11. Jedna podstawa trapezu ma stałe położenie, zaś druga podstawa i jeden z boków nierównoległych mają dane stałe długości. Znaleść m. g. punktów przecięcia przekątnych trapezu.

12. Znaleść m. g. środków kół, które przechodzą przez dany punkt stały i przecinają dane stałe koło w punktach średnicowo-przeciwnych.

13. Dany jest trójkąt stały ABC i punkt stały O, leżący na prostej AC. Przez punkt O prowadzimy sieczną zmienną, która przecina boki AB i BC w punktach D i E. Znaleść m. g. punktów przecięcia kół opisanych na trójkątach OAD i OCE.

14. Podstawa trójkąta jest stała, zaś przeciwległy wierzchołek porusza się po równoległej do podstawy. Znaleść m. g. punktów przecięcia się wysokości trójkąta.

15. Dowieść, że jeśli koło toczy się bez ślizgania wewnątrz drugiego koła o promieniu dwa razy większym, to dowolny punkt tego koła porusza się po średnicy stałego koła.

16. Dane są dwie proste D_1 i D_2 i stały punkt P. Przez punkt P prowadzimy sieczną zmienną, przecinającą dane proste w punktach A i B; znaleść m. g. punktów M, rozdzielających z punktem P harmonicznie parę AB.

17. Dane jest koło i dwa stałe punkty A i B, leżące na średnicy tego koła, poprowadźmy średnicę zmienną CD; znaleść m. g. punktów przecięcia prostych AC i BD.

ROZDZIAŁ VIII.

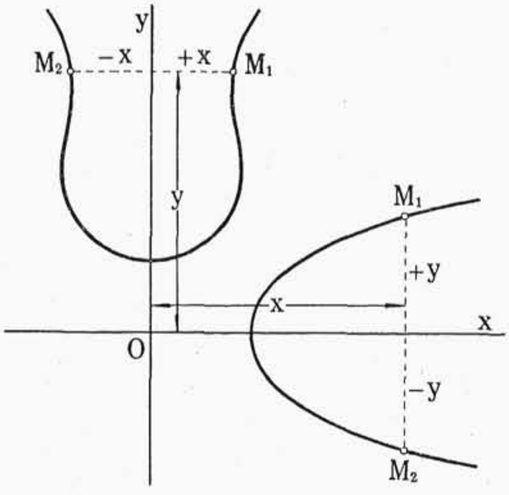
BADANIE KRZYWYCH DRUGIEGO STOPNIA.

40. Symetrja krzywej względem prostej i środek krzywej.

Jeżeli równanie krzywej algebraicznej zawiera zmienną x tylko w potędze *parzystej*, to wtedy równanie pozostaje zachowane, gdy wartość współrzędnej prostokątnej x zmienimy na $-x$. Jeśli więc punkt $M_1(x, y)$ należy do krzywej danej, to punkt $M_2(-x, y)$, leżący po przeciwnej stronie prostopadłej do osi Oy wyprowadzonej z punktu M_1, w tej samej odległości od osi Oy co i punkt M_1 (rys. 66), będzie też do danej krzywej należał; oznacza to, iż krzywa jest wtedy *symetryczna względem osi Oy*.

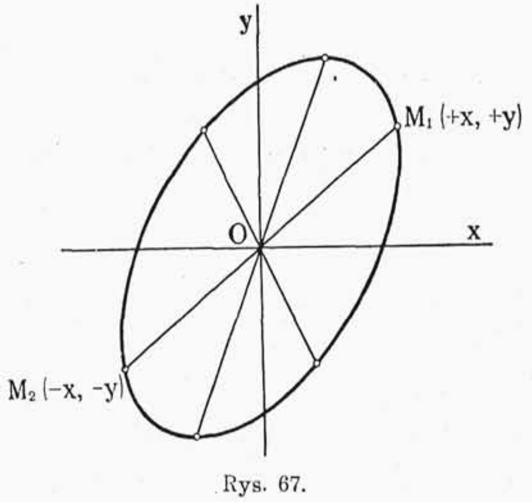
Jeśli równanie krzywej zawiera zmienną y tylko w potędze *parzystej,* to wtedy równanie będzie spełnione przy tej samej wartości na x dla par punktów, mających rzędne różniące się tylko znakiem. Krzywa jest więc wtedy *symetryczna względem osi Ox*. Np. krzywa o równaniu $x^6 - y = 0$ jest położona symetrycznie względem osi Oy, lecz niesymetrycznie względem Ox. Prosta, względem której krzywa jest symetryczna, nazywa się *osią symetrji* danej krzywej.

