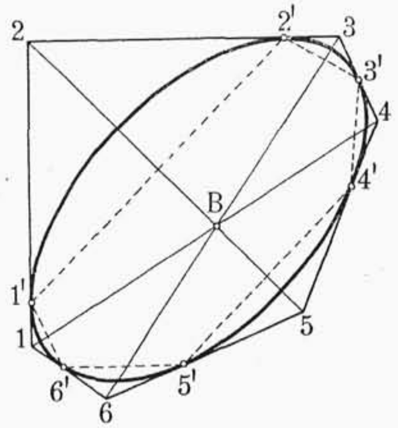
sób sześciokąt wpisany w stożkową, którego boki są *biegunowemi* wierzchołków odpowiednich sześciokąta opisanego, jako cięciwy, łączące punkty styczności. Ale, według twierdzenia *Pascala*, przeciwległe boki sześciokąta wpisanego (1′ 2′ 3′ 4′ 5′ 6′) przecinają się w trzech punktach A_1, A_2, A_3, leżących na jednej prostej (b), a wobec tego proste, łączące bieguny tych prostych, t. j. przeciwległe wierzchołki sześciokąta opisanego, jako biegunowe punktów A_1, A_2, A_3*) winny się przecinać w jednym punkcie B, t. j. w biegunie prostej (b) c. b. d. d.



Rys. 120.

ROZDZIAŁ XVII.

ZAGADNIENIA DOTYCZĄCE KRZYWYCH DRUGIEGO STOPNIA.

73. Wyznaczanie krzywych drugiego stopnia, spełniających dane warunki.

Wiemy, iż krzywą drugiego stopnia określają wartości *pięciu parametrów*, występujących w jej równaniu. Otóż, żądając, aby krzywa drugiego stopnia spełniała pewne warunki geometryczne, otrzymamy pewne warunki analityczne, w postaci związków między powyższemi pięcioma parametrami. Zagadnienie wyznaczenia krzywej drugiego stopnia, spełniającej dane warunki, sprowadza

*) Przypominamy, że gdy punkty leżą na pewnej prostej, to ich biegunowe przechodzą przez biegun tej prostej.

się więc do określenia wartości pięciu parametrów równania, którebyczyniły zadość pewnym związkom, wyrażającym analitycznie żądane własności krzywej. Liczba takich związków niezależnych w zagadnieniu nie powinna przewyższać *pięciu*.

Gdy związki między pięcioma parametrami tworzą układ pięciu równań, wtedy, *zależnie od istnienia rozwiązań* takiego układu, wynikają stąd określone wartości wszystkich pięciu parametrów i określona jedna lub kilka żądanych krzywych drugiego stopnia. Gdy liczba związków jest mniejsza od pięciu, wtedy w określonych wypadkach okazuje się, iż wartości niektórych parametrów mogą być dowolne i żądane warunki zagadnienia spełnia *układ krzywych* drugiego stopnia.

Najbardziej zasadnicze zagadnienia polegają na wyznaczeniu krzywych drugiego stopnia, *przechodzących przez dane punkty i stycznych do danych prostych*. Otóż, warunek przejścia przez dany punkt wyraża się jednym związkiem między parametrami równania; warunek zaś styczności do danej prostej wyraża się znikaniem wyróżnika odpowiedniego równania kwadratowego a więc warunkowi temu odpowiada też jeden związek między parametrami równania. Widzimy zatem, iż zagadnienie wyznaczenia krzywej drugiego stopnia, przechodzącej przez m punktów danych i stycznych do n prostych danych, sprowadza się do rozwiązań układu $m+n$ równań; jeśli równania te są niezależne, to liczba $m+n$ w zagadnieniu nie powinna przewyższać *pięciu*. Zagadnienia tego typu, zależnie od liczby $m+n$ i położenia danych elementów, prowadzą do określonej krzywej, lub do układu krzywych, spełniających dane warunki, albo też nie mają rozwiązania.

