z parametrem zmiennym λ. Dowieść, iż przez punkt dowolny przestrzeni (x_0, y_0, z_0) przechodzą trzy powierzchnie tego układu, z których jedna jest elipsoidą, druga — hyperboloidą jednopowłokową i trzecia — hyperboloidą dwupowłokową.

5. Wyznaczyć miejsce geometryczne środków powierzchni o równaniu

$$x^2 + y^2 + z^2 + \lambda z (x - a + \mu y) - R^2 = 0;$$

gdzie λ i μ są to zmienne parametry.

6. Dowieść, iż powierzchnia o równaniu

$$13x^2 + 10y^2 + 5z^2 - 4xy - 6xz - 12yz + 2x + 4y + 6z - 1 = 0$$

nie ma środka i znaleść równania jej osi symetrji.

ROZDZIAŁ X.

PŁASZCZYZNA STYCZNA DO POWIERZCHNI DRUGIEGO STOPNIA.

37. Styczna do linji w przestrzeni.

Prostą styczną do linji w przestrzeni w danym punkcie określamy, podobnie jak na płaszczyźnie, jako położenie graniczne siecznej, przechodzącej przez dany punkt krzywej i jej punkt sąsiedni, gdy ten punkt sąsiedni dąży do danego.

Niech będzie krzywa C, której punkty mają współrzędne określone przez funkcje parametru t:

$$x = f_1(t); \quad y = f_2(t); \quad z = f_3(t) \tag{1}$$

Rozważmy punkt krzywej M, odpowiadający wartości t i punkt sąsiedni krzywej M_1, odpowiadający wartości $t + \Delta t$; oznaczmy różnicę współrzędnych punktów M i M' w ten sposób:

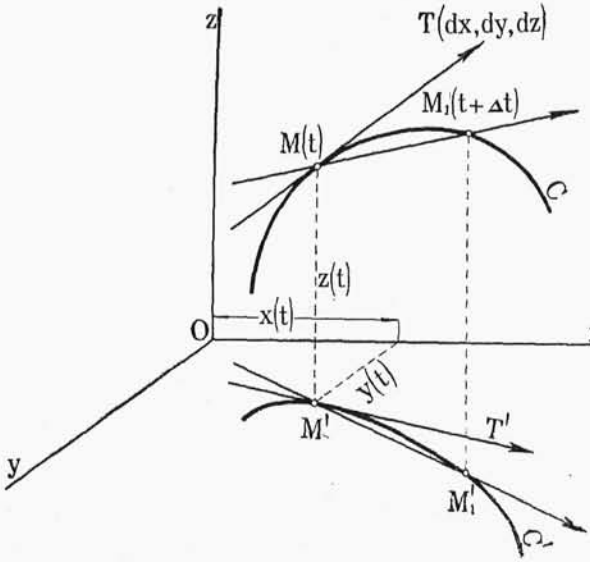
$$\begin{aligned} \Delta x &= f_1(t + \Delta t) - f_1(t) \\ \Delta y &= f_2(t + \Delta t) - f_2(t) \\ \Delta z &= f_3(t + \Delta t) - f_3(t) \end{aligned} \tag{2}$$

są to oczywiście miary rzutów wektora, łączącego punkty M i M_1 (rys. 197). Równania siecznej, łączącej punkty M i M_1, będą więc miały postać

$$\frac{X - x}{\Delta x} = \frac{Y - y}{\Delta y} = \frac{Z - z}{\Delta z} \tag{3}$$

X, Y, Z oznaczają współrzędne bieżące punktów siecznej. Aby uwidocznić graniczne położenie siecznej, podzielmy mianowniki równań (3) przez Δt:

$$\frac{X-x}{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)} = \frac{Y-y}{\left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)} = \frac{Z-z}{\left(\frac{\Delta z}{\Delta t}\right)}$$



Rys. 197.

