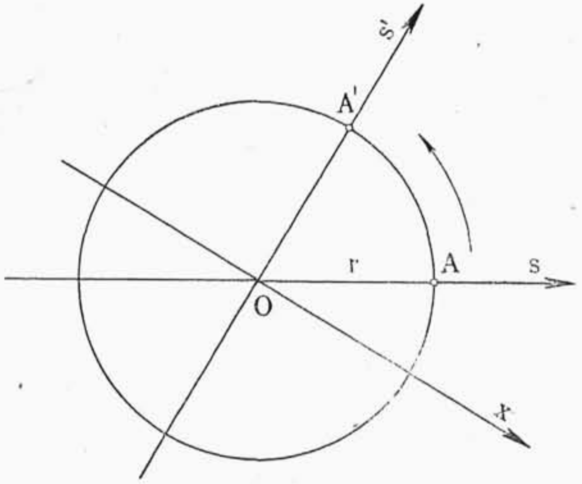
4. Kąt między osiami.

Niech będą na płaszczyźnie dwie dowolne osi s i s'. Analogicznie do pojęcia wektora, w *pojęciu kąta, który tworzy oś s'*



Rys. 7.

z osią s będziemy uważali oś s za początkową, zaś oś s' za końcową. Zakreślmy okrąg koła dowolnym promieniem r ze środkiem w punkcie przecięcia się osi O (rys. 7). Niech OA oznacza promień tego koła zwrócony zgodnie z osią początkową s, zaś OA' promień zwrócony zgodnie z osią końcową s'. Nazwiemy kątem, który tworzy oś s' z osią s, liczbę oderwaną równą stosunkowi długości łuku, łączącego końce promieni A i A', do promienia r [1]):

$$\frac{AA'}{r}$$

[1]) Powyższa miara kąta, zwana teoretyczną lub bezwzględną, odpowiada zwykłej mierze stopniowej w sposób następujący:

360^0	odpowiada	2π
180^0	„	π
90^0	„	$\frac{\pi}{2}$
45^0	„	$\frac{\pi}{4}$
30^0	„	$\frac{\pi}{6}$
n^0	„	$\frac{\pi n}{180}$

miara bezwzględna równa jedności odpowiada kątowi $\frac{180^0}{\pi}$ (w przybliżeniu $57^0\ 17'\ 44'', 8$), kąt taki nazywamy radianem.

opatrzoną znakiem dodatnim lub ujemnym, zależnie od tego, czy łuk AA', mający początek A i koniec A', posiada zwrot zgodny z pewnym umówionym dodatnim obrotem na kole, czy też przeciwny; kąt ten oznaczymy symbolem $(s\,s')$ ze względu na kolejność osi. Jako dodatni kierunek obrotu obierzmy np. kierunek przeciwny obrotowi wskazówki zegara.

Ponieważ obrót pełny osi, to znaczy o kąt 2π, w dowolnym kierunku nie zmienia jej położenia, a więc, według definicji poprzedniej, kątowi między dwiema osiami można przypisać nieskończenie wiele wartości, różniących się o dowolną wielokrotność 2π. Zwykle dla kąta między osiami przyjmujemy wartość zawartą między 0 i 2π, jeśli wartość tę oznaczymy przez α, to wszystkie inne wartości, które możemy nadać pojęciu kąta $(s\,s')$ między osiami, będą zawarte we wzorze

$$(s\,s') = \alpha \pm 2k\pi$$

gdzie k oznacza dowolną liczbę całkowitą i dodatnią.

Ta sama wartość kąta $(s\,s')$ przysługuje oczywiście wszelkim osiom równoległym i zgodnie zwróconym z danemi s i s', a więc zależy tylko od ich kierunku na płaszczyźnie; należy naturalnie zachować ten sam kierunek obrotu jako dodatni w całej płaszczyźnie.

Obierzmy na płaszczyźnie pewną oś Ox za „początkową" i przyjmijmy określony kierunek obrotu za dodatni; wtedy kierunek każdej osi na płaszczyźnie Os będzie określony jednoznacznie przez kąt $(x\,s)$ w przedziale od 0 do 2π, który ta oś tworzy z osią początkową Ox; kąt ów możemy dla danej osi powiększyć lub zmniejszyć o dowolną wielokrotność 2π; w szczególności zaznaczymy, iż kąt ujemny $-\alpha$ i kąt $2\pi - \alpha$ odpowiadają temu samemu kierunkowi osi. Fakt, iż każdej wartości kąta w przedziale od 0 do 2π odpowiada tylko jeden kierunek osi na płaszczyźnie, zawdzięczać należy przyjętej umowie dla dodatniego kierunku obrotu.