Jeśli równanie krzywej nie ulega zmianie, gdy zmienimy *jednocześnie* znaki obydwóch współrzędnych x i y na przeciwne,



Rys. 66.

to fakt ten oznacza, że, gdy punkt M_1 (x, y) należy do danej krzywej, to punkt M_2 $(-x, -y)$ należy też do danej krzywej. Ale



Rys. 67.

odcinek, łączący punkty M_1 i M_2, których współrzędne różnią się tylko znakiem, przechodzi przez początek układu O (rys. 67) i jest przez ten punkt O podzielony na połowy:

$$|OM_1| = |OM_2|.$$

Początek układu współrzędnych posiada więc w danym wypadku tę własność geometryczną, że dzieli na połowy cięciwy krzywej, przez niego przechodzące. Punkt płaszczyzny, posiadający tę własność względem krzywej, nazywa się jej *środkiem*.

Jeśli więc jednoczesna zmiana znaku obydwóch współrzędnych w równaniu krzywej nie zmienia tego równania, to początek układu jest wtedy środkiem krzywej.

Np. równanie

$$A x^2 + B x y + C y^2 + D = 0$$

lub

$$A x^3 y + B x y + C x y^3 + D = 0$$

nie ulega zmianie, gdy zmienimy jednocześnie znaki współrzędnych x i y na przeciwne, krzywe odpowiednie posiadają więc środek w początku danego układu współrzędnych.

Nadmienimy jeszcze, że, gdy równanie algebraiczne *nie zawiera wyrazu stałego*, np. $x^3 - x y + y^3 = 0$, to *krzywa odpowiednia przechodzi przez początek układu*, albowiem równanie spełnione jest wtedy w punkcie $(0, 0)$.

41. Uwagi ogólne, dotyczące krzywych drugiego stopnia.

Związek ogólny drugiego stopnia między dwiema zmiennemi x i y ma postać taką:

$$(1) \qquad A x^2 + B x y + C y^2 + D x + E y + F = 0$$

gdzie A, B, C, D, E, F są to stałe współczynniki.

Zadaniem naszem będzie teraz poznanie kształtu i własności krzywych, przedstawionych przez związek (1).

Nadając współczynnikom A, B, C, D, E, F w równaniu (1) wszelkie możliwe wartości, otrzymamy zbiór krzywych drugiego stopnia, różniących się kształtem i położeniem, lecz pokrewnych ze sobą ze względu na łączącą je cechę, a mianowicie *stopień* równania. *Cecha ta jest niezmienna przy wszelkich przesunięciach i obrotach układu prostokątnego współrzędnych.*

Miejsce geometryczne punktów, spełniających równanie (1), nie ulega zmianie, jeśli wszystkie współczynniki A, B, C, D, E, F równania (1) pomnożymy przez ten sam czynnik stały, różny od zera. Postać krzywej, przedstawionej przez równanie (1), zależy zatem tylko od stosunków między współczynnikami, a więc od wartości np. *pięciu liczb:*

$$\frac{B}{A}, \frac{C}{A}, \frac{D}{A}, \frac{E}{A}, \frac{F}{A}$$

(jeśli $A \neq 0$). *Układ krzywych drugiego stopnia na płaszczyźnie jest więc układem o pięciu parametrach*. Stąd wynika, iż w zagadnieniach określania krzywych drugiego stopnia, spełniających dane warunki, można podać *conajwyżej pięć warunków niezależnych, którym ona winna czynić zadość.*

Żądajmy np., aby krzywa drugiego stopnia przechodziła *przez pięć danych punktów:*

$$(x_1, y_1),\ (x_2, y_2),\ (x_3, y_3),\ (x_4, y_4),\ (x_5, y_5);$$

trzeba więc tak dobrać współczynniki A, B, C, D, E, F, aby były spełnione warunki:

$$A x_i^2 + B x_i y_i + C y_i^2 + D x_i + E y_i + F = 0 \qquad (i = 1, 2, 3, 4, 5).$$

