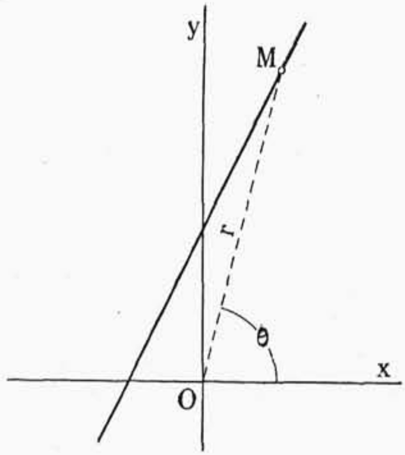
Przykład 2. — Dany jest związek

$$r = a \operatorname{Sin} \theta,$$

przedstawiający, jak wiemy, koło.



Rys. 39.

Korzystając ze wzorów (6), możemy wyrazić $\operatorname{Sin} \theta$ i r w zależności od x i y, mianowicie będzie

$$r = \pm \sqrt{x^2 + y^2}; \quad \operatorname{Sin} \theta = \pm \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}};$$

podstawiając te wyrażenia w równanie dane, otrzymamy równanie krzywej we współrzędnych prostokątnych

$$x^2 + y^2 = ay.$$

15. Równania parametryczne krzywej.

Przypuśćmy, iż współrzędne x i y punktu na płaszczyźnie są określonemi funkcjami pewnej zmiennej t:

$$(7) \qquad \begin{aligned} x &= f(t) \\ y &= \varphi(t) \end{aligned}$$

każdej więc wartości zmiennej t (w pewnym przedziale) odpowiada pewne położenie punktu (x, y) na płaszczyźnie; jeśli wielkość t zmienia się w sposób ciągły, wtedy odpowiedni punkt o współrzędnych (x, y) opisuje łuk linji krzywej. Linja ta określona jest więc analitycznie przez związki (7); zmienna niezależna t zwie się **parametrem**, zaś związki (7) zwą się **równaniami parametrycznemi** krzywej.

Zaznaczymy, iż określenie zwykłe krzywej w postaci związku bezpośredniego

$$y = f(x)$$

jest *szczególnym wypadkiem* określenia krzywej przez równania parametryczne, istotnie, związek

$$y = f(x)$$

jest równoważny związkom

$$x = t$$

$$y = f(t)$$

Wynikiem rugowania parametru t z dwóch równań (7) nazwiemy pewien związek bezpośredni między współrzędnemi w postaci

$$F(x, y) = 0 \tag{8}$$

który będą spełniały punkty krzywej, otrzymane ze wzorów (7). Poszukiwanie takiego związku, to znaczy rugowanie zmiennej t, dokonywa się w przykładach w ten sposób, iż zmienną t wyznaczamy w zależności np. od x z pierwszego ze związków (7) i wstawiamy otrzymane wyrażenie do związku drugiego.

Przykład 1. Mamy

$$x = t^2 + t + 1 \qquad y = 2t - 3$$

aby wyrugować t, wyznaczamy t z drugiego równania $t = \dfrac{y+3}{2}$ i wstawiamy w pierwsze, wypadnie wtedy równanie drugiego stopnia

$$y^2 - 4x + 8y + 19 = 0$$

Przykład 2. Dana jest krzywa przez funkcje parametru

$$\begin{cases} x = a\, t^2 + b\, t + c \\ y = a_1 t^2 + b_1 t + c_1 \end{cases}$$

w tym wypadku, w celu wyrugowania parametru t, nie należy wyznaczać go bezpośrednio z jednego ze związków, gdyż to wprowadziłoby wyrażenia pierwiastkowe, niedogodne w rachunkach; aby więc uzyskać związek, zawierający t tylko w potędze pierwszej, mnożymy wyrażenia na x i y przez a_1 lub a i odejmujemy, wypadnie

$$a_1 x - a y = (a_1 b - a b_1) t + (a_1 c - a c_1)$$

wyznaczając zaś stąd t i wstawiając do jednego z dwóch związków danych, otrzymamy w prosty sposób równanie danej krzywej, które, jak widzimy, będzie stopnia drugiego.