Widzimy, że, gdy punkt M' dąży do punktu M, to stosunki

$$\frac{\Delta x}{\Delta t}, \quad \frac{\Delta y}{\Delta t}, \quad \frac{\Delta z}{\Delta t}$$

dążą do pochodnych

$$\frac{dx}{dt}, \quad \frac{dy}{dt}, \quad \frac{dz}{dt},$$

a zatem, jeśli te pochodne istnieją i nie znikają wszystkie, to sieczna dąży do prostej, określonej przez równania

$$\frac{X-x}{\left(\frac{dx}{dt}\right)} = \frac{Y-y}{\left(\frac{dy}{dt}\right)} = \frac{Z-z}{\left(\frac{dz}{dt}\right)} \tag{4}$$

Są to właśnie równania rzutów stycznej MT do krzywej danej w punkcie $M(x, y, z)$.

Zamiast pochodnych można również napisać różniczki, jako współczynniki kierunkowe w równaniu stycznej (4):

$$\text{(5)} \qquad \frac{X-x}{dx}=\frac{Y-y}{dy}=\frac{Z-z}{dz}$$

A zatem *pochodne lub różniczki współrzędnych krzywej w przestrzeni przedstawiają współczynniki kierunkowe stycznej do tej krzywej w danym punkcie.*

Cosinusy kierunkowe α, β, γ stycznej otrzymamy, dzieląc każdy ze współczynników kierunkowych przez pierwiastek z sumy ich kwadratów, będzie zatem

$$\alpha=\pm\frac{dx}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}; \qquad \beta=\pm\frac{dy}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}};$$

$$\gamma=\pm\frac{dz}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}$$

Z równań rzutów stycznej widzimy również, iż *rzuty stycznej do krzywej, nieprostopadłej do płaszczyzny rzutów, są styczne do rzutów krzywej na płaszczyzny odpowiednie.* Jest to zresztą oczywiste z rozważań geometrycznych, albowiem rzut siecznej jest prostą, łączącą rzuty dwóch punktów krzywej (rys. 197).

P r z y k ł a d. Niech będzie walec kołowy o promieniu r, którego osią jest Oz. Punkty linji śrubowej na tym walcu są określone przez warunek, iż łuk koła, zawartego między rzutami dwóch punktów na podstawę jest proporcjonalny do przyrostu współrzędnej z. Przypuśćmy, iż linja śrubowa przechodzi przez punkt walca M_0, leżący na osi Ox (rys. 158). Mamy wtedy dla współrzędnych x, y, z punktu linji śrubowej M, wyrażenia

$$x = r \operatorname{Cos} \varphi$$

$$y = r \operatorname{Sin} \varphi$$

$$z = k r \varphi$$

k jest współczynnikiem proporcjonalności. Traktując φ jako parametr zmienny, mamy takie współczynniki kierunkowe stycznej:

$$\frac{dx}{d\varphi} = -r \operatorname{Sin}\varphi; \quad \frac{dy}{d\varphi} = r \operatorname{Cos}\varphi; \quad \frac{dz}{d\varphi} = kr.$$

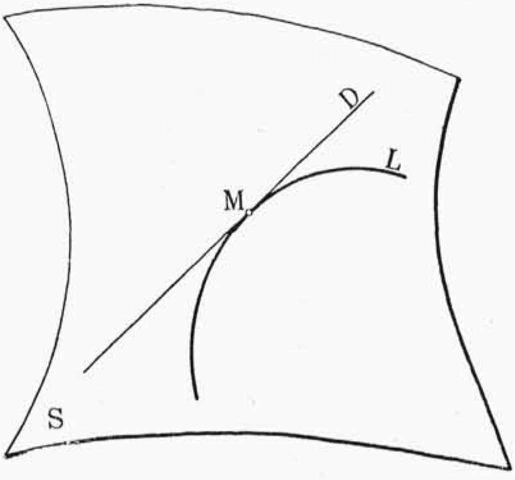
Wyznaczmy stąd kąt γ, który styczna tworzy z osią Oz, mamy

$$\operatorname{Cos}\gamma = \frac{dz}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}} = \frac{k}{\sqrt{1+k^2}}$$

styczna do linji śrubowej tworzy więc z osią walca kąt stały.