Otrzymane warunki tworzą układ pięciu równań linjowych *jednorodnych* z sześcioma niewiadomemi. Otóż wiadomo z teorji równań linjowych (patrz dodatek), że układ taki posiada zawsze rozwiązania A, B, C, D, E, F niewszystkie równe zeru; łatwo następnie wykazać, iż można zawsze znaleść taką grupę rozwiązań A, B, C, D, E, F, w której niewszystkie współczynniki wyrazów kwadratowych A, B, C są równe zeru. Istotnie, gdybyśmy znaleźli grupę rozwiązań ze znikającemi współczynnikami A, B, C, co mogłoby mieć miejsce tylko wtedy, gdyby pięć danych punktów leżało na jednej prostej o równaniu

$$D x + E y + F = 0,$$

to, podnosząc lewą stronę tego równania do kwadratu, lub mnożąc przez dowolną funkcję pierwszego stopnia względem x i y, otrzymać możemy zawsze równanie o postaci (1) istotnie drugiego stopnia, które będzie też spełnione w danych pięciu punktach. *Przez pięć dowolnie danych punktów płaszczyzny można więc poprowadzić przynajmniej jedną krzywą drugiego stopnia.* W rozdziale XV pogłębimy tę kwestję, podając warunek, który winny spełniać dane pięć punktów, aby krzywa drugiego stopnia, przez nie przechodząca, była jedyna.

Jeśli związek ogólny (1) zawiera tylko wyrazy drugiego stopnia, to znaczy ma postać

$$A x^2 + B x y + C y^2 + F = 0 \tag{2}$$

wtedy, według poprzedniego artykułu, powiemy, iż krzywa posiada środek i że środek ten znajduje się w początku układu.

Odwrotnie, wykażemy, że, gdy początek układu jest środkiem krzywej drugiego stopnia, to jej równanie winno mieć postać (2).

Istotnie, jeśli początek jest środkiem krzywej o równaniu

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

to dowolna sieczna

$$y = mx$$

wychodząca z początku układu, winna przecinać krzywą w dwóch punktach M_1 i M_2 (rys 67), których współrzędne różnią się tylko znakiem; odcięte tych punktów spełniają równanie

$$(A + Bm + Cm^2)\,x^2 + (D + Em)\,x + F = 0\,,$$

winno więc być

$$D + Em = 0\,;$$

ponieważ zaś własność ta przysługuje siecznej o dowolnym współczynniku kątowym m, a zatem współczynniki wyrazów pierwszego stopnia D i E muszą znikać

$$D = 0\,; \qquad E = 0$$

i równanie krzywej winno mieć postać (2).

Jeśli równanie drugiego stopnia zawiera zmienne x i y tylko w drugich potęgach, to znaczy ma postać

$$Ax^2 + By^2 + F = 0, \tag{3}$$

to wtedy nietylko środek krzywej znajduje się w początku układu, lecz nadto obie osie współrzędnych schodzą się z osiami symetrji krzywej. Własność ta jest oczywiście odwracalna.

Nadmienimy, iż krzywą drugiego stopnia nazywamy też krótko *„stożkową"*.

42. Wyznaczenie środka i osi symetrji. Elipsa i hyperbola.

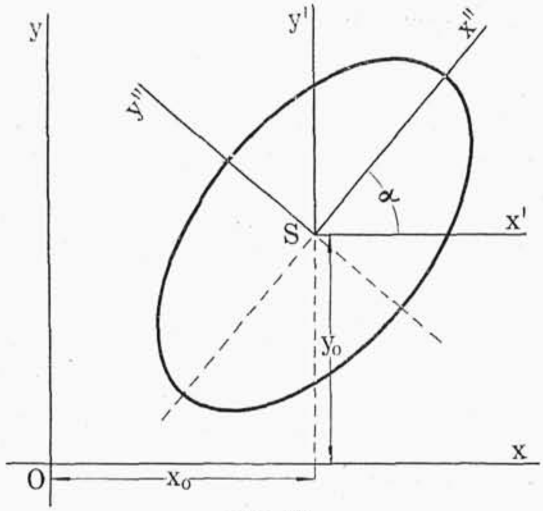
W celu poznania postaci krzywych drugiego stopnia, odszukajmy środek i osi symetrji tych krzywych.

Dla wyznaczenia środka krzywej drugiego stopnia, określonej przez równanie w postaci ogólnej

$$f(x\,,y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \tag{4}$$

oprzemy się na własności podanej w art. poprzednim, według której równanie krzywej *nie powinno zawierać wyrazów pierwszego stopnia,* jeśli początek układu jest środkiem krzywej i odwrotnie.

Przesuńmy więc równolegle osi współrzędnych tak, aby początkiem układu nowego był punkt S o współrzędnych (x_0, y_0) względem układu dawnego $(O x y)$ (rys. 68).



Rys. 68.