Nadmienimy, iż *warunek, aby krzywa była styczna do danej prostej w określonym zgóry punkcie, wyraża się dwoma związkami.*

Istnieją następnie zagadnienia wyznaczania krzywych drugiego stopnia, których pewne określone elementy, jak środek, wierzchołki,ogniska, osi symetrji, asymptoty lub kierownice winny mieć zgóry dane położenie, lub też winny spełniać inne zgóry dane warunki.

Ponieważ położenie powyższych elementów charakterystycznych danej krzywej drugiego stopnia zależy od wartości parametrów jej równania, a więc *warunek zagadnienia, iż dany element charakterystyczny krzywej winien mieć określone położenie, wyrazi się taką liczbą związków między parametrami równania, ile trzeba wielkości dla określenia położenia tego elementu.* Dla każdego oddzielnie z wymienionych wyżej elementów liczba taka równa się *dwóm*; w razie zaś, gdy warunek zagadnienia dotyczy jednocześnie położenia kilku elementów charakterystycznych, wtedy liczba niezależnych związków odpowiednich może być mniejsza od sumy liczb związków, dotyczących każdego z elementów oddzielnie, albowiem położenia pewnych elementów są od siebie uzależnione, np. ogniska leżą na osi symetrji.

Zaznaczymy jeszcze, iż korzystanie z postaci (4), (5), (6), artykułu 69-go, jaką posiada równanie krzywej, przechodzącej przez punkty przecięcia dwóch danych krzywych, lub stycznej do danej krzywej w jednym lub dwóch punktach, ułatwia znacznie rozwiązywanie zagadnień o których jest mowa.

Jeśli żądamy, aby krzywa drugiego stopnia była parabolą, wtedy między współczynnikami równania winien zachodzić związek $B^2 - 4AC = 0$, wobec tego parabole na płaszczyźnie tworzą układ o czterech parametrach. W zagadnieniach, dotyczących parabol, można więc podać conajwyżej cztery warunki niezależne. Ta sama uwaga dotyczy układu hyperbol równoosiowych, dla których współczynniki równania winny spełniać warunek $A + C = 0$.

ZAGADNIENIE 1. *Wyznaczyć równanie krzywej drugiego stopnia, przechodzącej przez pięć punktów danych.*

Stosując rozważania art. 69, rozwiążemy *efektywnie* dane zagadnienie w sposób znacznie prostszy od sposobu pierwotnie podanego i polegającego na rozwiązaniu układu pięciu równań z pięcioma niewiadomemi. Istotnie, cztery z danych punktów możemy uważać zawsze, jako przecięcie się pary prostych o równaniach $s_1 = 0$ i $s_2 = 0$ z parą prostych $s_3 = 0$ i $s_4 = 0$, a więc równanie wszelkiej stożkowej, przez te cztery punkty przechodzącej, będzie miało postać:

$$s_1 s_2 + \lambda s_3 s_4 = 0$$

z dowolności λ skorzystamy i tak dobierzemy jej wartość, aby równanie krzywej spełnione było w piątym punkcie.

Dla przykładu wyznaczmy równanie stożkowej, przechodzącej przez pięć punktów:

$$(1,0), (2,0), (0,1), (3,2), (-1,-1).$$

Pierwsze cztery punkty możemy uważać jako przecięcie się pary prostych o równaniach

$$y = 0; \qquad y - 1 = \frac{2-1}{3-0}(x-0);$$

z parą prostych o równaniach

$$x + y = 1; \qquad y = \frac{2-0}{3-2}(x-2)$$

Stożkowe, przechodzące przez te cztery punkty, będą zawarte w równaniu

$$y\left(y-\frac{1}{3}x-1\right)+\lambda(x+y-1)(y-2x+4)=0;$$

żądając, aby to równanie było spełnione w punkcie piątym, otrzymamy $\lambda=\frac{1}{9}$, równanie szukanej krzywej będzie więc takie:

$$2x^2+4xy-10y^2-6x+6y+4=0$$

krzywa ta jest hyperbolą.