38. Płaszczyzna styczna do powierzchni drugiego stopnia.

Mówimy, iż *prosta D jest styczna do powierzchni danej S w punkcie M, jeśli jest w tym punkcie styczna do krzywej pewnej L, nakreślonej na tej powierzchni* (rys. 198).



Rys. 198.

Niech będzie teraz powierzchnia drugiego stopnia, określona przez równanie w postaci ogólnej

$$f(x,y,z) = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + \\ + Hy + Iz + K = 0 \tag{6}$$

i pewna krzywa L, określona przez równania parametryczne

$$x = f_1(t);\ y = f_2(t);\ z = f_3(t) \tag{7}$$

Krzywa L leży na powierzchni (6), jeśli wartości funkcyj (7) spełniają równanie (6), gdy t zmienia się w danym przedziale, to znaczy, gdy

$$f(x(t),\ y(t),\ z(t)) = 0 \tag{8}$$

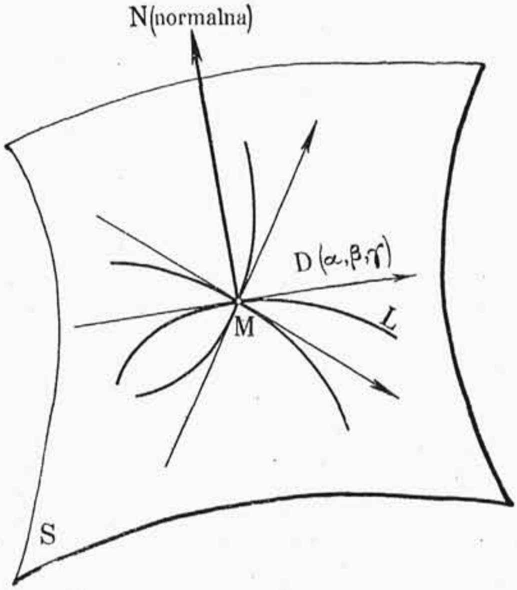
W założeniu, iż funkcje (7) spełniają związek (6), zróżniczkujmy obie strony tego związku względem zmiennej niezależnej t, traktując współrzędne x, y, z jako funkcje zmiennej t określone przez równania (7), otrzymamy wtedy

$$2Ax\frac{dx}{dt} + 2By\frac{dy}{dt} + 2Cz\frac{dz}{dt} + D\left(y\frac{dx}{dt} + x\frac{dy}{dt}\right) +$$

$$+ E\left(z\frac{dx}{dt} + x\frac{dz}{dt}\right) + F\left(z\frac{dy}{dt} + y\frac{dz}{dt}\right) + G\frac{dx}{dt} + H\frac{dy}{dt} + I\frac{dz}{dt} = 0$$

stąd zaś, po odpowiedniem uporządkowaniu, wypadnie związek w postaci

$$f'_x(x,y,z)\frac{dx}{dt}+f'_y(x,y,z)\frac{dy}{dt}+f'_z(x,y,z)\frac{dz}{dt}=0 \tag{9}$$



Rys. 199.

Wiemy jednak, iż pochodne

$$\frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt},\ \frac{dz}{dt}$$

funkcyj (7) są współczynnikami kierunkowemi (α, β, γ) stycznej D do krzywej L, a więc i do powierzchni danej w punkcie $M(x, y, z)$; a zatem, według związku (9), mamy

$$f'_x(x,y,z)\cdot\alpha+f'_y(x,y,z)\cdot\beta+f'_z(x,y,z)\cdot\gamma=0 \tag{10}$$

Rozważmy teraz zbiór wszelkich stycznych do powierzchni w punkcie $M(x, y, z)$; kierunki (α, β, γ) tych stycznych spełniają zawsze związek (10), ponieważ zaś trzy liczby

$$f'_x(x,y,z);\quad f'_y(x,y,z);\quad f'_z(x,y,z)$$

mają dla wszystkich tych stycznych te same wartości, bo zależą tylko od współrzędnych (x, y, z) punktu M, a więc związek (10) wyraża ważną własność geometryczną, iż *wszystkie proste styczne do powierzchni w punkcie M są prostopadłe do jednego i tego samego wektora MN o składowych*

$$(11) \qquad f'_x(x,y,z)\,;\ f'_y(x,y,z)\,;\ f'_z(x,y,z)$$

a zatem leżą w jednej płaszczyźnie P, przechodzącej przez punkt M i prostopadłej do wektora MN (rys. 199).