Rozważmy kąty $(x\,s)$ i $(x\,s')$, które osi dowolne Os i Os' tworzą z osią Ox; analogicznie do twierdzenia o mierze wektora na osi, będziemy mieli następujące twierdzenie:

wartość kąta, który tworzy oś Os' z osią Os, otrzymamy, odejmując od kąta, który tworzy ramię końcowe Os' z osią Ox, kąt, który tworzy ramię początkowe Os z osią Ox:

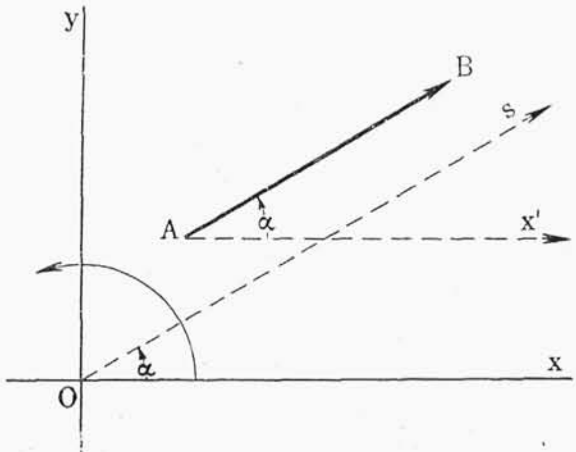
$$(s\,s') = (x\,s') - (x\,s) \tag{4}$$

Twierdzenie powyższe słuszne jest i dla dowolnych osi na płaszczyźnie, nieprzecinających się w jednym punkcie. Do każdego ze składników związku (4) można dodać lub odjąć dowolną wielokrotność kąta 2π.

Z twierdzenia (4) wynika, że *gdy dwie osi na płaszczyźnie mają przeciwne zwroty, to kąty ich z dowolną osią Ox różnią się od siebie o π t. j. 180^0.*

5. Wektor na płaszczyźnie i jego rzuty.

Rozważmy na płaszczyźnie wektor, którego początek znajduje się w punkcie A, a koniec w punkcie B (rys. 8).



Rys. 8.

Mając dany układ prostokątny osi współrzędnych Oxy, *obierzmy jako dodatni ten kierunek obrotu, który sprowadza oś Ox do osi Oy po obrocie o kąt prosty* $\frac{\pi}{2}$; mamy więc wtedy $(xy) = \frac{\pi}{2}$. Nazwiemy kątem, który tworzy dany wektor AB z osią Ox, kąt α, który tworzy z daną osią oś Os zwrócona zgodnie z danym wektorem na płaszczyźnie. Kąt ten wspólny jest wszystkim wektorom równoległym i zgodnie zwróconym i charakteryzuje jednoznacznie ich kierunek, albowiem każdej wartości kąta α między 0 i 2π odpowiada tylko jeden kierunek osi Os na płaszczyźnie.

Kąt, który tworzy dany wektor AB z osią Ox, równa się też kątowi, który tworzy ten wektor z osią Ax' równoległą i zgodnie zwróconą z osią Ox.

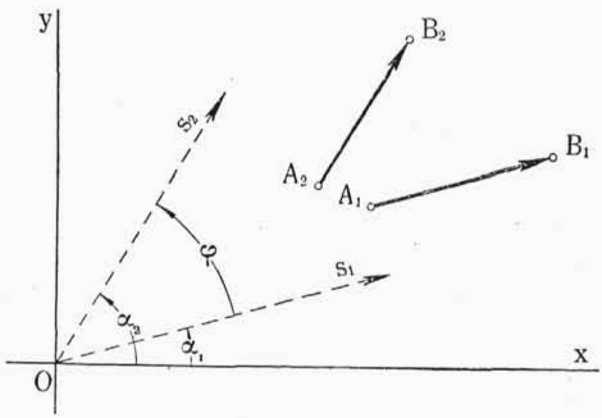
Ze wzoru (4) wynika natychmiast, że, jeśli dowolny wektor lub oś tworzy z osią Ox kąt $(xs) = \alpha$, to z osią Oy będzie tworzył kąt $(ys) = \beta$ dany pod względem znaku i wartości przez wzór

$$\beta = \alpha - (xy) = \alpha - \frac{\pi}{2} \tag{5}$$

oczywiście, gdy przyjmiemy dla kąta β ten sam zwrot dodatni, co i dla kąta α.

