Jest to właśnie warunek szukany. Rozwijając wyznacznik (13) według wyrazów pierwszej kolumny, otrzymamy szukany związek w tej postaci:

$$(13') \qquad x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2) = 0$$

Warunek powyższy wynika też z równania (11). Istotnie, aby trzy dane punkty A_1, A_2, A_3 leżały na jednej prostej, trzeba i wystarcza, żeby równanie prostej, przechodzącej przez punkty A_1 i A_2, o postaci

$$(x_2 - x_1)(y - y_1) = (y_2 - y_1)(x - x_1)$$

spełniały współrzędne punktu A_3, stąd wynika

$$(y_3 - y_1)(x_2 - x_1) = (y_2 - y_1)(x_3 - x_1)$$

związek zaś ten sprowadza się do związku (13).

21. O przecięciu się dwóch prostych.

Dane są dwie proste, określone przez równania

$$(14) \qquad \begin{aligned} A_1 x + B_1 y + C_1 &= 0 \\ A_2 x + B_2 y + C_2 &= 0 \end{aligned}$$

Współrzędne punktu przecięcia tych dwóch prostych, są to liczby (x_0, y_0), które spełniają jednocześnie obydwa związki (14). *Poszukiwanie punktu przecięcia dwóch prostych sprowadza się więc do rozwiązania układu dwóch równań* (14) *z dwiema niewiadomemi pierwszego stopnia*. Wiemy (patrz dodatek o wyznacznikach), iż układ (14) posiada określone rozwiązanie (x_0, y_0), to znaczy istnieje określony punkt przecięcia danych prostych, jeśli współczynniki niewiadomych w równaniach (14) spełniają warunek

$$(15) \qquad A_1 B_2 - A_2 B_1 \neq 0 \quad \text{lub} \quad \frac{A_1}{B_1} \neq \frac{A_2}{B_2}$$

Warunek ten ma prosty sens geometryczny; wyznaczmy mianowicie y w zależności od x z równań (14), w założeniu, iż $B_1 \neq 0$ i $B_2 \neq 0$, aby uwidocznić współczynniki kątowe prostych; otrzymamy

$$(16) \qquad \begin{aligned} y &= -\frac{A_1}{B_1}x - \frac{C_1}{B_1} \\ y &= -\frac{A_2}{B_2}x - \frac{C_2}{B_2} \end{aligned}$$

Warunek (15) istnienia punktu przecięcia dwóch prostych wyraża więc, iż proste winny mieć różne współczynniki kątowe t. j. winny nie być równoległe.

Rozważmy wypadek osobliwy, gdy proste są równoległe, t. j.

$$A_1 B_2 - A_2 B_1 = 0 \text{ lub } \frac{A_1}{B_1} = \frac{A_2}{B_2} \tag{17}$$

wtedy niema wcale punktu przecięcia, gdy

$$\frac{C_1}{B_1} \neq \frac{C_2}{B_2}$$

to znaczy, gdy proste nie są identyczne, istnieje zaś nieskończenie wiele punktów wspólnych, gdy

$$\frac{C_1}{B_1} = \frac{C_2}{B_2}$$

co oznacza, że proste o równaniach(16) są identyczne.

22. O przecięciu się trzech prostych.

Dane są trzy proste, przedstawione przez równania

$$\begin{aligned} A_1 x + B_1 y + C_1 &= 0 \\ A_2 x + B_2 y + C_2 &= 0 \\ A_3 x + B_3 y + C_3 &= 0 \end{aligned} \tag{18}$$

Wogóle te trzy proste nie przecinają się w jednym punkcie, to znaczy, iż para liczb, spełniających np. dwa pierwsze równania, nie będzie wogóle spełniała trzeciego. Trzy proste (18) przecinają się w jednym punkcie wtedy, jeśli istnieje para liczb (x_0, y_0), spełniająca jednocześnie trzy równania (18). Wiadomo, iż jest to możliwe tylko wtedy, gdy wyznacznik utworzony ze współczynników równań (18) będzie zerem[1]):

$$\begin{vmatrix} A_1, & B_1, & C_1 \\ A_2, & B_2, & C_2 \\ A_3, & B_3, & C_3 \end{vmatrix} = 0 \tag{19}$$

Jest to warunek konieczny, żeby trzy proste (18) przecinały się w jednym punkcie, warunek ten jest zarazem wystarczający, jeśli dwie z nich mają określony jedyny punkt wspólny.

