

GEOMETRJA ANALITYCZNA

KOMISJA WYDAWNICZA
TOW. BRATNIEJ POMOCY STUDENTÓW POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

Dr. WITOLD POGORZELSKI
PROFESOR POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

GEOMETRIA ANALITYCZNA

Z 203 RYSUNKAMI



WARSZAWA — 1931

i.z. 4515



~~C. 1799~~

~~D. 799.~~

Zakłady Drukarskie
F. Wyszynski i S-ka
Warszawa, Warecka 15



nr. 139

BG02P/551-08

Przedmowa.

Podręcznik niniejszy zawiera zasadnicze pojęcia Geometrii Analitycznej na płaszczyźnie i w przestrzeni w zakresie utworów drugiego stopnia. Przeznaczony jest on dla słuchaczy wyższych uczelni, jako pierwszy stopień studiów matematycznych. Ponieważ wykład Geometrii Analitycznej w szkołach wyższych odbywa się zwykle równolegle z wykładem pierwszych zasad Analizy Matematycznej, nie unikałem więc w tym podręczniku wyraźnego wprowadzania pojęcia pochodnej i założyłem, iż czytelnik zna zasady różniczkowania w zakresie elementarnym.

W końcu książki dodałem krótki zarys, poświęcony własnościom wyznacznika i równań linjowych, chcąc ułatwić czytelnikowi zapoznanie się z temi pojęciami, potrzebnymi w wykładzie Geometrii Analitycznej.

AUTOR.

Warszawa, w czerwcu 1931 r.

SPIS RZECZY.

CZĘŚĆ PIERWSZA.

GEOMETRIA ANALITYCZNA NA PŁASZCZYŹNIE.

ROZDZIAŁ I.

Współrzędne na płaszczyźnie. Wektory.

1. Uwaga wstępna	1
2. Współrzędne punktu	1
3. Położenie wektora na osi	4
4. Kąt między osiami	7
5. Wektor na płaszczyźnie i jego rzuty	9
6. Suma geometryczna wektorów	20
7. Cosinus kąta między osiami, Pole równoległoboku.	22
8. Współrzędne biegunowe	25
9. Zamiana współrzędnych prostokątnych	28
Ćwiczenia	31

ROZDZIAŁ II.

Wiadomości ogólne o linjach krzywych i ich równaniach.

10. Krzywa i pojęcie funkcji	32
11. Funkcja pierwszego stopnia i linja prosta	33
12. Inne przykłady funkcji i krzywych	35
13. Ogólne pojęcie równania krzywej	37
14. Równanie we współrzędnych biegunowych	41
15. Równania parametryczne krzywej	44
16. O przecięciu się krzywych	48
17. O układzie krzywych	50
Ćwiczenia	53

ROZDZIAŁ III.

Zagadnienia dotyczące linii prostej.

18. Równanie linii prostej	53
19. Równania parametryczne prostej	59
20. Kąt między dwiema prostymi	60
20a. Prosta przechodząca przez punkty dane	62

X

21. O przecięciu się dwóch prostych	65
22. O przecięciu się trzech prostych	66
23. Równanie prostej w postaci normalnej	69
24. Dwustosunek czterech punktów	74
ćwiczenia	75

ROZDZIAŁ IV.

Własności formy kwadratowej. Równanie jednorodne.

25. Określenie i własności formy kwadratowej	76
26. Zamiana zmiennych	79
27. Równanie jednorodne	80
ćwiczenia	83

ROZDZIAŁ V.

Styczna i normalna do krzywej.

28. Styczna do krzywej	81
29. Styczna do krzywej określonej przez równania parametryczne	87
30. Normalna do krzywej	88

ROZDZIAŁ VI.

Zagadnienia dotyczące koła.

30a. Równanie koła	89
31. O przecięciu się koła z prostą. Styczna do koła	92
32. Poszukiwanie kół spełniających dane warunki	96
33. O przecięciu się dwóch kół	99
34. O potędze punktu względem koła. Koła ortogonalne	101
ćwiczenia	103

ROZDZIAŁ VII.

Miejsca geometryczne.