Niech będą dwa wektory $(A_1 B_1)$ i $(A_2 B_2)$, tworzące z osią Ox kąty α_1 i α_2 (rys. 9), oznaczmy przez s_1 i s_2 osi równoległe odpowiednio do tych wektorów i zgodnie z niemi zwrócone. Nazwiemy kątem, który tworzy wektor $A_2 B_2$ z wektorem $A_1 B_1$, kąt $\varphi = (s_1 s_2)$; według wzoru (4), będziemy mieli dla tego kąta wartość

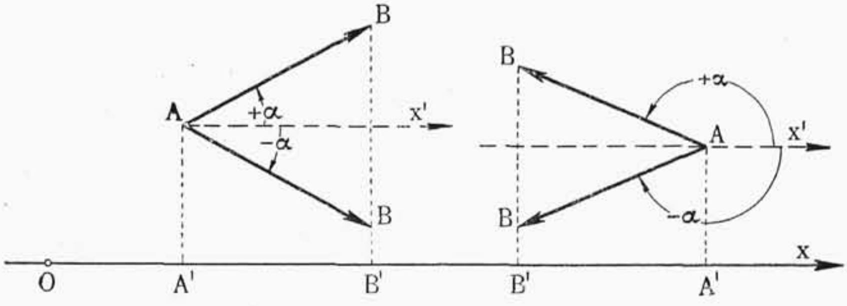
$$\varphi = \alpha_2 - \alpha_1 \tag{6}$$



Rys. 9.

Rzutem wektora na oś, np. Ox, nazywamy wektor, którego początkiem jest rzut A' początku A danego wektora, zaś końcem rzut B' końca B tego wektora (rys. 10). Podobnie, jak wyżej, miara rzutu $\overline{A' B'}$ będzie dodatnia lub ujemna, zależnie od zwrotu rzutu względem zwrotu osi Ox. Z rysunku spostrzegamy, iż wektory, które mają tę samą długość i tworzą kąty z osią Ox, różniące się tylko znakiem (α i $-\alpha$), mają miary rzutów zgodne co do kierunku i wartości; miara rzutu danego wektora zależy więc tylko od bezwzględnej wartości kąta, który tworzy wektor z daną osią.

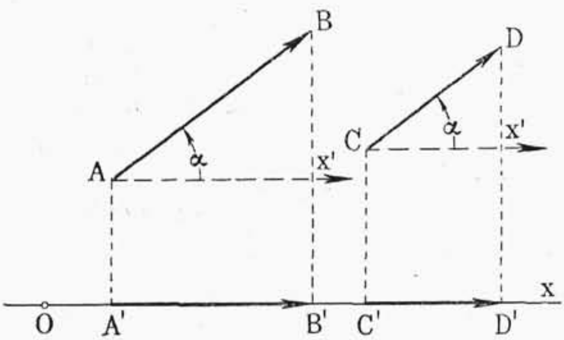
Miara rzutu wektora na oś będzie dodatnia, jeśli ten wektor tworzy z osią kąt ostry dodatni lub ujemny; miara rzutu wektora będzie ujemna, jeśli wektor tworzy z osią kąt rozwarty dodatni lub ujemny (rys. 10).



Rys. 10.

TWIERDZENIE. Stosunek miar rzutów dwóch wektorów równoległych i zgodnie zwróconych, równy jest stosunkowi wartości bezwzględnych samych wektorów.

Istotnie, jeśli dwa wektory AB i CD są do siebie równoległe i zgodnie zwrócone, to miary ich rzutów $A'B'$ i $C''D'$ mają



Rys. 11.

zgodne znaki, nadto stosunek długości rzutów będzie równy stosunkowi długości samych wektorów, według twierdzenia z geometrji elementarnej. Niech więc $|AB|$ i $|CD|$ oznaczają dodatnie wartości bezwzględne samych wektorów, zwane też ich n a t ę ż e n i a m i, wtedy, ze względu na zgodność znaków miar rzutów, możemy napisać proporcję

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{C'D'}} = \frac{|AB|}{|CD|} \tag{7}$$

WNIOSEK 1. Gdy dwa wektory są równe, równoległe i zgodnie zwrócone, to rzuty ich mają miary jednakowe.