---

[1]) Patrz art. 9 dodatku o wyznacznikach.

Wiadomo następnie, że, gdy dwa równania z dwiema niewiadomemi np.

$$A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$$
$$A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$$

mają określone rozwiązanie, to wszelkie trzecie równanie linjowe

$$A_3 x + B_3 y + C_3 = 0$$

spełnione przez to samo rozwiązanie, winno być kombinacją linjową dwóch pierwszych. A zatem wtedy można dobrać takie dwie liczby k_1 i k_2, żeby było

$$\begin{aligned} A_3 &= k_1 A_1 + k_2 A_2 \\ B_3 &= k_1 B_1 + k_2 B_2 \\ C_3 &= k_1 C_1 + k_2 C_2 \end{aligned} \tag{20}$$

Każda prosta, która przechodzi przez punkt przecięcia dwóch prostych o równaniach

$$\begin{aligned} A_1 x + B_1 y + C_1 &= 0 \\ A_2 x + B_2 y + C_2 &= 0 \end{aligned} \tag{21}$$

posiada więc równanie o postaci

$$k_1 (A_1 x + B_1 y + C_1) + k_2 (A_2 x + B_2 y + C_2) = 0 \tag{22}$$

będące kombinacją linjową równań (21) *dwóch danych prostych.*

Jeśli $k_1 \neq 0$, to równanie (22) możemy napisać w postaci

$$A_1 x + B_1 y + C_1 + \lambda (A_2 x + B_2 y + C_2) = 0 \tag{23}$$

gdzie λ jest stałym współczynnikiem. Jest też bezpośrednio oczywiste, iż równanie (23) dla każdej wartości λ przedstawia prostą, przechodzącą przez punkt przecięcia prostych (21): równanie (23) jest bowiem pierwszego stopnia i lewa jego strona, dla dowolnego λ, staje się zerem, gdy na zmienne x i y wstawimy współrzędne punktu przecięcia dwóch prostych (21). Postać (23) bardzo ułatwia rozwiązywanie zagadnień na proste, przechodzące przez punkt przecięcia dwóch prostych danych.

ZAGADNIENIE 1. *Znaleść równanie prostej, która przechodzi przez punkt przecięcia dwóch prostych danych o równaniach*

$$2x - y + 1 = 0$$
$$x + 3y - 5 = 0$$

i nadto przez punkt dany A (2,3). Dzięki rezultatom poprzednim *jest zbyteczne poszukiwanie współrzędnych punktów przecięcia prostych danych;* możemy odrazu powiedzieć, iż równanie szukanej prostej winno być pewną kombinacją linjową równań prostych danych, to znaczy winno mieć postać

$$(24) \qquad 2x - y + 1 + \lambda(x + 3y - 5) = 0$$

Równanie (24) przedstawia prostą, przechodzącą przez punkt przecięcia prostych danych, dla *dowolnej* wartości λ, *skorzystajmy więc z tej dowolności* i tak dobierzmy λ, aby prosta (24) przechodziła przez punkt (2,3); otrzymamy warunek

$$2.2 - 3 + 1 + \lambda(2 + 3.3 - 5) = 0$$

z którego wynika

$$\lambda = -\frac{1}{3}$$

wstawiając tę wartość do równania (24) i porządkując, otrzymamy równanie szukanej prostej

$$5x - 6y + 8 = 0$$

ZAGADNIENIE 2. Znaleść równanie prostej, która przechodzi przez punkt przecięcia dwóch prostych o równaniach

$$3x + 5y - 1 = 0$$
$$2x - 7y + 3 = 0$$

i jest prostopadła do prostej $y = 2x + 1$.