35. Rozważania ogólne	104
36. Przykłady metody bezpośredniej	105
36a. Metoda rugowania parametru	111
37. Zagadnienia i przypadki szczególne rugowania	115
38. Zagadnienia z dwoma parametrami	123
39. Uwaga o rugowaniu funkcji trygonometrycznych	125
ćwiczenia	126

ROZDZIAŁ VIII.

Badanie krzywych drugiego stopnia.

40. Symetria krzywej względem prostej i środek krzywej	127
41. Uwagi ogólne dotyczące krzywych drugiego stopnia	129
42. Wyznaczenie środka i osi symetrii, Elipsa i hyperbola	131

XI

43. Badanie przypadku $B^2 - 4AC = 0$. Parabola	141
44. Warunek zwyrodnienia krzywej	148
45. O przecięciu się prostej z krzywą drugiego stopnia	151
46. Asymptoty hyperboli	156
47. Hyperbola równoosiowa	160
48. Parabola jako graniczne położenie punktów elipsy i hyperboli	163
49. Dowód, iż krzywa drugiego stopnia jest jednobieżna	161
Ćwiczenia	165

ROZDZIAŁ IX.

Ogniska i kierownice krzywych drugiego stopnia.

50. Określenie ogniska i kierownicy	167
51. Równanie krzywych drugiego stopnia we współrzędnych biegunowych	175
52. Przecięcia stożkowe	178

ROZDZIAŁ X.

Własności szczególne elipsy.

53. Elipsa i koło	180
54. Promień wodzący elipsy	183
55. Styczna i normalna do elipsy	185
56. Zagadnienia dotyczące stycznej do elipsy	190
Ćwiczenia	198

ROZDZIAŁ XI.

Własności szczególne hyperboli.

57. Promień wodzący hyperboli	199
58. Styczna i sieczna hyperboli	200
59. Zagadnienia	206
Ćwiczenia	209

ROZDZIAŁ XII.

Własności szczególne paraboli.

60. Własności stycznej do paraboli	210
61. Zagadnienia	214
Ćwiczenia	216

ROZDZIAŁ XIII.

Średnice sprzężone.

62. Średnica krzywej drugiego stopnia	217
63. Średnice sprzężone	219

XII

64. Wyznaczenie osi symetrii krzywej	223
65. Warunek równoległości lub wspólności asymptot i osi symetrii dwóch krzywych	224
Ćwiczenia	225

ROZDZIAŁ XIV.

Ogólna postać równania stycznej do krzywej drugiego stopnia.

Biegun i biegunowa.

66. Styczna do krzywej drugiego stopnia	226
67. Określenie biegunowej	228
Ćwiczenia	234

ROZDZIAŁ XV.

O przecięciu się krzywych drugiego stopnia.

68. Rozważania ogólne	235
69. Układ stożkowych przechodzących przez punkty przecięcia dwóch stożkowych danych	238
70. Ognisko jako punkt przecięcia stycznych izotropowych	241
Ćwiczenia	242

ROZDZIAŁ XVI.

Twierdzenia Pascala i Brianchona.

71. Twierdzenie Pascala	243
72. Twierdzenie Brianchona	246

ROZDZIAŁ XVII.

Zagadnienia dotyczące krzywych drugiego stopnia.

73. Wyznaczenie krzywych drugiego stopnia, spełniających dane wa- runki	247
74. Miejsca geometryczne	256
Ćwiczenia	268

ROZDZIAŁ XVIII.

Przekształcenia krzywych.

75. Uwagi ogólne	273
76. Jednokładność	273
77. Przekształcenie przez promienie odwrotne	274
78. Krzywe spodkowe	280
79. Przekształcenie przez biegunową wzajemną	282
Ćwiczenia	283

XIII

ROZDZIAŁ XIX.

Krzywe cykliczne.

80. Określenie	283
81. Cykloida	284
82. Hypocykloida i epicykloida	285

CZĘŚĆ DRUGA.

GEOMETRIA ANALITYCZNA W PRZESTRZENI.

ROZDZIAŁ I.

Współrzędne w przestrzeni.

1. Współrzędne prostokątne	289
2. Współrzędne biegunowe	291

ROZDZIAŁ II.

O wektorach w przestrzeni.

3. Kąty wektora z osiami i jego rzuty	292
4. Położenie wektora względem osi współrzędnych	295
5. Suma geometryczna wektorów	301
6. Iloczyn skalarny dwóch wektorów i kąt między wektorami	303
7. Iloczyn wektorowy dwóch wektorów	306
8. Objętość równoległościanu	311

ROZDZIAŁ III.

