parametrów m, n, λ wyznaczymy, żądając, aby hyperbola przechodziła przez trzy dane punkty, otrzymamy warunki:

$$n+\lambda=0$$
$$6-2n+\lambda=0$$
$$6-3m-3n+\lambda=0$$

stąd

$$n=2;\quad \lambda=-2;\quad m=-\frac{2}{3};$$

a zatem szukane równanie będzie miało postać:

$$(2x+y-1)\left(y+\frac{2}{3}x-2\right)-2=0$$

ZAGADNIENIE 12. *Znaleść równanie układu parabol, których wierzchołkiem jest początek współrzędnych.*

Równanie układu wszelkich parabol na płaszczyźnie zawiera cztery parametry i ma postać

$$(y-mx)^2+\alpha x+\beta y+\gamma=0,$$

jeśli wykluczymy parabole z osiami równoległemi do Oy; m jest współczynnikiem kątowym osi paraboli. Aby otrzymać warunek, iż początek układu jest wierzchołkiem paraboli, wystarczy napisać, iż parabola przechodzi przez punkt $(0,0)$ i ma w tym punkcie *styczną prostopadłą do prostej* $y=mx$; otrzymamy w ten sposób związki

$$m\alpha-\beta=0;\quad \gamma=0$$

i równanie żądanego układu parabol w postaci

$$(y-mx)^2+\alpha x+m\alpha y=0$$

zawierającej już tylko *dwa parametry* dowolne m i α.

74. Miejsca geometryczne.

ZAGADNIENIE 1. *Rozważmy układ parabol z osiami równoległemi do osi* Oy, *które przechodzą przez punkt* $(0,1)$ *i są styczne do osi* Ox. *Znaleść miejsce geometryczne ognisk tych parabol.*

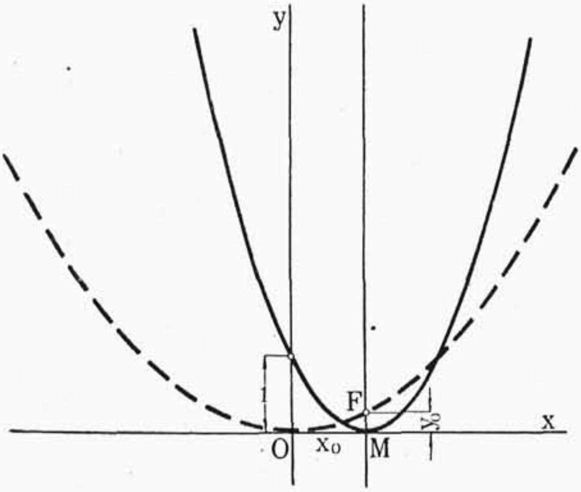
Parabole dane tworzą układ z jednym parametrem zmiennym, a zatem ogniska ich winny tworzyć linję krzywą. Żeby wyznaczyć jej równanie, należy wyrazić współrzędne ogniska paraboli jako funkcje zmiennego parametru. Oznaczmy przez (x_0, y_0) współrzędne ogniska F i obierzmy x_0 jako parametr zmienny. Parabola, styczna w wierzchołku $M(x_0, 0)$ do osi Ox, będzie miała równanie

$$y = \frac{1}{2p}(x - x_0)^2$$

parabola ta przechodzi przez punkt $(0, 1)$, więc $1 = \frac{x_0^2}{2p}$; stąd $p = \frac{1}{2}x_0^2$. Ale wiemy, iż odległość ogniska od wierzchołka wynosi $\frac{p}{2}$, a zatem

$$y_0 = \frac{1}{4}x_0^2$$

oznacza to, iż miejscem geometrycznem ognisk $F(x_0, y_0)$ układu parabol jest parabola z wierzchołkiem w punkcie O, symetryczna względem Oy (rys. 121).



Rys. 121.

ZAGADNIENIE 2. *Niech będzie układ parabol z osiami równoległemi do Oy, które przechodzą przez punkty* $(1, 0)$ i $(0, 1)$. *Wyznaczyć miejsce geometryczne wierzchołków tych parabol.* Równanie parabol ma postać

