aby ona była styczna do stożkowej danej $f(x, y) = 0$ (wielkości u, v, w nazywają się współrzędnemi stycznościowemi danego punktu styczności, zaś związek między niemi—równaniem krzywej we współrzędnych stycznościowych; związek ten dla stożkowych będzie też 2-go stopnia).

4. Dowieść, że gdy prosta oddala się nieskończenie od środka krzywej, to jej biegun dąży do środka krzywej.

5. Przez dowolny punkt M prowadzimy dwie sieczne. Dowieść, iż proste, łączące punkty przecięcia tych siecznych ze stożkową, przecinają się na biegunowej punktu M.

6. Dowieść, iż biegunowa punktu, leżącego na kierownicy, jest prostopadła do prostej, łączącej ten punkt z ogniskiem.

7. Wyznaczyć współrzędne punktu, który jest biegunem normalnej do elipsy

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

w punkcie (x, y).

8. Wyznaczyć biegun prostej $2x + y = 1$ względem hyperboli $xy = 1$.

9. Jeśli biegun porusza się po średnicy krzywej, to jego biegunowa przesuwa się równolegle.

ROZDZIAŁ XV.

O PRZECIĘCIU SIĘ KRZYWYCH DRUGIEGO STOPNIA.

68. Rozważania ogólne.

Poszukiwaniu punktów przecięcia dwóch krzywych drugiego stopnia, mających równania

$$(1)\quad \begin{aligned} f_1(x, y) &= A_1 x^2 + B_1 x y + C_1 y^2 + D_1 x + E_1 y + F_1 = 0 \\ f_2(x, y) &= A_2 x^2 + B_2 x y + C_2 y^2 + D_2 x + E_2 y + F_2 = 0 \end{aligned}$$

odpowiada zagadnienie algebraiczne rozwiązania układu dwóch równań (1) drugiego stopnia z dwiema niewiadomemi.

Rozważmy następującą kombinację linjową równań (1):

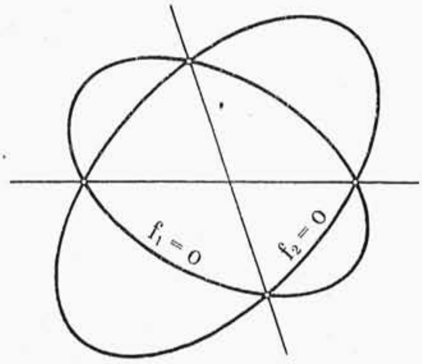
$$(2)\quad f_1(x, y) + \lambda f_2(x, y) = 0$$

to znaczy równanie w postaci

$$\begin{aligned} &(A_1 + \lambda A_2) x^2 + (B_1 + \lambda B_2) x y + (C_1 + \lambda C_2) y^2 + \\ &+ (D_1 + \lambda D_2) x + (E_1 + \lambda E_2) y + (F_1 + \lambda F_2) = 0 \end{aligned}$$

gdzie λ jest dowolnym stałym parametrem.

Równanie to jest drugiego stopnia i *przedstawia układ krzywych drugiego stopnia, które dla każdego* λ *przechodzą przez wszystkie punkty przecięcia się krzywych, jeśli takowe istnieją*; istotnie, współrzędne, które spełniają *jednocześnie* obydwa równania (1), spełniają i równanie (2). Poszukiwanie punktów wspólnych krzy-



Rys. 115.

wym (1) równoważne jest poszukiwaniu punktów wspólnych jednej z krzywych (1) np. $f_2 = 0$ i krzywej (2), gdyż i odwrotnie, przez punkty przecięcia krzywej o równaniu (2) z krzywą o równaniu $f_2 = 0$, przejdzie krzywa o równaniu $f_1 = 0$.

