W takim wypadku, np. gdy $N=0$, równanie (36), przy pomocy przesunięcia równoległego wzdłuż osi (y), doprowadzimy do postaci

$$My^2+Px+Rz+T'=0$$

a następnie jeszcze, przez obrót dokoła osi (y) w płaszczyźnie (xz) do postaci takiej:

$$My^2+P'x+T'=0 \tag{37''}$$

obejmującej również wypadek $P'=0$.

Na podstawie więc wyników poprzedniego artykułu, widzimy, ż, *w przypadku gdy*

$$\Delta=\begin{vmatrix} 2A, & D, & E \\ D, & 2B, & F \\ E, & F, & 2C \end{vmatrix}=0,$$

równanie drugiego stopnia (35) *przedstawia paraboloidę eliptyczną lub hyperboliczną, bądź też walec eliptyczny, hyperboliczny lub paraboliczny;* oś symetrji tych powierzchni (w przypadku walców równoległa do tworzących) jest równoległa do prostej określonej przez równania (33).

Widzimy nadto, iż stożek kierunków asymptotycznych w wierzchołku paraboloidy, jako określonej przez równanie

$$My^2+Nz^2=0,$$

sprowadza się bądź do jej osi symetrji, bądź do jej płaszczyzn kierunkowych, zależnie od tego czy paraboloida jest eliptyczna czy też hyperboliczna.

Równanie (37′) i (37″) obejmuje również wypadek powierzchni zwyrodniałej, sprowadzającej się do jednej prostej lub do dwóch płaszczyzn przecinających się, równoległych czy też zjednoczonych; wreszcie równaniu może nie odpowiadać twór geometryczny rzeczywisty.

35. Płaszczyzny średnicowe i średnice powierzchni.

Niech będzie powierzchnia drugiego stopnia

$$\begin{aligned} f(x,y,z)=Ax^2+By^2+Cz^2+Dxy+Exz+ \\ +Fyz+Gx+Hy+Iz+K=0 \end{aligned} \tag{38}$$

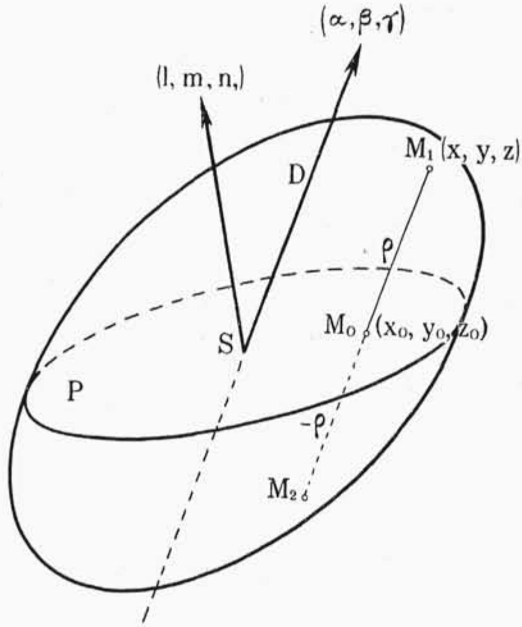
Rozważmy zbiór prostych równoległych o *cosinusach kierunkowych* (α,β,γ), założymy, iż proste te nie są równoległe do kierunków asymptotycznych, to znaczy, iż spełniają warunek

$$\varphi(\alpha, \beta, \gamma) \neq 0$$

gdzie

(39) $$\varphi(\alpha, \beta, \gamma) = A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 + D\alpha\beta + E\alpha\gamma + F\beta\gamma$$

Każda prosta przecina więc daną powierzchnię w dwóch punktach M_1 i M_2 rzeczywistych lub urojonych, różnych lub zjednoczonych.



Rys. 191.