Jeśli prosta przechodzi przez punkt przecięcia prostych danych, to jej równanie winno mieć postać

$$(25) \qquad 3x + 5y - 1 + \lambda(2x - 7y + 3) = 0$$

należy teraz tak dobrać λ, żeby prosta (25) była prostopadła do prostej $y = 2x + 1$ t. j., żeby jej współczynnik kątowy równy był $-\frac{1}{2}$. Wyznaczając z równania (25) y w zależności od x, mamy

$$y = \frac{2\lambda + 3}{7\lambda - 5}\, x + \frac{1 - 3\lambda}{5 - 7\lambda}$$

stąd otrzymujemy warunek prostopadłości

$$\frac{2\lambda + 3}{7\lambda - 5} = -\frac{1}{2}$$

z którego wynika

$$\lambda = -\frac{1}{11}$$

Wstawiając tę wartość do równania (25), otrzymamy równanie szukanej prostej

$$31x + 62y - 14 = 0$$

ZAGADNIENIE 3. Udowodnić analitycznie, iż trzy środkowe trójkąta przecinają się w jednym punkcie.

Możemy zawsze, dla uproszczenia, przyjąć taki układ współrzędnych, aby dwa wierzchołki trójkąta leżały na osi Ox, zaś trzeci wierzchołek na osi Oy. Rozważymy więc trójkąt, którego wierzchołki znajdują się w punktach następujących:

$$A(a, 0); \ B(b, 0); \ C(0, c)$$

Pamiętając, iż współrzędne środka odcinka równają się średnim arytmetycznym współrzędnych jego końców i stosując postać (11) równania prostej, przechodzącej przez dwa punkty, otrzymamy następujące równania środkowych danego trójkąta, wyprowadzonych z wierzchołków A, B, C:

$$(A) \quad cx + (2a - b)y - ac = 0$$

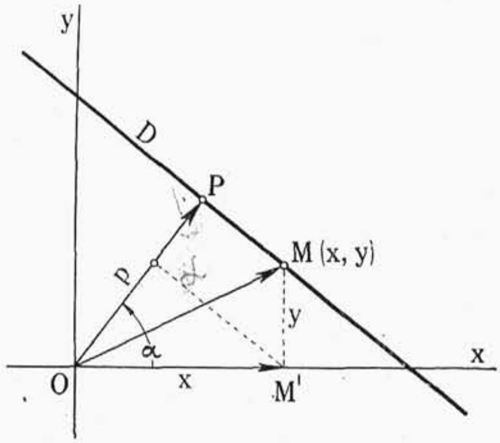
$$(B) \quad cx + (2b - a)y - bc = 0$$

$$(C) \quad 2cx + (a + b)y - (a + b)c = 0$$

Widzimy odrazu, iż wyrażenie trzecie jest sumą dwóch pierwszych, a więc trzy dane środkowe mają jeden punkt wspólny.

23. Równanie prostej w postaci normalnej.

Rozważmy dowolną prostą (D) na płaszczyźnie. Wyprowadźmy z początku układu prostopadłą OP do tej prostej; niech spodek tej prostopadłej P będzie końcem wektora OP (rys. 48). Położenie prostej D względem osi jest w zupełności określone przez długość p wektora OP t. j. odległość prostej od początku układu i przez kąt α, który tworzy wektor OP z dodatnim zwrotem osi Ox. Wielkość p jest zawsze dodatnia, zaś α przybierać może wartości od 0 do 2π.



Rys. 48.