Aby uprościć zagadnienie rozwiązania układu (1), postarajmy się *tak dobrać wartość współczynnika* λ, *żeby równanie* (2) *przedstawiało dwie proste, rzeczywiste lub urojone*, t. j. aby jego lewa strona rozszczepiała się na iloczyn dwóch funkcyj pierwszego stopnia. Aby to miało miejsce, trzeba i wystarcza jak wiadomo, aby zniknął wyznacznik (art. 44):

$$(3) \qquad \begin{vmatrix} 2A_1 + 2\lambda A_2, & B_1 + \lambda B_2, & D_1 + \lambda D_2 \\ B_1 + \lambda B_2, & 2C_1 + 2\lambda C_2, & E_1 + \lambda E_2 \\ D_1 + \lambda D_2, & E_1 + \lambda E_2, & 2F_1 + 2\lambda F_2 \end{vmatrix} = 0$$

Jest to równanie trzeciego stopnia względem λ, w którem współczynnik przy λ^3 równy jest wartości wyznacznika

$$\begin{vmatrix} 2A_2, & B_2, & D_2 \\ B_2, & 2C_2, & E_2 \\ D_2, & E_2, & 2F_2 \end{vmatrix}$$

a więc *nierównej zeru, jeśli krzywa dana* $f_2 = 0$ *nie jest zwyrodniała*. Równanie (3) posiada więc wtedy *przynajmniej jeden* pierwiastek rzeczywisty λ, który, po podstawieniu do równania (2), da nam parę prostych, przecinających krzywą $f_1 = 0$ lub $f_2 = 0$ w poszukiwanych punktach wspólnych krzywym (1). *Poszukiwanie punktów przecięcia dwóch krzywych drugiego stopnia można więc sprowadzić zawsze do poszukiwania punktów przecięcia się* krzywej drugiego stopnia z parą prostych. Stąd, według rozważań art. 45, mamy własność następującą:

dwie krzywe drugiego stopnia, z których jedna przynajmniej nie jest zwyrodniała, przecinają się conajwyżej w czterech punktach rzeczywistych lub urojonych, wszystkich różnych lub niektórych zjednoczonych.

Liczba punktów przecięcia, rzeczywistych lub urojonych, będzie mniejsza od czterech, *jeśli jedna lub obie asymptoty* (oś dla parabol) *krzywych drugiego stopnia będą do siebie równoległe,* wtedy bowiem jedna lub obie proste (2), do przecięcia z któremi sprowadzamy zagadnienie, też będą do tych asymptot równoległe[1]) i będą przecinały, jak wiadomo, krzywą drugiego stopnia odpowiednią w jednym tylko punkcie lub wcale. Inaczej wyrażając się, powiemy, iż wtedy krzywe dane przecinają się też w czterech punktach, lecz niektóre z nich są *„punktami w nieskończoności"*.

Dla przykładu weźmy dwie hyperbole o równaniach

$$xy = 1$$
$$xy = 2$$

mające wspólne asymptoty; widzimy bezpośrednio, iż równania dane nie mogą mieć wspólnych rozwiązań, a więc hyperbole dane nie przecinają się w żadnym punkcie rzeczywistym lub urojonym. Przypadek mniejszej liczby punktów wspólnych dotyczy np. też dwóch kół, które przecinają się tylko w dwóch punktach rzeczywistych lub urojonych[2]).

Wniosek 1.

Dwie krzywe drugiego stopnia mogą mieć więcej niż cztery punkty wspólne tylko wtedy, gdy są obie zwyrodniałe, a wobec

---

[1]) Wynika to z uwagi, iż asymptoty danych krzywych są równoległe do prostych

$$A_1x^2 + B_1xy + C_1y^2 = 0; \quad A_2x^2 + B_2xy + C_2y^2 = 0;$$

zaś asymptoty krzywej (2) do prostych

$$(A_1 + \lambda A_2)x^2 + (B_1 + \lambda B_2)xy + (C_1 + \lambda C_2)y^2 = 0.$$

[2]) Dwa koła dowolne mają pozatem zawsze wspólne „punkty w nieskończoności" określone przez kierunki dwóch prostych urojonych $x^2 + y^2 = 0$ (patrz str. 156).

tego będą miały więcej punktów wspólnych niż cztery tylko wtedy, gdy tworzą dwie pary prostych, mających jedną prostą wspólną.

Wniosek 2.

