56. Zagadnienia dotyczące stycznej do elipsy.

ZAGADNIENIE 1. *Wyznaczyć warunek, aby prosta*

$$y = m\,x + n$$

była styczna do elipsy

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Warunek ten wyrazi się pewnym związkiem między parametrami m i n danej prostej. Aby ten związek otrzymać, wstawmy wartość $y = m\,x + n$ w równanie elipsy, otrzymamy wtedy równanie

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{(m\,x + n)^2}{b^2} = 1 \tag{16}$$

określające odcięte punktów przecięcia elipsy z daną prostą. Warunek styczności szukany uzyskamy, pisząc, iż równanie (16) ma jeden pierwiastek podwójny. Porządkując we właściwy sposób to równanie, otrzymamy

$$(b^2 + a^2 m^2)\,x^2 + 2\,m\,n\,a^2\,x - a^2\,(b^2 - n^2) = 0 \tag{17}$$

przyrównywując więc wyróżnik jego do zera

$$(m\,n\,a^2)^2 - a^2\,(b^2 - n^2)\,(b^2 + a^2 m^2) = 0$$

będziemy mieli, po uproszczeniu, warunek konieczny i wystarczający styczności prostej o równaniu $y = m\,x + n$ do elipsy danej w postaci związku

$$b^2 + a^2 m^2 - n^2 = 0\,; \tag{18}$$

odpowiedni punkt styczności określimy z równania (17), mamy wtedy odciętą

$$x = -\frac{m\,n\,a^2}{b^2 + a^2 m^2}$$

Związek (18) określa układ prostych stycznych do danej elipsy; w układzie tym jeden z parametrów (m, n) można podać zgóry, zaś wartość drugiego należy wtedy odpowiednio dobrać, według związku (18). Widzimy, iż podanie dowolne parametru m nie podlega żadnemu ograniczeniu, natomiast wartość bezwzględna parametru n nie powinna być mniejsza od b, co jest oczywiste z geometrycznego punktu widzenia, bowiem n jest miarą wektora, odciętego na osi Oy przez styczną.

ZAGADNIENIE 2. *Znaleść równanie stycznej do elipsy*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

wyprowadzonej z danego punktu zewnętrznego $M(\alpha, \beta)$. Zagadnienie to można rozwiązać dwoma sposobami:

1°) wyznaczając *współczynnik kątowy* stycznej przez badanie przecięcia się elipsy z pękiem prostych, wychodzących z punktu danego $M(\alpha, \beta)$;

2°) wyznaczając *współrzędne punktu styczności* (x, y) przez korzystanie z postaci gotowej równania stycznej do elipsy w tym punkcie (x, y).

Metoda pierwsza.

W równaniu pęku prostych, wychodzących z punktu danego $M(\alpha, \beta)$,

$$y-\beta=m(x-\alpha) \tag{19}$$

należy tak dobrać współczynnik kątowy m, aby to równanie przedstawiało styczną do danej elipsy.

Otóż można tu odrazu skorzystać ze znalezionego już warunku styczności w postaci (18); pisząc mianowicie równanie prostej (19) w postaci

$$y=mx+(\beta-m\alpha)$$

i podstawiając do warunku (18) wartość

$$n=\beta-m\alpha,$$

otrzymamy następujący związek:

$$b^2+a^2m^2-(\beta-m\alpha)^2=0$$

lub

$$(a^2-\alpha^2)m^2+2\alpha\beta m+(b^2-\beta^2)=0 \tag{20}$$

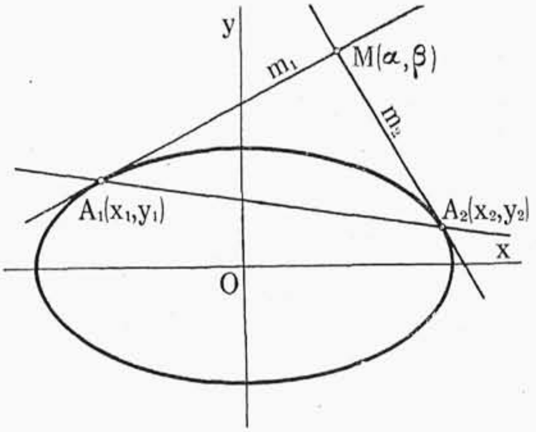
Pierwiastki otrzymanego równania będą właśnie szukanemi współczynnikami kątowemi stycznych, wychodzących z danego punktu (α, β) (rys. 96). Równanie (20) posiada dwa pierwiastki rzeczywiste m_1 i m_2, jeśli $a^2 - \alpha^2 \neq 0$ i gdy wyróżnik jego jest dodatni:

$$\alpha^2 \beta^2 - (a^2 - \alpha^2)(b^2 - \beta^2) > 0$$

lub, inaczej pisząc, jeśli

$$\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} - 1 > 0$$

a więc, gdy dany punkt $M(\alpha, \beta)$ leży zewnątrz elipsy.



Rys. 96.

W przypadku szczególnym, gdy $a^2 - \alpha^2 = 0$, t. j. $\alpha = \pm a$, równanie (20) jest pierwszego stopnia i ma tylko jeden pierwiastek pojedyńczy

$$m = -\frac{b^2 - \beta^2}{2\alpha\beta}$$

(gdy nadto $\beta \neq 0$), w tym jednak wypadku istnieją również *dwie* styczne do elipsy, wychodzące z punktu (α, β), bo, oprócz prostej o znalezionym współczynniku kątowym m, będzie również styczną do elipsy w jej wierzchołku prostopadła $x = \alpha = \pm a$ do osi Ox, wychodząca z danego punktu.

Z danego punktu zewnętrznego $M(\alpha, \beta)$ można więc wyprowadzić dwie styczne do elipsy. Równania tych stycznych otrzymamy, podstawiając do związku(19) pierwiastki m_1, m_2 równania (20).

Metoda druga.

Należy wyznaczyć współrzędne (x, y) punktu styczności, wiedząc, iż styczna przechodzi przez dany punkt $M(\alpha, \beta)$; otóż analitycznie oznacza to, iż równanie stycznej do elipsy w punkcie narazie nieznanym (x, y)

(21) $$\frac{Xx}{a^2}+\frac{Yy}{b^2}=1$$

winno być spełnione, jeśli zamiast współrzędnych bieżących stycznej (X, Y) wstawimy dane współrzędne (α, β) punktu M, mamy więc taki związek między niewiadomemi x i y:

(22) $$\frac{\alpha x}{a^2}+\frac{\beta y}{b^2}=1$$

Z drugiej strony wiemy, iż punkt styczności (x, y) spełnia równanie elipsy

(23) $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1;$$

mamy więc dwa związki (22) i (23), określające niewiadome współrzędne punktu styczności (x, y).

Rozwiązując układ równań (22) i (23), okażemy, iż w przypadku, gdy

$$\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}-1>0$$

to znaczy, gdy punkt (α, β) leży zewnątrz obszaru zamkniętego elipsą, istnieją dwie pary rozwiązań (x_1, y_1) i (x_2, y_2). A zatem istnieją wogóle dwie styczne do elipsy, wychodzące z punktu (α, β). Znajdźmy teraz interpretację geometryczną układu równań (22) i (23). Wszelkie pary liczb (x, y), spełniające tylko równanie (22), są współrzędnemi punktów, tworzących pewną linję prostą, albowiem związek (22) jest *pierwszego stopnia* względem x i y. Wszelkie zaś pary liczb (x, y), spełniające tylko związek (23), są współrzędnemi punktów danej elipsy. A zatem, poszukiwane wyżej punkty styczności A_1 i A_2, których współrzędne (x_1, y_1) i (x_2, y_2) spełniają jednocześnie obydwa związki (22) i (23), *są punktami przecięcia pewnej prostej o równaniu:*