Aby otrzymać równanie prostej, określonej przez parametry p i α, zauważmy, iż, dla dowolnego punktu $M(x, y)$ tej prostej, miara rzutu wektora OM na wektor OP jest stała i równa p:

$$\underset{(\text{na } OP)}{rzut}\ OM = p;$$

ale miara rzutu wektora OM równa się sumie miar rzutów jego składowych x i y, napiszemy więc

$$\underset{(\text{na } OP)}{rzut\ x + rzut\ y} - p = 0$$

ponieważ zaś wektor OP tworzy z osią Ox kąt α, a z osią Oy, według artykułu (4), kąt $\beta = \alpha - \frac{\pi}{2}$, otrzymamy więc szukany związek w tej postaci:

(26) $$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0$$

który nazywa się *równaniem prostej w postaci normalnej.*

Jeśli równanie prostej ma postać ogólną

(27) $$Ax + By + C = 0$$

w której A i B nie można uważać za cosinus i sinus pewnego kąta, wtedy równanie to sprowadzimy do postaci normalnej (26), dzieląc wszystkie współczynniki równania przez taką wielkość λ, aby w otrzymanem równaniu

$$\frac{A}{\lambda}x+\frac{B}{\lambda}y+\frac{C}{\lambda}=0$$

można było założyć

$$\frac{A}{\lambda}=\cos\alpha\,; \qquad \frac{B}{\lambda}=\sin\alpha$$

Wielkość λ winna więc spełniać warunek

$$\frac{A^2}{\lambda^2}+\frac{B^2}{\lambda^2}=1$$

stąd

$$\lambda=\pm\sqrt{A^2+B^2}$$

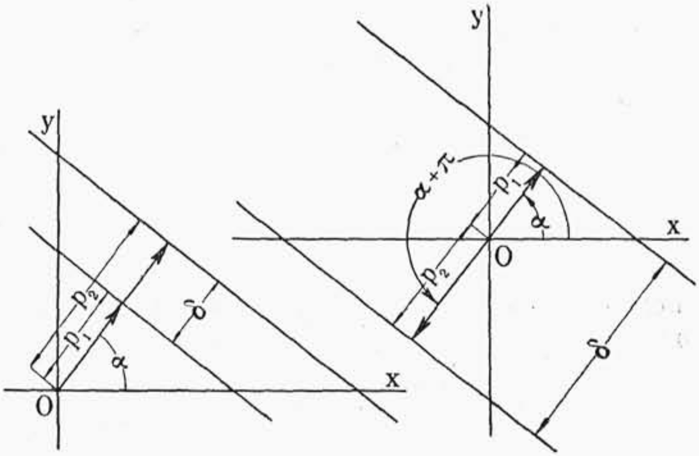
Postać normalna równania (27) będzie więc jedną z dwóch następujących:

$$\frac{Ax+By+C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}=0 \tag{28}$$

Ponieważ z założenia $p>0$, więc w równaniu (28) należy przed pierwiastkiem wziąć taki znak, żeby wyraz wolny otrzymanego równania był *ujemny*; tylko wtedy współczynniki przy x i y będą co do wartości i co do znaku przedstawiały cosinus i sinus kąta, który tworzy z osią Ox prostopadła, wyprowadzona z początku układu do danej prostej. Oczywiście, wykluczyliśmy tu wypadek, gdy prosta przechodzi przez początek układu, t. j. gdy $p=0$.

Równanie prostej w postaci normalnej jest z tego względu dogodne, iż ułatwia znalezienie odległości dwóch prostych równoległych i odległości punktu od prostej.

ZAGADNIENIE 1. *Wyznaczyć odległość dwóch prostych równoległych.* Aby to zagadnienie rozwiązać, sprowadzamy równania prostych danych do postaci normalnej i wyznaczamy odległości p_1 i p_2 tych prostych od początku układu. Odległość δ między danemi prostemi będzie równa sumie odległości p_1 i p_2 lub ich różnicy, zależnie od tego, czy początek układu leży między danemi prostemi, czy też poza niemi. Kwestję tę rozstrzygniemy, jeśli zwrócimy uwagę na znaki współczynników przy x i y, po sprowadzeniu równań do postaci normalnej; a mianowicie, jeśli współczynniki w obu równaniach będą miały znaki zgodne, to wektory o wartościach p_1 i p_2, prostopadłe do prostych i wychodzące z początku współrzędnych, będą miały zwroty zgodne i, co zatem idzie, proste będą się znajdowały po tej samej stronie początku O ($\delta = |p_1 - p_2|$), jeśli zaś współczynniki odpowiednie będą miały znaki przeciwne, będzie to znaczyło, że wektory prostopadłe mają zwroty przeciwne, a więc początek układu będzie leżał pomiędzy prostemi ($\delta = p_1 + p_2$) (rys. 49).