Przez pięć punktów na płaszczyźnie, z których cztery nie leżą na jednej prostej, można poprowadzić jedną i tylko jedną krzywą drugiego stopnia.

Otóż możliwość poprowadzenia stożkowej przez pięć danych dowolnie punktów na płaszczyźnie była wskazana w art. 41. Aby wykazać jej *pojedyńczość,* w założeniu, iż cztery z danych punktów nie leżą na jednej prostej, zauważmy, że gdyby przez dane pięć punktów przechodziły dwie stożkowe S_1 i S_2, to wtedy te stożkowe, jako mające pięć punktów wspólnych, musiałyby być dwiema parami prostych o jednej prostej wspólnej. Oprócz tej prostej wspólnej, miałyby dane krzywe wtedy tylko jeden punkt wspólny, będący przecięciem się dwóch prostych pozostałych, a więc z pięciu punktów danych, cztery musiałyby leżeć na jednej prostej, wbrew założeniu; to dowodzi słuszności wniosku.

Jeśli z pięciu punktów danych cztery leżą na jednej prostej, wtedy otrzymamy nieskończenie wiele par prostych, przez te punkty przechodzących, wystarczy bowiem poprowadzić jedną prostą przez cztery dane punkty i drugą dowolnie przez punkt piąty.

Jeśli z pięciu punktów danych tylko trzy leżą na jednej prostej, wtedy przez nie można poprowadzić tylko jedną krzywą drugiego stopnia, ale zwyrodniałą, którą będą w tym wypadku przedstawiać dwie proste: jedna, poprowadzona przez trzy dane punkty, a druga przez dwa pozostałe.

69. Układ stożkowych, przechodzących przez punkty przecięcia dwóch stożkowych danych.

Mówiliśmy już poprzednio, że jeśli

$$f(x, y) = 0$$

$$\varphi(x, y) = 0$$

są równaniami dwóch danych stożkowych, t. j. krzywych drugiego stopnia, to równanie

$$f(x, y) + \lambda \varphi(x, y) = 0 \tag{4}$$

gdzie λ jest dowolną stałą, przedstawia stożkową, przechodzącą przez punkty przecięcia dwóch stożkowych danych.

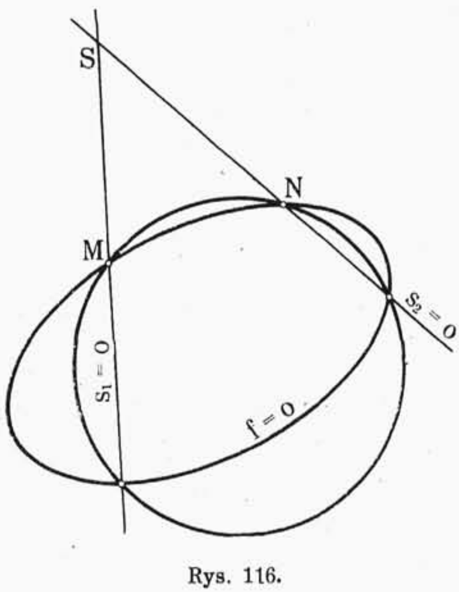
Załóżmy, iż dwie stożkowe, o równaniach $f(x, y) = 0$ i $\varphi(x, y) = 0$, przecinają się w czterech punktach, a więc trzy z tych punktów nie leżą na jednej prostej. Udowodnimy, iż równanie (4) przedstawia układ wszelkich stożkowych, przechodzących przez te cztery punkty, z wyjątkiem stożkowej $\varphi = 0$. Wykażemy mianowicie, iż odwrotnie, dowolną stożkową S, inną niż $\varphi = 0$, przechodzącą przez cztery punkty przecięcia się krzywych danych, można przedstawić przez równanie w postaci (4). Istotnie, można zawsze tak dobrać wartość parametru λ, aby równanie (4) było spełnione w pewnym punkcie (x_1, y_1) stożkowej S, innym niż cztery punkty przecięcia rozważone. Żądając mianowicie, aby było

$$f(x_1, y_1) + \lambda \varphi(x_1, y_1) = 0,$$

otrzymamy

$$\lambda = -\frac{f(x_1, y_1)}{\varphi(x_1, y_1)},$$

gdzie z założenia $\varphi(x_1, y_1) \neq 0$; równanie (4) dla tej wartości parametru λ, będzie przestawiało stożkową identyczną ze stożkową S, gdyż spełnione ono będzie w tych samych pięciu punktach, przez które z założenia przechodzi stożkowa S, a cztery z tych punktów nie leżą na linji prostej.