$$y = ax^2 + bx + c$$

ponieważ one przechodzą przez punkty $A(1,0)$; $B(0,1)$, a zatem

$$a+b+c=0;\ 1=c;$$

mamy więc układ parabol z jednym parametrem zmiennym a określony przez równanie

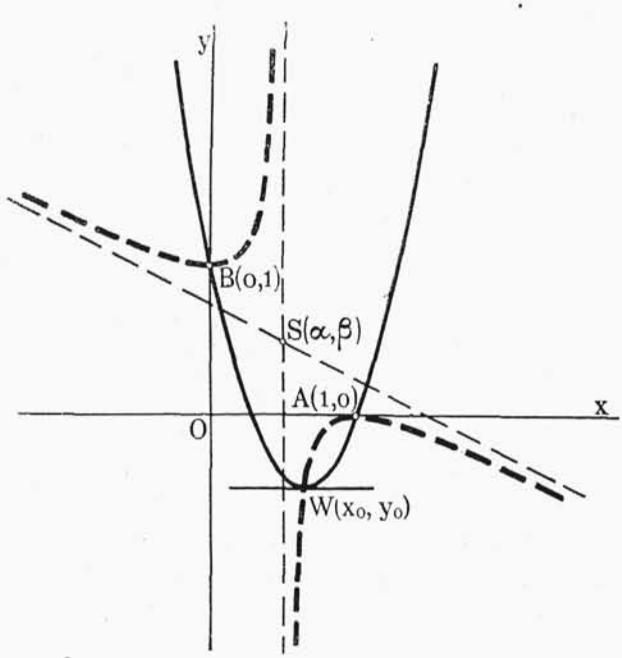
$$y=ax^2-(a+1)x+1$$

Ponieważ styczna w wierzchołku tych parabol jest równoległa do osi Ox, więc współrzędne (x_0, y_0) wierzchołka każdej z tych parabol określone są przez dwa związki

$$(1)\qquad \begin{cases} 2ax_0-(a+1)=0 \\ ax_0^2-(a+1)x_0+1=y_0 \end{cases}$$

Gdy zmienia się parametr a, punkt (x_0, y_0) opisuje krzywą, której równanie otrzymamy, rugując parametr a z równań (1), wypadnie związek

$$x_0^2+2x_0y_0-2x_0-y_0+1=0;$$



Rys. 122.

miejscem geometrycznem wierzchołków układu parabol danych jest więc hyperbola. Środek $S(\alpha, \beta)$ tej hyperboli spełnia równania

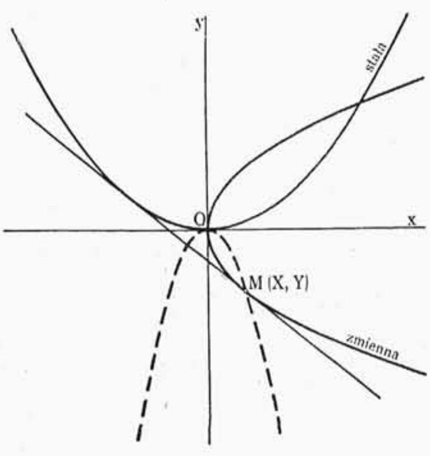
$$2\alpha + 2\beta - 2 = 0$$

$$2\alpha - 1 = 0$$

posiada więc współrzędne $\alpha = \frac{1}{2}; \beta = \frac{1}{2}$. Kierunki asymptotyczne dane są przez równanie $X^2 + 2XY = 0$; a więc asymptoty przechodzą przez punkt $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ i jedna z nich jest równoległa do osi Oy, a druga do prostej $Y = -\frac{1}{2}X$ (rys. 122). Nadto widzimy, iż hyperbola przechodzi przez punkty A i B i ma w tych punktach styczne równoległe do osi Ox

ZAGADNIENIE 3. *Dana jest parabola stała $y = x^2$ i układ parabol o równaniu $y^2 = 2px$ z parametrem zmiennym p. Znaleść wspólną styczną paraboli stałej i zmiennej i następnie miejsce geometryczne punktów styczności M tej wspólnej stycznej z parabolą zmienną.* Niech będzie $Y = mX + n$ równaniem wspólnej stycznej. Aby ona była styczna do paraboli stałej $y = x^2$ i jednocześnie do zmiennej $y^2 = 2px$, trzeba i wystarcza, żeby równania

$$mX + n = X^2;\; Y = m\frac{Y^2}{2p} + n$$



Rys. 123.

miały pierwiastki podwójne, stąd wypływają dwa związki

$$m^2+4n=0$$

$$1-\frac{4mn}{2p}=0$$

zatem

$$m=-\sqrt[3]{2p}; \qquad n=-\frac{1}{4}\sqrt[3]{4p^2}$$

Rzędna punktu styczności M ze zmienną parabolą ma wartość

$$Y=\frac{p}{m}=-\frac{p}{\sqrt[3]{2p}}$$

a ponieważ $Y^2=2pX$, rugując więc zmienny parametr p, otrzymamy szukaną krzywą o równaniu

$$Y=-8X^2$$

to znaczy *parabolę*, położoną poniżej osi Ox (rys. 123).

ZAGADNIENIE 4. *Dany jest układ krzywych drugiego stopnia, opisanych na danym czworokącie, znaleść miejsce geometryczne środków tych krzywych.*

Przypuśćmy iż wierzchołki danego czworokąta mają następujące współrzędne:

$$A(1,0); \quad B(3,0); \quad C(0,1); \quad D(-1,3)$$

Równanie układu stożkowych, jako przechodzących przez punkty przecięcia się pary prostych (AB, CD) z parą (AC, BD), będzie miało postać

$$f\equiv(x+y-1)(3x+4y-9)+\lambda y(y+2x-1)=0$$

gdzie λ jest parametrem zmiennym.