Niech (x', y') oznaczają współrzędne punktu dowolnego w odniesieniu do nowego układu, zaś (x, y) jego współrzędne w dawnym układzie, mamy wtedy związki

$$(5)\qquad \begin{aligned} x &= x' + x_0 \\ y &= y' + y_0 \end{aligned}$$

Wstawiając te wartości do równania (4), otrzymamy równanie krzywej danej w układzie $(S x' y')$:

$$(6)\qquad \begin{aligned} &A x'^2 + B x' y' + C y'^2 + (2 A x_0 + B y_0 + D) x' + (B x_0 + 2 C y_0 + \\ &+ E) y' + (A x_0^2 + B x_0 y_0 + C y_0^2 + D x_0 + E y_0 + F) = 0 . \end{aligned}$$

Zwróciwszy uwagę na postać funkcji dwóch zmiennych $f(x, y)$ w równaniu (4), widzimy, iż współczynniki przy x' i y' w równaniu (6) są równe wartościom, które przybierają pochodne cząstkowe funkcji $f(x, y)$ względem zmiennych x i y w punkcie (x_0, y_0):

$$(7)\qquad \begin{aligned} 2 A x_0 + B y_0 + D &= f'_x (x_0, y_0) \\ B x_0 + 2 C y_0 + E &= f'_y (x_0, y_0) \end{aligned}$$

wyraz wolny natomiast w równaniu (6) równy jest wartości funkcji $f(x, y)$ dla (x_0, y_0):

$$(8) \qquad A x_0^2 + B x_0 y_0 + C y_0^2 + D x_0 + E y_0 + F = f(x_0, y_0)$$

wartość ta jest od zera odmienna, jeżeli punkt (x_0, y_0) nie leży na krzywej.

Równanie krzywej (4), odniesione do układu $(S x' y')$, możemy więc napisać w tej formie: *)

$$(9) \quad f(x_0 + x', y_0 + y') = A x'^2 + B x' y' + C y'^2 + f'_x(x_0, y_0) x' + \\ + f'_y(x_0, y_0) y' + f(x_0, y_0) = 0$$

Widzimy, iż, po przesunięciu równoległem osi, współczynniki wyrazów drugiego stopnia A, B, C nie ulegają zmianie.

Postarajmy się teraz tak dobrać współrzędne (x_0, y_0) nowego początku S, aby w nowym układzie równanie krzywej miało postać (2), *niezawierającą wyrazów pierwszego stopnia.* Geometrycznie będzie to oznaczało, iż punkt $S(x_0, y_0)$ jest *środkiem* danej krzywej.

Otóż z równania (9) widzimy, iż równanie (4) krzywej drugiego stopnia przybierze postać uproszczoną

$$(10) \qquad A x'^2 + B x' y' + C y'^2 + K = 0$$

gdzie oznaczono

$$K = f(x_0, y_0),$$

jeśli, jako początek nowego układu, obierzemy punkt S o współrzędnych (x_0, y_0), spełniających związki

$$(11) \qquad \begin{cases} 2 A x_0 + B y_0 + D = 0 \\ B x_0 + 2 C y_0 + E = 0 \end{cases}$$

t. j. krótko

$$(11') \qquad \begin{cases} f'_x(x_0, y_0) = 0 \\ f'_y(x_0, y_0) = 0 \end{cases}$$

---

*) Można uzasadnić, opierając się na określeniu pochodnej, iż współczynniki przy x' i y' funkcji (6) muszą się równać wartościom pochodnych cząstkowych $f_x'(x_0, y_0)$ i $f_y'(x_0, y_0)$; istotnie, zakładając $y' = 0$, widzimy, iż współczynnik przy x' jest równy granicy stosunku $\frac{f(x_0 + x', y_0) - f(x_0, y_0)}{x'}$, gdy x' dąży do zera, t. j. właśnie pochodnej $f_x'(x_0, y_0)$. Podobnie, zakładając $x' = 0$, widzimy, iż współczynnik przy y' jest równy granicy stosunku $\frac{f(x_0, y_0 + y') - f(x_0, y_0)}{y'}$ gdy y' dąży do zera, t. j. właśnie pochodnej $f_y'(x_0, y_0)$.