Zamiana współrzędnych prostokątnych.

9. Przypadek osi równoległych	312
10. Dwa trójkąty dowolne	313

ROZDZIAŁ IV.

O powierzchni i linii w przestrzeni.

11. Równanie powierzchni	316
12. Równania linii w przestrzeni	321
13. Równania parametryczne powierzchni	325

ROZDZIAŁ V.

Płaszczyzna i prosta w przestrzeni.

14. Równanie płaszczyzny	327
15. Kąt między płaszczyznami	331

XIV

16.	Prosta w przestrzeni	333
17.	Położenie prostej względem płaszczyzny	337
18.	Płaszczyzna przesunięta przez daną prostą	338

ROZDZIAŁ VI.

Zagadnienia dotyczące płaszczyzny i prostej.

19.	Przecięcie się trzech płaszczyzn i płaszczyzny z prostą	339
20.	Wyznaczanie płaszczyzn	341
21.	Zagadnienia dotyczące prostych	345
22.	Równanie płaszczyzny w postaci normalnej	352
	Ćwiczenia	353

ROZDZIAŁ VII.

Zagadnienia dotyczące kuli i koła w przestrzeni.

23.	Zagadnienia dotyczące kuli	356
24.	Koło w przestrzeni	358
	Ćwiczenia	359

ROZDZIAŁ VIII.

O powierzchniach utworzonych przez układy linii.

25.	Rozważania ogólne	360
26.	Powierzchnie obrotowe	362
27.	Powierzchnie stożkowe	366
28.	Powierzchnie walcowe	369
29.	Przykłady powierzchni prostokreślnych	371
	Ćwiczenia	373

ROZDZIAŁ IX.

Powierzchnie drugiego stopnia.

30.	Rozważania ogólne	375
31.	Powierzchnie drugiego stopnia, posiadające środek	378
32.	Powierzchnie drugiego stopnia bez środka	387
33.	Poszukiwanie środka powierzchni drugiego stopnia	392
34.	O przecięciu się prostej z powierzchnią drugiego stopnia	394
35.	Płaszczyzny średnicowe i średnice powierzchni	400
36.	Poszukiwanie osi i redukcja równania powierzchni posiadającej środek	413
	Ćwiczenia	415

ROZDZIAŁ X.

Płaszczyzna styczna do powierzchni drugiego stopnia.

37.	Styczna do linii w przestrzeni	416
38.	Płaszczyzna styczna do powierzchni drugiego stopnia	419
39.	Zagadnienia dotyczące płaszczyzny stycznej	423

DODATEK.

O wyznacznikach i równaniach linjowych.

1. Układ dwóch równań z dwiema niewiadomemi	426
2. Dwa równania jednorodne z dwiema niewiadomemi	429
3. Dwa równania jednorodne z trzema niewiadomemi	430
4. Ogólne określenie wyznacznika	432
5. Własności wyznacznika	436
6. Rozwinięcie wyznacznika na podwyznaczniki	438
7. Układ trzech równań linjowych z trzema niewiadomemi	442
8. Układ trzech równań jednorodnych z trzema niewiadomemi	450
9. Układ trzech równań z dwiema niewiadomemi	453
10. Układ trzech równań jednorodnych z czterema niewiadomemi	456
11. Układ n równań linjowych	458

Dostrzeżone omyłki druku	462
------------------------------------	-----

CZĘŚĆ I.

GEOMETRIA ANALITYCZNA NA PŁASZCZYŹNIE

ROZDZIAŁ I.

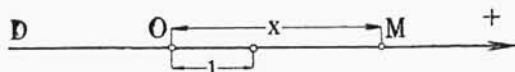
WSPÓŁRZĘDNE NA PŁASZCZYŹNIE. WEKTORY.

1. Uwaga wstępna.

Pojęciom geometrycznym, jak np. punktom i linjom, można podporządkować pewne pojęcia analityczne, mianowicie liczby i równania. Konstrukcjom geometrycznym i badaniom utworów geometrycznych odpowiadać wtedy będą pewne działania analityczne i rozumowania nad liczbami i równaniami. Przedmiotem Geometrii Analitycznej jest właśnie rozwiązywanie zagadnień geometrycznych przy pomocy rozważań nad elementami analitycznymi.

