ROZDZIAŁ VII.

ZAGADNIENIA DOTYCZĄCE KULI I KOŁA W PRZESTRZENI.

23. Zagadnienia dotyczące kuli.

Równanie kuli, której środek znajduje się w punkcie (a, b, c) i której promień wynosi r, jest następujące (art. 10):

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2 \tag{1}$$

równanie to, po rozwinięciu kwadratów, przybierze postać

$$x^2+y^2+z^2+\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta=0 \tag{2}$$

charakterystyczną dla kuli, można bowiem udowodnić, analogicznie jak dla koła na płaszczyźnie, iż odwrotnie, równanie (2) sprowadza się do postaci (1), a więc przedstawia pewną kulę. Położenie kuli zależy więc od *czterech* parametrów. A zatem, dla określenia kuli, należy w zagadnieniach podawać warunki, odpowiadające czterem związkom niezależnym, którym ona winna czynić zadość. Stąd wynika np. wniosek o istnieniu określonej powierzchni kulistej, przechodzącej przez *cztery* punkty dowolne, *nieleżące na jednej płaszczyźnie.*

ZAGADNIENIE 1. *Znaleść równanie kuli, której środek leży na osi Ox i która przechodzi przez dwa dane punkty:*

$$M_1(1, 1, 1); \qquad M_2(-1, 0, 2).$$

Równanie szukanej kuli będzie miało postać

$$(x-a)^2+y^2+z^2=r^2,$$

żądając, aby to równanie było spełnione w punktach M_1 i M_2, otrzymamy związki

$$(1-a)^2+2=r^2\ ;$$

$$(-1-a)^2+4=r^2;$$

stąd wypada

$$a=-\frac{1}{2}; \qquad r^2=\frac{17}{4}$$

i równanie żądanej kuli

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+y^2+z^2=\frac{17}{4}.$$

ZAGADNIENIE 2. *Znaleść równanie kuli stycznej do każdej z płaszczyzn współrzędnych i przechodzącej przez punkt $M(2, -1, 3)$.*

Jeśli kula jest styczna do danej płaszczyzny, to odległość środka kuli od tej płaszczyzny równa się jej promieniowi. W danym wypadku więc wartości bezwzględne współrzędnych a, b, c środka kuli, winny się równać promieniowi tej kuli:

$$|a| = |b| = |c| = r,$$

a ponieważ znak współrzędnych środka a, b, c winien być dla kuli stycznej do płaszczyzn $(Oxyz)$, zgodny ze znakiem odpowiedniej współrzędnej punktu danego kuli M, więc równanie kuli winno mieć postać

$$(x-a)^2 + (y+a)^2 + (z-a)^2 = a^2;$$

żądając, aby kula przechodziła przez punkt $M(2, -1, 3)$, otrzymamy równanie

$$a^2 - 6a + 7 = 0,$$

a więc istnieją dwie kule żądane o równaniach:

$$(x-3\mp\sqrt{2})^2 + (y+3\pm\sqrt{2})^2 + (z-3\mp\sqrt{2})^2 = (3\pm\sqrt{2})^2.$$

ZAGADNIENIE 3. *Znaleść równanie kuli stycznej do osi Ox w punkcie* $(1, 0, 0)$ *i nadto do osi Oz i do prostej $x = y = z$ w punktach nieokreślonych.*

Równanie szukanej kuli piszemy w postaci

$$x^2 + y^2 + z^2 + \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0$$

i w znany sposób, żądając, aby kula przecinała się z danemi prostemi w punktach zjednoczonych, otrzymamy następujące związki między współczynnikami:

$$\alpha = -2; \quad \delta = 1;$$
$$\gamma^2 - 4\delta = 0;$$
$$(\alpha + \beta + \gamma)^2 - 12\delta = 0;$$

otrzymamy stąd cztery kule, spełniające warunki zagadnienia.

ZAGADNIENIE 4. *Przez daną prostą o równaniach*

$$x = z; \quad y = z + 1$$

przesunąć płaszczyznę styczną do kuli danej

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 3 = 0.$$

Pęk płaszczyzn, przesuniętych przez daną prostą, przedstawia równanie

$$x - z + \lambda(y - z - 1) = 0$$

lub

$$x + \lambda y - (1 + \lambda) z - \lambda = 0.$$

Z pomiędzy tych płaszczyzn ta będzie styczna do kuli, której odległość od środka kuli równa się promieniowi danej kuli. Otóż współrzędne środka i promień kuli poznajemy, pisząc jej równanie w postaci

$$(x - 2)^2 + y^2 + z^2 = 1,$$

odległość środka $(2, 0, 0)$ tej kuli od płaszczyzny (3) wyraża się przy pomocy postaci normalnej w taki sposób:

$$\frac{2-\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2+(1+\lambda)^2}};$$

żądając, aby ta odległość równała się promieniowi, t. j. jedności, otrzymamy równanie

$$\lambda^2+6\lambda-2=0$$

i stąd dwie płaszczyzny styczne do kuli:

$$x-z+(-3\pm\sqrt{11})(y-z-1)=0.$$

Równanie płaszczyzny stycznej.

Znajdźmy równanie płaszczyzny stycznej do kuli o równaniu

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$$

w danym punkcie $M(x, y, z)$.