Współrzędne środków (x_0, y_0) tych krzywych spełniają układ równań

$$f'_x(x_0, y_0)=6x_0+7y_0-12+2\lambda y_0=0$$

$$f'_y(x_0, y_0)=7x_0+8y_0-13+\lambda(2y_0+2x_0-1)=0$$

rugując parametr λ, otrzymamy stąd równanie żądanego miejsca geometrycznego

$$12x_0^2+12x_0y_0-2y_0^2-30x_0-5y_0+12=0$$

jest to pewna hyperbola.

ZAGADNIENIE 5. *Znaleść miejsce geometryczne środków hyperbol równoosiowych, opisanych na danym trójkącie ABC.*

Obierzmy jako oś Ox prostą AB, zaś prostopadłą, przechodzącą przez wierzchołek C, jako oś Oy. Współrzędne wierzchołków danego trójkąta niech będą takie:

$$(a, 0)\,;\,(b, 0)\,;\,(0\,, c)$$

Równanie ogólne hyperbol równoosiowych ma postać

$$A x^2 + B x y - A y^2 + D x + E y + F = 0$$

lub

$$x^2 + \alpha x y - y^2 + \beta x + \gamma y + \delta = 0$$

wykluczając wypadek $A = 0$. Żądając, aby ta hyperbola przecinała oś Ox w punktach $(a, 0)$ i $(b, 0)$, otrzymamy

$$\beta = -(a + b)\,; \quad \delta = a b\,;$$

aby zaś przechodziła przez punkt $(0\,, c)$, winno być

$$- c^2 + \gamma c + \delta = 0;$$

hyperbole, opisane na danym trójkącie, tworzą więc układ z jednym parametrem zmiennym α, określony przez równanie

$$f(x\,, y) = x^2 + \alpha x y - y^2 - (a + b)\, x + \left(c - \frac{a b}{c}\right) y + a b = 0.$$

Współrzędne środka tych hyperbol $(x_0\,, y_0)$ spełniają równania

$$\begin{cases} f'_x = 2 x_0 + \alpha y_0 - (a + b) = 0 \\ f'_y = \alpha x_0 - 2 y_0 + \left(c - \dfrac{a b}{c}\right) = 0 \end{cases}$$

rugując z tych równań parametr zmienny α, otrzymamy równanie

$$x_0^2 + y_0^2 - \frac{1}{2} x_0 (a + b) - \frac{1}{2} \left(c - \frac{a b}{c}\right) y_0 = 0$$

żądane miejsce geometryczne jest więc k o ł e m.

Koło to, jak łatwo sprawdzić, przechodzi przez środki boków danego trójkąta, jest to więc *koło dziewięciu punktów* (patrz ćwicz. 6 na str. 104).

ZAGADNIENIE 6. Rozważmy układ stożkowych, stycznych w punktach (1,0) i (0,1) do osi współrzędnych i prostą o równaniu $2X+Y+1=0$. Wyznaczyć miejsce geometryczne biegunów tej prostej względem stożkowych danego układu.

Punkty (1,0) i (0,1) są to punkty przecięcia pary $xy=0$ z prostą $x+y-1=0$, a więc, według artykułu 69, równanie stożkowych danego układu ma postać

$$\lambda xy+(x+y-1)^2=0$$

gdzie λ jest parametrem zmiennym. Według art. 67, biegunowa punktu (x_0, y_0) względem tej stożkowej ma równanie

$$Xx_0+\frac{1}{2}(\lambda+2)(y_0X+x_0Y)+Yy_0-(X+x_0)-(Y+y_0)+1=0$$

a ponieważ ma być nią prosta

$$2X+Y+1=0,$$

więc jej biegun (x_0, y_0) spełniać winien związki:

$$\frac{x_0+\frac{1}{2}(\lambda+2)y_0-1}{2}=\frac{\frac{1}{2}(\lambda+2)x_0+y_0-1}{1}=\frac{-x_0-y_0+1}{1};$$

rugując z tych dwóch związków parametr zmienny λ, otrzymamy takie równanie:

$$3x_0^2+x_0y_0-2y_0^2-3x_0+2y_0=0$$

które przedstawia dwie proste o równaniach

$$x_0+y_0=1 \text{ i } 3x_0-2y_0=0$$

Szukanem miejscem geometrycznem jest tylko prosta

$$3x_0-2y_0=0$$

druga prosta bowiem jest sieczną, łączącą punkty styczności dane i odpowiadającą wartości $\lambda=0$.

ZAGADNIENIE 7. Z punktu stałego $P(\alpha,\beta)$ wyprowadzono styczne do układu hyperbol o równaniu $xy=C$, gdzie C jest parametrem zmiennym. Wyznaczyć miejsce geometryczne punktów styczności.

Punkty styczności są przecięciem danej hyperboli z biegunową punktu $P(\alpha, \beta)$, a więc współrzędne (x, y) tych punktów spełniają równania

$$x y = C$$

$$\frac{1}{2}(x \beta + y \alpha) = C$$

Jeśli zmieniamy wartość C, to punkty styczności opiszą krzywą, której równanie otrzymamy, rugując C z dwóch związków powyższych, wypadnie

$$2 x y - \beta x - \alpha y = 0$$

Szukane miejsce geometryczne jest więc hyperbolą równoosiową z asymptotami równoległemi do osi współrzędnych.