2. Współrzędne punktu.

Niech będzie dowolna prosta D i punkt na niej leżący O (rys. 1). Jeśli przyjmiemy pewien odcinek za jednostkowy, wtedy każdemu



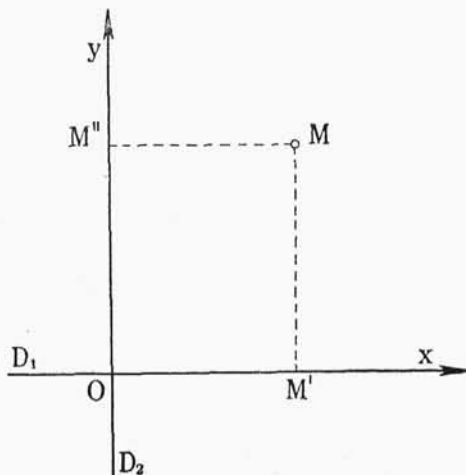
Rys. 1.

punktowi M prostej będziemy mogli podporządkować określoną liczbę x wymierną lub niewymierną, wyrażającą długość odcinka OM . Umówmy się, iż liczbę tę będziemy uważali za dodatnią, jeśli punkt M znajduje się po określonej stronie punktu O , np. na prawo, zaś w przeciwnym wypadku za ujemną. Liczba x w zu-

pełności określa położenie punktu M na prostej D , liczbę tę nazywamy współrzędną punktu M —jest to odpowiednik analityczny pojęcia punktu na prostej.

Prostą, na której, w związku ze znakiem współrzędnej, przyjęto pewien zwrot za dodatni, nazywać będziemy osią.

Rozważmy teraz położenie punktu na płaszczyźnie. Niech będą na płaszczyźnie dwie osi prostopadłe D_1 i D_2 (rys. 2), prze-



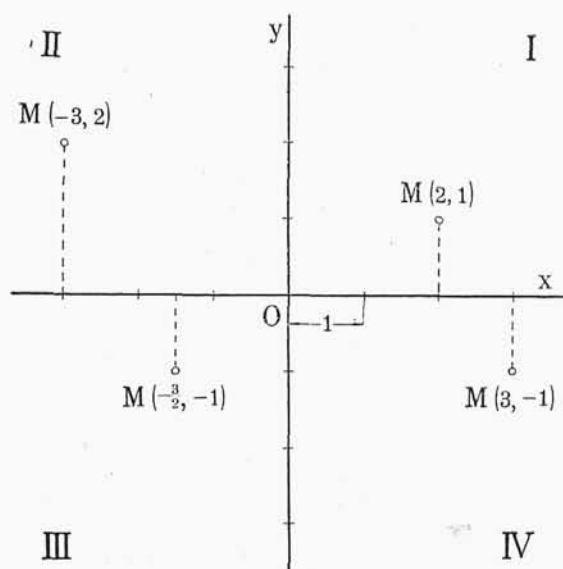
Rys. 2.

cinające się w punkcie O . Weźmy dowolny punkt płaszczyzny M i wyprowadźmy z niego prostopadłe MM' i MM'' do obydwóch osi, M' i M'' niech będą spodkami tych prostopadłych. Położenia punktów M' i M'' na osiach D_1 i D_2 będą określone przez współrzędne dodatnie lub ujemne

$$OM' = x \quad OM'' = y$$

Parze liczb (x, y) odpowiada, odwrotnie, tylko jeden punkt płaszczyzny M , para ta określa więc w zupełności położenie punktu M na płaszczyźnie względem osi D_1 i D_2 . Liczby x, y nazywamy współrzędnymi prostokątnymi punktu M na płaszczyźnie; jedną z nich np. x nazwiemy odciętą, zaś drugą y nazwiemy rzędną. Oś D_1 , wzdłuż której odmierzamy odcięte x , nazwiemy osią odciętych, zaś oś D_2 osią rzędnych. W celu zaznaczenia zwrotu dodatniego tych osi, stawiamy przy końcu osi, odpowiadającemu dodatniemu zwrotowi, literę x względnie y , lub inne litery, zależnie od symbolów przyjętych dla współrzędnych. Punkt przecięcia O osi nazwiemy początkiem współrzędnych,