WNIOSEK 2. Z proporcji (7) wynika

$$\frac{\overline{A'B'}}{|AB|} = \frac{\overline{C'D'}}{|CD|}$$

a zatem stosunek miary rzutu wektora do wartości bezwzględnej samego wektora jest wartością wspólną wszystkim wektorom równoległym, to znaczy zależną tylko od kąta, który wektor tworzy z osią rzutów; stosunek ten, bezwzględnie mniejszy od jedności, nazywamy *cosinusem* kąta, który tworzy wektor z osią. Oznaczając ten kąt przez α, napiszemy

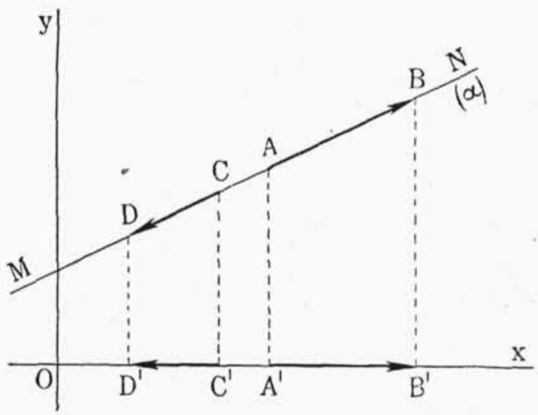
$$\frac{\overline{A'B'}}{|AB|} = \text{Cos}\,\alpha \tag{8}$$

stąd

$$\overline{A'B'} = |AB|\,\text{Cos}\,\alpha \tag{8'}$$

miara rzutu wektora na oś równa się wartości bezwzględnej samego wektora pomnożonej przez cosinus kąta, który tworzy ten wektor z osią.

Zwracamy uwagę, że, z natury rzeczy, znak miary rzutu wektora na oś jest zgodny ze znakiem cosinusa kąta, który tworzy ten wektor z osią.



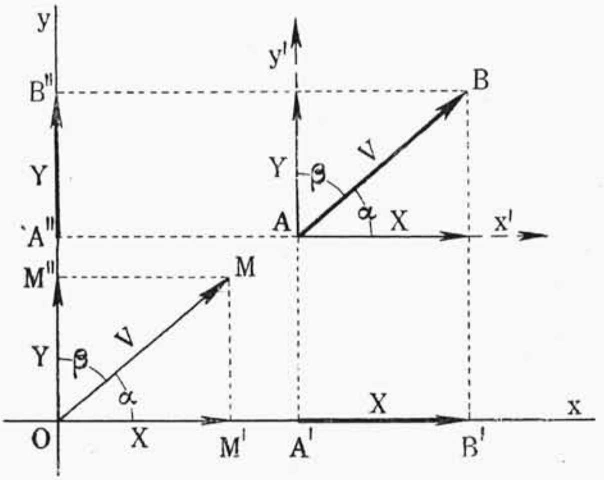
Rys. 12.

Powyższe twierdzenie o rzucie wektora można też wyrazić dla miar wektorów, leżących na pewnej osi MN na płaszczyźnie, tworzącej z osią Ox kąt α. A mianowicie, jeśli $\overline{AB}$ oznacza miarę samego wektora na osi MN, zaś $\overline{A'B'}$ miarę jego rzutu na oś Ox, to stosunek tych miar będzie miał tę samą wartość:

$$(9) \qquad \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \text{Cos}\,\alpha$$

zarówno dla wektorów zgodnie zwróconych z osią MN, jak i dla wektorów zwróconych przeciwnie (rys. 12), albowiem wektory zwrócone przeciwnie na osi MN mają rzuty zwrócone przeciwnie. Własność, iż kierunek i miara rzutu wektora zależą tylko od bezwzględnej wartości kąta, który dany wektor tworzy z osią Ox, według wzoru (8), będziemy mogli wyrazić trygonometrycznie w ten sposób:

$$\text{Cos}\,(-\alpha) = \text{Cos}\,\alpha$$



Rys. 13.