Przykład 3. Mamy

$$x = a \cos t \qquad y = a \sin t$$

w przypadku funkcyj trygonometrycznych, rugujemy t, korzystając ze związku $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$, otrzymamy:

$$x^2 + y^2 = a^2$$

to znaczy równanie koła o promieniu a; parametr t jest oczywiście kątem, który tworzy promień wodzący danego punktu koła z osią Ox.

Jak widzimy z powyższych przykładów, każda para liczb (x, y) wyznaczona ze związków (7) spełnia rezultat rugowania (8), odwrotnie jednak, para liczb (x, y), spełniających związek (8), może nie wynikać ze wzorów (7) dla żadnej wartości na t, oznaczałoby to geometrycznie, iż pewne punkty krzywej, odpowiadającej równaniu (8), mogą nie należeć do łuku określonego przez związki (7). Weźmy np. zbiór punktów określonych przez równania parametryczne

$$(9) \qquad \begin{cases} x = a \sin t \\ y = b \sin t \end{cases}$$

rugujemy tutaj odrazu t, dzieląc y przez x i otrzymamy związek

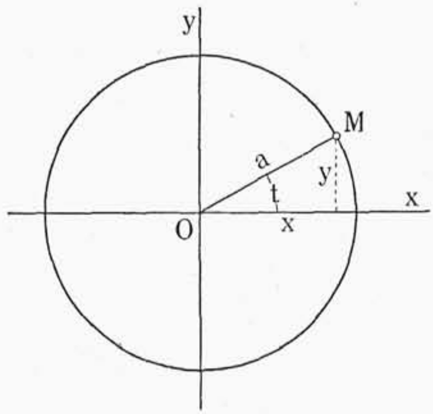
$$y = \frac{b}{a} x$$

a więc punkty danego zbioru leżą na linji prostej przechodzącej przez początek układu. Niewszystkie jednak punkty tej prostej wynikają z danych związków (9), istotnie, jeśli t przybiera wszelkie możliwe wartości, to $\sin t$ waha się od -1 do $+1$, a zatem współrzędna x waha się od $-a$ do $+a$, zaś współrzędna y od $-b$ do $+b$. Wobec tego, związkom (9) odpowiadają tylko punkty *odcinka prostej* łączącego punkty $(-a, -b)$ i $(+a, +b)$; widzimy nadto, iż odpowiedniość ta jest *wielokrotna,* zmieniając np. w równaniach (9) parametr t od 0 do 2π, osiągniemy każdy punkt wewnętrzny powyższego odcinka dwukrotnie.

Dla badania własności krzywych użycie równań parametrycznych jest bardziej istotne i wygodne, lub nawet konieczne w tych wypadkach, gdy rugowanie parametru t jest efektywnie niewykonalne. Dogodność użycia równań parametrycznych jest widoczna np. przy badaniu krzywych zamkniętych; w rozważanym przykładzie 3-im punkt o współrzędnych

$$x = a \cos t$$
$$y = a \sin t$$

opisze pełny okrąg koła o promieniu a (rys. 40), gdy t zmieniać



Rys. 40.

będziemy od 0 do 2π; bezpośrednie zaś wyrażenie rzędnej jako funkcji odciętej o postaci

$$y = f(x)$$

dotyczyć może tylko punktów jednego półkola.

Określenie krzywej przez równania parametryczne jest też bardzo istotne z punktu widzenia kinematycznego. A mianowicie, ruch punktu na płaszczyźnie jest w zupełności określony, jeśli współrzędne (x, y) poruszającego się punktu są określonemi funkcjami czasu t:

$$x = f(t)$$
$$y = \varphi(t)$$

Zależności te określają zarazem postać toru punktu; równanie tego toru w postaci związku bezpośredniego

$$F(x, y) = 0$$

można otrzymać, rugując czas t z dwóch związków powyższych.

Nadmienimy jeszcze, iż krzywą można również określić analitycznie, podając współrzędne biegunowe jej punktów jako funkcje parametru t

$$r = f(t); \quad \theta = \varphi(t).$$

16. O przecięciu się krzywych.

Niech będą na płaszczyźnie dwie krzywe o równaniach:

$$F(x, y) = 0; \quad \Phi(x, y) = 0 \tag{19}$$

Poszukiwanie punktów płaszczyzny (x, y), któreby leżały jednocześnie na jednej i drugiej krzywej, a zatem były ich punktami przecięcia, oznaczać będzie analitycznie poszukiwanie par liczb (x, y), któreby spełniały jednocześnie obydwa związki (19). Zagadnienie takie znane jest w Algebrze pod nazwą rozwiązywania układu dwóch równań z dwiema niewiadomemi.