Otrzymaliśmy więc dwa równania pierwszego stopnia, które pozwolą zbadać istnienie i określić niewiadome położenie środka krzywej, danej przez równanie ogólne (4). Mianowicie, jeśli wyznacznik charakterystyczny układu (11) nie jest zerem, to znaczy

$$(12) \qquad -\begin{vmatrix} 2A, & B \\ B, & 2C \end{vmatrix} = B^2 - 4AC \neq 0,$$

wtedy istnieje jedyna para liczb (x_0, y_0), spełniająca układ (11) i określona przez wzory

$$(13) \qquad x_0 = \frac{2CD - EB}{B^2 - 4AC}; \quad y_0 = \frac{2AE - BD}{B^2 - 4AC}.$$

W przypadku ogólnym, gdy $B^2 - 4AC \neq 0$, *krzywa posiada* więc *określony i jedyny środek* i w tym wypadku równanie (4) możemy doprowadzić do postaci (10), obierając jako początek nowego układu środek krzywej, otrzymany ze związków (11).

Postarajmy się teraz obrócić układ współrzędnych $(Sx'y')$ dokoła punktu S o taki kąt, aby w nowym układzie $(Sx''y'')$ równanie krzywej osiągnęło najprostszą postać, *niezawierającą iloczynu współrzędnych*. Nowe te osi będą wtedy *osiami symetrji krzywej*.

Jeśli obrócimy układ osi $Sx'y'$ o dowolny kąt α, to, jak wiemy, współrzędne (x'', y'') dowolnego punktu względem nowego układu będą związane ze współrzędnemi tegoż punktu (x', y') wzorami:

$$x' = x'' \operatorname{Cos} \alpha - y'' \operatorname{Sin} \alpha$$

$$y' = x'' \operatorname{Sin} \alpha + y'' \operatorname{Cos} \alpha$$

wstawiając te wyrażenia w równanie (10), otrzymamy równanie krzywej, odniesionej do układu $(Sx''y'')$, w podobnej postaci:

$$(14) \qquad A'x''^2 + B'x''y'' + C'y''^2 + K = 0$$

gdzie, według art. 26 (str. 79) mamy:

$$B' = B \operatorname{Cos} 2\alpha - (A - C) \operatorname{Sin} 2\alpha$$

$$(15) \qquad B'^2 - 4A'C' = B^2 - 4AC$$

$$A' + C' = A + C$$

Otóż współczynnik B' będzie zerem, jeśli

$$B \operatorname{Cos} 2\alpha - (A - C) \operatorname{Sin} 2\alpha = 0$$

a więc, gdy obrócimy układ o taki kąt α, iż *)

(16) $$\operatorname{Cotg} 2\alpha = \frac{A - C}{B}$$

W takim układzie $(S x'' y'')$ równanie krzywej (4) będzie więc miało postać najprostszą

(17) $$A' x''^2 + C' y''^2 + K = 0$$

a zatem, wyznaczone przez związek (16), osi Sx'' i Sy'' będą *osiami symetrji* krzywej (4). Równaniu (16) odpowiadają dwa kąty : α i $\alpha + \frac{\pi}{2}$ w przedziale od 0 do π, a więc *jedna tylko para osi symetrji.*

Według zależności (15), współczynniki w równaniu (17) spełniają związek

(18) $$-4 A' C' = B^2 - 4 A C$$

znaki współczynników A' i C' są więc zgodne lub przeciwne, zależnie od tego, czy wyróżnik $B^2 - 4AC$ jest ujemny, czy też dodatni.

Otóż ta zgodność lub przeciwieństwo znaków współczynników A' i C' ma właśnie zasadniczy wpływ na kształt krzywej, jak to wynika z następujących rozważań.

PRZYPADEK $B^2 - 4AC < 0$. W tym przypadku współczynniki przy kwadratach współrzędnych będą miały znaki jednakowe, a więc równanie, po odniesieniu do osi symetrji i opuszczeniu dla prostoty znaczków przy x i y, przybierze jedną z trzech postaci:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \pm 1 \, ; \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$$

zależnie od tego, czy wyraz wolny $K = f(x_0, y_0)$ ma znak przeciwny lub zgodny ze znakami współczynników A' i C' lub A i C, czy też wyraz ten znika; a i b oznaczają pewne dodatnie wartości odcinków, których znaczenie geometryczne zaraz podamy. Równania $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$ nie spełnia żaden punkt rzeczywisty pła-

*) Z natury rzeczy $B \neq 0$.

szczyzny, zaś równanie $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$ spełnione jest tylko w jednym punkcie $x=0, y=0$, to znaczy w punkcie S w pierwotnym układzie współrzędnych. Pozostaje więc do poznania kształt krzywej, określonej równaniem

