dowolne w pierwsze równanie i dobierając x, co jest możliwe, gdyż założyliśmy $a_1 \neq 0$.

Gdyby wreszcie wszystkie współczynniki przy niewiadomych były równe zeru, to układ będzie posiadał rozwiązanie tylko wtedy, gdy również $d_1=0$ i $d_2=0$ i rozwiązania te będą wówczas wszystkie trzy najzupełniej dowolne.

8. Układ trzech równań jednorodnych z trzema niewiadomemi.

Układ równań (23) nazywamy jednorodnym, jeśli

$$d_1 = d_2 = d_3 = 0;$$

mamy wtedy

$$\begin{aligned} a_1 x + b_1 y + c_1 z &= 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z &= 0 \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z &= 0 \end{aligned} \tag{31}$$

Własności takiego układu zawierają się już właściwie w rozważaniach poprzedniego artykułu, ze względu jednak na częstą stosowalność układu (31), rozważymy jego własności niezależnie, powtarzając częściowo poprzednie rozumowanie.

Układ jednorodny posiada oczywiście zawsze rozwiązania zerowe

$$x=0; \quad y=0; \quad z=0.$$

Zobaczmy, w jakich wypadkach są one jedyne. Otóż wiemy, iż rozwiązania, spełniające układ (31), muszą spełniać również związki (26), (26'), (26"); ale wszystkie wyrazy kolumny d_1, d_2, d_3 są z założenia równe zeru, więc w związkach tych znikają wyznaczniki po prawej stronie i będzie

$$D \cdot x = 0; \quad D \cdot y = 0; \quad D \cdot z = 0, \tag{32}$$

gdzie D jest wyznacznikiem charakterystycznym

$$D = \begin{vmatrix} a_1, b_1, c_1 \\ a_2, b_2, c_2 \\ a_3, b_3, c_3 \end{vmatrix} \tag{33}$$

Mamy więc następującą własność

TWIERDZENIE I. Jeśli wyznacznik charakterystyczny układu równań jednorodnych (31) *ma wartość od zera odmienną, to układ ten posiada tylko rozwiązania zerowe*

$$x=0;\quad y=0;\quad z=0.$$

Rozważmy teraz możliwość istnienia rozwiązań układu (31) *odmiennych od zera*. Na podstawie związków (32) widzimy, że jeśli istnieją rozwiązania na x, y, z, z których przynajmniej jedno nie jest zerem, to wtedy winno być

$$D=0, \tag{33'}$$

a więc znikanie wyznacznika charakterystycznego jest *warunkiem koniecznym* istnienia rozwiązań układu jednorodnego *nierównych zeru*. Wykażemy, iż warunek (33') jest zarazem *dostateczny*. Weźmy więc wpierw pod uwagę przypadek ogólniejszy, gdy D znika, lecz niewszystkie jego podwyznaczniki są równe zeru, gdy np.

$$\begin{vmatrix} a_1, b_1 \\ a_2, b_2 \end{vmatrix} \neq 0;$$

wtedy wiemy (art. 3), iż istnieją rozwiązania pierwszych dwóch równań (11) proporcjonalne do wyznaczników:

$$\begin{vmatrix} b_1, c_1 \\ b_2, c_2 \end{vmatrix}; \quad -\begin{vmatrix} a_1, c_1 \\ a_2, c_2 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} a_1, b_1 \\ a_2, b_2 \end{vmatrix} \tag{34}$$

Rozwiązania te spełniają jednak i trzecie z równań (31), podstawiając je bowiem w to równanie, otrzymamy z lewej strony wyrażenie

$$a_3 \begin{vmatrix} b_1, c_1 \\ b_2, c_2 \end{vmatrix} - b_3 \begin{vmatrix} a_1 . c_1 \\ a_2, c_2 \end{vmatrix} + c_3 \begin{vmatrix} a_1, b_1 \\ a_2, b_2 \end{vmatrix};$$

które przedstawia rozwinięcie wyznacznika D, a zatem równa się zeru z założenia.

Gdyby wszystkie podwyznaczniki wyznacznika D były równe zeru, lecz niewszystkie współczynniki znikały, gdyby np. $a_1 \neq 0$, oznaczałoby to, iż współczynniki równań są do siebie proporcjonalne odpowiednio, to znaczy można dobrać takie czynniki k i l, iż

$$\begin{cases} a_2 = k\, a_1; & a_3 = l\, a_1 \\ b_2 = k\, b_1; & b_3 = l\, b_1 \\ c_2 = k\, c_1; & c_3 = l\, c_1 \end{cases}$$

a wtedy wszelka trójka liczb, spełniających jedno z równań (31), spełniałaby i dwa pozostałe. Układ posiada więc wtedy nieskończenie wiele rozwiązań odmiennych od zera, które otrzymamy, podstawiając na y i z wartości dowolne w pierwsze równanie i dobierając odpowiednią wartość x $(a_1 \neq 0)$.