ZAGADNIENIE 8. *Niech będzie układ krzywych, mających stałe ognisko F i odpowiednią stałą kierownicę D. Znaleść:* 1°) *m. g. wierzchołków tych krzywych;* 2°) *m. g. punktów styczności tych krzywych, w których styczne przechodzą przez dany stały punkt P.*

1°. Obierzmy kierownicę daną, jako oś $O y$, zaś prostopadłą, przechodzącą przez odpowiednie dane ognisko F, jako oś $O x$; niech $(a, 0)$ oznaczają dane współrzędne ogniska F, założymy, iż $a > 0$. Równanie rozważanego układu krzywych będzie miało postać

$$f(x, y) = (x - a)^2 + y^2 - \lambda x^2 = 0$$

gdzie λ jest parametrem zmiennym, przedstawiającym kwadrat mimośrodu tych krzywych.

Poza wierzchołkami rozważanych krzywych, leżącemi na osi $O x$, pozostałe wierzchołki są to punkty, w których styczne są równoległe do osi $O x$, a więc spełniają równanie

$$f'_x = 2(x - a) - 2 \lambda x = 0;$$

rugując teraz parametr λ z dwóch powyższych równań $f = 0$ i $f'_x = 0$, określających położenie wierzchołka, otrzymamy równanie żądanego miejsca geometrycznego w postaci

$$y^2 - a x + a^2 = 0$$

żądane miejsce geometryczne, poza osią $O x$, jest więc parabolą, zwróconą w dodatnim kierunku osi $O x$, której osią symetrji jest oś $O x$ i której wierzchołkiem jest dane ognisko $F(a, 0)$.

Ponieważ wartość parametru

$$\lambda = \frac{x-a}{a}$$

dla wszystkich punktów otrzymanej paraboli spełnia warunek $0 < \lambda < 1$, a zatem wszystkie punkty tej paraboli, z wyjątkiem wierzchołka, są wierzchołkami elips danego układu.

2°. Punkty styczności stycznych do krzywych danego układu, wyprowadzonych z danego stałego punktu $P(\alpha, \beta)$, są przecięciem każdej z krzywych z odpowiednią biegunową, spełniają więc dwa równania

$$f(x, y) = (1-\lambda)x^2 + y^2 - 2ax + a^2 = 0;$$
$$(1-\lambda)x\alpha + y\beta - a(x+\alpha) + a^2 = 0;$$

rugując z nich parametr zmienny λ, otrzymamy równanie żądanego miejsca geometrycznego

$$ax^2 - \beta xy + \alpha y^2 - a(a+\alpha)x + a^2\alpha = 0$$

Jest to krzywa drugiego stopnia, której postać zależy od znaku wyróżnika $\beta^2 - 4a\alpha$; dyskusję pozostawiamy czytelnikowi.

ZAGADNIENIE 9. Dany jest układ stycznych do hyperboli $xy = 1$, wyznaczyć miejsce geometryczne biegunów tych stycznych względem elipsy $2x^2 + 3y^2 = 5$.

Jeśli (x_0, y_0) są współrzędnemi bieguna, to biegunowa jego względem danej elipsy będzie miała równanie

$$2xx_0 + 3yy_0 = 5;$$

otóż równanie szukanego miejsca geometrycznego otrzymamy najprościej, żądając aby ta biegunowa była styczną do hyperboli $xy = 1$; piszemy więc równanie, określające punkty wspólne biegunowej i hyperboli,

$$2xx_0 + 3\frac{1}{x}y_0 = 5$$

lub

$$2x_0x^2 - 5x + 3y_0 = 0$$

i przyrównywując do zera wyróżnik, osiągniemy związek

$$24x_0y_0 = 25$$

będący właśnie równaniem żądanego miejsca geometrycznego—jest to hyperbola równoosiowa.

ZAGADNIENIE 10. *Znaleść miejsce geometryczne środków kół wpisanych w trójkąt ABC, którego podstawa AB jest stała, zaś suma boków pozostałych ma wartość daną s:*

$$AC + BC = s$$

Obierzmy jako oś Ox prostą, na której leży podstawa trójkąta AB, a jako oś Oy prostopadłą, wystawioną ze środka boku AB. Niech $(a, 0)$ będą współrzędnemi punktu A, zaś $(-a, 0)$ — punktu B; założymy, iż $a > 0$.

Współrzędne (x_0, y_0) środka koła wpisanego S w trójkąt, jako przecięcia dwusiecznych kątów A i B, spełniają równania

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} y_0 &= -tg\frac{\alpha}{2}(x_0 - a) \\ y_0 &= tg\frac{\beta}{2}(x_0 + a) \end{aligned} \right.$$

gdzie przez α i β oznaczono kąty wewnętrzne trójkąta przy A i przy B.