Płaszczyzna styczna do kuli w punkcie M będzie prostopadła do promienia, łączącego środek kuli z punktem M, ale ten wektor ma składowe

$$x-a;\ y-b;\ z-c,$$

równanie płaszczyzny stycznej będzie więc oczywiście takie:

$$(X-x)(x-a)+(Y-y)(y-b)+(Z-z)(z-c)=0$$

gdzie (X, Y, Z) oznaczają współrzędne bieżące punktu płaszczyzny stycznej. Po prostem przekształceniu, otrzymamy równanie płaszczyzny stycznej do kuli w postaci

$$(X-a)(x-a)+(Y-b)(y-b)+(Z-c)(z-c)=r^2$$

analogicznej do postaci równania stycznej do koła na płaszczyźnie.

24. Koło w przestrzeni.

Koło w przestrzeni określimy analitycznie, jako *przecięcie płaszczyzny powierzchnią kulistą*, a więc przez dwa związki w postaci

$$\text{(4)}\qquad \begin{cases} Ax+By+Cz+D=0 \\ (x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2 \end{cases}$$

Rzutem krzywej (4) na dowolną płaszczyznę współrzędnych jest wogóle elipsa. Zaznaczymy, iż środek kuli (4) niekoniecznie winien znajdować się w środku koła; wogóle *środek kuli, która w przecięciu daje dane koło, leżeć będzie na prostopadłej do płaszczyzny danego koła, wystawionej z jego środka.*

ZAGADNIENIE. Znaleść równania koła, powstałego od obrotu danego punktu $M_0(x_0, y_0, z_0)$ dokoła prostej danej D.

Kołem, powstałem od obrotu punktu M_0 dokoła danej prostej D, nazywamy koło, przechodzące przez punkt M_0, którego płaszczyzna jest prostopadła do prostej D i którego środek leży na tej prostej. Koło takie określimy więc analitycznie, jako przecięcie płaszczyzny, przesuniętej przez dany punkt M_0 prostopadle do prostej danej D, z kulą przechodzącą przez punkt M_0, której *środkiem jest dowolnie wybrany punkt osi obrotu D;* nie trzeba więc wogóle poszukiwać punktu przebicia prostą D płaszczyzny koła obrotu dla obrania go środkiem kuli. Weźmy dla uproszczenia następujący przykład szczególny; wyznaczmy analitycznie koło, powstałe od obrotu punktu $M_0(x_0, y_0, z_0)$ dokoła prostej o równaniach

$$\frac{x}{m} = \frac{y}{n} = \frac{z}{p}$$

przechodzącej przez początek układu.

W danym wypadku koło możemy uważać jako przecięcie się płaszczyzny, przesuniętej przez punkt M_0 prostopadle do danej prostej, z kulą, przez ten punkt przechodzącą, której środek najlepiej umieścić w początku układu, jako leżącym na osi obrotu; a więc związki

$$\begin{cases} m(x - x_0) + n(y - y_0) + p(z - z_0) = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 \end{cases}$$

określają żądane koło.

Ćwiczenia.

1. Znaleść równanie kuli, której środkiem jest punkt $(1, 1, 2)$ i która jest styczna do płaszczyzny

$$2x - y + z + 3 = 0.$$

2. Znaleść równanie kuli stycznej do płaszczyzn (Oxy) i (Oyz) i przechodzącej przez punkty $(1, 1, 1)$; $(2, -1, 3)$.

3. Znaleść równanie kuli stycznej do płaszczyzn współrzędnych i do płaszczyzny

$$x + y + 2z = 1.$$

4. Znaleść równanie kuli, przechodzącej przez trzy punkty

$$(1, 1, 1); \quad (-1, 0, 2); \quad (0, 0, -1)$$

i stycznej do płaszczyzny Oxy.

5. Znaleść równanie kuli, której środek jest w początku układu i która jest styczna do prostej

$$x = z + 1; \quad y = 2z - 1.$$

6. Znaleść równanie kuli stycznej do każdej z osi współrzędnych i przechodzącej przez punkt $(1, 1, 2)$.

7. Przez prostą daną przez związki

$$2x + y = 5; \quad 3x - z = 2$$

przesunąć płaszczyznę styczną do koła o równaniach

$$x^2 + y^2 = 1; \quad z = 0.$$

8. Znaleść równanie płaszczyzny stycznej do kuli o równaniach

$$x^2 + y^2 + z^2 + x - y = 0,$$

która byłaby równoległa do płaszczyzny danej

$$2x - y + z = 0.$$

9. Znaleść miejsce geometryczne punktów, dla których stosunek odległości od dwóch punktów danych w przestrzeni jest wielkością stałą.

10. Znaleść równanie rzutu na płaszczyznę Oxz koła, powstałego od obrotu punktu $(0, 0, a)$ dokoła prostej

$$x = y = 2z.$$

Dla jakiej wartości na a to koło dotknie płaszczyznę Oxy?

ROZDZIAŁ VIII.

O POWIERZCHNIACH UTWORZONYCH PRZEZ UKŁADY LINIJ.