Rozważmy miary rzutów $\overline{A'B'}$ i $\overline{A''B''}$ danego wektora na oś Ox i na oś Oy (rys. 13). Dla skrócenia oznaczymy wartość bezwzględną danego wektora przez V, a miary jego rzutów na osi współrzędnych przez X i Y

$$\overline{A'B'} = X; \ \overline{A''B''} = Y$$

Przypominamy, iż V będzie liczbą dodatnią, zaś X i Y mogą być dodatnie lub ujemne.

Jeśli α i β oznaczają kąty, które tworzy dany wektor z osią Ox i osią Oy, to, według (8), mamy

$$(10) \qquad X = V\ \text{Cos}\,\alpha; \ Y = V\ \text{Cos}\,\beta;$$

Cosinusy kątów α i β, które dany wektor tworzy z osiami współrzędnych, nazywamy jego *cosinusami kierunkowemi.*

Ponieważ, według (5), mamy

$$\beta = \alpha - \frac{\pi}{2}$$

a więc, zgodnie z definicją sinusa,

$$\cos\beta = \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha$$

stąd mamy ważne wzory

$$(10') \qquad \begin{cases} X = V.\cos\alpha \\ Y = V.\sin\alpha \end{cases}$$

Jeśli jedna z dwóch miar rzutów (X, Y) równa się zeru, wtedy wektor jest do jednej z osi współrzędnych prostopadły, a do drugiej równoległy; jeden z jego cosinusów kierunkowych $\cos\alpha$, $\cos\beta$ równa się wtedy zeru, a drugi — jedności ze znakiem dodatnim lub ujemnym.

Miary rzutów wektora AB na osi Ox i Oy są równe miarom rzutów tego wektora na osi Ax' i Ay' równoległe i zgodnie zwrócone z osiami Ox i Oy.

Jeżeli z początku układu O wyprowadzimy wektor OM równoległy, zgodnie zwrócony i równy wektorowi AB, to miary rzutów wektora OM na osi współrzędnych są te same co i dla wektora AB:

$$\overline{OM'} = X; \quad \overline{OM''} = Y$$

Wektor OM jest wspólny wszystkim wektorom równym, równoległym i zgodnie zwróconym i wobec tego charakteryzuje ich wartość i kierunek. Ponieważ zaś wektor OM określony jest w zupełności przez parę liczb (X, Y), mamy więc następującą własność.

TWIERDZENIE. Miary rzutów wektora na dwie osi współrzędnych określają wartość i kierunek wektora na płaszczyźnie.

Aby tę własność wyrazić analitycznie, zauważmy, iż wektor AB jest przekątną w prostokącie, którego boki mają długości równe wartościom bezwzględnym rzutów X i Y (rys. 13), a więc znajomość miar rzutów X i Y pozwala obliczyć wartość bezwzględną wektora według wzoru

$$(11) \qquad V = \sqrt{X^2 + Y^2}$$

Następnie, w założeniu, iż miary rzutów X i Y nie znikają jednocześnie, określimy cosinusy kierunkowe wektora na podstawie związków (10)

$$(12) \qquad \begin{cases} \operatorname{Cos} \alpha = \dfrac{X}{V} = \dfrac{X}{\sqrt{X^2+Y^2}} \\[2ex] \operatorname{Cos} \beta = \operatorname{Sin} \alpha = \dfrac{Y}{V} = \dfrac{Y}{\sqrt{X^2+Y^2}} \end{cases}$$

znajomość $\cos \alpha$ i $\sin \alpha$ określa więc jednoznacznie w przedziale od 0 do 2π kąt α, który tworzy wektor dany z osią Ox (z zachowaniem umowy dla dodatniego zwrotu kąta).

Nadmienimy, iż znajomość jednego cosinusa kierunkowego nie określałaby jednoznacznie kierunku wektora, gdyż tej samej wartości cosinusa odpowiadają w przedziale od 0 do 2π dwa kąty, a więc dwa symetryczne względem osi początkowej kierunki wektora.