(24) $$\frac{\alpha x}{a^2}+\frac{\beta y}{b^2}=1$$

z elipsą o równaniu (23). Jeśli więc w równaniu stycznej (21) ustalimy współrzędne bieżące (X, Y), nadając im wartości (α, β), zaś traktować będziemy symbole x i y, jako wielkości zmienne, to otrzymamy równanie (24), które *przedstawia prostą, łączącą punkty styczności* A_1 i A_2 stycznych do elipsy, wyprowadzonych z punktu $M(\alpha, \beta)$ (rys. 96). Ciekawy ten rezultat wskazuje, iż odszukanie równania cięciwy, łączącej punkty styczności A_1 i A_2, *poprzedza* odnalezienie samych tych punktów; mianowicie *wpierw* otrzymujemy równanie prostej (24), *następnie* zaś odnajdujemy jej przecięcia A_1 i A_2 z elipsą. Położenie prostej (24) zależy od położenia punktu $M(\alpha, \beta)$; prosta ta nazywa się biegunową punktu M, zaś punkt M zwie się jej biegunem. Nieco później uogólnimy definicję biegunowej dla dowolnego położenia bieguna. Jeśli współrzędne (α, β) spełniają równanie elipsy danej, to znaczy, gdy punkt M leży na elipsie, wtedy równanie (24) przedstawia styczną do elipsy w punkcie (α, β).

ZAGADNIENIE 3. *Znaleść równanie stycznej do elipsy*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

równoległej do danej prostej

$$y = mx.$$

Metoda pierwsza. Znając wartość współczynnika kątowego m szukanej stycznej, możemy natychmiast wyznaczyć drugi parametr n równania stycznej

$$y = mx + n$$

ze znalezionego już poprzednio warunku styczności

$$b^2 + a^2 m^2 - n^2 = 0;$$

otrzymamy

$$n = \pm \sqrt{b^2 + a^2 m^2},$$

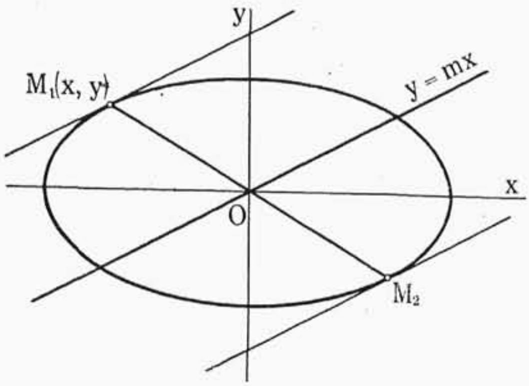
istnieją więc dwie styczne równoległe do prostej $y = mx$, określone przez równania

$$y = mx \pm \sqrt{b^2 + a^2 m^2}$$

widzimy, iż są one położone symetrycznie względem środka elipsy (rys. 97).

Metoda druga. Metoda ta polega na określeniu współrzędnych (x, y) szukanych punktów styczności. Otóż wykazywaliśmy już, iż współczynnik kątowy stycznej do elipsy w punkcie (x, y) ma wartość

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2 x}{a^2 y}$$



Rys. 97.

warunek równoległości stycznej do prostej o równaniu

$$y = mx$$

wyrazi się więc związkiem

(25) $$-\frac{b^2 x}{a^2 y} = m\,,$$

który, łącznie z równaniem elipsy

(26) $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\,,$$

pozwoli określić niewiadome współrzędne (x, y) punktu styczności. Z układu równań (25) i (26) otrzymamy dwie pary rozwiązań, a więc dwa punkty styczności. Z punktu widzenia geometrycznego, poszukiwanie rozwiązań układu równań (25) i (26) oznacza poszukiwanie punktów przecięcia się elipsy (26) z krzywą o równaniu (25), w którym (x, y) będziemy traktować jako zmienne. Ale równanie (25) jest pierwszego stopnia, a zatem przedstawia ono równanie cięciwy $M_1 M_2$, łączącej szukane punkty styczności (rys. 97). Rozwiązania istnieją dla każdej wartości na m.

ZAGADNIENIE 4. Wyznaczyć miejsce geometryczne punktów na płaszczyźnie, z których styczne wyprowadzone do elipsy są do siebie prostopadłe.

