Dla dowolnego punktu przecięcia M stosunek $\frac{rm}{M'Q}$ będzie miał oczywiście stałą wartość, a więc i stosunek $\frac{MF}{M'Q}$ będzie miał wartość stałą, ponieważ zaś $M'Q$ równa się odległości punktu M od prostej D, zatem dla każdego punktu M przecięcia stożkowego stosunek odległości od punktu F i od prostej D ma tę samą wartość. Przecięcie stożkowe jest więc krzywą drugiego stopnia, której ogniskiem jest punkt styczności F, a kierownicą prosta D. Krzywa ta jest elipsą, hyperbolą lub parabolą, zależnie od położenia płaszczyzny siecznej P. Ze względów powyższych, krzywe drugiego stopnia nazywamy krótko „stożkowemi".

ROZDZIAŁ X.

WŁASNOŚCI SZCZEGÓLNE ELIPSY.

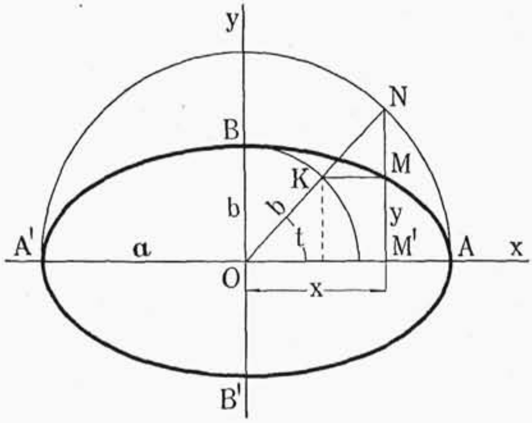
53. Elipsa i koło.

W celu zbadania własności elipsy, obierzmy jej osi symetrji za osi współrzędnych, mamy wtedy

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{1}$$

Załóżmy, iż a jest półosią dużą i rozważmy koło oparte na osi $2a$, jako na średnicy, równanie tego koła będzie

$$x^2 + y^2 = a^2 \tag{2}$$



Rys. 90.

Niech M i N będą punktami elipsy i koła, odpowiadającemi tej samej odciętej x (rys. 89). Z równania (1) dla rzędnej dodatniej punktu elipsy M mamy wyrażenie

$$y_M = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \tag{3}$$

natomiast z równania (2) dla rzędnej koła N wyrażenie

$$y_N = \sqrt{a^2 - x^2} \tag{4}$$

Z wyrażenia (3) i (4) widzimy, iż

$$\frac{y_M}{y_N} = \frac{b}{a} \tag{5}$$

stosunek rzędnych elipsy i koła o promieniu a, odpowiadających tej samej odciętej, jest wielkością stałą, równą stosunkowi osi elipsy.

Elipsę (1) można więc otrzymać z koła (2), skracając rzędne jego punktów w stałym stosunku. Własność ta wskazuje, iż elipsę (1) można uważać jako rzut prostokątny odpowiednio położonego koła w promieniu a, gdyż w rzucie prostokątnym rzędne punktów koła skracają się, jak wiadomo, w stosunku równym cosinusowi kąta nachylenia płaszczyzny koła względem płaszczyzny rzutu. Własność (5) pozwala łatwo odnaleść przy pomocy cyrkla dowolną liczbę punktów elipsy. Zakreślmy mianowicie z punktu O, jako ze środka, dwa koła: jedno o promieniu równym połowie osi dużej a, drugie o promieniu równym połowie osi małej b. Obierzmy na kole większym dowolny punkt N (rys. 70) i połączmy go ze środkiem O, niech K będzie punktem przecięcia się promienia ON z kołem mniejszem. Poprowadźmy przez K równoległą do Ox, równoległa ta przetnie się z prostopadłą NM', spuszczoną z punktu N na Ox, w punkcie M, który będzie jednym z punktów elipsy. Istotnie, z wykreślenia wynika natychmiast iż

$$\frac{\overline{M'M}}{\overline{M'N}} = \frac{b}{a}$$

Oznaczmy przez t kąt, który tworzy promień ON z osią Ox, współrzędne (x, y) punktu elipsy M są funkcjami tego kąta, a mianowicie mamy (patrz rys. 90)

$$\begin{aligned} x &= a \operatorname{Cos} t \\ y &= b \operatorname{Sin} t \end{aligned} \tag{6}$$

Jest to przedstawienie parametryczne punktów elipsy (art. 14).