Płaszczyznę taką, w której leżą wszystkie proste styczne do powierzchni w punkcie M, nazywamy płaszczyzną styczną do powierzchni danej w punkcie M.

Na zasadzie wartości (11) składowych wektora prostopadłego do płaszczyzny stycznej w punkcie $M(x,y,z)$, równanie jej będzie miało postać

$$(12) \qquad (X-x)f'_x(x,y,z)+(Y-y)f'_y(x,y,z)+(Z-z)f'_z(x,y,z)=0$$

gdzie (X, Y, Z) oznaczają współrzędne bieżące dowolnego punktu płaszczyzny, zaś współrzędne (x,y,z) punktu styczności grają rolę stałych parametrów, związanych równaniem

$$f(x,y,z)=0$$

Powierzchnia drugiego stopnia posiada więc w każdym punkcie (x,y,z) określoną płaszczyznę styczną, z *wyjątkiem tylko wypadku, gdy punkt (x,y,z) jest środkiem powierzchni na niej leżącym*, wtedy bowiem znikają jednocześnie trzy wartości (11).

Stosując podobne przekształcenie, jak w geometrji na płaszczyźnie, możemy równanie płaszczyzny stycznej napisać w postaci, analogicznej z równaniem stycznej do krzywej drugiego stopnia:

$$(13) \qquad AXx+BYy+CZz+\frac{1}{2}D(Xy+Yx)+\frac{1}{2}E(Xz+Zx)+$$
$$+\frac{1}{2}F(Yz+Zy)+\frac{1}{2}G(X+x)+\frac{1}{2}H(Y+y)+$$
$$+\frac{1}{2}I(Z+z)+K=0$$

Prostopadłą do płaszczyzny stycznej w punkcie $M(x,y,z)$ nazywamy normalną do powierzchni w tym punkcie, normalna ta ma współczynniki kierunkowe (11) i będzie wobec tego określona przez równania

$$(14) \qquad \frac{X-x}{f_x'}=\frac{Y-y}{f_y'}=\frac{Z-z}{f_z'}$$

(X, Y, Z) oznaczają współrzędne bieżące punktów normalnej.

Jeśli powierzchnia odniesiona jest do osi symetrji i jej równanie ma postać

$$A x^2 + B y^2 + C z^2 + D = 0$$

wtedy płaszczyzna styczna w punkcie (x, y, z) będzie miała równanie

$$A X x + B Y y + C Z z + D = 0$$

Z równania tego widzimy, iż *płaszczyzny styczne w wierzchołkach powierzchni drugiego stopnia są prostopadłe do odpowiednich osi.*

Jeżeli powierzchnia drugiego stopnia posiada tworzące prostolinjowe rzeczywiste, jak hyperboloida jednopowłokowa, paraboloida hyperboliczna, powierzchnia stożkowa i powierzchnie walcowe, wtedy oczywiście tworzące te, jako schodzące się ze swemi stycznemi, leżeć winny w płaszczyznach stycznych do powierzchni w punktach tych tworzących. Ponieważ przez dowolny punkt M hyperboloidy i paraboloidy przechodzą wogóle dwie tworzące prostolinjowe, a więc określają one położenie płaszczyzny stycznej w punkcie M, jako przez nie przesuniętej.