W tem zagadnieniu należy oczywiście użyć związku (18), *nie wprowadzając* współrzędnych punktów styczności. Oznaczmy przez (x_0, y_0) współrzędne jednego z punktów szukanego miejsca geometrycznego. Prosta, przechodząca przez ten punkt, ma równanie

$$y - y_0 = m(x - x_0) \tag{27}$$

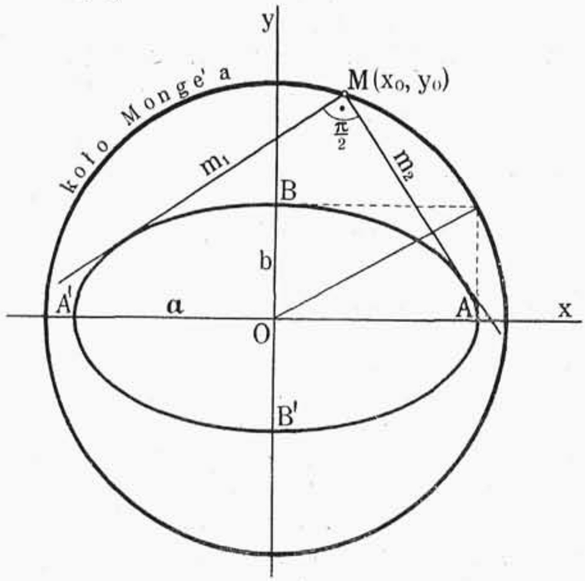
lub

$$y = mx + (y_0 - mx_0) \tag{28}$$

Aby ta prosta była styczna do elipsy danej o równaniu $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, trzeba i wystarcza, żeby był spełniony warunek (18); ponieważ w danym wypadku będzie $n = y_0 - mx_0$, otrzymamy więc taki warunek styczności:

$$b^2 + a^2m^2 - (y_0 - mx_0)^2 = 0, \tag{29}$$

który określa dwie wartości współczynnika kątowego m tych z pomiędzy prostych (28), wychodzących z punktu (x_0, y_0), które są styczne do elipsy.



Rys. 98.

W naszem zagadnieniu szukamy takich punktów (x_0, y_0), aby styczne, wyprowadzone z każdego z nich do elipsy, były do siebie prostopadłe (rys. 98), to znaczy, aby pierwiastki m_1 i m_2 równania (29) spełniały warunek:

$$m_1 m_2 = -1$$

Otóż, porządkując odpowiednio równanie (30), mamy:

$$(a^2 - x_0^2)\, m^2 + 2\, x_0\, y_0\, m + (b^2 - y_0^2) = 0$$

stąd

$$m_1\, m_2 = \frac{b^2 - y_0^2}{a^2 - x_0^2}$$

A zatem styczne, wyprowadzone z punktu (x_0, y_0) do elipsy, będą do siebie prostopadłe, jeśli współrzędne tego punktu spełniają związek

$$\frac{b^2 - y_0^2}{a^2 - x_0^2} = -1$$

wypada stąd

(30) $$x_0^2 + y_0^2 = a^2 + b^2$$

A więc szukane miejsce geometryczne jest *okręgiem koła* o promieniu

$$\sqrt{a^2 + b^2}$$

mającego środek w środku elipsy (koło *Monge'a*) (rys. 98).

ZAGADNIENIE 5. *Z danego punktu na osi elipsy wyprowadzić normalną do tej elipsy.*

Niech będzie równanie elipsy

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

i dany punkt $P(0, y_0)$ na osi. Równanie normalnej do elipsy w punkcie $M(x, y)$ ma postać

$$Y - y = \frac{a^2\, y}{b^2\, x}(X - x)$$

żądając, aby ta normalna przechodziła przez dany punkt $(0, y_0)$, otrzymamy odrazu wartość rzędnej niewiadomego punktu elipsy M

$$y = \frac{b^2}{b^2 - a^2}\, y_0;$$

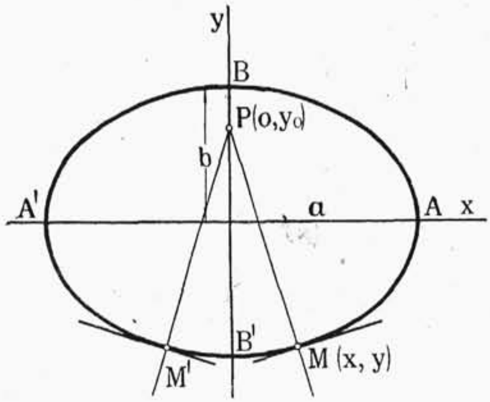
z równania elipsy otrzymamy następnie odpowiednią odciętą