25. Rozważania ogólne.

Rozważmy równania linji, zawierające pewien parametr C; napiszemy je w postaci

$$(1) \qquad \begin{aligned} f(x, y, z, C) &= 0 \\ \varphi(x, y, z, C) &= 0 \end{aligned}$$

Jeśli wartość parametru C będziemy zmieniali w sposób ciągły, wtedy otrzymamy układ nieskończenie wielu linij w przestrzeni.

Rugowanie parametru zmiennego C z dwóch równań (1) prowadzi do związku między trzema zmiennemi x, y, z o postaci

$$F(x, y, z) = 0; \tag{2}$$

to znaczy wszelka trójka liczb (x, y, z), która spełnia obydwa związki (1), będzie spełniała i związek (2), niezależnie od wartości parametru C. Własność ta oznacza geometrycznie, iż dowolny punkt każdej z krzywych układu (1) leży na pewnej powierzchni, odpowiadającej rezultatowi rugowania (2).

Równanie powierzchni, utworzonej przez układ linij w przestrzeni z jednym parametrem zmiennym, otrzymamy przez wyrugowanie tego zmiennego parametru z dwóch równań, określających dany układ linij.

Linje układu (1) nazywamy *tworzącemi* powierzchni (2).

Badanie szczególnych przypadków rugowania będzie tu analogiczne do rozważań, podanych w artykule o miejscach geometrycznych na płaszczyźnie (str. 115). A mianowicie, w przypadku, gdy równania tworzących zawierają parametr zmienny C w pierwszej potędze, to znaczy mają postać

$$\begin{cases} P(x, y, z)\, C + Q(x, y, z) = 0 \\ P'(x, y, z)\, C + Q'(x, y, z) = 0, \end{cases} \tag{3}$$

rezultatem rugowania parametru C, a więc równaniem powierzchni utworzonej, będzie związek

$$P(x, y, z)\cdot Q'(x, y, z) - P'(x, y, z)\cdot Q(x, y, z) = 0 \tag{3'}$$

Jeśli zaś równania tworzących zawierają parametr zmienny C w potędze drugiej, to znaczy mają postać

$$\begin{cases} P(x, y, z)\, C^2 + Q(x, y, z)\, C + R(x, y, z) = 0 \\ P'(x, y, z)\, C^2 + Q'(x, y, z)\, C + R'(x, y, z) = 0 \end{cases} \tag{4}$$

wtedy równaniem powierzchni utworzonej będzie związek

$$(PQ' - P'Q)(QR' - Q'R) - (PR' - P'R)^2 = 0 \tag{4'}$$

Analogicznie, jak w artykule 37 (str. 115) części I-ej, można wykazać w przypadku również tworzących (3) lub (4), iż odwrotnie, dla dowolnego punktu $M_0\ (x_0, y_0, z_0)$, spełniającego rezultat rugowania, można dobrać taką wartość na C, *z wyjątkami zaznaczonemi w art.* 37.

iż punkt (x_0, y_0, z_0) będzie spełniał dwa równania tworzących (3) lub (4); geometrycznie będzie to oznaczało, *iż przez dowolny punkt* (x_0, y_0, z_0) *powierzchni o równaniu* (3') *lub* (4') *przechodzi określona tworząca danego układu.*

Przykład. Dany jest układ krzywych w przestrzeni, określonych przez dwa równania ze zmiennym parametrem C

$$\begin{cases} x^2 + Cy = 0 \\ yz = C \end{cases}$$

Rugując parametr C, otrzymamy równanie powierzchni trzeciego stopnia

$$x^2 + y^2 z = 0$$

utworzonej przez dane linje. Sprawdzamy, iż przez każdy punkt (x_0, y_0, z_0) tej powierzchni przechodzi jedna tworząca danego układu, jeśli bowiem spełniony jest związek $x_0^2 + y_0^2 z_0 = 0$, to wystarczy dobrać $C = y_0 z_0$, aby otrzymać tworzącą, przechodzącą przez dany punkt (x_0, y_0, z_0).

26. Powierzchnie obrotowe.

Powierzchnię, otrzymaną przez obrót linji dokoła prostej, nazywamy *obrotową*.

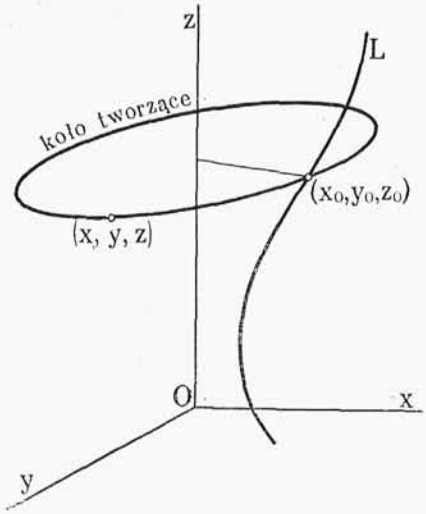
Zamiast uważać powierzchnię obrotową, jako utworzoną przez układ różnych położeń linji obracającej się, dogodniej jest traktować ją, jako utworzoną przez układ kół, opisywanych przez punkty obracającej się linji. Niech będą związki

$$x_0 = f_1(t); \quad y_0 = f_2(t); \quad z_0 = f_3(t); \tag{5}$$

określające parametrycznie linję tworzącą L. Przypuśćmy, iż oś Oz jest osią obrotu. Powierzchnia obrotowa jest utworzona z kół równoległych do płaszczyzny Oxy, których środki leżą na osi obrotu Oz i które przechodzą przez punkty (x_0, y_0, z_0) linji (5) (rys. 173). Koło takie, przechodzące przez punkt (x_0, y_0, z_0), będzie oczywiście określone przez związki