ZAGADNIENIE 2. *Wyznaczyć równanie paraboli, przechodzącej przez cztery dane punkty:* $(0,1)$, $(0,3)$, $(1,0)$, $(2,0)$.

Zagadnienie dane można rozwiązać w zwykły sposób, pisząc, iż równanie szukane ma być spełnione w czterech danych punktach i wyznaczając z otrzymanych równań współczynniki. Podobnie jednak, jak w poprzedniem zagadnieniu, znacznie zręczniejszy będzie sposób, oparty na postaci równania układu stożkowych, przechodzących przez cztery punkty przecięcia się ze sobą dwóch krzywych drugiego stopnia. A mianowicie, dane cztery punkty można uważać jako przecięcie osi współrzędnych $x=0$ i $y=0$ z parą prostych o równaniach

$$x+y-1=0 \quad \text{i} \quad \frac{x}{2}+\frac{y}{3}-1=0$$

Równanie łączne pierwszej pary prostych jest $xy=0$, zaś drugiej pary $(x+y-1)\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{3}-1\right)=0$, a więc równanie stożkowej, przechodzącej przez ich cztery punkty przecięcia, będzie

$$(x+y-1)\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{3}-1\right)+\lambda xy=0$$

gdzie λ jest dowolnym współczynnikiem. Należy teraz z tej dowolności skorzystać i tak dobrać λ, aby ta stożkowa była parabolą

Grupując odpowiednio wyrazy, otrzymamy

$$3x^2+(5+6\lambda)xy+2y^2-9x-8y+6=0$$

stożkowa ta będzie parabolą, jeśli

$$(5+6\lambda)^2-4.2.3=0$$

a więc, gdy $5+6\lambda=\pm 2\sqrt{6}$, mamy stąd dwie parabole niezwyrodniałe

$$3x^2 \pm 2\sqrt{6}\,xy+2y^2-9x-8y+6=0$$

przechodzące przez cztery dane punkty.

ZAGADNIENIE 3. *Wyznaczyć równanie paraboli, stycznej do osi współrzędnych w punktach* (2,0) i (0,1).

Dane punkty (2,0) i (0,1) można uważać jako przecięcie osi współrzędnych $xy=0$ z prostą $\frac{x}{2}+\frac{y}{1}-1=0$. Według art. 69, równanie stożkowych, stycznych w tych punktach do osi współrzędnych, będzie:

$$\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{1}-1\right)^2+\lambda\,xy=0$$

gdzie λ jest dowolne. Po ugrupowaniu wyrazów, mamy:

$$x^2+4(1+\lambda)\,xy+4y^2-4x-8y+4=0$$

stożkowa ta będzie parabolą, jeśli na λ podstawimy taką wartość, aby $16(1+\lambda)^2-4.4=0$, stąd $1+\lambda=\pm 1$; $\lambda_1=-2$; $\lambda_2=0$; wartości $\lambda_2=0$ nie odpowiada parabola, lecz linja prosta, przechodząca przez dane punkty, otrzymamy więc jedną parabolę żądaną:

$$x^2-4xy+4y^2-4x-8y+4=0$$

ZAGADNIENIE 4. *Znaleść równanie hyperboli równoosiowej, która jest styczna do osi Ox w punkcie* (1,0) *i do prostej $y=x$ w punkcie* (2,2).