Gdy wreszcie wszystkie współczynniki układu (31) znikają, to rozwiązania tego układu mogą być najzupełniej dowolne.

Mamy zatem następujące twierdzenie.

TWIERDZENIE II. *Aby układ równań jednorodnych* (31) *posiadał rozwiązania, z których jedno przynajmniej nie byłoby zerem, trzeba i wystarcza, żeby wartość wyznacznika, utworzonego ze współczynników przy niewiadomych, była równą zeru.*

Związek

$$\begin{vmatrix} a_1, b_1, c_1 \\ a_2, b_2, c_2 \\ a_3, b_3, c_3 \end{vmatrix} = 0$$

wynikający z trzech związków jednorodnych (31) między trzema wielkościami x, y, z odmiennemi od zera, nazywamy *rezultatem wyrugowania trzech wielkości* x, y, z *z trzech związków jednorodnych* (31).

TWIERDZENIE III. *Niech będą trzy wyrażenia linjowe*

$$(35) \qquad a_1 x + b_1 y + c_1 z; \qquad a_2 x + b_2 y + c_2 z; \qquad a_3 x + b_3 y + c_3 z$$

w których x, y, z *oznaczają dowolne wielkości zmienne. Jeśli zachodzi związek*

$$D = \begin{vmatrix} a_1, b_1, c_1 \\ a_2, b_2, c_2 \\ a_3, b_3, c_3 \end{vmatrix} = 0$$

to można dobrać takie trzy stałe współczynniki k_1, k_2, k_3, *niewszystkie równe zeru, aby miał miejsce związek*

$$(36) \qquad \begin{aligned} &k_1 (a_1 x + b_1 y + c_1 z) + k_2 (a_2 x + b_2 y + c_2 z) + \\ &+ k_3 (a_3 x + b_3 y + c_3 z) = 0 \end{aligned}$$

dla dowolnych wartości na x, y, z.

Dowód tego twierdzenia zawiera się już właściwie w rozważaniach poprzedniego artykułu nad przypadkiem $D=0$. Powtórzymy go tu krótko raz jeszcze.

Otóż, jeśli niewszystkie podwyznaczniki wyznacznika D są równe zeru, np. $b_2 c_3 - b_3 c_2 \neq 0$, to biorąc

$$(37) \qquad k_1 = \begin{vmatrix} b_2, c_2 \\ b_3, c_3 \end{vmatrix}; \qquad k_2 = -\begin{vmatrix} b_1, c_1 \\ b_3, c_3 \end{vmatrix}; \qquad k_3 = \begin{vmatrix} b_1, c_1 \\ b_2, c_2 \end{vmatrix};$$

otrzymamy oczywiście tożsamość

$$(38) \qquad \begin{aligned} & k_1 (a_1 x + b_1 y + c_1 z) + k_2 (a_2 x + b_2 y + c_2 z) + \\ & + k_3 (a_3 x + b_3 y + c_3 z) \equiv D \cdot x \end{aligned}$$

słuszną dla dowolnych wartości na x, y, z, stąd wynika żądany związek (36), według założenia $D=0$. Gdy wszystkie podwyznaczniki wyznacznika D znikają, wtedy współczynniki zmiennych x, y, z są odpowiednio proporcjonalne i możliwość doboru stałych k_1, k_2, k_3, dla otrzymania własności (36), jest tembardziej oczywista.

Twierdzenie powyższe można też wyrazić w innej formie równoważnej:

jeśli trzy równania jednorodne:

$$\begin{aligned} a_1 x + b_1 y + c_1 z &= 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z &= 0 \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z &= 0 \end{aligned}$$

mają rozwiązania na x, y, z niewszystkie równe zeru, to jedno z tych równań jest kombinacją linjową dwóch pozostałych.

