POCZĄTKOWY WYKŁAD SYNTETYCZNY
WŁASNOŚCI
PRZECIĘĆ STOŻKOWYCH.

ROZDZIAŁ I.

SZEREG PUNKTÓW. — OKREŚLENIE POŁOŻENIA PUNKTU SZEREGU. — PUNKT W NIESKOŃCZONOŚCI NA PROSTÉJ. — PROSTA W NIESKOŃCZONOŚCI.

SZEREG PUNKTÓW.

1. Zbiór punktów, leżących na jednéj linii prostéj, nazywamy szeregiem prostolinijowym punktów, albo, krócéj, szeregiem punktów. Prostą, na któréj ten szereg punktów leży, nazywamy podstawą szeregu. Część zaś podstawy szeregu, ograniczoną którymikolwiek dwoma jego punktami, nazywamy odcinkiem podstawy, albo odcinkiem prostéj, będącéj podstawą szeregu. Często jednak, zamiast mówić: odcinek podstawy, odcinek prostéj, mówimy przez skrócenie: odcinek.

2. Ażeby, mając dany szereg punktów, móc dokładnie wyznaczyć położenie pewnego z tych punktów, byłoby, jak wiemy, najprościéj, jeden z punktów tego szeregu przyjąć jako stały i wymierzyć odległość od niego (od tego punktu stałego) do owego punktu, którego położenie chcemy określić. Odległość tę należałoby przyjmować już to jako dodatną, jużtéż jako ujemną, zależnie od tego, czy ów punkt leży po téj stronie punktu stałego, w którą kierunek przyjmujemy jako dodatny, czytéż po innéj stronie punktu stałego.

Takie jednak wyznaczanie położenia punktu jest niedogodne z tego względu, że odległość jego od punktu stałego (czyli długość odcinka między tymi punktami zawartego) wyrażona wtedy będzie przy pomocy pewnéj długości, przyjętéj za jednostkę.

Przedstawimy inny sposób wyznaczania położenia punktu na prostéj, zupełnie niezależny od jakiéjkolwiek jednostki linijowéj.

OKRÉŚLENIE POŁOŻENIA PUNKTU SZEREGU.

3. Zamiast jednego, wybierzmy na podstawie szeregu dwa punkty stałe, np. A i B (fig. 1). Wziąwszy pod uwagę jakikolwiek punkt podstawy — nazwijmy go C —, wprowadźmy rozważanie stosunku długości odcinków AC i BC, t. j. stosunku

$$\frac{AC}{BC}.$$

Jakąkolwiek jednostką mierzyć będziemy długości odcinków AC i BC, stosunek $\frac{AC}{BC}$ przedstawiać będzie liczbę oderwaną, od owéj jednostki niezależną. Liczba ta może być dodatną lub ujemną, gdyż każdy z odcinków AC i BC jest jużto dodatny, jużtéż ujemny, zależnie od tego, czy taki kierunek od punktu stałego (A lub B) do punktu C jest tym kierunkiem, który umówiliśmy się przyjmować jako dodatny, czytéż jest względem niego wprost przeciwny.

Mając odcinek podstawy szeregu, ograniczony którymikolwiek dwoma jego punktami, np. punktami C_1 i C_3 (fig. 1), możemy go rozważać

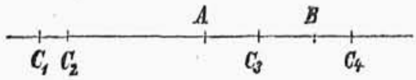

Fig. 1.

w dwu kierunkach: w jednym od C_3 do C_1, co będziemy oznaczali C_3C_1 (kładąc punkt początkowy naprzód), a w drugim od C_1 do C_3, co wypadnie odpowiednio oznaczyć C_1C_3. Umówmy się, aby kierunek: od punktu początkowego wprawo, t. j. taki kierunek, jaki ma odcinek C_1C_3, albo np. odcinek AC_4, przyjmować nadal jako dodatny. Wskutek takiéj umowy, kierunek odcinka C_3C_1, albo np. kierunek odcinka C_4B, jest ujemny.

Widoczna, że np. $C_3C_1 = - C_1C_3$, a $- C_3C_1 = C_1C_3$. —

Wróćmy do stosunku $\frac{AC}{BC}$. (Oczywiście, że w wyrazie stosunku, wyznaczającego położenie punktu, następstwo liter nie może być dowolnie zmieniane.)