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = x_0^2 + y_0^2 \\ z = z_0 \end{cases} \tag{6}$$

gdzie x, y, z oznaczają współrzędne dowolnego punktu koła; prawe strony równań (6) zawierają parametr t, którego zmiana daje układ kół tworzących powierzchni. Równanie żądanej powierzchni obrotowej $F(x, y, z) = 0$ otrzymamy więc, rugując parametr t z dwóch związków (6).



Rys. 173.

Przypuśćmy w szczególności, iż linja (5) leży w płaszczyźnie (Oxz) i jest określona przez związki

$$(7) \qquad x_0 = \varphi(z_0); \quad y_0 = 0$$

równania koła tworzącego będą wtedy

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = x_0^2 \\ z = z_0 \end{cases}$$

uważając z_0 jako parametr zmienny i rugując go, mamy równanie powierzchni obrotowej w tej postaci

$$x^2 + y^2 = [\varphi(z)]^2$$

Koła, opisane przez punkty obracającej się linji, nazywamy *równoleżnikami* powierzchni, zaś różne położenia obracającej się linji (7), leżącej w płaszczyźnie osi obrotu, nazywamy *południkami* powierzchni.

P r z y k ł a d 1. Niech będzie elipsa o równaniu

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{z_0^2}{b^2} = 1$$

Powierzchnia, powstała od obrotu tej elipsy dokoła osi Oz, utworzona jest z układu kół określonych przez związki

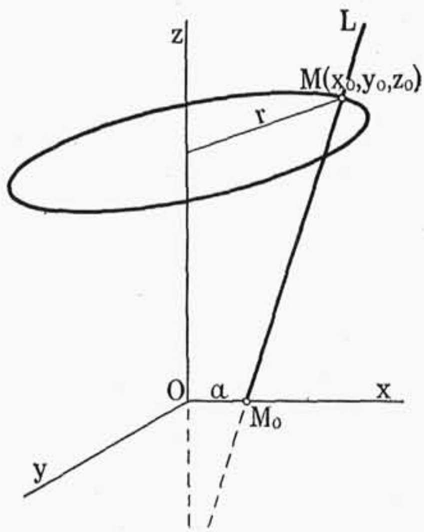
$$\begin{cases} x^2+y^2=x_0^2 \\ z=z_0 \end{cases}$$

rugując parametry x_0, z_0 z trzech powyższych związków, otrzymamy równanie powierzchni

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1 \tag{8}$$

która zwie się *elipsoidą obrotową.*

P r z y k ł a d 2. *Wyznaczmy równanie powierzchni, powstałej od obrotu linji prostej L dokoła osi skośnej względem niej.*



Rys. 174.

Przypuśćmy, iż osią obrotu jest Oz i że odcinek najkrótszej odległości OM_0 prostej L od osi obrotu leży wzdłuż osi Ox (rys. 174). Dla prostej L przyjmiemy więc równania w postaci

$$\begin{cases} x_0=a \\ y_0=m\,z_0 \end{cases}$$

gdzie a i m są to dane dwie stałe; mamy oczywiście $OM_0=a$.

Równania koła, opisanego przez dowolny punkt $M(x_0, y_0, z_0)$ linji L są takie:

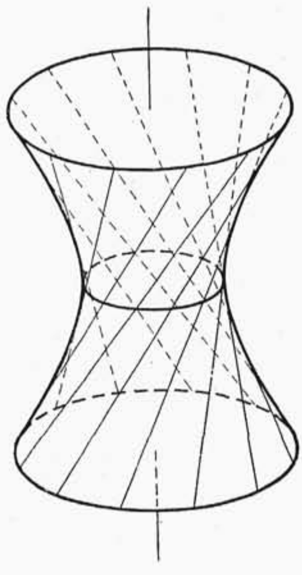
$$\begin{cases} x^2+y^2=x_0^2+y_0^2 \\ z=z_0 \end{cases}$$

lub, na podstawie związków określających prostą L,

$$\begin{cases} x^2+y^2=a^2+m^2 z_0^2 \\ z=z_0 \end{cases}$$

rugując parametr zmienny z_0 z tych równań koła, otrzymujemy równanie szukanej powierzchni obrotowej w postaci

$$x^2+y^2-m^2 z^2=a^2 \tag{9}$$



Rys. 175.

Widzimy stąd, iż powierzchnia ta może też być otrzymana przez obrót *hyperboli*, leżącej w płaszczyźnie Oxz, o równaniu

$$x^2-m^2 z^2=a^2$$

dokoła osi Oz (rys. 175).

Najmniejsze koło opisze odcinek wspólnej prostopadłej OM_0. Powierzchnię taką nazywamy *hyperboloidą obrotową*.