Rugując parametr t ze związków (6), otrzymamy równanie zwykłe elipsy, mianowicie mamy

$$\frac{x}{a} = \mathrm{Cos}\, t\,; \quad \frac{y}{b} = \mathrm{Sin}\, t$$

stąd zaś

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Jeśli osi elipsy są sobie równe

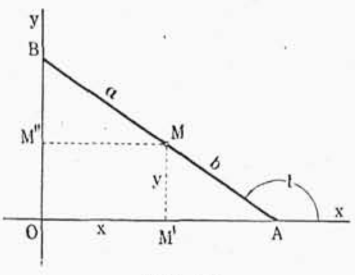
$$a = b\,,$$

wtedy równanie elipsy przybiera postać

$$x^2 + y^2 = a^2$$

t. j. równanie koła o promieniu a. Koło jest więc szczególnym wypadkiem elipsy.

ZAGADNIENIE. Końce odcinka AB o stałej długości ślizgają się po osiach współrzędnych, wyznaczyć krzywą, którą opisze stały punkt M tego odcinka. Oznaczmy przez a i b odległości



Rys. 91.

stałe punktów M od punktów B i A (rys. 91); niech t oznacza kąt nachylenia odcinka AB względem osi Ox. Współrzędne x i y punktu M są następującemi funkcjami zmiennego parametru t (rys. 91):

$$x = -a\,\mathrm{Cos}t\,; \quad y = +b\,\mathrm{Sin}t$$

rugując t, otrzymujemy równanie

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

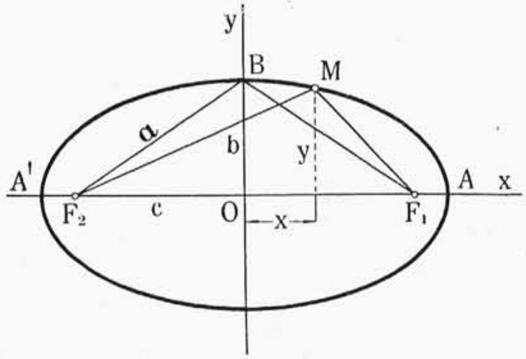
Każdy punkt odcinka AB opisze zatem pewną elipsę.

54. Promienie wodzące elipsy.

Wiemy, iż elipsa posiada dwa ogniska F_1 i F_2, leżące *na osi dużej* w odległości

$$c=\sqrt{a^2-b^2}$$

(jeśli $a>b$) od środka elipsy O, zaś w odległości a do końca osi małej B (rys. 92). Według rozważań w rozdziale poprzednim,



Rys. 92.

odległość dowolnego punktu elipsy M od ogniska F_1 lub F_2 winna wyrazić się *wymiernie* w zależności od odciętej x.

Istotnie, zakładając, iż ognisko F_1 leży po stronie dodatniej osi Ox, mamy:

$$MF_1=\sqrt{y^2+(c-x)^2}=\sqrt{a^2-2cx+\frac{c^2}{a^2}x^2}$$

$$MF_2=\sqrt{y^2+(c+x)^2}=\sqrt{a^2+2cx+\frac{c^2}{a^2}x^2}$$

trójmiany pod pierwiastkiem są pełnemi kwadratami, otrzymamy więc następujące wyrażenia *wymierne* dla odległości dowolnego punktu elipsy $M(x,y)$ od ognisk:

$$MF_1=a-\frac{c}{a}x$$
(7)
$$MF_2=a+\frac{c}{a}x$$

Odległości MF_1 i MF_2 nazywamy *promieniami wodzącemi* punktu M. Dodając wartości (7), otrzymujemy zasadniczą własność elipsy:

(8) $$MF_1+MF_2=2a$$

Suma odległości dowolnego punktu elipsy od jej ognisk, jest wielkością stałą, równą osi dużej elipsy.