Mamy jednak z trójkąta ABC

$$AC = 2a\frac{\operatorname{Sin}\beta}{\operatorname{Sin}(\alpha+\beta)}; \qquad BC = 2a\frac{\operatorname{Sin}\alpha}{\operatorname{Sin}(\alpha+\beta)}$$

stałość sumy tych boków wyrazi się więc następującym związkiem między kątami α i β:

$$\frac{\operatorname{Sin}\alpha + \operatorname{Sin}\beta}{\operatorname{Sin}(\alpha+\beta)} = \frac{s}{2a}$$

stąd, po przekształceniu trygonometrycznem, wypada

$$\frac{1 + tg\frac{\alpha}{2}\cdot tg\frac{\beta}{2}}{1 - tg\frac{\alpha}{2}\cdot tg\frac{\beta}{2}} = \frac{s}{2a}.$$

rugując teraz wartości $tg\frac{\alpha}{2}$ i $tg\frac{\beta}{2}$ z powyższego związku i ze związków (2), otrzymamy równanie szukanego miejsca geometrycznego

$$\left(\frac{s}{2a} - 1\right)x_0^2 + \left(\frac{s}{2a} + 1\right)y_0^2 = a^2\left(\frac{s}{2a} - 1\right)$$

ponieważ zaś z założenia winno być

$$\frac{s}{2a} > 1,$$

otrzymane miejsce jest więc elipsą, odniesioną do osi symetrji.

ZAGADNIENIE 11. *Rozważmy układ hyperbol, opisanych na danym trójkącie prostokątnym AOB, których asymptoty są równoległe do przyprostokątnych OA i OB. Znaleść miejsce geometryczne wierzchołków tych hyperbol.*

Niech osi współrzędnych schodzą się z przyprostokątnemi danego trójkąta i niech $(a, 0)$ i $(0, b)$ będą współrzędnemi wierzchołków A i B.

Równanie hyperbol, z asymptotami równoległemi do osi współrzędnych, ma postać

$$xy + \alpha x + \beta y + \gamma = 0$$

żądając, aby hyperbole przechodziły przez punkty $A(a, 0)$ i $B(0, b)$, mamy

$$\alpha a + \gamma = 0; \qquad \beta b + \gamma = 0$$

dany układ hyperbol przedstawia więc równanie

$$f(x, y) = xy - \frac{\gamma}{a} x - \frac{\gamma}{b} y + \gamma = 0$$

z jednym parametrem zmiennym γ.

Osi symetrji tych hyperbol, jako dwusieczne kąta utworzonego przez asymptoty, będą miały współczynniki kątowe

$$m_1 = +1 \text{ i } m_2 = -1$$

a więc, według równania średnicy

$$f'_x(x, y) + m f'_y(x, y) = 0,$$

dwie osi symetrji danych hyperbol będą miały równania

$$\begin{cases} f'_x(x, y) + f'_y(x, y) = 0 \\ f'_x(x, y) - f'_y(x, y) = 0 \end{cases}$$

a zatem

$$\begin{cases} \left(y - \frac{\gamma}{a}\right) + \left(x - \frac{\gamma}{b}\right) = 0 \\ \left(y - \frac{\gamma}{a}\right) - \left(x - \frac{\gamma}{b}\right) = 0 \end{cases}$$

Osi te przecinają hyperbolę w punktach, będących jej wierzchołkami. Wierzchołki danych hyperbol określone są więc przez parę równań

$$\begin{cases} xy - \gamma\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1\right) = 0 \\ x + y - \gamma\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = 0 \end{cases}$$

i przez parę równań

$$\begin{cases} xy - \gamma\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1\right) = 0 \\ y - x - \gamma\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) = 0 \end{cases}$$

Rugując parametr zmienny γ w każdym z tych dwóch układów równań, otrzymamy dwa równania

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} - x - y = 0$$

$$\frac{x^2}{a} - \frac{y^2}{b} - x + y = 0$$

Żądanem miejscem geometrycznem jest więc elipsa i hyperbola; krzywe te mają wspólny środek $\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$, osi równoległe do przyprostokątnych danego trójkąta i są obie na nim opisane.

ZAGADNIENIE 12. *Rozważmy układ krzywych drugiego stopnia, których jedną z kierownic jest prosta stała dana* $x + y = a$ *i które są styczne w początku układu do osi* Ox. *Znaleść miejsce geometryczne ognisk tych krzywych, odpowiadających danej kierownicy.*

Jeśli (x_0, y_0) oznaczają współrzędne ogniska, odpowiadającego kierownicy $x + y - a = 0$, to równanie krzywej drugiego stopnia będzie miało postać

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - \lambda (x + y - a)^2 = 0;$$

podstawiając $y = 0$ i żądając, aby otrzymane równanie miało pierwiastek podwójny $x = 0$, będziemy mieli związki

$$x_0^2 + y_0^2 = \lambda a^2$$

$$x_0 = \lambda a$$

rugując zaś stąd parametr zmienny λ, mamy

$$x_0^2 + y_0^2 - a x_0 = 0$$

Miejscem geometrycznym ognisk jest więc okrąg koła, którego środek leży w punkcie $\left(\frac{a}{2}, 0\right)$ i które jest styczne w początku układu do osi Oy.