P r z y k ł a d 3. Wyznaczyć równanie powierzchni, powstałej od obrotu prostej

$$x_0 = z_0 + 1; \quad y_0 = 2z_0 - 1$$

dokoła prostej

$$x = -z; \quad y = 2z.$$

Według rozważań poprzedniego rozdziału, będziemy uważali koło tworzące, przechodzące przez punkt (x_0, y_0, z_0), jako przecięcie płaszczyzny P, przesuniętej przez punkt M_0, prostopadłej do osi obrotu, z kulą K, której środkiem jest dowolnie wybrany punkt osi obrotu, a więc w danym wypadku najlepiej początek układu. Koło tworzące jest więc określone przez dwa związki

$$\begin{cases} (-1)(x-x_0)+2(y-y_0)+1\cdot(z-z_0)=0; \\ x^2+y^2+z^2=x_0^2+y_0^2+z_0^2; \end{cases}$$

a zatem, według równań danych prostych, przez związki

$$\begin{cases} -x+2y+z=4z_0-3; \\ x^2+y^2+z^2=6z_0^2-2z_0+2; \end{cases}$$

rugując z tych związków parametr z_0, otrzymamy równanie szukane

$$5x^2-4y^2+5z^2+12xy+6xz-12yz+14x-28y-14z-31=0$$

P r z y k ł a d 4. Znaleść równanie powierzchni, powstałej od obrotu hyperboli, danej przez równania

$$x_0\, y_0 = 1 \;\; ; \;\; z_0 = 0$$

dokoła prostej

$$x = y = z.$$

Koło tworzące będzie przecięciem płaszczyzny, przesuniętej przez punkt hyperboli $(x_0, y_0, 0)$ prostopadle do danej osi obrotu, z kulą przez ten punkt przechodzącą, której środkiem jest początek układu. Koło tworzące określają więc dwa związki

$$\begin{cases} x+y+z=x_0+y_0; \\ x^2+y^2+z^2=x_0^2+y_0^2; \end{cases}$$

podnosząc do kwadratu, w celu wyrugowania parametrów zmiennych, obie strony pierwszego związku i korzystając ze związków pozostałych, otrzymamy natychmiast równanie szukanej powierzchni w postaci symetrycznej

$$xy+xz+yz=1.$$

27. Powierzchnie stożkowe.

Powierzchnię, utworzoną przez układ linij prostych, nazywamy *powierzchnią prostokreślną.* Szczególnym przypadkiem takich powierzchni jest *powierzchnia, utworzona przez układ prostych, przechodzących przez stały punkt W*; nazywamy ją *powierzchnią stożkową.* Stały punkt W zwie się *wierzchołkiem powierzchni stożkowej.*

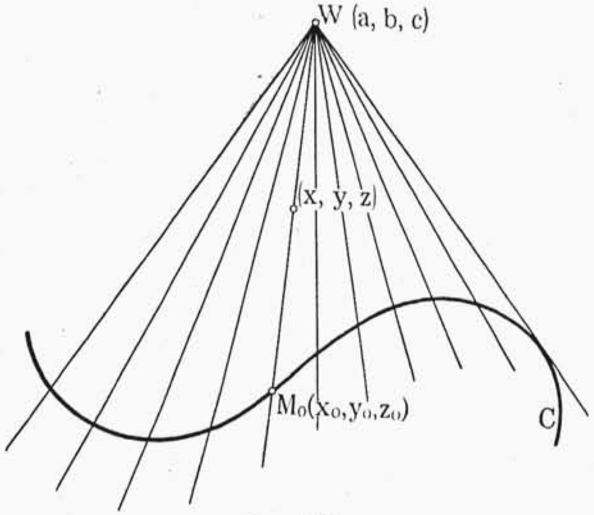
Powierzchnia stożkowa jest określona, jeśli dany jest jej wierzchołek W i linja C, przez którą ona winna przechodzić, zwana *kierownicą.* Powierzchnię otrzymamy, prowadząc proste przez każdy punkt M_0 linji C i przez wierzchołek W (rys. 176).

Aby znaleść równanie powierzchni stożkowej, wyznaczmy równania dowolnej tworzącej $M_0 W$. Niech

$$x_0(t), y_0(t), z_0(t)$$

będą funkcjami, określającemi krzywą C; a, b, c niech oznaczają współrzędne wierzchołka W. Współrzędne dowolnego punktu tworzącej (x, y, z), łączącej wierzchołek W z punktem (x_0, y_0, z_0), spełniają dwa równania

$$\frac{x-a}{x_0-a} = \frac{y-b}{y_0-b} = \frac{z-c}{z_0-c} \tag{10}$$



Rys. 176.

tworząca ta opisuje powierzchnię stożkową, gdy zmienia się punkt M_0 t. j. parametr t, rugując więc z tych dwóch równań parametr zmienny t, otrzymamy równanie powierzchni stożkowej.

Przykład. Znaleść równanie powierzchni stożkowej, utworzonej przez proste, przechodzące przez punkt $W(1, 2, 3)$ i przez punkty paraboli $y_0^2 = x_0$, leżącej w płaszczyźnie $z_0 = 0$ (rys. 177).