Rys. 49.

Przykład. Niech będą dwie proste równoległe o równaniach

$$2x - y - 7 = 0;$$
$$4x - 2y + 3 = 0;$$

po sprowadzeniu do postaci normalnej, według równania (28), mamy

$$\frac{2x - y - 7}{\sqrt{5}} = 0; \qquad p_1 = \frac{7}{\sqrt{5}};$$

$$\frac{4x - 2y + 3}{-2\sqrt{5}} = 0; \qquad p_2 = \frac{3}{2\sqrt{5}};$$

widzimy, iż znaki współczynników odpowiednich przy x i y są przeciwne, a więc kąty, które tworzą wektory prostopadłe z osią Ox, różnią się o π, wobec tego odległość prostych będzie

$$\delta = p_1 + p_2 = \frac{17}{2\sqrt{5}}.$$

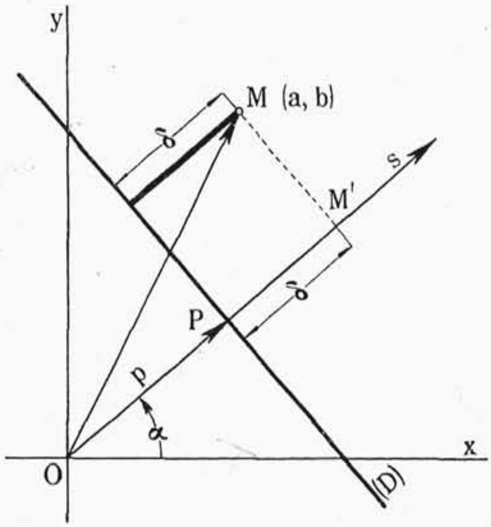
ZAGADNIENIE 2. *Wyznaczyć odległość punktu danego od prostej danej.*

Metoda bezpośrednia polegałaby na odszukaniu punktu przecięcia prostopadłej, wyprowadzonej z danego punktu do prostej i na wyznaczeniu odległości odpowiednich dwóch punktów.

Zagadnienie można jednak znacznie prościej rozwiązać przy pomocy postaci normalnej. Niech więc będzie dany punkt $M(a, b)$ i prosta (D), mająca równanie w postaci normalnej

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0 \tag{29}$$

Weźmy pod uwagę rzut OM' wektora OM na oś Os zgodnie zwróconą z wektorem OP prostopadłym do danej prostej (rys. 50);



Rys. 50.

ponieważ składowe wektora OM równają się współrzędnym a i b, więc miara rzutu $\overline{OM'}$ jest następująca:

$$\overline{OM'} = \underset{(\text{na } Os)}{rzut}\ \overline{OM} = a \cos \alpha + b \sin \alpha$$

Aby obliczyć odległość δ punktu M od prostej D, wystarczy zauważyć, iż odległość ta równa się wartości bezwzględnej wektora $\overline{PM'}$; otóż, według twierdzenia *Chasles'a*, mamy

$$\overline{PM'} = \overline{OM'} - \overline{OP}$$

a zatem

$$\overline{PM'} = a . \cos \alpha + b . \sin \alpha - p \tag{30}$$

miara ta jest dodatnia, gdy punkty O i M leżą w dwóch odmiennych częściach płaszczyzny, oddzielonych od siebie prostą D, a więc gdy wektor OM przecina prostą D, miara ta zaś jest ujemna, jeśli punkty O i M leżą po jednej stronie prostej D t. j., gdy wektor