Ze wzorów (12) wynika, w przypadku, gdy $X \neq 0$, iż tangens kąta, który tworzy wektor z osią Ox, równa się stosunkowi miary jego rzutu na oś rzędnych do miary rzutu na oś odciętych:

$$(12') \qquad \operatorname{tg} \alpha = \frac{Y}{X}$$

P r z y k ł a d. Dane są miary rzutów wektora

$$X = -2; \quad Y = 3.$$

Mamy stąd wartość bezwzględną wektora

$$V = \sqrt{X^2+Y^2} = \sqrt{2^2+3^2} = \sqrt{13}$$

i cosinusy kierunkowe

$$Cos\, \alpha = \frac{X}{V} = -\frac{2}{\sqrt{13}}; \quad Cos\, \beta = \frac{Y}{V} = \frac{3}{\sqrt{13}};$$

lub

$$Cos\, \alpha = -\frac{2}{\sqrt{13}}; \quad Sin\, \alpha = \frac{3}{\sqrt{13}};$$

kąt α jest więc określony i zawiera się między $\frac{\pi}{2}$ i π.

Niech będą na płaszczyźnie dwa wektory o wartościach bezwzględnych V_1 i V_2; oznaczmy przez X_1, Y_1 miary rzutów na osi współrzędnych jednego wektora, a przez X_2, Y_2 miary rzutów na osi współrzędnych drugiego wektora. Jeśli dwa wektory są do siebie równoległe i zgodnie zwrócone, to wiadomo, iż wtedy stosunek miar ich rzutów na każdą oś równa się stosunkowi wartości bezwzględnych samych wektorów, a więc będzie wtedy

$$\frac{X_1}{X_2} = \frac{V_1}{V_2}; \quad \frac{Y_1}{Y_2} = \frac{V_1}{V_2};$$

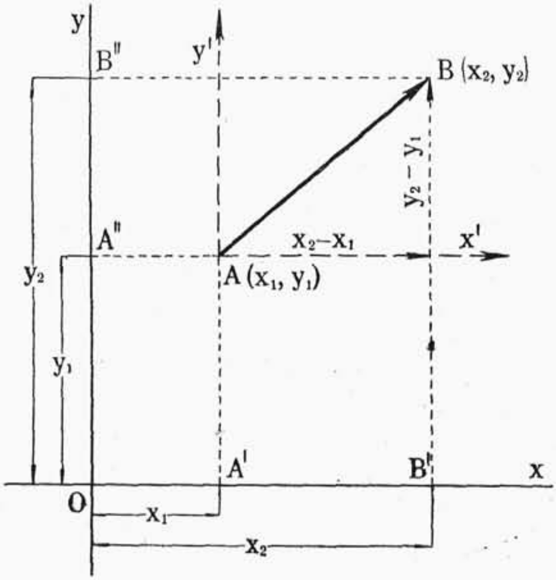
stąd

$$\frac{X_1}{X_2} = \frac{Y_1}{Y_2} \tag{13}$$

Gdy dwa wektory są do siebie równoległe, lecz przeciwnie zwrócone, wtedy miary ich rzutów mają znaki przeciwne; proporcja (13) będzie wtedy również spełniona. A więc wogóle, *jeśli dwa wektory są do siebie równoległe, to stosunki miar rzutów tych wektorów na osi współrzędnych są sobie równe.*

Łatwo zauważyć, iż *odwrotnie, spełnienie proporcji (13) pozwoli sądzić o równoległości dwóch danych wektorów; zwroty zaś ich będą zgodne lub przeciwne zależnie od tego, czy znaki miar rzutów są jednakowe, czy też odmienne.*

Zmianę położenia wektora, w której zachowana jest jego wartość i kierunek, nazwiemy p r z e s u n i ę c i e m r ó w n o l e g ł e m wektora. Oczywiście przesunięcie równoległe wektora nie zmienia miar jego rzutów na osi współrzędnych.



Rys. 14.

Rzuty wektora nie ustalają w zupełności jego położenia na płaszczyźnie, albowiem te same miary rzutów odpowiadają wektorom przesuniętym równolegle w dowolny sposób. W celu zupełnego ustalenia położenia wektora należy jeszcze, oprócz rzutów na osi, podać współrzędne jego początku.