Rys. 116.

Niech będą dwie proste o równaniach

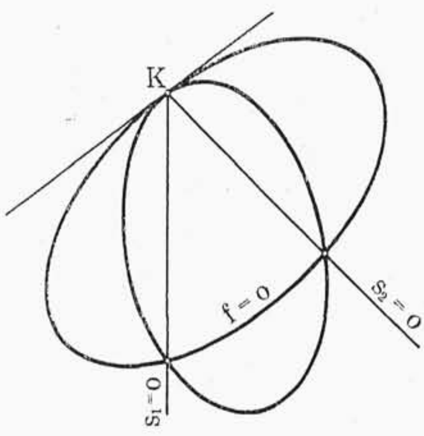
$$s_1 = 0 \text{ i } s_2 = 0$$

i stożkowa $f(x, y) = 0$. Ponieważ równanie zespołu tych prostych będzie $s_1 s_2 = 0$, na podstawie więc równania (4) powiemy natychmiast, iż równanie drugiego stopnia

$$f(x, y) + \lambda s_1 s_2 = 0 \tag{5}$$

przedstawia układ krzywych stożkowych, przechodzących przez cztery punkty przecięcia się krzywej $f(x, y) = 0$ z prostemi $s_1 = 0$ i $s_2 = 0$ (rys. 116).

Jeśli proste $s_1 = 0$ i $s_2 = 0$ przecinają się w punkcie K, leżącym na krzywej $f(x, y) = 0$, to wtedy wszystkie krzywe układu (5) są w tym punkcie *styczne* do stożkowej $f = 0$ i nadto przechodzą przez pozostałe dwa punkty przecięcia (rys. 117).



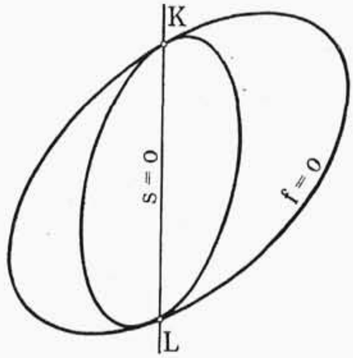
Rys. 117.

Własność ta wynika z uwagi, że gdy punkt przecięcia prostych $s_1 = 0$ i $s_2 = 0$ dąży do punktu krzywej K, to do tego punktu również dążą dwa punkty M i N (rys. 116) wspólne prostym $s_1 = 0$ i $s_2 = 0$ i krzywej $f = 0$, krzywa (5) jest wtedy granicznem położeniem krzywych, przechodzących przez dwa punkty krzywej $f(x, y) = 0$, gdy punkty te do siebie dążą.

Stąd też wynika, że, gdy proste $s_1 = 0$ i $s_2 = 0$ zlewają się w jedną prostą $s = 0$, to równanie

$$f(x, y) + \lambda s^2 = 0 \tag{6}$$

przedstawia układ stożkowych, stycznych do krzywej $f(x, y) = 0$ *w dwóch punktach przecięcia się* K *i* L *prostej* $s = 0$ *z krzywą* $f = 0$ (rys 118).



Rys. 118.