9. Układ trzech równań z dwiema niewiadomemi.

Niech będą trzy równania z dwiema niewiadomemi:

$$(39) \qquad \begin{aligned} a_1 x + b_1 y + c_1 &= 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 &= 0 \\ a_3 x + b_3 y + c_3 &= 0 \end{aligned}$$

Aby znaleść warunki istnienia rozwiązań na x i y, zauważmy, iż układ (39) otrzymamy, podstawiając w zbadanym układzie równań jednorodnych (31) wartość *odmienną od zera* $z=1$.

Na podstawie twierdzenia II-go poprzedniego artykułu otrzymamy więc następującą własność:

jeśli układ (39) *trzech równań z dwiema niewiadomemi posiada określone rozwiązania na* x i y, *to wtedy między współczynnikami w tym układzie zachodzi związek*

$$(40) \qquad D=\begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1 \\ a_2, & b_2, & c_2 \\ a_3, & b_3, & c_3 \end{vmatrix}=0$$

Związek (40), jako wynikający z *trzech* związków linjowych (39) między *dwiema* wielkościami x i y, nazywamy *rezultatem wyrugowania dwóch wielkości* x i y *z trzech związków* (39).

Warunek (40) *nie jest wogóle dostateczny* dla istnienia rozwiązań układu (39), może się bowiem zdarzyć, że dwa z równań (39) nie będą miały wspólnych rozwiązań, a jednak związek (40) będzie zachodził.

Wykażemy, że warunek (40) jest jednak *dostateczny dla istnienia rozwiązań układu* (39) *wtedy, gdy dwa z równań* (39) *np. pierwsze i drugie posiadają określone jedyne rozwiązanie, to znaczy, gdy mamy*

$$(41) \qquad \begin{vmatrix} a_1, & b_1 \\ a_2, & b_2 \end{vmatrix}=a_1 b_2-a_2 b_1 \neq 0 .$$

Istotnie, wyznaczając wtedy wartości na x i y z dwóch pierwszych równań (39) w postaci:

$$x=-\frac{\begin{vmatrix} c_1, & b_1 \\ c_2, & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1, & b_1 \\ a_2, & b_2 \end{vmatrix}}; \qquad y=-\frac{\begin{vmatrix} a_1, & c_1 \\ a_2, & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1, & b_1 \\ a_2, & b_2 \end{vmatrix}};$$

stwierdzić możemy, iż spełniają one i równanie trzecie, w razie założenia (40); wstawiając bowiem te wartości na x i y w trzecie równanie, otrzymamy po lewej stronie wyrażenie

$$\frac{-a_3\begin{vmatrix} c_1, & b_1 \\ c_2, & b_2 \end{vmatrix}-b_3\begin{vmatrix} a_1, & c_1 \\ a_2, & c_2 \end{vmatrix}+c_3\begin{vmatrix} a_1, & b_1 \\ a_2, & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1, & b_1 \\ a_2, & b_2 \end{vmatrix}}.$$

zawierające w liczniku rozwinięcie wyznacznika (40), a więc znikające z założenia.

TWIERDZENIE. Jeśli dwa równania z dwiema niewiadomemi:

$$(42) \qquad \begin{aligned} a_1 x + b_1 y + c_1 &= 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 &= 0 \end{aligned}$$

mają określone i jedyne rozwiązania na x i y, *to wszelkie inne równanie pierwszego stopnia*

$$(43) \qquad a_3 x + b_3 y + c_3 = 0$$

spełnione przez to samo rozwiązanie, jest kombinacją linjową dwóch danych równań, to znaczy będzie się sprowadzało do postaci:

$$(43') \quad a_3 x + b_3 y + c_3 \equiv \lambda_1 (a_1 x + b_1 y + c_1) + \lambda_2 (a_2 x + b_2 y + c_2) = 0$$

gdzie λ_1 i λ_2 *mają określone wartości.*

Ponieważ z założenia rozwiązania równań (42) mają spełniać równanie (43), więc musi być:

$$(44) \qquad D = \begin{vmatrix} a_1, b_1, c_1 \\ a_2, b_2, c_2 \\ a_3, b_3, c_3 \end{vmatrix} = 0;$$

Mnożąc zaś każde z wyrażeń (42) i (43) odpowiednio przez podwyznaczniki

$$k_1 = \begin{vmatrix} a_2, b_2 \\ a_3, b_3 \end{vmatrix}; k_2 = -\begin{vmatrix} a_1, b_1 \\ a_3, b_3 \end{vmatrix}; k_3 = \begin{vmatrix} a_1, b_1 \\ a_2, b_2 \end{vmatrix};$$

i dodając do siebie, otrzymamy, na zasadzie warunku (44), *tożsamość*

$$k_1 (a_1 x + b_1 y + c_1) + k_2 (a_2 x + b_2 y + c_2) +$$

$$+ k_3 (a_3 x + b_3 y + c_3) \equiv D = 0 .$$

Stąd wynika własność (43'), albowiem $k_3 \neq 0$, z racji pojedyńczości rozwiązań układu (42).