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{19}$$

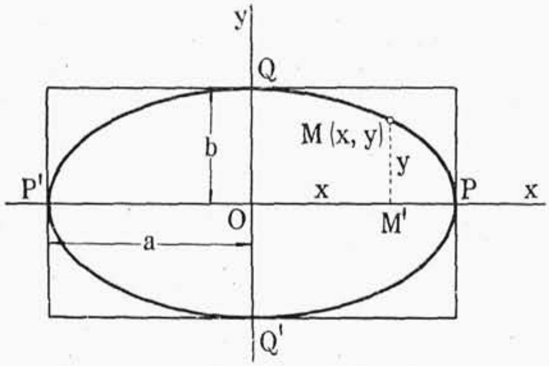
Widzimy stąd przedewszystkiem, że *krzywa jest ograniczona*, mamy bowiem, oczywiście,

$$-a \leqslant x \leqslant +a$$
$$-b \leqslant y \leqslant +b$$

wartości krańcowe osiąga każda współrzędna wtedy, gdy druga współrzędna równa się zeru, mianowicie

$$\text{gdy} \quad x=\pm a;\ y=0$$
$$\text{gdy} \quad y=\pm b;\ x=0$$

Krzywa dana znajduje się więc we wnętrzu prostokąta o bokach $2a$ i $2b$ i przecina swe osi symetrji w punktach P, P' i Q, Q'



Rys. 69.

w odległości a i b od swego środka. Gdy x zmienia się od 0 do $+a$, wtedy odpowiednia dodatnia wartość na y, jak widać z równania, maleje od b do 0. Różniczkując obie strony równania (19) względem zmiennej x, mamy następnie

$$\frac{2x}{a^2}+\frac{2y}{b^2}\frac{dy}{dx}=0 \qquad \text{stąd} \quad \frac{dy}{dx}=-\frac{b^2x}{a^2y};$$

gdy x dąży do zera, wtedy współczynnik kątowy stycznej $\frac{dy}{dx}$ również dąży do zera, styczna w punktach przecięcia Q, Q' krzywej z osią Oy jest więc równoległa do osi Ox. Gdy y dąży do zera, wtedy $\frac{dy}{dx}$ rośnie nieskończenie, a więc styczna w punktach przecięcia P, P' krzywej z osią Ox jest równoległa do osi Oy.

Z powyższych uwag wnioskujemy o kształcie owalnym krzywej, przedstawionym na rys. 69; krzywa ta nazywa się *elipsą*. Odcinki $2a$ i $2b$ nazywają się *osiami elipsy;* większa zwie się *osią dużą*, mniejsza zaś *osią małą*. Punkty, w których elipsa przecina swe osi symetrji, nazywają się *wierzchołkami elipsy*. Kształt elipsy określony jest przez dwie stałe a i b. Z równania (19) widzimy, iż w szczególnym wypadku, gdy $a=b$, *elipsa staje się kołem o promieniu a*, gdyż jej równanie sprowadza się do postaci

$$x^2+y^2=a^2$$

PRZYPADEK $B^2-4AC>0$. Obecnie współczynniki A' i C' w równaniu (17) będą miały znaki przeciwne, a więc równanie krzywej drugiego stopnia, po odniesieniu do osi symetrji, przybierze jedną z trzech postaci

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\pm 1; \quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0;$$

ostatnia postać będzie miała miejsce wtedy, gdy wyraz wolny $K=f(x_0, y_0)$ znika, przedstawia ona dwie proste, przecinające się w środku S. Postacie

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1; \quad \frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$$

sprowadzamy jedną do drugiej, przestawiając osi współrzędnych, a więc wystarczy poznać kształt krzywej w jednym wypadku, by wnioskować o jej kształcie w drugim.

Z równania krzywej odniesionej do osi symetrji

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{20}$$

widzimy, przeciwnie niż dla elipsy, iż *jest ona nieograniczona*; istotnie, mamy ze związku (20)

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2} \tag{21}$$

możemy więc na $|x|$ wstawiać wartości dowolnie wielkie, lecz niemniejsze od a, to znaczy, winno być