Przykład. Dany jest czworokąt z wierzchołkami

$$(1, 0);\quad (2, 0);\quad (0, 3);\quad (0, 5).$$

Punkty te można uważać, jako przecięcie się pary prostych, przechodzących przez punkty

$$(1, 0);\ (0, 3) \quad \text{i} \quad (2, 0);\ (0, 5)$$

z osiami współrzędnych, a więc, jako przecięcie się pary prostych o równaniach

$$\frac{x}{1} + \frac{y}{3} - 1 = 0 \quad \text{i} \quad \frac{x}{2} + \frac{y}{5} - 1 = 0,$$

z parą prostych $x = 0$ i $y = 0$. Równanie układu stożkowych, opisanych na danym czworokącie, będzie miało zatem postać

$$\left(\frac{x}{1} + \frac{y}{3} - 1\right)\left(\frac{x}{2} + \frac{y}{5} - 1\right) + \lambda xy = 0,$$

gdzie λ jest dowolną stałą. Z dowolności λ można skorzystać, nakładając jeszcze piąty warunek, naprzykład, aby żądana stożkowa przechodziła przez dany piąty punkt.

70. Ognisko jako punkt przecięcia stycznych izotropowych.

Jeśli punkt $F(\alpha, \beta)$ jest ogniskiem danej krzywej drugiego stopnia, zaś prosta

$$ax + by + c = 0$$

odpowiednią kierownicą, to równanie krzywej drugiego stopnia, jako miejsca geometrycznego punktów (x, y), dla których stosunek odległości od ogniska i od kierownicy jest wielkością stałą, będzie miało postać

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + \lambda(ax + by + c)^2 = 0, \tag{7}$$

gdzie λ oznacza pewną stałą; istotnie, wiemy, iż odległość punktu (x, y) od kierownicy równać się będzie

$$\frac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Z postaci (7) i z rozważań poprzedniego artykułu wynika natychmiast wniosek, iż krzywa (7) jest styczna do utworu urojonego

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = 0 \tag{8}$$

i że kierownica

$$ax + by + c = 0$$

przechodzi przez punkty styczności krzywej (7) z utworem (8). Równanie (8) przedstawia dwie proste o kierunkach izotropowych ($m = \pm i$), wychodzące z ogniska (α, β); możemy zatem wygłosić następujące twierdzenie:

dwie styczne do krzywej drugiego stopnia, wyprowadzone z jej ogniska, mają kierunki izotropowe, zaś odpowiednia kierownica, jako przechodząca przez punkty styczności tych stycznych, jest biegunową ogniska.

Widzimy tutaj użyteczność elementów urojonych w Geometrji.

Podana własność ogniska daje zręczną metodę bezpośredniego wyznaczenia współrzędnych ogniska krzywej drugiego stopnia i następnie równania kierownicy, jako biegunowej ogniska.

Ćwiczenia.

1. Zbadać przecięcie się krzywych o równaniach

$$x^2 + xy + y^2 = 1;$$

$$2x^2 - xy - y^2 = C;$$

warunek styczności?

2. Zbadać przecięcie się elipsy z układem kół, przechodzących przez jej ogniska.

3. Dowieść, iż spodki normalnych, wyprowadzonych z dowolnego punktu (x_0, y_0) do elipsy, leżą na przecięciu się elipsy z pewną hyperbolą równoosiową (hyperbola Apoloniusza).

4. Jaki związek winien istnieć między osiami układu elips o równaniu

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

aby one były styczne do hyperboli $xy = 1$? Wyznaczyć następnie miejsce geometryczne punktów przecięcia się stycznych w wierzchołkach układu elips powyższych.

5. Zbadać przecięcie się koła

$$x^2 + y^2 = h(x + y)$$

z hyperbolą $xy = q$.

6. Zbadać przecięcie się hyperboli

$$xy = k$$

z układem elips, mających stałe ogniska $(c, 0)$; $(-c, 0)$.

7. Wyznaczyć kierownicę paraboli o równaniu

$$(x+y)^2+x-y+1=0,$$

jako miejsce geometryczne punktów, z których styczne, wyprowadzone do tej paraboli, są względem siebie prostopadłe i następnie wyznaczyć ognisko, jako jej biegun.

8. Dowieść, iż hyperbola i elipsa, mające wspólne ogniska, przecinają się pod kątem prostym.

9. Dowieść, iż biegunowe stałego punktu względem układu stożkowych

$$f(x, y) + \lambda\varphi(x, y) = 0$$

ze zmiennym parametrem λ, przechodzą przez jeden punkt.