10. Układ trzech równań jednorodnych z czterema niewiadomemi.

Analogicznie do układu jednorodnego dwóch równań z trzema niewiadomemi, rozważanego w art. 3, weźmy teraz pod uwagę następujący układ trzech równań jednorodnych z czterema niewiadomemi x, y, z, t:

$$(45) \qquad \begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 t = 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 t = 0 \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z + d_3 t = 0 \end{cases}$$

Układ ten zbadamy już z łatwością, opierając się na uzyskanych w art. 7 wynikach dla układu trzech równań z trzema niewiadomemi.

Oznaczmy przez

$$(46) \qquad D_1;\ D_2;\ D_3;\ D_4$$

wyznaczniki, utworzone z kolumn współczynników przy niewiadomych przez opuszczenie jednej z czterech istniejących, a mianowicie wyznacznik D_1 zawiera kolumny współczynników przy y, z, t, wyznacznik D_2 — kolumny przy x, z, t, wyznacznik D_3 — kolumny przy x, y, t i wyznacznik D_4 — kolumny przy x, y, z.

Załóżmy wpierw, iż niewszystkie wyznaczniki (46) są równe zeru, np.

$$D_4 \neq 0$$

wtedy, podstawiając na t wartość dowolną, możemy z układu (45) wyznaczyć określone wartości na x, y, z według wzorów (28). A mianowicie, podstawiając w tych wzorach kolumnę $-d_1 t$; $-d_2 t$; $-d_3 t$ na miejsce kolumny d_1; d_2; d_3, przestawiając ją na miejsce ostatnie i wyrzucając czynnik $-t$ przed wyznacznik, jako wspólny wszystkim elementom tej samej kolumny, otrzymamy

$$\begin{cases} x = -\dfrac{D_1}{D_4} \cdot t \\ y = +\dfrac{D_2}{D_4} \cdot t \\ z = -\dfrac{D_3}{D_4} \cdot t \end{cases}$$

A więc, oprócz oczywistych rozwiązań zerowych, układ dany posiada rozwiązania, niewszystkie równe zeru, dane przez wzory symetryczne:

$$x = \rho D_1 ; \quad y = -\rho D_2 ; \quad z = \rho D_3 ; \quad t = -\rho D_4 \tag{47}$$

gdzie ρ jest *czynnikiem dowolnym*.

Spostrzegamy analogję tego rezultatu z wynikami podanemi przez wzory (9).

Przypuśćmy teraz, iż wszystkie wyznaczniki, utworzone ze współczynników, są równe zeru:

$$D_1 = 0 ; \quad D_2 = 0 ; \quad D_3 = 0 ; \quad D_4 = 0 ,$$

lecz niewszystkie ich podwyznaczniki znikają, niech np. będzie

$$\begin{vmatrix} a_1 , b_1 \\ a_2 , b_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

wtedy, traktując w równaniach (45) wielkość t, jako dowolnie daną, możemy oprzeć się na wynikach podanych w końcu art. 7 i wnioskujemy, iż trzecie z równań (45) jest kombinacją linjową dwóch pozostałych, a zatem rozwiązania układu otrzymamy, podstawiając na z i t *wartości dowolne* i dobierając odpowiednie wartości na x i y, na podstawie dwóch pierwszych równań (45) $(a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0)$, wartości te będą spełniały i trzecie równanie.

Gdyby teraz wszystkie podwyznaczniki wyznaczników

$$D_1 ; D_2 ; D_3 ; D_4$$

znikały, oznaczałoby to proporcjonalność odpowiednich współczynników niewiadomych i jeśli np. $a_1 \neq 0$, to, podstawiając w pierwsze równanie na y, z, t *wartości dowolne* i dobierając wartość na x, otrzymamy cztery wielkości, które zawsze będą spełniały i dwa równania pozostałe.

Gdy wreszcie wszystkie współczynniki znikają, to wszystkie rozwiązania mogą być najzupełniej dowolne.

Mamy więc twierdzenie następujące.

TWIERDZENIE. Układ trzech równań jednorodnych z czterema niewiadomemi, oprócz rozwiązań zerowych, posiada zawsze rozwiązania, z których jedno przynajmniej jest odmienne od zera.