Równania tworzącej, łączącej punkt $W(1, 2, 3)$ i punkt $(x_0, y_0, 0)$, są następujące:

$$\frac{x-1}{x_0-1} = \frac{y-2}{y_0-2} = \frac{z-3}{0-3}$$

aby uniknąć pierwiastków, obieramy jako parametr zmienny współrzędną y_0, mamy wtedy, według związku $y_0^2 = x_0$, takie równania tworzącej:

$$3x - z = (3-z)\,y_0^2\,; \qquad 3y - 2z = (3-z)\,y_0$$

rugując y_0, otrzymamy równanie powierzchni

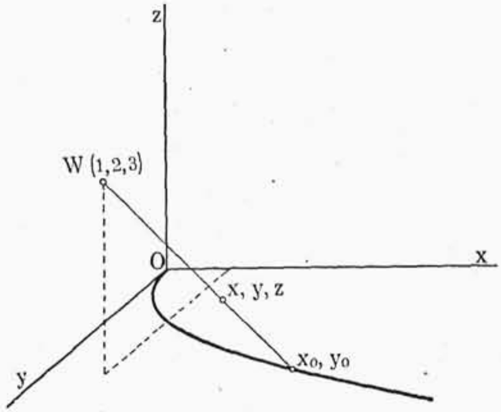
$$3y^2 + z^2 - 4yz + xz - 3x + z = 0$$

Przypuśćmy, iż wierzchołek powierzchni stożkowej W znajduje się w początku układu, wtedy równania tworzącej (10) będą

$$\frac{x}{x_0}=\frac{y}{y_0}=\frac{z}{z_0}$$

lub

$$\frac{x}{z}=\frac{x_0(t)}{z_0(t)};\quad \frac{y}{z}=\frac{y_0(t)}{z_0(t)}$$



Rys. 177.

rugując z tych dwóch związków parametr zmienny t, otrzymamy związek o postaci

$$F\left(\frac{x}{z},\frac{y}{z}\right)=0 \tag{11}$$

Równanie powierzchni stożkowej, której wierzchołek znajduje się w początku układu, jest więc jednorodne względem zmiennych x, y, z).*

*) Wogóle równaniem jednorodnem nazywamy związek, którego lewa strona $f(x,y,z)$ jest funkcją jednorodną zmiennych x, y, z, to znaczy, w razie pomnożenia tych zmiennych przez ten sam czynnik dowolny k, spełnia tożsamość

$$f(kx,ky,kz)\equiv k^n f(x,y,z)$$

liczbę n nazywamy stopniem funkcji jednorodnej.

Widzimy stąd, iż równanie jednorodne

$$f(x,y,z)=0$$

możemy doprowadzić do związku między dwoma stosunkami:

$$f\left(1,\frac{y}{x},\frac{z}{x}\right)=0$$

dzieląc obie strony przez x w odpowiedniej potędze.

Odwrotnie, wykażemy, iż *równanie jednorodne z trzema zmiennemi* x, y, z

(12) $$f(x, y, z) = 0$$

przedstawia powierzchnię stożkową, której wierzchołkiem jest początek układu.

Własność ta wynika natychmiast z uwagi, że gdy punkt (x_0, y_0, z_0) spełnia równanie jednorodne

$$f(x_0, y_0, z_0) = 0,$$

to punkt o współrzędnych x, y, z takich, iż

$$\frac{x}{x_0} = \frac{y}{y_0} = \frac{z}{z_0} = k.$$

też spełnia to równanie, to znaczy

$$f(kx_0, ky_0, kz_0) = 0;$$

a więc każda prosta, wyprowadzona z początku układu i przechodząca przez dowolny punkt powierzchni (12), przystaje do tej powierzchni. Powierzchnię, odpowiadającą danemu równaniu jednorodnemu

$$f(x, y, z) = 0,$$

możemy więc np. otrzymać, prowadząc proste przez początek układu i przez punkty krzywej o równaniu

$$f(x, y, z_1) = 0$$

leżącej w płaszczyźnie $z = z_1$.

Równanie jednorodne przedstawia więc istotnie powierzchnię stożkową.

Np. równanie jednorodne z trzema zmiennemi

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz = 0$$

przedstawia powierzchnię stożkową drugiego stopnia z wierzchołkiem w początku układu.

28. Powierzchnie walcowe.

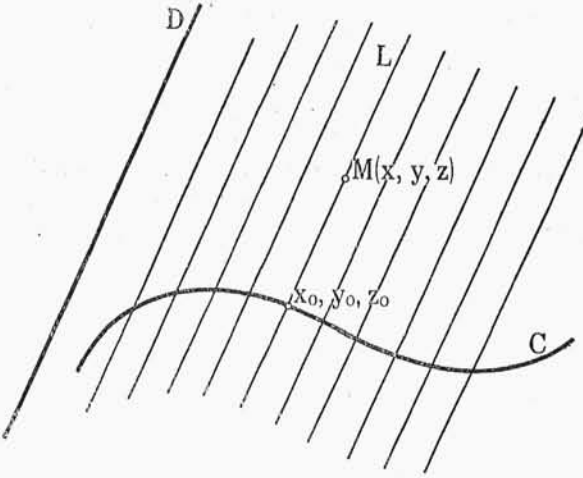
Powierzchnię, utworzoną przez układ prostych równoległych, nazywamy walcową. Powierzchnia walcowa jest określona, jeśli dana jest linja C, przez którą powierzchnia winna przechodzić i prosta D, do której tworzące winny być równoległe. Powierzchnię otrzymamy mianowicie, prowadząc przez każdy punkt (x_0, y_0, z_0) krzywej C prostą L równoległą do D (rys. 178).