10. Dowieść, iż punkty przecięcia dwóch stożkowych, mających osi symetrji równoległe, leżą na okręgu koła.

11. Jaki związek winny spełniać osi a i b elipsy

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

aby w punktach jej przecięcia z parabolą $y^2 = 2px$ styczne do tych dwóch krzywych były względem siebie prostopadłe.

ROZDZIAŁ XVI.

TWIERDZENIA PASCALA I BRIANCHONA.

71. Twierdzenie Pascala.

Wiemy, iż przez dowolne pięć punktów można zawsze poprowadzić określoną stożkową, na każdym więc pięciokącie można opisać stożkową i tylko jedną. Inaczej przedstawia się kwestja z dowolnym sześciokątem, gdyż przez sześć dowolnych punktów stożkowej wogóle poprowadzić nie można. Mianowicie sześciokąt wpisany w stożkową posiadać będzie cechę charakterystyczną, którą poznamy w następującem twierdzeniu.

TWIERDZENIE PASCALA.

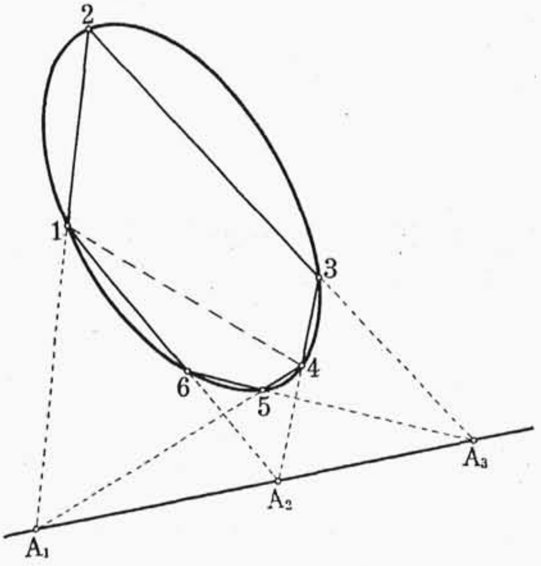
W sześciokącie wpisanym w stożkową, przeciwległe boki przecinają się w trzech punktach, leżących na jednej prostej.

Niech będzie sześciokąt, którego wierzchołki 1, 2, 3, 4, 5, 6 leżą na stożkowej dowolnej (rys. 119). Założymy narazie nierównoległość boków przeciwległych. Podzielmy dany sześciokąt na dwa czworokąty, łącząc wierzchołki 1 i 4. Niech $s_{12}=0$, $s_{23}=0$, $s_{34}=0$, $s_{14}=0$ i t. d. będą równaniami prostych, łączących zaznaczone wierzchołki 1 i 2, 2 i 3 i t. d. Rozważmy czworokąt (1234); równanie pary prostych (1, 2) i (3, 4), przeciwległych w tym czworokącie, ma postać

(1) $$s_{12} \,.\, s_{34} = 0$$

zaś równanie pary prostych (2, 3) i (1, 4) postać

(2) $$s_{23} \,.\, s_{14} = 0$$



Rys. 119.

Równanie danej stożkowej $f(x, y) = 0$, jako przechodzącej przez cztery punkty (1, 2, 3, 4) przecięcia się tych dwóch par, według rozważań w poprzednim rozdziale, winno być kombinacją linjową równań (1) i (2), to znaczy można dobrać taką stałą λ, aby równanie $f(x, y) = 0$ można było wyrazić w postaci:

(3) $$f(x, y) = s_{12} \,.\, s_{34} + \lambda\, s_{23} \,.\, s_{14} = 0$$

Lecz stożkowa dana jest również opisana na czworokącie (1, 4, 5, 6), a zatem, na tej samej podstawie, równanie jej winno być też kombinacją równań $s_{16} . s_{54} = 0$ i $s_{14} . s_{56} = 0$, to znaczy, można dobrać taką stałą μ, żeby równanie (3) dało się wyrazić w postaci:

(4) $$f(x, y) \equiv s_{16} \,.\, s_{54} + \mu\, s_{14} \,.\, s_{56} = 0$$

Ponieważ równania (3) i (4) przedstawiają jedną i tę samą krzywą, więc funkcje dwóch zmiennych (x, y), występujące po lewej stronie muszą być identyczne (pomijając współczynnik proporcjonalności):

(5) $$s_{12} \cdot s_{34} + \lambda s_{23} \cdot s_{14} \equiv s_{16} \cdot s_{54} + \mu s_{14} \cdot s_{56}$$

stąd wynika identyczność funkcyj

(6) $$s_{12} \cdot s_{34} - s_{16} s_{54} \equiv s_{14} (-\lambda s_{23} + \mu s_{56})$$

Ale równanie

(7) $$s_{12} \cdot s_{34} - s_{16} \cdot s_{54} = 0$$

przedstawia pewną stożkową, przechodzącą przez punkty przecięcia pary prostych (1, 2) i (3, 4) z parą prostych (1, 6) i (5, 4), to znaczy, przechodzącą przez dwa punkty 1 i 4 i przez dwa punkty A_1, A_2, w których prosta (1, 2) przecina się z prostą (5, 4) i prosta (1, 6) z prostą (3, 4) (rys. 119). Według tożsamości (6) jednak, równanie (7) można napisać w postaci

$$s_{14} (-\lambda s_{23} + \mu s_{56}) = 0$$

A więc krzywa (7), przechodząca przez punkty 1, 4, A_1, A_2, składa się z prostej o równaniu $s_{14} = 0$, łączącej punkty 1 i 4 i z prostej $-\lambda s_{23} + \mu s_{56} = 0$, łączącej w takim razie punkty A_1 i A_2, lecz prosta ta, jak widać z postaci jej równania, przechodzi przez punkt przecięcia A_3 prostych $s_{23} = 0$ i $s_{56} = 0$, dowiedliśmy więc, iż trzy punkty A_1, A_2, A_3, w których przecinają się przeciwległe boki sześciokąta, a więc bok (1, 2) z bokiem (5, 4), bok (1, 6) i (4, 3), bok (2, 3) i (5, 6), *leżą na jednej prostej*.

Łatwo wykazać, że odwrotnie, *przez sześć punktów płaszczyzny można poprowadzić określoną stożkową, jeśli w sześciokącie, utworzonym przez połączenie tych sześciu punktów, przeciwległe boki przecinają się w trzech punktach, leżących na jednej prostej*.

Przypuśćmy więc, iż sześć punktów płaszczyzny 1, 2, 3, 4, 5, 6 spełnia własność podaną poprzednio i poprowadźmy określoną stożkową S przez pięć punktów 1, 2, 3, 4, 5. Wykażemy, iż stożkowa S przejdzie również przez punkt 6. Istotnie, gdyby ona przez punkt 6 nie przechodziła, to, oznaczając przez 6′ punkt, w którym przedłużenie boku (1, 6) przecina tę stożkową, otrzymalibyśmy sześciokąt (1, 2, 3, 4, 5, 6′) wpisany w stożkową S, w którym, według twierdzenia poprzedniego, punkty przecięcia przeciwległych boków leżą na jednej prostej, lecz punkty przecięcia boków (1, 2) z (5, 4) i (1, 6') z (4, 3) są te same, co i w sześciokącie (1, 2, 3, 4, 5, 6), więc i trzeci punkt, w którym bok (5, 6') przecina bok (2, 3) musi być identyczny z punktem, w którym bok (5, 6) przecina (2, 3), zatem punkty 6 i 6' muszą być identyczne c. b. d. d.

Z twierdzeń powyższych wynika prosty sposób graficzny otrzymania dowolnej liczby punktów stożkowej, przechodzącej przez dane zgóry pięć punktów.