Badaniu punktów przecięcia dwóch krzywych odpowiada zatem badanie układu dwóch równań z dwiema niewiadomemi.

Szczegółowem badaniem przypadków konkretnych zajmiemy się w następnych rozdziałach.

Przykład 1. *Znaleść punkty przecięcia dwóch krzywych, przedstawionych przez równania*

$$x + y = a; \quad xy = 1.$$

Pierwsze równanie przedstawia linję prostą, przecinającą osi współrzędnych w punktach $(a, 0)$ i $(0, a)$, zaś drugie równanie — krzywą, poznaną w art. 11. Współrzędne punktów przecięcia M_1 i M_2 (rys. 41), będą rozwiązaniami układu równań

$$x + y = a;$$
$$xy = 1;$$

rozwiązania te są pierwiastkami równania

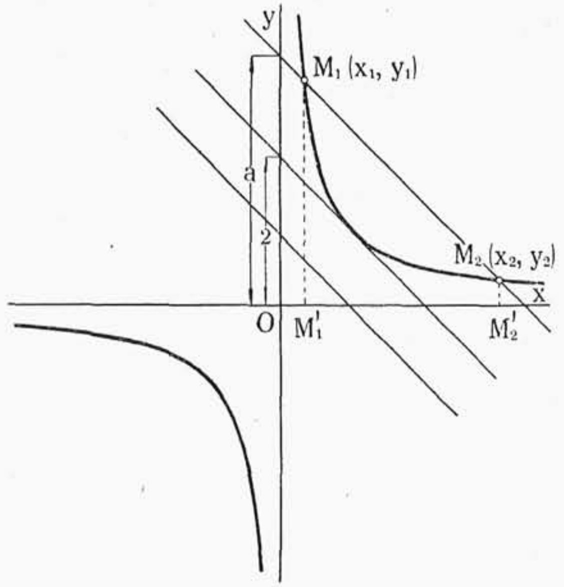
$$z^2 - az + 1 = 0;$$

otrzymamy mianowicie

$$x_1 = z_1 = \frac{a - \sqrt{a^2 - 4}}{2}; \quad y_1 = z_2 = \frac{a + \sqrt{a^2 - 4}}{2};$$

$$x_2 = z_2 = \frac{a + \sqrt{a^2 - 4}}{2}; \quad y_2 = z_1 = \frac{a - \sqrt{a^2 - 4}}{2};$$

dwa punkty przecięcia istnieją wtedy, gdy $|a| > 2$; dla $a = \pm 2$ istnieje jeden tylko punkt, zaś dla $|a| < 2$ niema punktów przecięcia dwóch krzywych.

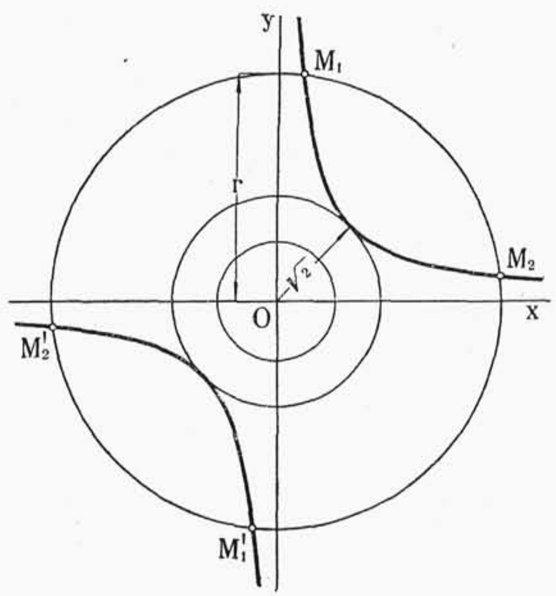


Rys. 41.

Przykład 2. *Znaleść punkty przecięcia się koła $x^2+y^2=r^2$ z krzywą* $xy=1$ (rys. 42).