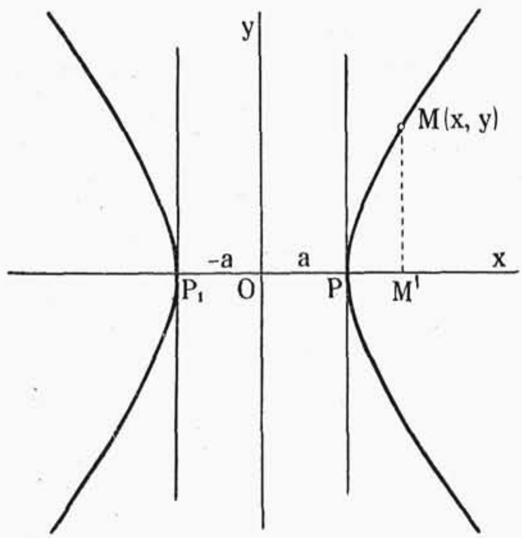
$$x \geqslant +a$$

lub

$$x \leqslant -a$$

krzywa położona jest więc *zewnątrz* pasa, zawartego między prostemi $x = -a$ i $x = +a$. Dla $x = \pm a$ mamy $y = 0$, krzywa przecina więc oś odciętych w dwóch punktach P i P_1 w odległości a od środka, osi rzędnych natomiast nie przecina wcale. Gdy x wzrasta nieograniczenie, od wartości a począwszy, wtedy dodatnia wartość y wzrasta nieograniczenie, począwszy od zera. Ze wzoru (21) otrzymamy dla współczynnika kątowego stycznej wyrażenie

$$\frac{dy}{dx} = \pm \frac{bx}{a\sqrt{x^2 - a^2}}$$



Rys. 70.

widzimy, iż współczynnik kątowy stycznej rośnie nieskończenie, gdy x dąży do $\pm a$; oznacza to geometrycznie, iż styczna do danej krzywej w punktach przecięcia się jej P i P_1 z osią symetrji jest do tej osi prostopadła. Uwagi te pozwalają naszkicować krzywą, odpowiadającą równaniu (20) (rys. 70), nazywa się ona *hyperbolą*. Punkty przecięcia P i P_1 hyperboli z osią symetrji nazywają się jej *wierzchołkami*. Wielkości $2a$ i $2b$ zwą się *osiami hyperboli;* oś, która łączy wierzchołki P i P_1, zwie się *osią rzeczywistą*.

Otrzymane wyniki tego artykułu przedstawimy w następującem twierdzeniu.

TWIERDZENIE. Równanie ogólne drugiego stopnia

$$f(x, y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

a) w przypadku, gdy $B^2 - 4AC < 0$, *przedstawia elipsę, albo nie odpowiada żadnemu tworowi geometrycznemu rzeczywistemu, w szczególności zaś, gdy współrzędne środka spełniają związek* $f(x_0, y_0) = 0$, *równanie dane spełnione jest tylko w jednym punkcie* (x_0, y_0);

b) w przypadku, gdy $B^2 - 4AC > 0$, *przedstawia wogóle hyperbolę, zaś, w razie szczególnym, gdy* $f(x_0, y_0) = 0$, *przedstawia dwie proste, przecinające się w punkcie* (x_0, y_0).

Środek tych krzywych (x_0, y_0) *i kąt nachylenia* α *ich osi symetrji względem osi* Ox *określone są przez związki:*

$$f_x'(x_0, y_0) = 0; \quad f_y'(x_0, y_0) = 0 \tag{22}$$
$$\operatorname{cotg} 2\alpha = \frac{A - C}{B}$$

Długości osi elipsy lub hyperboli otrzymamy, jeśli wyznaczymy współczynniki A' i C' w równaniu (17) ze związków

$$A' + C' = A + C \tag{23}$$
$$-4A'C' = B^2 - 4AC$$

Wartości współczynników A' i C', spełniające układ (23), można między sobą przestawiać; aby więc rozstrzygnąć, która z tych wartości winna być współczynnikiem przy x''^2, a która przy y''^2, trzeba wpierw umówić się, który z dwóch kątów α, różniących się o $\frac{\pi}{2}$ i spełniających związek (22), obierzemy jako nachylenie osi Sx'' względem Ox. Po przyjęciu wartości na α, rozmieszczenie osi krzywej poznamy dokładnie ze związków (11) artykułu 26 (str. 79), skąd mamy

$$A' = \frac{1}{2}(A + C) + \frac{1}{2}B \sin 2\alpha + \frac{1}{2}(A - C)\cos 2\alpha \tag{24}$$
$$C' = \frac{1}{2}(A + C) - \frac{1}{2}B \sin 2\alpha - \frac{1}{2}(A - C)\cos 2\alpha$$

Nieco później poznamy metodę bardziej zręczną wyznaczania osi symetrji krzywej, gdyż niewymagającą poszukiwania środka i obrotu osi.