Jeśli w sześciokącie wpisanym w stożkową dwa punkty sąsiednie dążą do siebie, to prosta, przez nie przechodząca, dąży do stycznej. Otrzymamy z tej uwagi szereg wniosków z twierdzenia *Pascala*, dotyczących własności wieloboków wpisanych w stożkową (o mniejszej niż 6 liczbie boków) i stycznych w ich wierzchołkach w ilości, dopełniającej liczbę boków do sześciu. Podamy jeden z nich, pozwalający na prostą konstrukcję stycznych do stożkowej, przechodzącej przez pięć punktów:

w pięciokącie (1, 2, 3, 4, 5), *wpisanym w stożkową, trzy punkty, w których bok* (1, 2) *przecina się z bokiem* (4, 5), *bok* (1, 5) *z bokiem* (2, 3) *i bok* (3, 4) *ze styczną w punkcie* (1), *leżą na jednej prostej.*

Nadmienimy jeszcze, iż w przypadku równoległości jednej pary boków przeciwległych sześciokąta wpisanego w stożkową, punkty przecięcia dwóch pozostałych par przeciwległych leżą na prostej równoległej do powyższej pary.

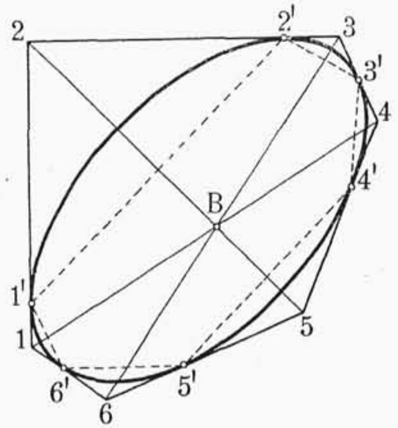
72. Twierdzenie Brianchona.

Analogicznie do twierdzenia *Pascala*, dotyczącego własności zbioru punktów, tworzących stożkową, istnieje twierdzenie, dotyczące własności zbioru prostych stycznych do stożkowej. Brzmienie tego twierdzenia otrzymujemy przez przestawienie pojęcia punktu i prostej, a więc przez przestawienie pojęcia punktu przecięcia się dwóch prostych z pojęciem prostej, łączącej dwa punkty (zasada dwoistości).

TWIERDZENIE BRIANCHONA.

W sześciokącie opisanym na stożkowej, trzy proste, łączące przeciwległe wierzchołki, przecinają się w jednym punkcie.

Niech będzie sześciokąt, którego boki są styczne do stożkowej danej (rys. 120). Oznaczmy przez 1, 2, 3, 4, 5, 6 jego wierzchołki; mamy dowieść, iż przekątne (1, 4), (2, 5), (3, 6) przecinają się w jednym punkcie *B*. Oznaczmy przez 1', 2', 3', 4', 5', 6' punkty styczności boków i połączmy je odcinkami, otrzymamy w ten sposób sześciokąt wpisany w stożkową, którego boki są *biegunowemi* wierzchołków odpowiednich sześciokąta opisanego, jako cięciwy, łączące punkty styczności. Ale, według twierdzenia *Pascala*, przeciwległe boki sześciokąta wpisanego ($1'2'3'4'5'6'$) przecinają się w trzech punktach A_1, A_2, A_3, leżących na jednej prostej (b), a wobec tego proste, łączące bieguny tych prostych, t. j. przeciwległe wierzchołki sześciokąta opisanego, jako biegunowe punktów A_1, A_2, A_3 *) winny się przecinać w jednym punkcie B, t. j. w biegunie prostej (b) c. b. d. d.



Rys. 120.

ROZDZIAŁ XVII.

ZAGADNIENIA DOTYCZĄCE KRZYWYCH DRUGIEGO STOPNIA.

73. Wyznaczanie krzywych drugiego stopnia, spełniających dane warunki.

Wiemy, iż krzywą drugiego stopnia określają wartości *pięciu parametrów*, występujących w jej równaniu. Otóż, żądając, aby krzywa drugiego stopnia spełniała pewne warunki geometryczne, otrzymamy pewne warunki analityczne, w postaci związków między powyższemi pięcioma parametrami. Zagadnienie wyznaczenia krzywej drugiego stopnia, spełniającej dane warunki, sprowadza

*) Przypominamy, że gdy punkty leżą na pewnej prostej, to ich biegunowe przechodzą przez biegun tej prostej.