Z równania krzywej widzimy, iż w przypadku $\lambda < \frac{1}{2}$ przedstawia ono elipsę, w przypadku $\lambda = \frac{1}{2}$ — parabolę i w przypadku $\lambda > \frac{1}{2}$ — hyperbolę; ponieważ zaś $x_0 = \lambda a$, a więc punkty znalezionego koła są ogniskami elips, hyperbol lub parabol, zależnie od tego, czy x_0 jest mniejsze, większe lub równe $\frac{1}{2} a$.

ZAGADNIENIE 13. *Znaleść m. g. spodków M normalnych, wyprowadzonych ze stałego punktu A* $(\alpha, 0)$ *do układu parabol o równaniu* $y^2 = 2Cx$ *ze zmiennym parametrem* C.

Spodki normalnych $M(x, y)$ czynią zadość dwóm równaniom

$$\begin{cases} y^2 = 2Cx \\ \alpha = x + C \end{cases}$$

rugując stąd parametr C, otrzymamy równanie żądanego miejsca geometrycznego

$$2x^2 + y^2 - 2\alpha x = 0;$$

jest to elipsa, której osi są równoległe do osi współrzędnych i której środkiem jest punkt $\left(\frac{\alpha}{2}, 0\right)$

Ćwiczenia *).

1. Znaleść równanie paraboli z osią równoległą do Oy, która przechodzi przez punkty $(1, 1)$; $(-1, 0)$ i jest styczna do prostej $y = x - 1$.

2. Znaleść równanie paraboli, która jest styczna w punktach $(1, 0)$ i $(0, 2)$ do osi współrzędnych; znaleść oś i wierzchołek tej paraboli.

3. Znaleść równanie paraboli, która przechodzi przez punkty $(1, 0)$ i $(0, 2)$ i która posiada wierzchołek w początku układu.

4. Znaleść równanie krzywej drugiego stopnia, przechodzącej przez cztery dane punkty

$$(1, 0);\quad (2, 0);\quad (0, 1);\quad (0, 3)$$

i stycznej do prostej $y = -x$.

*) Niektóre zagadnienia tu podane, jak również rozwiązane poprzednio, były tematami egzaminów konkursowych w wyższych uczelniach francuskich; czerpaliśmy je częściowo z obszernego zbioru zagadnień MOSNAT: *Problèmes de géométrie analytique.*

5. Znaleść równanie hyperboli równoosiowej, przechodzącej przez dane cztery punkty

$$(1, 1); \quad (2, 0); \quad (3, 2); \quad (4, 0);$$

określić położenie środka i asymptoty.

6. Znaleść równanie krzywej drugiego stopnia, opisanej na trójkącie

$$A\ (0, 0); \quad B\ (1, 0); \quad C\ (0, 2)$$

i stycznej do prostej $y = -x - 2$ w punkcie $(-1, -1)$.

7. Znaleść równanie hyperboli, której asymptotami są proste

$$y = x; \qquad 2x + y = 1$$

i która jest styczna do prostej $y = 0$.

8. Znaleść równanie hyperboli, której jedną asymptotą jest prosta

$$2x - y = 1,$$

która jest styczna do osi Ox i przechodzi nadto przez punkty $(0, 2)$ i $(0, 3)$.

9. Znaleść równanie paraboli, której oś jest równoległa do prostej $y = x$, która przechodzi przez punkt $(0, 1)$ i względem której początek układu jest biegunem prostej

$$2x + y + 1 = 0.$$

10. Znaleść równanie elipsy, której osi symetrji schodzą się z osiami współrzędnych, wiedząc, iż punkt $(1, 2)$ jest biegunem prostej

$$x + y - 1 = 0.$$

11. Znaleść równanie hyperboli, spełniającej następujące warunki: a) asymptoty są równoległe do osi współrzędnych; b) początek układu jest biegunem prostej

$$x + y + 1 = 0;$$

c) punkt $(1, 2)$ należy do hyperboli.

12. Znaleść równanie paraboli, mając dane jej ognisko i dwa jej punkty.

13. Wyznaczyć krzywą drugiego stopnia, mając daną jej kierownicę i trzy punkty krzywej.

14. Znaleść równanie układu hyperbol, mających wspólną daną jedną asymptotę i których wierzchołkiem jest dany punkt.

15. Znaleść równanie układu hyperbol, których kierownicą jest dana prosta D_1 i których jedną z asymptot jest druga dana prosta D_2.

16. Znaleść równanie układu krzywych drugiego stopnia, których jeden wierzchołek znajduje się w początku układu.

17. Znaleść równanie układu krzywych dla których początek współrzędnych jest biegunem prostej $x = a$.

18. Znaleść miejsce geometryczne środków krzywych drugiego stopnia, stycznych w punktach danych $A\ (a, 0)$ i $B\ (0, b)$ do osi współrzędnych.

19. Dowieść, iż miejscem geometrycznem środków krzywych drugiego stopnia, opisanych na danym trapezie, jest linja prosta.