Przykład. Wyznaczyć środek i osi krzywej o równaniu

$$f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - x = 0,$$

mamy tu wypadek eliptyczny, albowiem wyróżnik $B^2 - 4AC = 1 - 4$ jest ujemny. Środek krzywej określony jest przez układ równań:

$$f_x'(x_0, y_0) = 2x_0 + y_0 - 1 = 0$$

$$f_y'(x_0, y_0) = x_0 + 2y_0 = 0,$$

stąd otrzymujemy

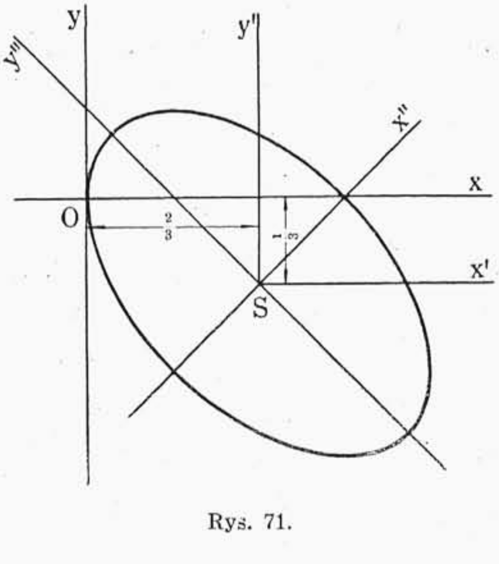
$$x_0 = \frac{2}{3}; \quad y_0 = -\frac{1}{3}; \quad K = f(x_0, y_0) = -\frac{1}{3}.$$

Dla nachylenia osi symetrji, mamy ze wzorów (22)

$$\operatorname{Cotg} 2\alpha = \frac{A - C}{B} = 0,$$

możemy więc jako oś Sx'' obrać oś symetrji, nachyloną pod kątem $\alpha = \frac{\pi}{4}$; otrzymamy wtedy ze wzorów (24) dla współczynników równania (17) wartości

$$A' = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}; \quad C' = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$



Rys. 71.

Nasza krzywa jest więc elipsą, której równanie, odniesione do osi symetrji, ma postać

$$\frac{3}{2} x''^2 + \frac{1}{2} y''^2 = \frac{1}{3};$$

środek S tej elipsy znajduje się w punkcie $\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$, zaś oś Sx'' tworzy kąt $\frac{\pi}{4}$ z osią Ox. Nadto elipsa ta przechodzi przez początek układu, albowiem równanie jej $f(x, y) = 0$ nie zawiera wyrazu stałego. Równanie danej elipsy można jeszcze napisać w postaci

$$\frac{x''^2}{\left(\frac{2}{9}\right)} + \frac{y''^2}{\left(\frac{2}{3}\right)} = 1,$$

osi jej więc mają długości

$$2a = \frac{2}{3}\sqrt{2}; \quad 2b = \frac{2}{3}\sqrt{6}.$$

Punkty przecięcia danej krzywej z osią Ox i Oy otrzymamy, podstawiając w równanie $f(x, y) = 0$ kolejno $y = 0$ i $x = 0$; gdy $y = 0$, wtedy $x^2 - x = 0$, stąd $x_1 = 0$, $x_2 = 1$; następnie mamy dla $x = 0$ równanie $y^2 = 0$, krzywa ma więc jeden punkt podwójny wspólny z osią Oy, jest zatem styczna do tej osi w punkcie O (rys. 71).

43. Badanie przypadku $B^2 - 4AC = 0$. Parabola.

Pozostał jeszcze do zbadania wypadek, gdy współczynniki równania krzywej

(25) $$f(x, y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

spełniają związek

(26) $$B^2 - 4AC = 0$$

lub

(27) $$\frac{2A}{B} = \frac{B}{2C}$$

Zakładamy narazie, iż $A \neq 0$, $C \neq 0$, a więc i $B \neq 0$.

W danym wypadku, dla układu równań

(28) $$\begin{aligned} 2Ax_0 + By_0 + D &= 0 \\ Bx_0 + 2Cy_0 + E &= 0 \end{aligned}$$

określających położenie środka, mogą zajść dwie alternatywy:

α) współczynniki równania krzywej spełniają warunek

$$\frac{2A}{B} = \frac{B}{2C} = \frac{D}{E}$$

lub też jednocześnie $D = 0$ i $E = 0$, wtedy układ (28) posiada *nieskończenie wiele rozwiązań,* gdyż każda para liczb (x_0, y_0), spełniająca jedno z równań (28), będzie wtedy spełniała i drugie;

β) współczynniki spełniają warunek

$$\frac{2A}{B} = \frac{B}{2C} \neq \frac{D}{E}$$