Prosta, łącząca punkty styczności (1,0) i (2,2), ma równanie $y=2x-2$, a więc równanie krzywych drugiego stopnia, stycznych w danych punktach do prostych danych będzie miało postać

$$(x-y)\,y+\lambda(y-2x+2)^2=0$$

t. j.

$$4\lambda x^2+(1-4\lambda)\,xy+(\lambda-1)\,y^2-8\lambda x+4\lambda y+4\lambda=0$$

krzywa ta będzie hyperbolą równoosiową, jeśli spełnimy warunek

$$4\lambda+(\lambda-1)=0$$

t. j.

$$\lambda=\frac{1}{5};$$

szukana krzywa będzie zatem określona przez równanie

$$4x^2+xy-4y^2-8x+4y+4=0$$

ZAGADNIENIE 5. *Dowieść, iż wszelka krzywa drugiego stopnia, przechodząca przez cztery punkty przecięcia dwóch hyperbol równoosiowych (lub dwóch par prostych prostopadłych), jest hyperbolą równoosiową.*

Istotnie, krzywa, przechodząca przez punkty przecięcia dwóch krzywych drugiego stopnia

$$f_1(x,y) = A_1 x^2 + B_1 xy + C_1 y^2 + D_1 x + E_1 y + F_1 = 0$$

$$f_2(x,y) = A_2 x^2 + B_2 xy + C_2 y^2 + D_2 x + E_2 y + F_2 = 0$$

ma równanie

$$f_1(x,y) + f_2(x,y)\lambda = 0 \tag{1}$$

Jeśli dane krzywe są hyperbolami równoosiowemi, to mamy

$$A_1 + C_1 = 0; \qquad A_2 + C_2 = 0;$$

ale wtedy i suma współczynników w równaniu (1) znika dla dowolnej wartości λ:

$$(A_1 + A_2\lambda) + (C_1 + C_2\lambda) = 0$$

a więc krzywa (1) jest hyperbolą równoosiową dla każdego λ c. b. d. d.

ZAGADNIENIE 6. *Znaleść równanie paraboli z osią równoległą do prostej* $y = x$, *która przechodzi przez punkt* (1,0) *i która posiada ognisko w punkcie* $x_0 = 1$; $y_0 = 2$.

Kierownica szukanej paraboli, jako prostopadła do osi, musi mieć równanie w postaci

$$x + y + k = 0.$$

Pisząc, iż odległości punktu paraboli (x, y) od ogniska F (1,2) i od kierownicy są równe, otrzymamy równanie paraboli

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = \left(\frac{x+y+k}{\sqrt{2}}\right)^2$$

lub, po uporządkowaniu,

$$(x-y)^2 - 2(2+k)x - 2(4+k)y + (10-k^2) = 0$$

stałą k wyznaczymy z warunku, iż parabola winna przechodzić przez punkt (1,0), wypadnie wtedy związek

$$-2(2+k) + (11-k^2) = 0$$

stąd

$$k = -1 \pm \sqrt{8}$$

mamy więc dwie żądane parabole:

$$(x-y)^2 - 2(1 \pm \sqrt{8})x - 2(3 \pm \sqrt{8})y + (1 \pm 2\sqrt{8}) = 0$$

ZAGADNIENIE 7. Znaleść równanie paraboli stycznej w początku układu do osi Ox, która przechodzi przez punkt $(1, 2)$ i posiada oś równoległą do prostej $y = x$.

Równanie wszelkich parabol, których osi są równoległe do prostej $y = x$, ma postać

$$(x - y)^2 + Dx + Ey + F = 0;$$

w danym wypadku dla $y = 0$, równanie to winno mieć pierwiastek *podwójny* $x = 0$, zachodzi to wtedy, gdy $D = 0$ i $F = 0$. Następnie wiemy, iż parabola przechodzi przez punkt $(1, 2)$, stąd $1 + 2E = 0$, równanie żądane będzie więc takie:

$$(x - y)^2 - \frac{1}{2} y = 0$$

ZAGADNIENIE 8. Znaleść krzywą drugiego stopnia, której ogniskiem jest dany punkt $F(\alpha, \beta)$ i która przechodzi przez trzy dane punkty

$$P_1(x_1, y_1);\ P_2(x_2, y_2);\ P_3(x_3, y_3)$$

nieleżące na jednej prostej.