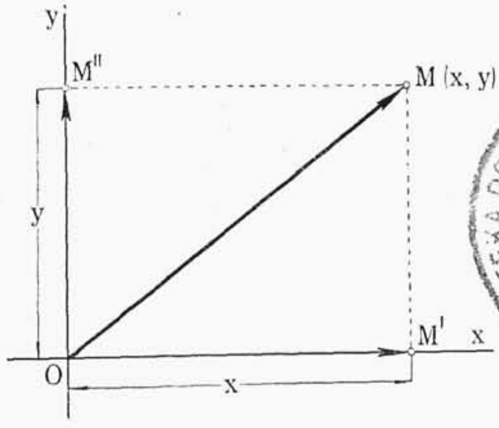
Wektor jest również określony w zupełności, jeśli dane są współrzędne (x_1, y_1) jego początku A i współrzędne (x_2, y_2) jego końca B. Mamy wtedy następujące twierdzenie podstawowe.

TWIERDZENIE. Aby otrzymać miary rzutów wektora na osi współrzędnych, należy od współrzędnej końca wektora odjąć współrzędną jego początku.

Słuszność tego twierdzenia wynika natychmiast z wniosku z twierdzenia *Chasles'a*, wyrażonego przez wzór (2). Dla miar rzutów $\overline{A'B'}$ i $\overline{A''B''}$ (rys. 14) danego wektora na oś Ox i Oy otrzymamy więc wzory:

$$\overline{A'B'} = x_2 - x_1; \quad \overline{A''B''} = y_2 - y_1; \tag{14}$$

przypominamy, iż wzory te słuszne są w każdym wypadku i że należy je stosować *z uwzględnieniem znaku występujących wielkości.*



Rys. 15.

Jeżeli początek wektora znajduje się w początku współrzędnych, wtedy miary jego rzutów na osi współrzędnych równają się współrzędnym jego końca (rys. 15).

Współrzędne prostokątne (x, y) dowolnego punktu płaszczyzny są więc miarami rzutów na osi współrzędnych wektora, łączącego początek układu z danym punktem.

WZÓR NA ODLEGŁOŚĆ DWÓCH PUNKTÓW. Odcinek, łączący punkty A i B o współrzędnych (x_1, y_1) i (x_2, y_2) jest przeciwprostokątną w trójkącie, którego przyprostokątne mają długości równe bezwzględnym wartościom rzutów (14) odcinka AB; otrzymamy więc ze wzorów (14) zasadniczy w Geometrji Analitycznej wzór na odległość dwóch punktów $A(x_1, y_1)$ i $B(x_2, y_2)$, mających dane współrzędne prostokątne:

$$|AB| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \tag{15}$$

porządek odejmowania współrzędnych jest obojętny w tym wzorze, gdyż różnice występują w nim w drugich potęgach.

Przykład. Dane są punkty $A(1, -3)$ i $B(-2, 5)$, odległość tych punktów będzie więc taka:

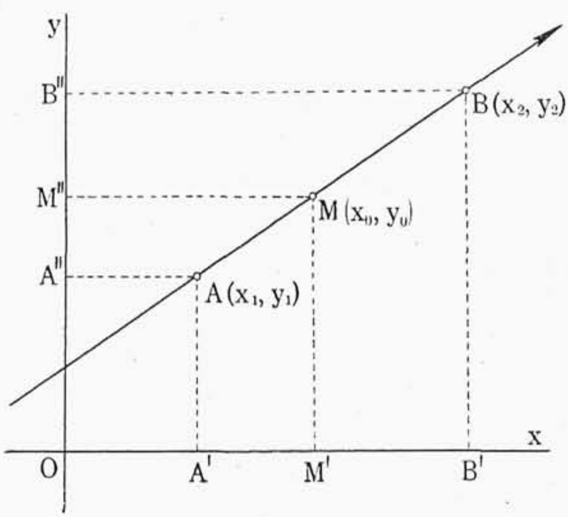
$$|AB| = \sqrt{[1-(-2)]^2 + (-3-5)^2} = \sqrt{73}.$$

Nadmienimy jeszcze, iż odległość dowolnego punktu płaszczyzny $M(x, y)$ od początku układu O będzie miała wartość

$$|OM| = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{16}$$

jako przeciwprostokątna trójkąta, którego przyprostokątne są równe bezwzględnym wartościom współrzędnych x i y.

ZAGADNIENIE PODZIAŁU ODCINKA. Dane są dwa punkty



Rys. 16.