Jeżeli punkt C zajmuje położenie C_1, to odcinki AC_1 i BC_1 są oba ujemne, a odcinek AC_1 jest krótszy od odcinka BC_1. Toż samo się stosuje do każdego innego położenia punktu C z lewéj strony punktu A. A więc: w każdym położeniu punktu C z lewéj strony punktu A stosunek $\frac{AC}{BC}$ przedstawia *liczbę dodatną, mniejszą od jedności.* — Dwu takim punktom, np. C_1 i C_2, odpowiadają stosunki

$$\frac{AC_1}{BC_1} \text{ i } \frac{AC_2}{BC_2}.$$

Lecz

$$\frac{AC_2}{BC_2} = \frac{-AC_2}{-BC_2} = \frac{C_2A}{C_2B}; \quad \frac{AC_1}{BC_1} = \frac{C_1A}{C_1B} = \frac{C_1C_2 + C_2A}{C_1C_2 + C_2B}.$$

Wiemy zaś, że jeżeli do licznika i do mianownika ułamka właściwego dodamy ten sam składnik (jak tu C_1C_2), to wartość ułamka się powiększy (*«Arytmetyka»*, § 17, us. 16); zatym

$$\frac{AC_1}{BC_1} > \frac{AC_2}{BC_2}.$$

Wmiarę więc tego, jak punkt C, znajdując się wciąż z lewéj strony punktu A, od tego punktu się oddala, stosunek $\frac{AC}{BC}$ (jak widzieliśmy, wciąż dodatny i mniejszy od 1) stale wzrasta. A gdy przypuścimy, że punkt C znajdzie się z lewéj strony punktu A w odległości większéj od jakkolwiek wielkiéj oznaczonéj, czyli — jak się mówi — w odległości nieskończenie wielkiéj, albo: w nieskończoności, to wtedy nie będzie można ocenić różnicy między 1-cią a stosunkiem $\frac{AC}{BC}$; możemy więc się wyrazić, że gdy punkt C znajdzie się, z lewéj strony punktu A, w nieskończoności, to stosunek $\frac{AC}{BC}$ przedstawia *liczbę* $+1$. Wmiarę zaś, jak punkt C od położenia w nieskończoności, z lewéj strony punktu A, zajmuje położenia coraz bliższe punktu A, stosunek $\frac{AC}{BC}$ przedstawia, poczynając od $+1$, coraz mniejsze liczby (dodatne). A gdy punkt C znajdzie się w punkcie A, to długość odcinka, będącego poprzednikiem, będzie równa zeru, długość zaś odcinka, będącego następnikiem, od zera różna, tak iż wtedy ten stosunek przedstawi *liczbę zero.*

Gdy punkt C znajduje się między punktami A i B, to odcinek AC jest dodatny, odcinek zaś BC ujemny; stosunek przeto $\frac{AC}{BC}$ przedstawia w tym przedziale *liczbę ujemną.* Bezwzględna jéj wartość od zera (gdy punkt C jest w punkcie A) wciąż wzrasta, a mianowicie: wmiarę jak punkt C przyjmuje różne położenia od punktu A do punktu C_3, dzielącego odcinek AB na połowy, stosunek $\frac{AC}{BC}$ przedstawia liczby od 0 do -1; wmiarę zaś jak punkt C przyjmuje różne położenia od tego punktu C_3 do punktu B, stosunek $\frac{AC}{BC}$ przedstawia liczby od -1 do $-\infty$.

Gdy punkt C znajduje się z prawéj strony punktu B, to oba wyrazy stosunku $\frac{AC}{BC}$ są dodatne, stosunek przedstawia *liczbę dodatną większą od jedności*, a wmiarę tego, jak punkt C zmienia swe położenie od punktu B wprawo do nieskończoności, stosunek ten przedstawia coraz mniejsze liczby od $+\infty$ do $+1$, tak iż przedstawia on *liczbę* $+1$, gdy punkt C znajdzie się w nieskończoności z prawéj strony punktu B.

4. Widzieliśmy, że stosunek $\frac{AC}{BC}$ przedstawia liczbę $+1$ tak wtedy, kiedy punkt C na prostéj, będącéj podstawą szeregu, znajduje się w nieskończoności po prawéj stronie odcinka AB, jak i wtedy, kiedy się znajduje po lewéj jego stronie. Aby téj liczbie odpowiadał jeden tylko punkt na prostéj, należy przyjąć, iż oba owe położenia punktu C w nieskończoności odpowiadają jednemu punktowi na prostéj, t. j. iż (nieograniczona w obu kierunkach) *linija prosta, przechodząca w skończonéj odległości, posiada jeden tylko punkt w nieskończoności* *).

5. Podobnie przyjmiemy, że wartości $+\infty$ i $-\infty$, jakie przedstawia stosunek $\frac{AC}{BC}$ wtedy, kiedy punkt C zajmuje stanowisko w punkcie B (piérwszą, gdy punkt C dochodzi do położenia w B, dążąc z prawéj strony, a drugą, gdy punkt C zdążał do tegoż położenia z lewéj strony), są właściwie, jako odpowiadające jednemu punktowi, jedną wartością: nieskończenie wielką. Gdy więc idzie o liczbę, mającą w powyższy (us. 3) sposób odpowiadać położeniu punktu, to przy jéj wartości nieskończenie

---

*) Z tego wynika, że należy odpowiednio przyjąć, iż:

a. Jeden punkt na prostéj nie dzieli jéj na dwie części.

b. Dwa punkty na prostéj dzielą ją na dwa (tylko) odcinki; jeżeli oba te punkty są w odległości skończonéj, to na jednym odcinku znajduje się punkt w nieskończoności i ten odcinek jest nieskończenie wielki; jeżeli zaś jeden z owych punktów jest w nieskończoności, to oba odcinki są nieskończenie wielkie.

c. Gdy dane są trzy punkty na prostéj, to można po niéj od jednego któregokolwiek z tych punktów przejść do któregokolwiek z dwu pozostałych, nie przechodząc przez trzeci z tych punktów.