Niech będą funkcje $x_0(t), y_0(t), z_0(t)$, określające krzywą C, zaś α, β, γ niech oznaczają *stałe* współczynniki kierunkowe prostej D.

Równania tworzącej L, przechodzącej przez punkt (x_0, y_0, z_0) i równoległej do prostej D, będą więc takie:

$$\frac{x - x_0(t)}{\alpha} = \frac{y - y_0(t)}{\beta} = \frac{z - z_0(t)}{\gamma}$$

jeśli t zmienia się, wtedy tworząca L opisuje powierzchnię walcową, której równanie otrzymamy, rugując z powyższych równań parametr t.



Rys. 178.

Przykład. Wyznaczyć równanie powierzchni, utworzonej przez układ prostych, dotykających linji o równaniach $y_0 = x_0^2$; $z_0 = 0$ i równoległych do prostej $\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{-3}$.

Równania tworzącej będą

$$\frac{x - x_0}{1} = \frac{y - y_0}{2} = \frac{z}{-3}$$

lub

$$-3x + 3x_0 - z = 0; \quad -3y + 3x_0^2 - 2z = 0$$

rugując parametr x_0, otrzymamy równanie powierzchni szukanej

$$9x^2 + z^2 + 6xz - 9y - 6z = 0$$

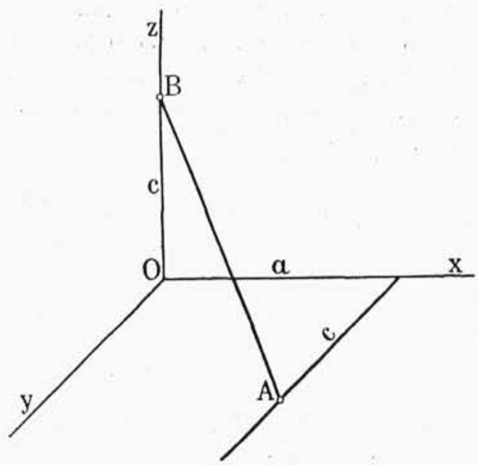
Jeśli tworzące powierzchni walcowej są prostopadłe do jednej z płaszczyzn współrzędnych, np. do (Oxy), to wtedy rzuty wszystkich punktów tej powierzchni na płaszczyznę (Oxy) znajdują się na krzywej L przecięcia się walca z tą płaszczyzną, a zatem wszystkie punkty walca, dla dowolnej wartości z, spełniają wtedy związek z dwiema zmiennemi

$$f(x, y) = 0$$

odpowiadający linji L.

29. Przykłady powierzchni prostokreślnych.

ZAGADNIENIE 1. Dana jest prosta $x = a$, leżąca w płaszczyźnie (Oxy).



Rys. 179.

Wyznaczmy równanie powierzchni, utworzonej przez układ prostych, otrzymanych przez połączenie punktu $A(a, c, 0)$ prostej stałej $x = a$ z punktem B $(0, 0, c)$ osi Oz, dla wszelkich wartości c (rys. 179). Równania tworzącej AB są następujące:

$$\frac{x-0}{a-0} = \frac{y-0}{c-0} = \frac{z-c}{0-c}$$

t. j.

$$xc = ay; \quad y + z = c$$

rugując parametr zmienny c, otrzymamy równanie powierzchni

$$x(y+z) = ay$$

ZAGADNIENIE 2. *Znaleść równanie powierzchni, utworzonej przez układ prostych, przecinających dwie dane proste i równoległych do płaszczyzny danej.*

Przypuśćmy, iż płaszczyzną daną jest (Oxy), zaś dwie proste dane mają równania

$$D_1 \begin{cases} x - 3z = 1 \\ 2x + y = -1 \end{cases} \qquad D_2 \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 3x + z = 1 \end{cases}$$

Proste, przecinające proste D_1 i D_2 i równoległe do płaszczyzny (Oxy), otrzymamy, prowadząc dowolną płaszczyznę

$$z = k$$

równoległą do (Oxy) i łącząc punkty przecięcia się M_1 i M_2 tej płaszczyzny z prostemi D_1 i D_2. Oznaczmy przez (x_1, y_1, z_1) i (x_2, y_2, z_2) współrzędne punktów M_1 i M_2. Z równań prostych D_1 i D_2 i równania płaszczyzny $z = k$, otrzymamy takie współrzędne punktów przecięcia:

$$M_1 \begin{cases} x_1 = 1 + 3k \\ y_1 = -3 - 6k \\ z_1 = k \end{cases} \qquad M_2 \begin{cases} x_2 = \dfrac{1-k}{3} \\ y_2 = -\dfrac{1+2k}{3} \\ z_2 = k \end{cases}$$

Równania tworzącej, łączącej te punkty, wypadną w postaci

$$\frac{x - x_1}{x_1 - x_2} = \frac{y - y_1}{y_1 - y_2}\,; \quad z = k$$

t. j.