$A(x_1, y_1)$ i $B(x_2, y_2)$. Wyznaczyć współrzędne (x_0, y_0) punktu M leżącego na osi s, przechodzącej przez punkty A i B, dla którego stosunek miar wektorów na osi, wychodzących z punktu M i kończących się w punktach A i B, równa się danej liczbie λ,

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = \lambda.$$

Stosunek ten będzie u j e m n y, jeśli punkt M leży między punktami A i B, zaś d o d a t n i, jeśli punkt M leży zewnątrz nich. Aby wyznaczyć współrzędne punktu M, mając daną wartość λ, zauważmy, iż stosunek miar wektorów na osi równa się stosunkowi miar ich rzutów, więc

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = \frac{\overline{M'A'}}{\overline{M'B'}} = \frac{\overline{M''A''}}{\overline{M''B''}}$$

ponieważ zaś miara rzutu wektora równa się różnicy między współrzędną jego początku i końca, zatem współrzędne (x_0, y_0) punktu M winny spełniać związki

$$\frac{x_1 - x_0}{x_2 - x_0} = \lambda; \qquad \frac{y_1 - y_0}{y_2 - y_0} = \lambda;$$

rozwiązując te równania względem x_0 i y_0, otrzymamy (w założeniu, iż $\lambda \neq 1$)

$$x_0 = \frac{x_1 - \lambda x_2}{1 - \lambda}; \quad y_0 = \frac{y_1 - \lambda y_2}{1 - \lambda} \tag{17}$$

Jeśli punkt M jest środkiem odcinka AB, wtedy $\overline{MA}$ i $\overline{MB}$ mają równe wartości bezwzględne, lecz zwroty przeciwne, więc

$$\lambda = \frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = -1$$

ze wzorów (17) otrzymamy wtedy

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}; \quad y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2} \tag{18}$$

a więc *współrzędne środka odcinka równają się średnim arytmetycznym współrzędnych jego końców.*

Jeśli we wzorach (17) podstawimy na miejscu λ wartość ze znakiem przeciwnym $-\lambda$, to otrzymamy współrzędne pewnego punktu N na osi danej

$$(19) \qquad x'_0 = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}; \quad y'_0 = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda};$$

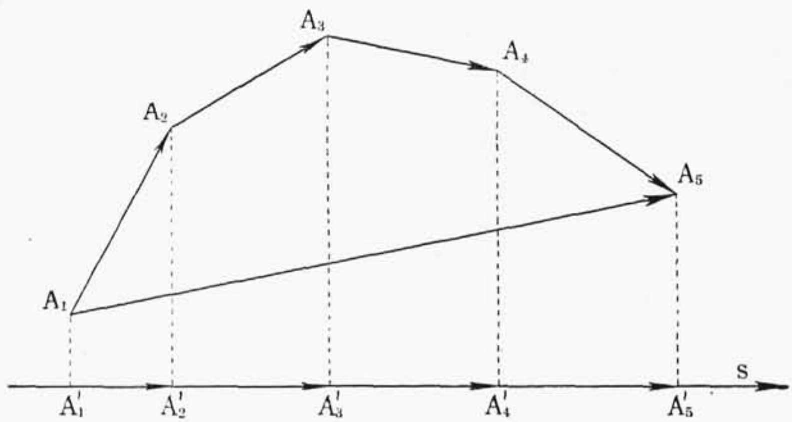
dla którego stosunek odległości od punktów A i B ma tę samą wartość bezwzględną $|\lambda|$ co i dla punktu M. Z dwóch punktów M i N jeden będzie leżał między punktami A i B, zaś drugi — zewnątrz nich. O punktach M, N mówimy wtedy, iż r o z d z i e l a j ą h a r m o n i c z n i e p a r ę p u n k t ó w A, B; spełniają one proporcję

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = -\frac{\overline{NA}}{\overline{NB}}$$

Gdy λ dąży do -1, to znaczy, gdy punkt M dąży do środka odcinka AB, wtedy punkt z nim sprzężony N, jak widać ze wzoru (19), oddala się nieograniczenie.

6. Suma geometryczna wektorów.

Niech będzie na płaszczyźnie dowolna grupa np. czterech wektorów. Przesuwając równolegle, ustawmy te wektory w ten sposób, aby koniec jednego schodził się z początkiem następnego; otrzymamy w ten sposób linję łamaną $A_1 A_2 A_3 A_4 A_5$ (rys. 17)



Rys. 17.

Nazywamy s u m ą g e o m e t r y c z n ą danych wektorów taki wektor, który łączy początek pierwszego wektora z końcem ostat-