Stosunek $\frac{c}{a}$ jest, jak wiemy, *mimośrodem* elipsy, oznaczyliśmy go literą ε; odległości (7) napiszemy więc w postaci

$$(9) \qquad \begin{aligned} MF_1 &= a - \varepsilon x \\ MF_2 &= a + \varepsilon x \end{aligned}$$

Przypominamy, iż F_1 jest ogniskiem, leżącem na dodatniej części osi Ox.

Dla mimośrodu mamy wyrażenie

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}};$$

mimośród elipsy zależy więc tylko od stosunku osi i jest zawsze *mniejszy od jedności*. Jeśli elipsa jest bardzo wydłużona, to znaczy, jeśli b jest małe względem a, wtedy mimośród jest bliski jedności. Jeśli natomiast „spłaszczanie" elipsy jest niewielkie, to znaczy stosunek $\frac{b}{a}$ jest bliski jedności, wtedy ε jest bliskie zera. Gdy b dąży do a, to znaczy, *gdy elipsa dąży do koła, wtedy mimośród dąży do zera.*

Podkreślamy, iż kształt elipsy zależy od wartości *dwóch parametrów* a i b, które mogą być dowolnie dane; wielkości c i ε wynikają z tych wartości na mocy związków

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}; \quad \varepsilon = \frac{c}{a}.$$

Można również podać zgóry wartości a i c lub a i ε, wtedy b będzie odpowiednio określone.

Przykład. Znaleść osi i mimośród elipsy o równaniu

$$3x^2 + 7y^2 = 5.$$

Piszemy równanie w postaci

$$\frac{x^2}{\left(\frac{5}{3}\right)} + \frac{y^2}{\left(\frac{5}{7}\right)} = 1;$$

stąd

$$a = \sqrt{\frac{5}{3}}; \quad b = \sqrt{\frac{5}{7}};$$

oś duża i ogniska leżą na osi odciętych, dla mimośrodu otrzymamy wartość

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 - \frac{3}{7}} = \frac{2}{\sqrt{7}}$$

55. Styczna i normalna do elipsy.

Aby znaleść równanie stycznej do elipsy, należy z równania elipsy

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

wyznaczyć pochodną $\frac{dy}{dx}$, to znaczy granicę stosunku $\frac{y_1-y}{x_1-x}$, gdy x_1 dąży do x. Różniczkując w tym celu obydwie strony równania elipsy względem x, pamiętając, iż y jest funkcją zmiennej x, mamy

$$\frac{2x}{a^2}+\frac{2y}{b^2}\frac{dy}{dx}=0,$$

stąd otrzymujemy wartość współczynnika kątowego stycznej do elipsy w punkcie (x, y)

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{b^2x}{a^2y} \tag{10}$$

Równanie stycznej do elipsy w punkcie (x, y) będzie więc miało postać

$$Y-y=-\frac{b^2x}{a^2y}(X-x) \tag{11}$$

zaś równanie normalnej

$$Y-y=+\frac{a^2y}{b^2x}(X-x) \tag{12}$$

X i Y oznaczają, jak poprzednio, współrzędne bieżące punktu stycznej. Przypominamy, że dwie liczby x i y muszą być związane równaniem

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Równanie stycznej (11) można doprowadzić do prostszej postaci; mamy mianowicie

$$a^2Yy+b^2Xx=a^2y^2+b^2x^2$$

dzieląc zaś przez $a^2 b^2$, otrzymamy

$$\frac{Xx}{a^2}+\frac{Yy}{b^2}=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2},$$

a zatem równanie stycznej do elipsy wypadnie w takiej postaci symetrycznej:

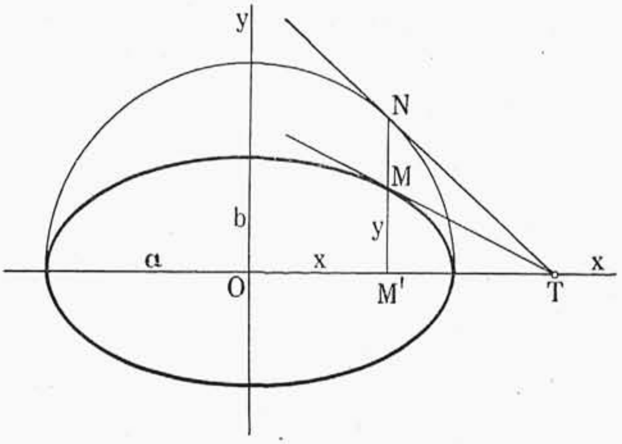
$$\frac{Xx}{a^2}+\frac{Yy}{b^2}=1 \tag{13}$$

łatwej do zapamiętania, wskutek podobieństwa do równania elipsy.

Poznamy teraz pewne zasadnicze własności stycznej i normalnej do elipsy, wynikające z równań (12) i (13).

WŁASNOŚĆ 1. Wyznaczmy położenie punktu T, w którym styczna do elipsy przecina oś Ox (rys. 93). Podstawiając w równaniu stycznej (13) w punkcie $M(x,y)$ elipsy wartość $Y=0$, otrzymamy odciętą odpowiednią $X=OT$ punktu T przecięcia stycznej z osią Ox:

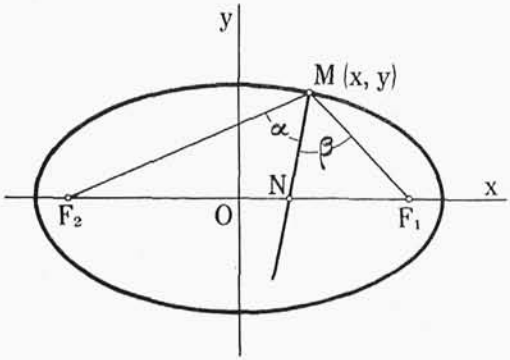
$$X=OT=\frac{a^2}{x}$$



Rys. 93.

Rezultat ten wskazuje, iż *położenie punktu T zależy tylko od osi a elipsy i od odciętej x punktu styczności, nie zależy zaś od osi b;* a więc styczne do elips, mających tę samą oś a, poprowadzone w punktach o tej samej odciętej x, przechodzą przez ten sam punkt T na osi odciętych. Przez punkt T przejdzie więc również i styczna do koła o promieniu a w punkcie N, odpowiadającym odciętej x.

WŁASNOŚĆ 2. Normalna do elipsy jest dwusieczną kąta zawartego między promieniami wodzącemi.



Rys. 94.

Niech będzie dowolny punkt elipsy $M(x, y)$ i promienie wodzące MF_1 i MF_2 (rys. 94). Aby dowieść, iż normalna do elipsy w punkcie M jest dwusieczną kąta F_2MF_1, wystarczy okazać, iż w trójkącie F_1MF_2 normalna dzieli odcinek F_2F_1, zawarty między ogniskami, na części F_2N i NF_1, proporcjonalne do promieni wodzących MF_2 i MF_1. Wyznaczmy więc położenie punktu N, w którym normalna w punkcie M przecina się z osią Ox. Podstawiając w równanie normalnej

$$Y - y = \frac{a^2 y}{b^2 x}(X - x)$$

wartość $Y=0$, otrzymujemy odpowiednią odciętą

$$X = ON = -\frac{b^2 x}{a^2} + x = \varepsilon^2 x$$

a zatem

$$NF_1 = c - ON = c - \varepsilon^2 x = a\varepsilon - \varepsilon^2 x$$

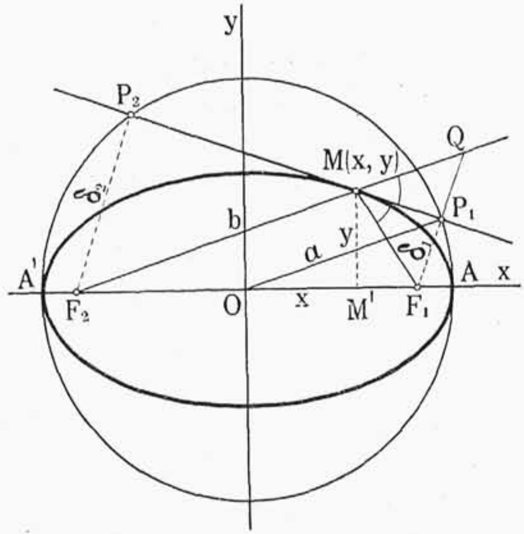
$$F_2N = c + ON = c + \varepsilon^2 x = a\varepsilon + \varepsilon^2 x$$