odpowiada on parze liczb $(0,0)$. Danej dowolnie parze współrzędnych (x,y) odpowiada zawsze określony punkt płaszczyzny; dowolna para liczb (x,y) jest więc odpowiednikiem analitycznym pojęcia punktu na płaszczyźnie. W zagadnieniach Geometrii Analitycznej zdanie „dany jest punkt na płaszczyźnie“ oznaczać będzie „dana jest para liczb“. Dla zaznaczenia, iż liczby x i y są współrzędnymi punktu M , będziemy pisali w sposób następujący: $M(x,y)$. Osi współrzędnych Ox i Oy dzielą płaszczyznę na cztery części, które będziemy rozpatrywali w porządku, odpowiadającym obrotowi od Ox do Oy (rys. 3). Punkty, któ-

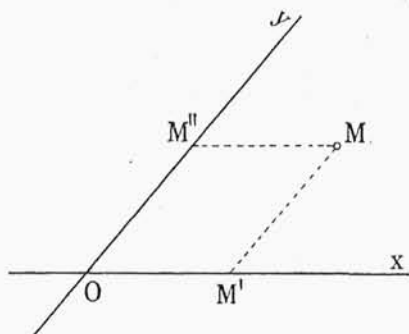


Rys. 3.

rych obydwie współrzędne są dodatnie, leżą w pierwszej ćwiartce np. punkt $M(2,1)$; punkty, których odcięta jest ujemna, zaś rzędna dodatnia, znajdują się w drugiej ćwiartce, np. punkt $M(-3,2)$; punkty, których obydwie współrzędne są ujemne, znajdują się w ćwiartce trzeciej, np. punkt $M(-\frac{3}{2}, -1)$; punkty wreszcie, których odcięta jest dodatnia, zaś rzędna ujemna, leżą w ćwiartce czwartej, np. punkt $M(3,-1)$. Punkty, których rzędna jest zerem ($y=0$) leżą na osi odciętych, zaś punkty, których odcięta jest zerem ($x=0$), leżą na osi rzędnych.

Powyżej określone współrzędne prostokątne są szczególnym przypadkiem t. zw. współrzędnych prostolinjowych lub kartezjańskich, które określimy, biorąc pod uwagę dwie osi

Ox i Oy wogóle nieprostopadłe względem siebie i prowadząc przez dany punkt płaszczyzny M dwie proste równoległe do tych osi (rys. 2a); w przecięciu z osiami Ox i Oy otrzymamy wtedy punkty M' i M'' , których współrzędne



Rys. 2a.

$$OM' = x \quad OM'' = y$$

określają również położenie punktu M na płaszczyźnie — będą to właśnie współrzędne prostoliniowe punktu M . W przypadku prostopadłości osi Ox i Oy , nazywamy te współrzędne prostokątnymi, zaś w razie pochyłości osi — współrzędnymi ukośnymi.

3. Położenie wektora na osi.

Wektorem nazywamy odcinek, mający określoną długość, położenie i zwrot w przestrzeni. Odpowiednio do zwrotu wektora, rozróżniamy jego początek i koniec. Pojęcie wektora odgrywa rolę zasadniczą w Geometrii Analitycznej, rozpatrzmy więc szczegółowiej jego własności elementarne.

Zajmiemy się wpierrw rozpatrzeniem wektorów, leżących na osi, to znaczy prostej, na której wybrano pewien zwrot za dodatni. Niech będzie dowolna oś Ox i wektor na niej leżący, posiadający początek w punkcie A , zaś koniec w punkcie B (rys. 4).



Rys. 4.