Zagadnienie sprowadza się do rozwiązania układu równań:

$$x^2+y^2=r^2$$
$$xy=1;$$



Rys. 42

otrzymamy stąd

$$x^2 = \frac{r^2 - \sqrt{r^4 - 4}}{2}; \qquad y^2 = \frac{r^2 + \sqrt{r^4 - 4}}{2};$$

lub

$$x^2 = \frac{r^2 + \sqrt{r^4 - 4}}{2}; \qquad y^2 = \frac{r^2 - \sqrt{r^4 - 4}}{2}.$$

Pierwsza para liczb da nam punkty M_1 i M_1', zaś druga para — punkty M_2 i M_2'; istnieją więc cztery punkty przecięcia, gdy $r > \sqrt{2}$, zaś niema punktów przecięcia, gdy $r < \sqrt{2}$; w przypadku szczególnym, gdy $r = \sqrt{2}$, dane krzywe mają tylko dwa punkty wspólne, powstałe ze zjednoczenia punktów M_1, M_2 i M_1', M_2'.

W Geometrji Analitycznej, oprócz punktów o współrzędnych rzeczywistych, wprowadzamy niekiedy pojęcie punktów o współrzędnych zespolonych, nazywając je *punktami urojonemi* — są to pojęcia tylko analityczne (para liczb zespolonych). — Punkty urojone spotykamy w zagadnieniu przecięcia się krzywych; np. możemy powiedzieć, iż prosta o równaniu $x + y = 1$ i krzywa $xy = 1$, podana w przykładzie 1-ym, przecinają się w dwóch punktach urojonych, których odcięte są pierwiastkami zespolonemi równania

$$x^2 - x + 1 = 0.$$

Podobnie wprowadzamy pojęcie *prostej urojonej*, jako pojęcie analityczne, określone przez równanie pierwszego stopnia ze współczynnikami zespolonemi; np. powiemy, iż równanie

$$x^2 + y^2 = 0 \quad \text{lub} \quad (x + yi)(x - yi) = 0$$

przedstawia dwie proste urojone o równaniach

$$x + yi = 0; \quad x - yi = 0; \quad \text{gdzie } i^2 = -1.$$

Wprowadzenie elementów urojonych oddaje nieraz duże usługi w rozważaniach analitycznych geometrji.

17. O układzie krzywych.

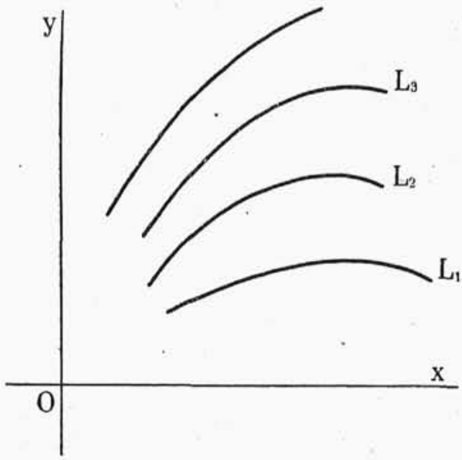
Rozważmy równanie krzywej, w którem występuje pewna liczba stałych współczynników, więc np. równanie

$$a x^3 - b x y + y^3 = 0$$

ze stałemi współczynnikami a i b.

Podstawiając na miejsce współczynników ogólnych szereg różnych wartości liczbowych w równanie dane, będziemy otrzymywali różne linje krzywe

$$L_1 \, L_2 \, \ldots \, L_n$$



Rys. 43.

Jeśli na miejsce współczynników w równaniu z dwiema zmiennemi podstawiać będziemy wszelkie możliwe wartości w pewnym przedziale, lub, jak to się mówi, jeśli wartość współczynników będziemy zmieniali *w sposób ciągły*, to otrzymamy nieskończony zbiór krzywych na płaszczyźnie zwany układem lub rodziną krzywych. Krzywe danego układu łączy wspólna cecha, a mianowicie pochodzenie ich równań z tego samego źródła; poszczególna krzywa układu określona jest przez wartości liczbowe współczynników. Wpółczynniki stałe w punktach danej krzywej, których zmiana daje układ krzywych, nazywamy parametrami układu.

Jeśli układ krzywych otrzymany jest przez zmianę jednego parametru, to nazywamy go *jednoparametrowym*; równania krzywych układu takiego można napisać w postaci równania, którego lewa strona jest funkcją trzech wielkości x, y i C, to znaczy

$$f(x, y, C) = 0$$

gdzie C jest parametrem układu.