20. Niech będzie układ hyperbol równoosiowych, stycznych w początku układu do osi Ox i przechodzących przez punkt $(0, 1)$. Znaleść m. g. środków tych hyperbol.

21. Znaleść m. g. środków krzywych układu, określonego przez równanie

$$x^2 + Cxy + y^2 + Cx = 0$$

gdzie C jest parametrem zmiennym.

22. Niech będzie układ parabol z osiami równoległemi do Ox, które są styczne w początku układu do prostej

$$y = 3x.$$

Znaleść m. g. punktów tych parabol, w których styczne są równoległe do prostej $y = x$.

23. Niech będzie układ krzywych drugiego stopnia, przechodzących przez dwa dane punkty A i B i stycznych do danej prostej D w danym punkcie C. Znaleść m. g. środków tych krzywych.

24. Dany jest układ prostych stycznych do paraboli

$$y = x^2.$$

Znaleść miejsce geometryczne biegunów tych prostych względem elipsy

$$2x^2 + y^2 = 1.$$

25. Z punktu stałego (α, β) wyprowadzone styczne do układu parabol

$$y^2 = 2px$$

ze zmiennym parametrem p. Znaleść miejsce geometryczne punktów styczności.

26. Wyznaczyć miejsce geometryczne środków kół stycznych do danej prostej, które są widziane z danego punktu pod kątem prostym.

27. Rozważmy układ parabol z osiami równoległemi do Ox, które są styczne w początku współrzędnych do danej prostej stałej

$$y = mx.$$

Znałeść miejsce geometryczne punktów styczności prostych stycznych, wyprowadzonych do tych parabol ze stałego punktu $A(\alpha, \beta)$.

28. Niech będzie układ hyperbol równoosiowych, opisanych na stałym trójkącie prostokątnym. Znaleść miejsce geometryczne punktów styczności prostych stycznych, równoległych do jednego z boków.

29. Znaleść miejsce geometryczne wierzchołków C trójkąta ABC, którego podstawa AB jest stała i w którym kąt A jest dwa razy większy od kąta B.

30. Znaleść miejsce geometryczne biegunów względem danego koła prostej, która toczy się po innym danym kole.

31. Jeśli $P = 0$; $Q = 0$; $R = 0$ są równaniami boków trójkąta, to układ krzywych drugiego stopnia, opisanych na tym trójkącie, przedstawia równanie

$$\lambda_1 PQ + \lambda_2 PR + \lambda_3 QR = 0,$$

gdzie $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ są to stałe dowolne.

32. Dane jest koło

$$x^2 + y^2 - R^2 = 0$$

i stały punkt $P(a, 0)$. Niech A, B oznaczają punkty przecięcia się koła z osią Ox, zaś C, D punkty przecięcia się koła z dowolną sieczną, wychodzącą z punktu P. Znaleść równanie hyperboli równoosiowej, przechodzącej przez cztery punkty $ABCD$. Znaleść następnie m. g. środków tych hyperbol, gdy sieczna PCD obraca się dokoła punktu P.

33. Dany jest układ elips, określonych przez równanie

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

gdzie a jest stałą, zaś b jest parametrem zmiennym. Z punktu stałego (α, β) wyprowadzono styczne do tych elips; znaleść m. g. punktów styczności.

34. Niech będzie układ krzywych drugiego stopnia, opisanych na danym czworokącie. Znaleść m. g. biegunów względem tych krzywych danej stałej prostej D.

35. Dany jest układ krzywych określonych przez równanie

$$\lambda x(x - a) + ay(y - x + a) = 0,$$

gdzie a jest stałym odcinkiem, zaś λ parametrem zmiennym. 1^0) Dowieść, iż krzywe te przechodzą przez trzy punkty stałe; 2^0) wskazać rodzaj tych krzywych, zależnie od λ; 3^0) znaleść m. g. punktów, w których styczne do danych krzywych są równoległe do osi Ox.

36. Dany jest układ kół, przechodzących przez punkt stały A i odcinających na danej prostej D, nieprzechodzącej przez A, cięciwę o stałej długości. Znaleść m. g. środków tych kół.

37. Rozważmy układ parabol z osiami równoległemi do Oy, które przechodzą przez punkty $(1, 0)$ i $(0, 1)$. Z punktu $(0, -1)$ wyprowadzono styczne do tych parabol. Znaleść m. g. punktów styczności.

38. Dane są dwa stałe punkty A i B. Rozważmy dwa koła, mające środki A i B i styczne do prostej o stałym kierunku. Znaleść m. g. punktów przecięcia tych kół.

39. Znaleść m. g. punktów krzywych o równaniu

$$\frac{x^2}{\lambda} + \frac{y^2}{\lambda - c^2} - 1 = 0$$

ze zmiennym parametrem λ, w których styczne są równoległe do danej prostej.

40. Ze stałego punktu M wyprowadzono styczne do układu elips, mających jednakowy stosunek osi i wspólne osi symetrji. Znaleść m. g. punktów styczności.