11. Układ n równań linjowych.

Niech będzie układ n równań linjowych, w postaci

$$(48)\qquad \begin{cases} a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 + a_{13}\, x_3 + \ldots + a_{1n}\, x_n = d_1 \\ a_{21}\, x_1 + a_{22}\, x_2 + a_{23}\, x_3 + \ldots + a_{2n}\, x_n = d_2 \\ d_{31}\, x_1 + a_{32}\, x_2 + a_{33}\, x_3 + \ldots + a_{3n}\, x_n = d_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}\, x_1 + a_{n2}\, x_2 + a_{n3}\, x_3 + \ldots + a_{nn}\, x_n = d_n \end{cases}$$

a_{ij} oznaczają współczynniki dane, zaś

$$x_1, x_2, x_3 \;\ldots\; x_n$$

niewiadome.

W celu wyznaczenia wartości n niewiadomych

$$x_1, x_2, x_3 \ldots x_n,$$

spełniających dany układ, użyjemy tej samej metody, którą stosowaliśmy dla układu trzech równań z trzema niewiadomemi.

Oznaczmy więc przez D wyznacznik, utworzony ze współczynników przy niewiadomych:

$$(49)\qquad D = \begin{vmatrix} a_{11}, a_{12}, a_{13} \ldots\ldots a_{1n} \\ a_{21}, a_{22}, a_{23} \ldots\ldots a_{2n} \\ a_{31}, a_{32}, a_{33} \ldots\ldots a_{3n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}, a_{n2}, a_{n3} \ldots\ldots a_{nn} \end{vmatrix}$$

nazywamy go *wyznacznikiem charakterystycznym* danego układu. Pomnóżmy teraz obydwie strony każdego z równań (48) przez podwyznaczniki

$$D_{11}, D_{21}, \ldots\ldots D_{n1},$$

odpowiadające współczynnikom

$$a_{11}, a_{21}, \ldots\ldots a_{n1}$$

niewiadomej x_1 i opatrzone właściwym znakiem, tak, aby, po dodaniu stronami tych równań, otrzymać przy x_1 współczynnik równy wyznacznikowi (49). Podobnie, jak poprzednio, stwierdzimy, iż wtedy współczynniki przy pozostałych niewiadomych będą wyznacznikami o dwóch kolumnach identycznych, a więc pozostanie po dodaniu związek

$$D\,x = d_1 D_{11} - d_2 D_{21} + d_3 D_{31} + \cdots (-1)^{n+1} d_n D_{n1};$$

wartość po prawej stronie jest rozwinięciem wyznacznika:

$$D_1 = \begin{vmatrix} d_1, a_{12}, a_{13} \ldots\ldots a_{1n} \\ d_2, a_{22}, a_{23} \ldots\ldots a_{2n} \\ d_3, a_{32}, a_{33} \ldots\ldots a_{3n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ d_n, a_{n2}, a_{n3} \ldots\ldots a_{nn} \end{vmatrix}$$

który otrzymujemy, zastępując w wyznaczniku (49) kolumnę współczynników przy x_1 kolumną wyrazów wolnych $d_1, d_2 \ldots\ldots d_n$. Podobnie postępując z pozostałemi niewiadomemi, dojdziemy do wniosku, iż wartości na $x_1, x_2 \ldots\ldots x_n$, spełniające układ (48), winny też spełniać n związków

(50) $$D \cdot x_1 = D_1;\quad D \cdot x_2 = D_2 \ldots\ldots;\quad D \cdot x_n = D_n$$

gdzie

$$D_1, D_2, \ldots\ldots D_n$$

oznaczają wartości wyznaczników, które otrzymamy, *zastępując w wyznaczniku charakterystycznym D kolumnę pierwszą, drugą i t. d. n-tą przez kolumnę wyrazów wolnych*

$$d_1, d_2 \ldots\ldots d_n.$$

Ze związków (50) widzimy, że, gdy wyznacznik charakterystyczny D układu (48) ma wartość odmienną od zera:

$$D \neq 0,$$

i jeżeli istnieją wielkości, spełniające układ (48), wtedy winny one mieć takie wartości:

(51) $$x_1 = \frac{D_1}{D};\quad x_2 = \frac{D_2}{D}; \ldots\ldots\ldots x_n = \frac{D_3}{D}$$

można stwierdzić, podobnie jak dla trzech równań, iż wartości (51) spełniają układ dany. Mamy więc następujące twierdzenie.