stąd wynika, iż

$$\frac{NF_1}{F_2N} = \frac{a - \varepsilon x}{a + \varepsilon x} = \frac{MF_1}{MF_2}$$

normalna MN jest więc istotnie dwusieczną kąta, zawartego między promieniami wodzącemi ($\alpha = \beta$) c. b. d. d.

WŁASNOŚĆ 3. *Iloczyn odległości stycznej do elipsy od jej ognisk ma wartość stałą dla wszystkich punktów styczności.*



Rys. 95.

Niech będzie równanie stycznej do elipsy w punkcie dowolnym $M(x, y)$:

$$\frac{Xx}{a^2} + \frac{Yy}{b^2} - 1 = 0 \tag{14}$$

Aby wyznaczyć odległości δ_1 i δ_2 ognisk F_1 i F_2 od stycznej (14), przypomnijmy sobie rezultat artykułu 23 (wzór 31'), według którego odległość punktu danego (α, β) od prostej $AX + BY + C = 0$ równa się wartości bezwzględnej lewej strony równania tej prostej w postaci normalnej w punkcie (α, β), to znaczy

$$\delta = \frac{|A\alpha + B\beta + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

W naszym wypadku współrzędne ognisk są $(c, 0)$ i $(-c, 0)$, zaś współczynniki A i B w równaniu stycznej mają wartości

$$\frac{x}{a^2}; \frac{y}{b^2}$$

będzie więc

$$\delta_1 = \frac{\left|\frac{cx}{a^2} - 1\right|}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}}}; \quad \delta_2 = \frac{\left|-\frac{cx}{a^2} - 1\right|}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}}}$$

stąd

$$\delta_1 \delta_2 = \frac{1 - \frac{c^2 x^2}{a^4}}{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}} = \frac{1 - \frac{x^2}{a^2} + b^2 \frac{x^2}{a^4}}{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}} = \frac{\frac{y^2}{b^2} + b^2 \frac{x^2}{a^4}}{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}}$$

a zatem

$$\delta_1 \delta_2 = b^2 \tag{15}$$

Iloczyn odległości jest więc istotnie stały i równy kwadratowi połówki osi małej elipsy.

WŁASNOŚĆ 4. Miejscem geometrycznem spodków prostopadłych P, spuszczonych z ogniska na styczne do elipsy, jest okrąg koła, wystawiony na osi dużej elipsy, jako na średnicy.

Dowiedziemy tej własności w sposób bezpośredni geometryczny.

Niech P_1 będzie spodkiem prostopadłej, spuszczonej z ogniska F_1 na styczną do elipsy w punkcie dowolnym $M(x, y)$ (rys. 95), Jeśli prostopadłą $F_1 P_1$ przedłużymy do przecięcia w punkcie Q z przedłużeniem promienia wodzącego $F_2 M$, to w trójkącie $F_1 M Q$ wysokość MP_1, jako styczna, będzie dwusieczną kąta M, a więc

$$MQ = MF_1$$

wobec tego odcinek $F_2 Q$, jako równy sumie promieni wodzących, będzie miał długość równą osi dużej elipsy:

$$F_2 Q = F_2 M + MQ = 2a,$$

a w takim razie odcinek OP_1, jako łączący środki boków w trójkącie $F_2 F_1 Q$, będzie równy połowie odcinka $F_2 Q$, a więc będzie miał długość stałą

$$OP_1 = \frac{1}{2} F_2 Q = a;$$

miejscem geometrycznem punktu P_1 jest więc istotnie okrąg koła o promieniu a ze środkiem O.