Jeśli powierzchnia dana jest stożkowa, wtedy punkty tej powierzchni, leżące na tej samej tworzącej, mają *wspólną płaszczyznę styczną*, przechodzącą przez tę tworzącą. Istotnie, obierając wierzchołek stożka jako początek układu, otrzymamy równanie powierzchni *w postaci jednorodnej*

$$f(x, y, z) = 0$$

zaś równanie płaszczyzny stycznej

$$(X - x) f_x' + (Y - y) f_y' + (Z - z) f_z' = 0$$

w postaci też jednorodnej

$$X f_x' + Y f_y' + Z f_z' = 0$$

jeśli więc punkt styczności (x, y, z) przesuwa się wzdłuż tworzącej, wtedy jego współrzędne, a zatem i współczynniki w równaniu płaszczyzny stycznej, zmieniają się proporcjonalnie i płaszczyzna styczna zmianie nie ulega.

Podobnie łatwo wykazać, iż punkty powierzchni walcowej, leżące na tej samej tworzącej, mają wspólną płaszczyznę styczną przez tę tworzącą przesuniętą.

39. Zagadnienia dotyczące płaszczyzny stycznej.

ZAGADNIENIE 1. *Znaleść równanie płaszczyzny stycznej do danej powierzchni drugiego stopnia, równoległej do danej płaszczyzny.*

Niech

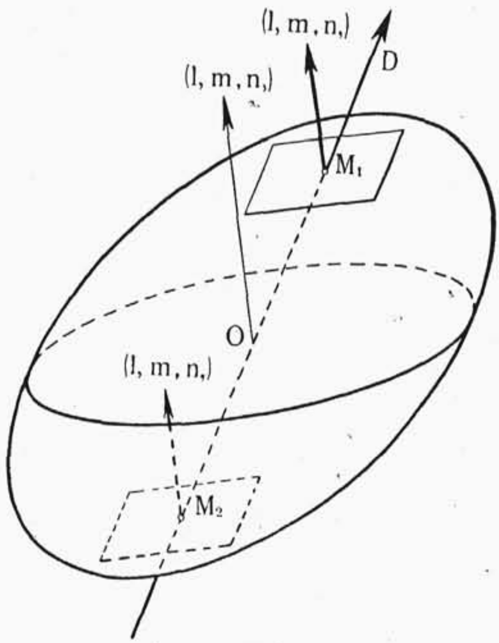
$$f(x, y, z) = 0$$

będzie równaniem danej powierzchni, zaś (l, m, n) niech oznaczają współczynniki kierunkowe danej płaszczyzny. Równanie szukanej płaszczyzny stycznej w nieznanym punkcie (x, y, z) powierzchni ma postać

$$(X-x)f_x' + (Y-y)f_y' + (Z-z)f_z' = 0$$

Warunek równoległości tej płaszczyzny do płaszczyzny danej wyrazi się związkami

$$\frac{f_x'(x, y, z)}{l} = \frac{f_y'(x, y, z)}{m} = \frac{f_z'(x, y, z)}{n} \tag{15}$$



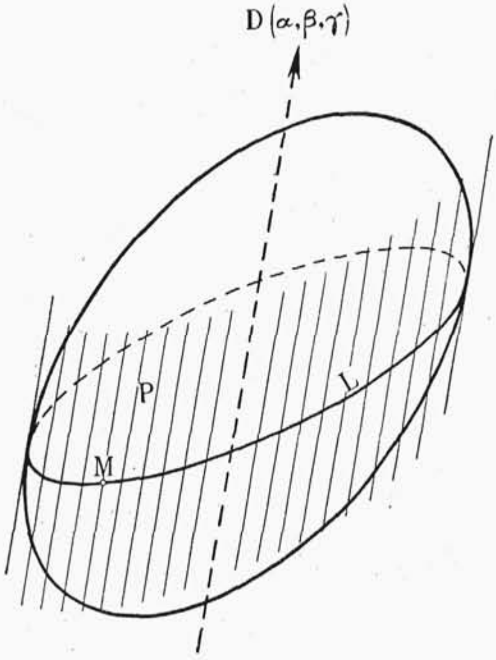
Rys. 200.

które, łącznie z równaniem $f(x, y, z) = 0$, służyć winny do określenia punktów styczności. Otóż, jak wiemy z art. 35, równania (15) przedstawiają średnicę powierzchni D, związaną z kierunkiem (l, m, n), szukane punkty styczności są więc przecięciem średnicy

(15) z powierzchnią daną (rys. 200). W przypadku elipsoidy istnieją zawsze dwa punkty przecięcia M_1 i M_2 dla każdego kierunku (l, m, n), w przypadku hyperboloidy istnieją dwa punkty rzeczywiste lub urojone, gdy średnica (15) nie ma kierunku asymptotycznego i wreszcie, w przypadku paraboloidy istnieje zawsze jeden punkt przecięcia, gdy wektor (l, m, n) nie jest prostopadły do osi paraboloidy.

