powiększając się, zdąża do prostego), to tylko (us. 7) o *podwójnéj prostéj w nieskończoności.*

c) Każda z kul K i K' jest wpisana w inną powłokę stożka i żadna z nich nie znajduje się w nieskończoności (fig. 63). Płaszczyzna S

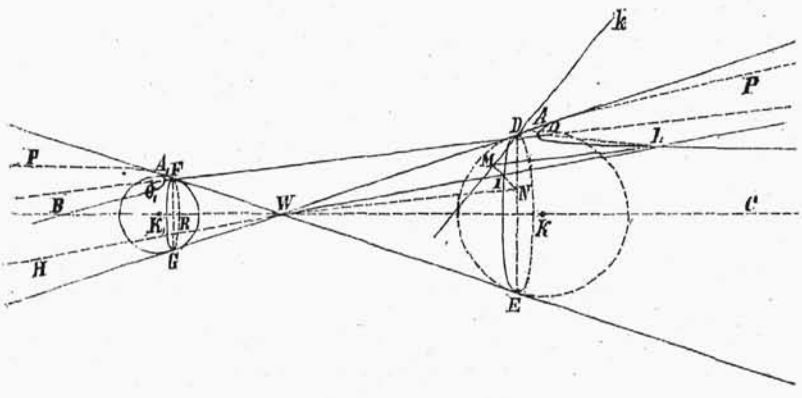

Fig. 63.

jest prostopadła do płaszczyzny, wyznaczonéj przez promienie kul K i K', idące do punktów styczności, które nazwijmy odpowiednio O i O_1. Tę ostatnią płaszczyznę przyjmijmy za płaszczyznę rysunku. Przez wiérzchołek W możemy poprowadzić płaszczyznę równoległą do płaszczyzny S; na tak poprowadzonéj płaszczyźnie znajdują się dwie jedyne tworzące stożka, których płaszczyzna S nie przecina. Możemy więc powiedzieć, że mamy tu do rozważenia przypadek, kiedy *płaszczyzna* S *jest równoległa do dwu tworzących stożka.* Liniją przecięcia się płaszczyzny S z płaszczyzną koła styczności kuli K nazwijmy *k*, a średnicę owego koła w płaszczyźnie rysunku DE; prosta k jest prostopadła tak do DE, jak i do OO_1. Poprowadźmy jeszcze: tworzącą stożka, nie równoległą do płaszczyzny S, np. HI, któréj punkt styczności do K oznaczmy przez I, a punkt spotkania się z S przez L; przez punkt L poprowadźmy równoległą do OO_1, która niech przecina prostą k w M; przez wiérzchołek W równoległą do OO_1 (a więc i do LM), któréj punkt przecięcia się z płaszczyzną DIE nazwijmy N; nakoniec wyznaczmy prostą NIM, liniją przecięcia się dwu płaszczyzn, jednéj DEI, a drugiéj wyznaczonéj przez proste WN i LM. Z podobieństwa trójkątów LIM i WIN mamy

$$LI : LM = WI : WN.$$

Lecz $LI = LO$; zatym

$$LO : LM = WI : WN.$$

Poprzednik drugiego stosunku miałby tę samę wartość, a następnik pozostałby bez zmiany, wrazie, gdybyśmy zamiast tworzącéj LI wzięli inną; a więc wartość stosunku $LO : LM$ nie zależy od położenia punktu L na P, t. j. *dla jakiegokolwiek punktu na linii* P, *według któréj płaszczyzna* S *przecina stożek, stosunek jego odległości od stałego punktu* O *i od stałéj prostéj* k *jest stały;* punkt więc O jest ogniskiem, a prosta k kierownicą *) tego przecięcia stożkowego. Zważmy jeszcze, że tu, przy wszystkich położeniach płaszczyzny S, równoległéj do pewnych dwu tworzących, jest $WI = WE > WN$ (odcinka równoległéj do prostéj OO_1); przeto

$$\frac{LO}{LM} > 1,$$

t. j. *przecięcie stożkowe* P *jest hiperbolą* (us. 73). Jeżeli jedna z kul K i K′, np. kula K, wciąż malejąc, stanie się nakoniec punktem, to hiperbola P stanie się *podwójnym nieskończenie wielkim odcinkiem* od punktu W przez punkt w nieskończoności (us. 19; str. 4, *b*) do punktu F; ogniska będą w punktach W i F, a kierownice w tych punktach prostopadłe do WF. Jeżeli obie kule K i K′, wciąż jednocześnie malejąc, staną się nakoniec punktami, to hiperbola P stanie się *dwiema prostymi nieograniczonymi i przecinającymi się* (dwiema tworzącymi stożka, do których płaszczyzna S, jako przechodząca przez nie, może być uważana za równoległą); oba ogniska są w punkcie W, a kierownicami dwusieczna kąta między tymi prostymi, nie przypadająca wewnątrz stożka. [Widocznie te dwie proste są równoległe do asymptot wszystkich tych hiperbol, które powstają wskutek przecięcia stożka płaszczyznami S, równoległymi do owych dwu prostych]. Nakoniec, jeżeli przypuścimy, że dopiéro wtedy, kiedy już mamy przypadek szczególny hiperboli P, wzmiankowany powyżéj podwójny nieskończenie wielki odcinek od W przez nieskończoność do F, kula K′, skolei malejąc, staje się punktem, to wówczas miéć będziemy *podwójną prostą nieograniczoną*.

---

*) $LO_1 - LO = LR - LI = IR$ (wielkość stała; por. us. 88).

Uwaga. Przyjęliśmy na początku, iż płaszczyzna S, przecinająca stożek, jest jednocześnie styczna do dwu kul, wpisanych w ten stożek; nie zmniejsza to bynajmniéj ogólności powyższego rozumowania. Jakoż, przyjmijmy tylko, że płaszczyzna S przecina stożek; wtedy ona: *a)* albo przecina wszystkie tworzące stożka; *b)* albo jest równoległa do jednéj z nich; *c)* albotéż, nakoniec, jest równoległa do dwu z nich. Niech płaszczyzna rysunku przechodzi przez oś stożka i niech do niéj będzie prostopadła płaszczyzna S. Na płaszczyźnie rysunku weźmy trójkąt, utworzony przez dwie tworzące i przez prostą, według któréj z tą płaszczyzną przecina się płaszczyzna S, t. j. *a)* trójkąt WAA_1; *b)* trójkąt o jednym wiérzchołku w nieskończoności w kierunku prostych WE i AO, a o przeciwległym boku WA; *c)* trójkąt WAA_1. W te trójkąty wpiszmy: *a)* jedno koło wewnętrznie, a drugie zewnętrznie i styczne do odcinka AA_1; *b)* jedno koło wewnętrznie, a drugie zewnętrznie i styczne do odcinka od A przez O do nieskończoności; *c)* oba koła zewnętrznie, jedno styczne do odcinka WA, drugie do odcinka WA_1. Jeżeli te trójkąty, wraz z tak wpisanymi w nie kołami, dokonają obrotu około osi BC, to powstaną powyżéj rozważane przypadki dwu kul wpisanych w stożek, a stycznych do płaszczyzny S.

KONIEC.

Redaktor i wydawca czasopisma «Bibl. mat.-fiz.»,
Dr. Maryjan A. Baraniecki.