41. Dany jest układ hyperbol, przechodzących przez dany punkt A, których jedną z asymptot jest dana prosta D, zaś drugą asymptotą jest równoległa do danej drugiej prostej D'. Znaleść m. g. wierzchołków tych hyperbol.

42. Znaleść m. g. ognisk parabol, które są styczne do osi Ox w punkcie danym A i do osi Oy w punkcie dowolnym.

43. Dany jest układ hyperbol równoosiowych, które przechodzą przez dany punkt $A(a, 0)$ i których kierownicą jest oś Oy. Znaleść: 1⁰) miejsce geometryczne ognisk tych hyperbol, odpowiadających stałej kierownicy Oy; 2⁰) m. g. środków tych hyperbol; 3⁰) m. g. ich wierzchołków.

44. Dany jest układ krzywych drugiego stopnia, których jednem z ognisk jest dany punkt F i które przechodzą przez dwa dane punkty A i B.

1⁰) Dowieść, iż dany układ rozkłada się na dwa zbiory krzywych takie, iż kierownice krzywych każdego z tych zbiorów, odpowiadające danemu ognisku F, przechodzą przez punkt stały, leżący na prostej AB.

2⁰) Znaleść m. g. środków danych krzywych i udowodnić, iż ono składa się z dwóch krzywych drugiego stopnia współogniskowych.

45. Dany jest układ krzywych drugiego stopnia, stycznych w punktach $(a, 0)$ i $(0, a)$ do osi współrzędnych. Znaleść m. g. wierzchołków tych krzywych i m. g. ich ognisk.

46. Rozważmy układ parabol, przechodzących przez dwa punkty stałe, których osi są równoległe do danej prostej. Znaleść m. g. ognisk tych parabol.

47. Dany jest układ parabol, określonych przez równanie

$$y^2 = 2Cx$$

ze zmiennym parametrem C i stały punkt $A(\alpha, \beta)$. Znaleść miejsce geometryczne rzutów danego punktu A na jego biegunowe względem danych parabol.

48. Dany jest układ elips o równaniu

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

gdzie a jest stałe, zaś b jest parametrem zmiennym. Z punktu stałego $(0, \beta)$ wyprowadzono normalne do tych elips w jednym z punktów przecięcia. Znaleść m. g. spodków tych normalnych.

49. Rozważmy układ krzywych drugiego stopnia, których osi symetrji schodzą się z osiami współrzędnych i które są normalne do danej prostej stałej D. Znaleść m. g. biegunów prostej D względem tych krzywych.

50. Z punktu zewnętrznego A wyprowadzono dwie styczne do paraboli

$$y^2 = 2px$$

i następnie z punktów styczności, wystawiono normalne. Znaleść m. g. punktów przecięcia tych normalnych, gdy punkt A opisze linję prostą.

51. Rozważmy układ krzywych drugiego stopnia, opisanych na danym trapezie równoramiennym. Znaleść m. g. punktów tych krzywych, w których styczne są równoległe do jednego z ramion danego trapezu.

52. Dany jest punkt stały A i prosta stała D. Z punktu A wyprowadzono dwie dowolne proste AB i AC, tworzące ze sobą stały kąt α; B i C oznaczają punkty przecięcia tych prostych z prostą D. Znaleść: 1⁰) miejsce geometryczne środków kół opisanych na trójkącie ABC; 2⁰) m. g. punktów przecięcia stycznych do koła w punktach B i C.

53. Rozważmy układ parabol, których ogniskiem jest stały punkt F i które są styczne do stałej prostej D. Znaleść miejsce geometryczne wierzchołków tych parabol.

54. Niech będzie układ hyperbol równoosiowych, przechodzących przez końce średnicy stałej AB danego koła i przez końce dowolnej cięciwy tego koła CD, równoległej do AB. Znaleść miejsce geometryczne wierzchołków i ognisk tych hyperbol.

ROZDZIAŁ XVIII.

PRZEKSZTAŁCENIA KRZYWYCH.

75. Uwagi ogólne.

Jeśli każdemu punktowi M krzywej C na płaszczyźnie podporządkujemy punkty M' tej płaszczyzny, według pewnego prawa, to otrzymamy zbiór punktów, tworzących pewną linję C', którą nazywamy *przekształconą* krzywej C. Jeśli współrzędne punktu przekształconej $M'(x', y')$ zależą tylko od współrzędnych punktu $M(x, y)$ krzywej danej, a więc, jeśli przekształcenie określone jest przez związki o postaci

$$(1) \qquad \begin{aligned} x' &= f(x, y) \\ y' &= \varphi(x, y) \end{aligned}$$

to przekształcenie nazywamy *punktowem*.

Określając ze związków (1) współrzędne x i y w zależności od x' i y', otrzymamy funkcje

$$(2) \qquad x = f_1(x', y'); \quad y = \varphi_1(x', y');$$

które określają *przekształcenie odwrotne* względem przekształcenia (1).

Rozpatrzmy teraz szczególne typy przekształceń.

76. Jednokładność.

Przekształcenie nazywamy *jednokładnością*, jeśli punktom M podporządkowujemy punkty M', leżące na tej samej osi OM, wychodzą-