TWIERDZENIE I. Jeśli wyznacznik charakterystyczny układu (48) *ma wartość od zera odmienną, to układ ten posiada jedyne rozwiązania na* $x_1, x_2 \ldots . x_n$ *dane przez wzory* (51).

Weźmy wreszcie pod uwagę układ n równań *jednorodnych* z n niewiadomemi:

$$
(52) \qquad \begin{array}{c}
a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 + \ldots . + a_{1n} x_n = 0 \\
a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 + \ldots . + a_{2n} x_n = 0 \\
a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 + \ldots . + a_{3n} x_n = 0 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + a_{n3} x_3 + \ldots . + a_{nn} x_n = 0
\end{array}
$$

Podstawiając w równaniach (48) wartości

$$d_1 = 0; \quad d_2 = 0; \ldots\ldots d_n = 0,$$

widzimy, iż wartości na $x_1, x_2 \ldots . x_n$, spełniające równania jednorodne (52), spełniają też związki

$$(53) \qquad D \cdot x_1 = 0; \quad D \cdot x_2 = 0; \ldots\ldots D \cdot x_n = 0,$$

stąd wynikają następujące dwa twierdzenia.

TWIERDZENIE II. Jeśli wyznacznik charakterystyczny układu jednorodnego (52) *ma wartość od zera odmienną, to układ ma wtedy tylko rozwiązanie zerowe*

$$x_1 = 0; \quad x_2 = 0; \quad x_3 = 0; \ldots . x_n = 0.$$

TWIERDZENIE III. Jeśli n związków jednorodnych (52) *spełniają wielkości* $x_1, x_2 \ldots . x_n$ *niewszystkie równe zeru, to wtedy wyznacznik, utworzony ze współczynników tych wielkości równa się zeru:*

$$
(54) \qquad \begin{vmatrix}
a_{11}, & a_{12}, & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\
a_{21}, & a_{22}, & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\
a_{31}, & a_{32}, & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_{n1}, & a_{n2}, & a_{n3} & \ldots & a_{nn}
\end{vmatrix} = 0.
$$

Związek między współczynnikami w postaci (54) nazywamy *rezultatem wyrugowania n wielkości* $x_1, x_2, x_3 \ldots . x_n$ *z n związ-*

ków jednorodnych (52). Podane własności układu związków jednorodnych linjowych posiadają liczne zastosowania w różnych gałęziach nauk ścisłych.

W Geometrji Analitycznej szczególnie ważny jest układ n równań jednorodnych z $n+1$ niewiadomemi, który w celu uproszczenia zbadaliśmy poprzednio dla $n=2$ i $n=3$. W sposób, analogiczny do stosowanego w tych przypadkach szczególnych, można udowodnić, iż *układ n równań jednorodnych z $n+1$ niewiadomemi posiada, oprócz rozwiązań zerowych, zawsze rozwiązania niewszystkie równe zeru.*

DOSTRZEŻONE OMYŁKI DRUKU.

Str.	gdzie:	zamiast:	powinno być:
64,	w tekście zagadnienia 3	$A_1 (x_3, y_3)$	$A_3 (x_3, y_3)$
74,	numer wzoru drugi od góry	(31)	(31′)
80,	przedostatni wiersz art. 26	$(B^2 - 4AC \geqslant 0)$,	$(B^2 - 4AC > 0)$
121,	poniżej rys. 63	$x' + x'' = \frac{2\,am^2}{1 + a^2}$	$x' + x'' = \frac{2\,am^2}{1 + m^2}$
176,	drugi wzór od dołu	$\frac{p}{\varepsilon} - r$ Cos	$\frac{p}{\varepsilon} - r$ Cos θ
177,	czwarty wiersz po wzorze (21)	$\varepsilon < 1$	$\varepsilon > 1$
181,	drugi wiersz od góry	(rys. 89)	(rys. 90) /
181,	wiersz trzynasty po związku (5)	(rys. 70)	(rys. 90)
197,	pierwszy wiersz od góry	(30)	(29)
208,	wzór w końcu strony	$\frac{a^2}{x^2}$	$\frac{a^2}{x_0^2}$
216,	wzór na początku strony	x_0	x_8
276,	wzór drugi poniżej rysunku	$= \frac{k}{r}$	$\varrho = \frac{k}{r}$
384,	równanie w końcu strony	$\frac{k^2}{a^2} + 1$	$\frac{k^2}{a^2} - 1$