$$\frac{x - 1 - 3k}{1 + 5k} = \frac{y + 3 + 6k}{-4 - 8k}\,; \quad z = k$$

jeśli zmienia się parametr k, wtedy tworząca opisuje żądaną powierzchnię; równanie jej, po wyrugowaniu parametru k, będzie takie:

$$6z^2 + 8xz + 5yz + 4x + y + z - 1 = 0$$

jest to, jak widzimy, *powierzchnia drugiego stopnia.*

ZAGADNIENIE 3. *Znaleść równanie powierzchni, utworzonej przez układ prostych, przecinających trzy dane proste* D_1, D_2, D_3. Wiadomo, iż z dowolnego punktu przestrzeni można wyprowadzić określoną prostą, przecinającą dwie dane proste. Układ prostych, o które chodzi w zagadnieniu, otrzymamy więc, prowadząc przez każdy punkt jednej z prostych danych, np. D_1, prostą, przecinającą dwie pozostałe D_2 i D_3. Niech prostą D_1 będzie oś Oz, zaś proste D_2 i D_3 niech będą dane przez równania:

$$D_2 \begin{cases} x+y=1 \\ z=0 \end{cases} \qquad D_3 \begin{cases} x-2z=1 \\ y=1 \end{cases}$$

Weźmy więc dowolny punkt $A(0,0,c)$ na osi Oz, t. j. prostej D_1 i wyprowadźmy z niego prostą L, przecinającą proste D_2 i D_3. Mamy tu zagadnienie, które rozwiązaliśmy już w art. 21 (zagadnienie 4, str. 349). Prosta L będzie mianowicie przecięciem się płaszczyzny, poprowadzonej przez punkt A i prostą D_2, z płaszczyzną, poprowadzoną przez punkt A i prostą D_3. Płaszczyzny te winny mieć równania o postaci

$$\begin{aligned} &x+y-1+\lambda_1 z=0 \\ &x-2z-1+\lambda_2(y-1)=0; \end{aligned}$$

żądając, aby te płaszczyzny przechodziły przez punkt $A(0,0,c)$, otrzymamy $\lambda_1=\frac{1}{c}$; $\lambda_2=-2c-1$; równania płaszczyzn, określające tworzące L, będą więc

$$x+y-1+\frac{1}{c}z=0$$

$$x-2z-1-(2c+1)(y-1)=0$$

tworząca ta opisuje żądaną powierzchnię, gdy zmienia się parametr c, rugując go więc z dwóch powyższych równań, otrzymamy równanie szukane

$$x^2-y^2-2xz-x+y=0;$$

a więc powierzchnia żądana jest drugiego stopnia.

Ćwiczenia.

1. Znaleść równanie powierzchni, powstałej od obrotu paraboli o równaniach $y^2=2px$ dokoła osi Oy.

2. Znaleść równanie powierzchni walcowej, powstałej od obrotu prostej

$$\frac{x_0}{1}=\frac{y_0}{2}=\frac{z_0}{3}$$

dokoła prostej

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-2}{3}.$$

3. Znaleść równanie powierzchni, utworzonej przez układ prostych, przecinających oś Oz, linję daną przez związki

$$y_0 = x_0^2; \quad z_0 = x_0$$

i równoległych do płaszczyzny (Oxy).

4. Znaleść równanie powierzchni, utworzonej przez układ prostych

$$x = (a + z) \operatorname{Cos} t; \quad y = (a - z) \operatorname{Sin} t,$$

gdzie t jest parametrem zmiennym.

5. Znaleść równanie powierzchni, utworzonej przez proste, będące przecięciem się par płaszczyzn, przechodzących przez dwie stałe proste D_1 i D_2 i prostopadłych do siebie.

6. Punkt M porusza się jednostajnie po prostej D. Przez punkt ten przechodzi prosta prostopadła do prostej D i obracająca się dokoła niej też jednostajnie. Znaleść równanie powierzchni, opisanej przez prostą.

7. Parabolę $y_0^2 = x_0$, leżącą w płaszczyźnie $z_0 = 0$, przesuwamy równolegle w ten sposób, że jej wierzchołek porusza się po krzywej $x = z^2$ w płaszczyźnie $O x z$. Wyznaczyć równanie powierzchni, opisanej przez tę parabolę.

8. Znaleść równanie powierzchni walcowej, opisanej na kuli

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1,$$

której tworzące są równoległe do prostej

$$2x = y = z.$$

9. Znaleść równanie powierzchni stożkowej, opisanej na kuli

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1,$$

i której wierzchołkiem jest punkt $(0, 0, 2)$.

10. Znaleść równanie powierzchni, powstałej od obrotu prostej o równaniach $x = a$; $z = 0$ dokoła prostej

$$x = y = z.$$

11. Znaleść równanie powierzchni stożkowej obrotowej, przechodzącej przez następujące trzy proste:

I. Oś Oz: II. Oś Ox; III. $\begin{cases} y = x; \\ z = 0. \end{cases}$

12. Znaleść równanie powierzchni, utworzonej przez proste, przecinające oś Oz, równoległe do płaszczyzny Oxy i styczne do kuli

$$(x - 2)^2 + y^2 + z^2 = 1.$$