(Wogóle, prosta nieograniczona jest jakby okręgiem koła o nieskończenie wielkim promieniu; odcinek prostéj, znajdujący się w odległości skończonéj, jest jakby pewnym łukiem tego koła.)

wielkiéj nie mamyco tu zważać na znak téj wartości — który w badaniach innego rodzaju miéwa odpowiednią ważność.

Gdy to przyjmiemy, to już wówczas położeniu każdego punktu na prostéj, przedstawiającéj podstawę szeregu, odpowiada *jedna* tylko wartość stosunku odległości owego punktu od dwu punktów stałych na téj prostéj i, nawzajem, pewna wartość tego stosunku odpowiada *jednemu* tylko punktowi na owéj prostéj. Innymi słowy: *przy danych na prostéj dwu punktach stałych* A *i* B, *położenie jakiegokolwiek punktu* C *na téj prostéj może być dokładnie określone zapomocą stosunku* $\frac{AC}{BC}$.

Określając w taki sposób położenie punktu zapomocą stosunku długości dwu odcinków, wyrażamy je *liczbą oderwaną* (dodatną, lub ujemną), niezależną od tego, jaką jednostką długość owych odcinków była wymierzana — co jest wielce dogodne tak podczas przeprowadzania rozumowań, jak i w wysłowieniu prawd wywiedzionych.

PUNKTY W NIESKOŃCZONOŚCI. PROSTA W NIESKOŃCZONOŚCI.

6. Zamiast tego, aby mówić, że proste do siebie równoległe, przedłużane, z sobą się nie spotykają, mówi się: jakkolwiek daleko przedłużylibyśmy proste, do siebie równoległe, to punkt ich przecięcia znajduje się na większéj jeszcze odległości, albo: punkt przecięcia się prostych, do siebie równoległych, znajduje się w nieskończoności. Gdy umówimy się w taki właśnie sposób wyrażać się o prostych, do siebie równoległych, to, na zasadzie tego, że prosta posiada jeden tylko punkt w nieskończoności (us. 4), będziemy mogli powiedzieć, że: *jakiekolwiek dwie proste, na jednéj płaszczyźnie leżące, przecinają się w jednym punkcie* (tylko), czyli: *posiadają jeden punkt spólny.*

Z tego wynika, że *wszystkie proste, do siebie równoległe, przechodzą przez ten sam punkt w nieskończoności.*

Punkt w nieskończoności na pewnéj prostéj będziemy oznaczali: P_∞.

7. Dwie proste nierównoległe (na jednéj płaszczyźnie leżące) przecinają się w punkcie, leżącym w odległości skończonéj. Punkt w nieskończoności na jednéj z tych prostych jest różny od punktu w nieskończoności na drugiéj z nich (inaczéj bowiém te proste miałyby drugi punkt spólny, ów punkt w nieskończoności). Prosta, łącząca takie dwa punkty w nieskończoności, nie może przechodzić w odległości skończonéj, gdyż w takim razie miałaby tylko jeden punkt w nieskończoności (us. 4). Jest więc cała w nieskończoności.

Jeżeli weźmiemy pod uwagę kilka prostych, z których każde dwie przecinają się z sobą w odległości skończonéj, to każda prosta, łącząca punkty w nieskończoności którychkolwiek dwu z danych prostych, znajduje się w nieskończoności — a wszystkie są *jedną prostą w nieskończoności*. W takim bowiém tylko razie, jakakolwiek linija prosta, przechodząca w skończonéj odległości, ma jeden tylko punkt w nieskończoności (us. 4): punkt spotkania się z ową jedyną prostą w nieskończoności.

A więc, chociaż prowadząc na płaszczyźnie proste coraz w innym kierunku, miéć będziemy w kierunkach tych prostych coraz inne punkty w nieskończoności, t. j. miéć będziemy na płaszczyźnie nieskończenie wiele punktów w nieskończoności, to jednak z tego, cośmy wyżéj tylkoco tu powiedzieli, wynika, że *na płaszczyźnie wszystkie punkty w nieskończoności leżą na jednéj prostéj, prostéj w nieskończoności.*

Prostą w nieskończoności oznaczać będziemy: p_∞.