OM nie przecina tej prostej. Bezwzględna wartość wyrażenia (30) będzie więc szukaną odległością δ punktu $M(a, b)$ od prostej (29):

$$\delta = |a \cos \alpha + b \sin \alpha - p| \tag{31}$$

Odległość punktu (a, b) od prostej danej równa się więc wartości bezwzględnej wyrażenia, znajdującego się po lewej stronie danego równania prostej w postaci normalnej, którą ono przybierze, jeśli na miejsce współrzędnych bieżących x i y wstawimy współrzędne a i b danego punktu.

Jeśli równanie prostej ma postać ogólną

$$Ax + By + C = 0$$

to odległość δ punktu (a, b) od tej prostej, według postaci (28) i twierdzenia (31), będzie miała wartość

$$\delta = \left| \frac{Aa + Bb + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right| \tag{31}$$

Przykład. Dana jest prosta:

$$3x - 5y + 1 = 0 \text{ i punkt } (1, -2),$$

mamy wtedy

$$\delta = \left| \frac{3 \cdot 1 - 5(-2) + 1}{\sqrt{3^2 + 5^2}} \right| = \frac{14}{\sqrt{34}}.$$

ZAGADNIENIE 3. Znaleść równania dwusiecznych kątów, utworzonych przez dwie proste o równaniach

$$Ax + By + C = 0; \qquad A'x + B'y + C' = 0$$

Szukane dwusieczne są miejscem geometrycznem punktów jednakowo odległych od danych prostych, a więc punkty ich spełniają równania

$$\frac{Ax + By + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \pm \frac{A'x + B'y + C'}{\sqrt{A'^2 + B'^2}}$$

24. Dwustosunek czterech punktów.

Niech będą cztery dowolne punkty $A_1 A_2 A_3 A_4$, leżące na jednej osi o określonym zwrocie. Nazywamy *dwustosunkiem* *) tych czterech punktów następujące wyrażenie:

$$\frac{\overline{A_1 A_3}}{\overline{A_1 A_4}} : \frac{\overline{A_2 A_3}}{\overline{A_2 A_4}} \tag{32}$$

*) *Dwustosunek* nazywa się też inaczej *stosunkiem anharmonicznym.*

utworzone z miar wektorów, łączących dane punkty. *Kolejność*, w jakiej wymieniamy punkty $A_1 A_2 A_3 A_4$, ma oczywiście wpływ zasadniczy na wartość utworzonego wyrażenia.

TWIERDZENIE. Jeśli cztery proste, wychodzące z jednego punktu, przetniemy dowolnemi siecznemi, to dwustosunek otrzymanych na każdej siecznej czterech punktów przecięcia ma jedną i tę samą wartość dla wszystkich siecznych.

Niech będą cztery proste o równaniach

$$y = m_1 x; \quad y = m_2 x; \quad y = m_3 x; \quad y = m_4 x; \tag{33}$$

i dowolna prosta sieczna $y = ax + b$, przecinająca proste (33) w czterech punktach $A_1 A_2 A_3 A_4$. Odcięte tych punktów będą więc miały wartości

$$x_1 = \frac{b}{m_1 - a}; \quad x_2 = \frac{b}{m_2 - a}; \quad x_3 = \frac{b}{m_3 - a}; \quad x_4 = \frac{b}{m_4 - a}. \tag{34}$$