Jeśli związek $x \cos \varphi + y \sin \varphi - p = 0$ jest równaniem kierownicy, odpowiadającej ognisku (α, β), to równanie wszelkiej krzywej, mającej dane ognisko $F(\alpha, \beta)$, winno mieć postać:

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 - \varepsilon^2 (x \cos \varphi + y \sin \varphi - p)^2 = 0$$

gdzie ε oznacza mimośród; równanie to możemy napisać w postaci

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 - (lx + my + n)^2 = 0 \tag{2}$$

zawierającej *pięć* parametrów α, β, l, m, n. Jeśli więc ognisko (α, β) jest zgóry dane, to liczba parametrów nieokreślonych zmniejsza się z pięciu do *trzech* l, m, n. W danem zagadnieniu wyznaczymy trzy pozostałe parametry (l, m, n), korzystając z warunku, iż krzywa winna przechodzić przez trzy dane punkty; otrzymamy w ten sposób następujące trzy związki:

$$\begin{cases} l x_1 + m y_1 + n = \pm \delta_1 \\ l x_2 + m y_2 + n = \pm \delta_2 \\ l x_3 + m y_3 + n = \pm \delta_3 \end{cases}$$

gdzie $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ oznaczają dane odległości ogniska F od punktów P_1, P_2, P_3.

Ponieważ z założenia trzy dane punkty P_1, P_2, P_3 nie leżą na jednej prostej, więc wyznacznik charakterystyczny otrzymanego układu trzech równań z trzema niewiadomemi (l, m, n) jest nierówny zeru i dla każdej kombinacji znaków wyrazów $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ otrzymamy określoną trójkę wartości (l, m, n).

Otóż takich kombinacji znaków wyrazów δ może być *osiem*, cztery jednak z pośród nich wynikają przez jednoczesne odwrócenie znaków w czterech pozostałych i prowadzą zatem do tych samych równań drugiego stopnia. A więc ostatecznie widzimy, iż będą istniały *cztery* krzywe drugiego stopnia, spełniające warunki danego zagadnienia.

ZAGADNIENIE 9. *Jaką postać ma równanie hyperboli, której asymptotami są proste dane o równaniach*

$$a_1 x + b_1 y + c_1 = 0; \qquad a_2 x + b_2 y + c_2 = 0 \tag{3}$$

Równanie zespołu asymptot ma postać

$$(a_1 x + b_1 y + c_1)(a_2 x + b_2 y + c_2) = 0$$

wszelkie zaś *równanie drugiego stopnia, różniące się od tego równania dowolnym wyrazem stałym* λ, *to znaczy równanie*

$$(a_1 x + b_1 y + c_1)(a_2 x + b_2 y + c_2) + \lambda = 0 \tag{4}$$

przedstawia hyperbolę, dla której dane dwie proste (3) *są asymptotami.* Równanie (4) przedstawia wszelkie hyperbole, mające dane asymptoty (patrz wnioski art. 65).

Widzimy z powyższego, iż, gdy dane są asymptoty hyperboli, to tylko jeden warunek jest jeszcze potrzebny dla zupełnego określenia hyperboli.

Przykład. *Znaleść równanie hyperboli, której asymptotami są proste*

$$2x + 3y - 1 = 0; \quad x + 2y + 3 = 0$$

i która przechodzi przez punkt (1, 2). Według związku (4), równanie szukanej hyperboli ma postać

$$(2x + 3y - 1)(x + 2y + 3) + \lambda = 0$$

z dowolności λ korzystamy i dobieramy tak jej wartość, aby hyperbola przechodziła przez punkt (1, 2), wypada