$$x = \pm\, a \sqrt{1 - \frac{b^2\, y_0^2}{(b^2 - a^2)^2}}$$

Jeśli więc rzędna danego punktu P spełnia warunek

$$|y_0| < \frac{|b^2 - a^2|}{b}$$

to, oprócz oczywistej normalnej, schodzącej się z osią Oy, z punktu P można wyprowadzić nadto dwie normalne do elipsy w punktach M i M', symetrycznie położonych względem osi Oy (rys. 99).



Rys. 99.

Ćwiczenia.

1. Znaleść równanie elipsy we współrzędnych biegunowych, przyjmując środek elipsy jako biegun.

2. Dowieść, iż suma odwrotności kwadratów dwóch średnic elipsy do siebie prostopadłych jest wielkością stałą.

3. Dowieść, iż iloczyn odległości od środka elipsy punktów przecięcia normalnej i stycznej w dowolnym punkcie elipsy z osią dużą jest wielkością stałą.

4. Dowieść, iż odcinek stycznej w dowolnym punkcie elipsy, zawarty między punktami przecięcia się tej stycznej ze stycznemi w końcach osi dużej, jest widziany z ogniska pod kątem prostym.

5. Z punktu (2, 3) wyprowadzić styczną do elipsy

$$x^2 + 2y^2 = 1.$$

6. Poprowadzić styczną do elipsy

$$2x^2 + 3y^2 = 1$$

prostopadłą do prostej $y = 7x$.

7. Znaleść równanie koła stycznego do elipsy

$$3x^2 + y^2 = 7$$

w punkcie (1, 2) i do osi Ox. [Należy napisać, iż środek koła leży na normalnej do elipsy w punkcie (1, 2)]. —

8. Znaleść równanie koła, przechodzącego przez punkt (3,1) i stycznego w punkcie (1, 2) do elipsy

$$3x^2 + y^2 = 7.$$

9. Dowieść, iż powierzchnia równoległoboku, opisanego na elipsie, jest stała.

10. Znaleść równanie elipsy, której ogniskami są dwa dane punkty $(c, 0)$ i $(-c, 0)$ i która przechodzi przez punkt (x_0, y_0).
Dyskusja.

11. Normalna w dowolnym punkcie elipsy przecina osi elipsy w punktach P i Q. Wyznaczyć miejsce geometryczne punktów przecięcia równoległych do osi, poprowadzonych przez punkty P i Q.

ROZDZIAŁ XI.

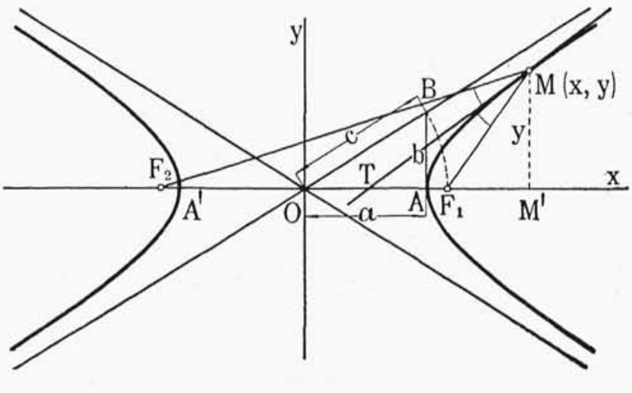
WŁASNOŚCI SZCZEGÓLNE HYPERBOLI.

57. Promienie wodzące hyperboli.

Aby otrzymać pewne własności hyperboli o równaniu

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{1}$$

zwróćmy uwagę na rachunki, które doprowadziły nas do własności elipsy i zmieńmy je, podstawiając $-b^2$ na miejsce $+b^2$.



Rys. 100.