ZAGADNIENIE 2. *Znaleść płaszczyzny styczne do danej powierzchni drugiego stopnia, równoległe do danej prostej.*

(α, β, γ) oznaczają współczynniki kierunkowe danej prostej D. Z postaci równania płaszczyzny stycznej do powierzchni



Rys. 201.

danej $f(x, y, z) = 0$ wnioskujemy natychmiast, iż żądane punkty styczności $M(x, y, z)$ winny spełniać równanie

$$\alpha f'_x(x, y, z) + \beta f'_y(x, y, z) + \gamma f'_z(x, y, z) = 0$$

a to oznacza, iż będą leżały na przecięciu się danej powierzchni z płaszczyzną średnicową P, sprzężoną z danym kierunkiem (α, β, γ) (rys. 201).

Linja przecięcia L będzie oczywiście linją styczności walca opisanego na danej powierzchni, którego tworzące mają dany kierunek (α, β, γ); zagadnienie wymaga oczywiście założenia, iż kierunek (α, β, γ) jest różny od asymptotycznego.

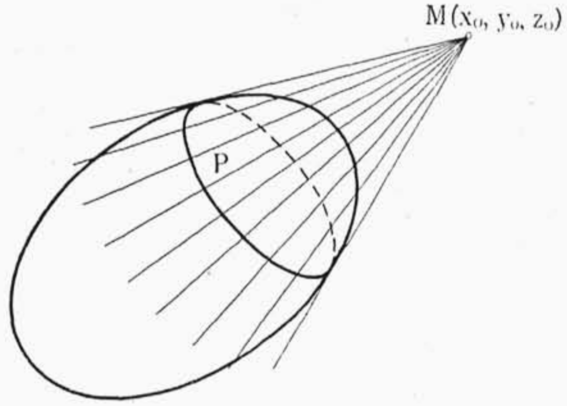
ZAGADNIENIE 3. Znaleść płaszczyzny styczne do danej powierzchni drugiego stopnia, które przechodziłyby przez dany punkt (x_0, y_0, z_0).

Postępując, jak w analogicznem zagadnieniu geometrji na płaszczyźnie, żądamy, aby równanie płaszczyzny stycznej (13) w punkcie (x, y, z) było spełnione w punkcie danym $M(x_0, y_0, z_0)$ i otrzymujemy w ten sposób związek następujący, który winny spełniać szukane punkty styczności:

$$(16) \quad A x_0 x + B y_0 y + C z_0 z + \frac{1}{2} D (x_0 y + y_0 x) + \frac{1}{2} E (x_0 z + x z_0) +$$

$$+ \frac{1}{2} F (y_0 z + z_0 y) + \frac{1}{2} G (x_0 + x) + \frac{1}{2} H (y_0 + y) + \frac{1}{2} I (z_0 + z) + K = 0;$$

związkowi temu odpowiada zbiór punktów (x, y, z), tworzących pewną płaszczyznę P, którą nazywamy analogicznie płaszczyzną biegunową punktu $M(x_0, y_0, z_0)$. Szukane punkty styczności leżą więc na przecięciu płaszczyzny biegunowej, odpowiadającej punktowi danemu (x_0, y_0, z_0), z daną powierzchnią.



Rys. 202.

Przecięcie to będzie oczywiście linją styczności powierzchni stożkowej, opisanej na danej powierzchni drugiego stopnia, której wierzchołek znajduje się w punkcie danym $M(x_0, y_0, z_0)$ (rys. 202).