Miarą wektora na osi nazywać będziemy liczbę względną, równą długości danego wektora (w pewnych jednostkach) *opatrzonej znakiem dodatnim lub ujemnym, zależnie od tego, czy zwrot wektora na osi jest zgodny ze zwrotem tej osi, czy też jest przeciwny.*

Miarę wektora na osi, mającego początek A i koniec B , oznaczymy symbolem

$$\overline{AB}$$

Z umowy powyższej wynika, iż

$$\overline{BA} = -\overline{AB}$$

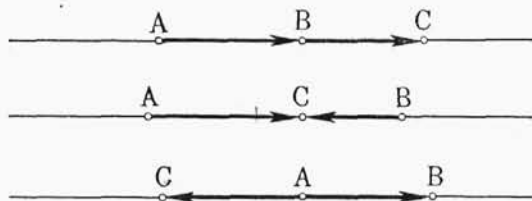
TWIERDZENIE CHASLES'A. Jeśli A, B, C oznaczają trzy dowolnie położone punkty na osi, to miary trzech wektorów

$$\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{AC}$$

spełniają zawsze związek

$$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$$

Słuszność tego związku spostrzegamy natychmiast, pamiętając o przyjętej umowie dla znaku miary wektora i biorąc pod uwagę trzy możliwe przypadki przedstawione na rys. 5: gdy punkt C leży na prawo od punktów A i B , gdy leży między nimi i gdy leży na lewo od nich, oraz trzy przypadki przez odwrócenie kolejności tych położań.



Rys. 5.

Z twierdzenia Chasles'a wynika następujący zasadniczy w Geometrii Analitycznej wniosek, dotyczący związku między miarą wektora na osi i współrzędnymi jego początku i końca.

WNIOSEK. Aby otrzymać miarę wektora na osi, należy od współrzędnej końca wektora odjąć współrzędną początku wektora.

Istotnie, jeśli O oznacza początek współrzędnych, A — początek wektora, zaś B jego koniec na osi Ox , to, według umowy dla znaku współrzędnych, współrzędna początku A wektora równa się mierze wektora \overline{OA} , zaś współrzędna końca B równa jest mierze \overline{OB} ; według twierdzenia Chasles'a dla trzech punktów osi O, A, B , niezależnie od tego, jakie położenie zajmuje początek współrzędnych O względem punktów A i B , będziemy mieli zawsze

$$\overline{OA} + \overline{AB} = \overline{OB}$$

stąd

$$(2) \quad \overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA}$$

c. b. d. d. Zaznaczymy jeszcze raz, że wzór otrzymany stosuje się w każdym wypadku, pod warunkiem, aby liczbę \overline{AB} i współrzędne \overline{OA} i \overline{OB} traktować jako wielkości opatrzone odpowiednim znakiem.

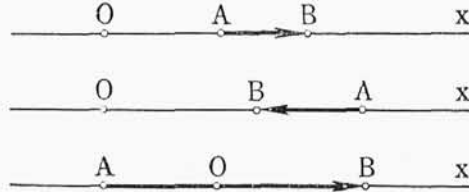
Przykład 1. Współrzędne początku i końca wektora wynoszą

$$\overline{OA} = 3; \quad \overline{OB} = 5;$$

wtedy miara wektora będzie

$$\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA} = 5 - 3 = 2.$$

Zwrot wektora jest więc zgodny ze zwrotem osi (rys. 6).



Rys. 6.

Przykład 2.

$$\overline{OA} = 7; \quad \overline{OB} = 4;$$

wtedy

$$\overline{AB} = 4 - 7 = -3;$$

wektor ma więc zwrot przeciwny względem zwrotu osi Ox .

Przykład 3.

$$\overline{OA} = -3; \quad \overline{OB} = 4;$$

wtedy

$$\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA} = 4 - (-3) = 7.$$

UOGÓLNIENIE TWIERDZENIA CHASLES'A. Niech będzie n dowolnie położonych punktów na osi

$$A_1, A_2, A_3, \dots, A_{n-1}, A_n.$$

Jeśli O jest początkiem współrzędnych, to mamy, według wzoru (2)

$$\overline{A_1 A_2} = \overline{OA_2} - \overline{OA_1}$$

$$\overline{A_2 A_3} = \overline{OA_3} - \overline{OA_2}$$

$$\overline{A_3 A_4} = \overline{OA_4} - \overline{OA_3}$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\overline{A_{n-1} A_n} = \overline{OA_n} - \overline{OA_{n-1}}$$

stąd, po dodaniu, wypada uogólnienie twierdzenia Chasles'a:

$$(3) \quad \overline{A_1 A_2} + \overline{A_2 A_3} + \overline{A_3 A_4} + \dots + \overline{A_{n-1} A_n} = \overline{OA_n} - \overline{OA_1} = \overline{A_1 A_n}$$