Ponieważ stosunek miar wektorów równy jest stosunkowi miar ich rzutów, mamy więc

$$\frac{\overline{A_1 A_3}}{\overline{A_1 A_4}} : \frac{\overline{A_2 A_3}}{\overline{A_2 A_4}} = \frac{x_3 - x_1}{x_4 - x_1} : \frac{x_3 - x_2}{x_4 - x_2};$$

wstawiając wartości (34), otrzymamy, po wykonaniu rachunków,

$$\frac{\overline{A_1 A_3}}{\overline{A_1 A_4}} : \frac{\overline{A_2 A_3}}{\overline{A_2 A_4}} = \frac{m_3 - m_1}{m_4 - m_1} : \frac{m_3 - m_2}{m_4 - m_2}; \tag{35}$$

dwustosunek punktów przecięcia ma więc wartość zależną tylko od położenia danych czterech prostych i jest zatem jednakowy dla wszystkich siecznych *c. b. d. d.* Jeśli punkty $A_1 A_2 A_3 A_4$ są ze sobą harmonicznie sprzężone, to

$$\frac{\overline{A_1 A_3}}{\overline{A_1 A_4}} = - \frac{\overline{A_2 A_3}}{\overline{A_2 A_4}}$$

i dwustosunek (35) będzie równy -1, więc wtedy

$$\frac{m_3 - m_1}{m_4 - m_1} : \frac{m_3 - m_2}{m_4 - m_2} = -1. \tag{36}$$

Jeśli zatem cztery proste przecinają się z pewną prostą w czterech punktach harmonicznie sprzężonych, to wtedy wszelką inną sieczną przecinają też w punktach, tworzących czwórkę harmoniczną.

Takie cztery proste, spełniające związek (36), nazywają się *harmonicznie sprzężone*.

Ćwiczenia.

1. Znaleść równanie prostej, wychodzącej z punktu (1, —2), która dzieli na połowy odcinek, zawarty między punktami (3, 4) i (5, 7).

2. Znaleść równanie prostej, przechodzącej przez punkt (1, 3), któraby tworzyła kąt $\frac{\pi}{4}$ z prostą $y = 2x - 1$.

3. Dane są współrzędne wierzchołków trójkąta (1, 2); (3, 5); (—3, —4); wyznaczyć równania boków.

4. Współrzędne wierzchołków trójkąta są: (0, 0); (1, 1); (2, —3). Znaleść równania wysokości tego trójkąta i dowieść, że one się przecinają w jednym punkcie.

5. Przez punkt (4, 3) poprowadzić dwie proste, które dzielą na trzy równe części odcinek, łączący punkty (1, 1) i (5, 2).

6. Dane są dwie proste o równaniach

$$mx+(2m-1)y+3=0\,; \qquad (4m-7)x-(m+2)y-8=0.$$

a) wyznaczyć wartość parametru m, dla której proste te są do siebie prostopadłe i znaleść wtedy ich punkt przecięcia.
b) wyznaczyć m tak, aby te proste były równoległe i znaleść wtedy ich odległość.

7. Przez punkt (2, 3) poprowadzić prostą, której odległość od początku współrzędnych równałaby się 1.

8. Przez punkt przecięcia prostych o równaniach

$$-x+y-1=0\ ; \quad -2x+y+1=0;$$

poprowadzić prostą, której odległość od punktu (2, 1) równałaby się danej liczbie k.

Przeprowadzić dyskusję. Przypadek $k=1$.

9. Dane są cztery proste, przechodzące przez jeden punkt. Dowieść, że proste te są harmonicznie sprzężone, jeśli prosta sieczna, równoległa do jednej z nich, przecina trzy pozostałe w trzech punktach, równooddalonych od siebie.

10. Dowieść analitycznie, iż

1) dwusieczne w trójkącie przecinają się w jednym punkcie;
2) wysokości w trójkącie przecinają się w jednym punkcie.

ROZDZIAŁ IV.

WŁASNOŚCI FORMY KWADRATOWEJ. RÓWNANIE JEDNORODNE.

25. Określenie i własności formy kwadratowej.

Formą kwadratową dwóch zmiennych niezależnych x i y nazywamy *funkcję jednorodną* drugiego stopnia:

$$f(x,y)=Ax^2+Bxy+Cy^2 \tag{1}$$

gdzie A, B, C są to współczynniki stałe.

Zbadajmy zachowanie się wyrażenia (1) dla różnych wartości zmiennych niezależnych x i y. Rezultaty otrzymane ważne