$$(2 . 1 + 3 . 2 - 1)(1 + 2 . 2 + 3) + \lambda = 0,$$

stąd otrzymamy $\lambda = -56$ i szukane równanie

$$2x^2 + 7xy + 6y^2 + 5x + 7y - 59 = 0.$$

ZAGADNIENIE 10. *Znaleść równanie hyperboli, której asymptoty są równoległe do prostych*

$$2x-y+7=0; \quad x+3y-1=0,$$

która przechodzi przez punkt $(-1,1)$ *i jest styczna w punkcie* (0,0 *do osi* Ox. Kierunek asymptot określają proste $2x-y=0$ i $x+3y=0$, grupa wyrazów kwadratowych w równaniu szukanej krzywej będzie więc $(2x-y)(x+3y)$, zatem postać równania szukanego będzie następująca:

$$(2x-y)(x+3y)+Dx+Ey+F=0$$

Podstawiając $y=0$, otrzymamy równanie:

$$2x^2+Dx+F=0$$

określające punkty przecięcia krzywej z osią Ox, lecz z założenia równanie to winno mieć pierwiastek *podwójny* $x=0$, więc

$$D=0, \quad F=0;$$

ponieważ krzywa nadto winna przejść przez punkt $(-1,1)$, więc

$$-6+E=0$$

równanie szukane będzie zatem następujące:

$$2x^2+5xy-3y^2+6y=0$$

ZAGADNIENIE 11. *Znaleść równanie hyperboli, której jedna z asymptot ma równanie* $2x+y-1=0$ *i która przechodzi przez punkty*

$$(0,0); \quad (0,3); \quad (1,2).$$

Jeśli $y=mx+n$ jest nieznanem równaniem drugiej asymptoty, to, w myśl zagadnienia 9, równanie szukanej hyperboli będzie miało postać

$$(2x+y-1)(y-mx-n)+\lambda=0 \tag{5}$$

w razie podania więc jednej tylko asymptoty, pozostają nieokreślone jeszcze *trzy parametry*. W danym wypadku wartości trzech parametrów m, n, λ wyznaczymy, żądając, aby hyperbola przechodziła przez trzy dane punkty, otrzymamy warunki:

$$n+\lambda=0$$
$$6-2n+\lambda=0$$
$$6-3m-3n+\lambda=0$$

stąd

$$n=2; \quad \lambda=-2; \quad m=-\frac{2}{3};$$

a zatem szukane równanie będzie miało postać:

$$(2x+y-1)\left(y+\frac{2}{3}x-2\right)-2=0$$

ZAGADNIENIE 12. *Znaleść równanie układu parabol, których wierzchołkiem jest początek współrzędnych.*

Równanie układu wszelkich parabol na płaszczyźnie zawiera cztery parametry i ma postać

$$(y-mx)^2+\alpha x+\beta y+\gamma=0,$$

jeśli wykluczymy parabole z osiami równoległemi do Oy; m jest współczynnikiem kątowym osi paraboli. Aby otrzymać warunek, iż początek układu jest wierzchołkiem paraboli, wystarczy napisać, iż parabola przechodzi przez punkt $(0,0)$ i ma w tym punkcie *styczną prostopadłą do prostej* $y=mx$; otrzymamy w ten sposób związki

$$m\alpha-\beta=0; \quad \gamma=0$$

i równanie żądanego układu parabol w postaci

$$(y-mx)^2+\alpha x+m\alpha y=0$$

zawierającej już tylko *dwa parametry* dowolne m i α.

74. Miejsca geometryczne.

ZAGADNIENIE 1. *Rozważmy układ parabol z osiami równoległemi do osi* Oy, *które przechodzą przez punkt* $(0,1)$ *i są styczne do osi* Ox. *Znaleść miejsce geometryczne ognisk tych parabol.*

Parabole dane tworzą układ z jednym parametrem zmiennym, a zatem ogniska ich winny tworzyć linję krzywą. Żeby wyznaczyć jej równanie, należy wyrazić współrzędne ogniska paraboli