Układ, otrzymany przez zmianę wartości dwóch parametrów stałych C_1 i C_2 w równaniu

$$f(x, y, C_1, C_2) = 0$$

nazywamy dwuparametrowym i t. d.

Weźmy np. związek

$$x^2+y^2-r^2=0$$

zmieniając parametr r, otrzymamy jednoparametrowy układ kół współśrodkowych.

Związkowi $y=mx+n$ z dwoma parametrami m i n, odpowiada układ wszelkich prostych na płaszczyźnie (z wyjątkiem równoległych do osi Oy).

Układ krzywych z jednym parametrem, przedstawiony przez związek

$$f(x, y, C)=0$$

posiada tę zasadniczą własność, że *przez dowolny punkt płaszczyzny* (x_0, y_0) *przechodzi wogóle określona krzywa danego układu.* Istotnie, poszczególną krzywą układu określa wartość liczbowa parametru C, aby zaś krzywa, wybrana z danego układu, przechodziła przez punkt (x_0, y_0), trzeba tak dobrać C, aby równanie krzywej było spełnione w punkcie (x_0, y_0), to znaczy, aby było

$$f(x_0, y_0, C)=0$$

warunek ten tworzy pewne równanie z jedną niewiadomą, z którego wogóle wyznaczymy wartość na C, a zatem i krzywą szukaną układu. Należy zastrzec, iż może istnieć kilka rozwiązań na C lub też, w pewnych wypadkach, może nie być żadnego, ściślej kwestję tę można rozpatrzeć tylko w konkretnych przypadkach. Powyższą własność wyrażamy też poglądowo w ten sposób: *„układ krzywych z jednym parametrem wypełnia płaszczyznę"*.

Przykład. Wyznaczyć krzywą układu, przedstawionego przez równanie $x^2+Cy^2-1=0$, która przechodzi przez punkt (3,2). Mamy warunek

$$3^2+C2^2-1=0,$$

stąd

$$C=-\frac{1}{2},$$

szukana krzywa będzie więc miała równanie

$$x^2-\frac{1}{2}y^2-1=0.$$

W układzie krzywych z dwoma parametrami można poszukiwać krzywych, spełniających wogóle dwa dane warunki i t. d.

Ćwiczenia.

1. Naszkicować metodami elementarnemi krzywe, odpowiadające funkcjom:

$$y = x^3; \quad y = x^2 - 1; \quad y = \frac{1}{x^2+1}; \quad y^2 = x.$$

2. Znaleźć równanie we współrzędnych biegunowych krzywej $y = x^2$, obierając punkt $(0, 0)$ jako biegun, zaś oś Ox za oś biegunową.

3. Dane jest równanie koła $x^2 + y^2 = a^2$. Znaleść równanie tego koła we współrzędnych biegunowych, obierając punkt $\left(\frac{a}{2}, 0\right)$ jako biegun, zaś oś odciętych jako oś biegunową.

4. Dane są związki

$$x = \frac{t-1}{t+1}; \quad y = \frac{2t}{t+3};$$

znaleść równanie krzywej.

5. Określić stopień krzywych algebraicznych, określonych przez związki

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1;$$
$$x^{2/3} + y^{2/3} = 1.$$

ROZDZIAŁ III.

ZAGADNIENIA DOTYCZĄCE LINJI PROSTEJ.

18. Równanie linji prostej.

Położenie dowolnej prostej D na płaszczyźnie względem układu osi Oxy jest określone w zupełności, jeśli dany jest kąt α, który tworzy jeden z dwóch zwrotów prostej z osią Ox i jeśli dane są współrzędne (x_0, y_0) jednego punktu danej prostej M_0.

Jeden zawsze z dwóch zwrotów dowolnej prostej na płaszczyźnie tworzy z osią Ox kąt zawarty w przedziale od 0 do π, a drugi zwrot — kąt w przedziale od π do 2π. Nadal, dla uproszczenia, przez kąt α, który tworzy prosta z osią Ox, będziemy rozumieli *kąt zawarty w przedziale od* 0 *do* π.

Aby otrzymać związek między rzędną y i odciętą x dowolnego punktu M danej prostej, zauważmy, iż miary rzutów na osi współrzędnych wektora M_0M, łączącego punkt stały $M_0(x_0, y_0)$ z punktem dowolnym prostej $M(x, y)$ wynoszą (rys. 44)

$$x - x_0 \quad \text{i} \quad y - y_0$$