Niech (x_0, y_0, z_0) oznaczają współrzędne środka M_0 cięciwy $M_1 M_2$ (rys. 191). Jeśli ρ oznacza miarę wektora $M_0 M_1$, zaś x, y, z oznaczają współrzędne jednego końca cięciwy M_1, to, według własności rzutu wektora, będzie

$$x - x_0 = \rho\alpha; \qquad y - y_0 = \rho\beta; \qquad z - z_0 = \rho\gamma$$

a zatem

$$x = x_0 + \rho\alpha; \qquad y = y_0 + \rho\beta; \qquad z = z_0 + \rho\gamma.$$

Punkt $M_1, (x, y, z)$ spełnia równanie powierzchni, wstawiając więc te wartości w równanie (38) i porządkując wyrazy według potęg ρ, otrzymamy znane już równanie o postaci:

$$f(x_0, y_0, z_0) + \rho\left[\alpha f'_x(x_0, y_0, z_0) + \beta f'_y(x_0, y_0, z_0) + \gamma f'_z(x_0, y_0, z_0)\right] +$$

(40) $$+ \rho^2 \varphi(\alpha, \beta, \gamma) = 0$$

Aby punkt M_0 był środkiem odcinka $M_1 M_2$, łączącego dwa punkty powierzchni, trzeba i wystarcza, aby równanie (40′) było spełnione zarówno dla wartości $+\rho$, jak i dla wartości $-\rho$; współczynnik przy ρ w pierwszej potędze w równaniu (40) winien zatem wtedy znikać:

$$\alpha f'_x(x_0, y_0, z_0) + \beta f'_y(x_0, y_0, z_0) + \gamma f'_z(x_0, y_0, z_0) = 0 \tag{41}$$

lub wyraźnie

$$\begin{aligned} &\alpha(2Ax_0 + Dy_0 + Ez_0 + G) + \beta(Dx_0 + 2By_0 + Fz_0 + H) + \\ &+ \gamma(Ex_0 + Fy_0 + 2Cz_0 + I) = 0 \end{aligned} \tag{41′}$$

Oto jest równanie miejsca geometrycznego środków wszystkich cięciw równoległych do kierunku (α, β, γ). Nadmienimy, iż liczby (α, β, γ) w równaniu (41) mogą też oznaczać współczynniki kierunkowe. Grupując wyrazy w równaniu (41′) według współrzędnych, otrzymamy związek w postaci równania płaszczyzny

$$\begin{aligned} &x_0(2A\alpha + D\beta + E\gamma) + y_0(D\alpha + 2B\beta + F\gamma) + \\ &+ z_0(E\alpha + F\beta + 2C\gamma) + (G\alpha + H\beta + I\gamma) = 0 \end{aligned} \tag{42}$$

Oznaczmy przez (l, m, n) współczynniki w tem równaniu:

$$\left\{ \begin{aligned} l &= 2A\alpha + D\beta + E\gamma = \varphi'_\alpha(\alpha, \beta, \gamma) \\ m &= D\alpha + 2B\beta + F\gamma = \varphi'_\beta(\alpha, \beta, \gamma) \\ n &= E\alpha + F\beta + 2C\gamma = \varphi'_\gamma(\alpha, \beta, \gamma) \end{aligned} \right. \tag{43}$$

z założenia mamy

$$\varphi(\alpha, \beta, \gamma) \neq 0$$

stąd wynika, iż współczynniki (l, m, n) *nie znikają jednocześnie*, mamy bowiem

$$\begin{aligned} \varphi(\alpha, \beta, \gamma) &= \frac{1}{2}\alpha(2A\alpha + D\beta + E\gamma) + \frac{1}{2}\beta(D\alpha + 2B\beta + F\gamma) + \\ &+ \frac{1}{2}\gamma(E\alpha + F\beta + 2C\gamma) \end{aligned} \tag{44}$$

Równanie (42) przedstawia więc określoną płaszczyznę P prostopadłą do wektora o składowych (l, m, n) (rys. 191). Płaszczyznę taką nazywamy *płaszczyzną średnicową* powierzchni drugiego stopnia. Położenie tej płaszczyzny zależy od danego zgóry kierunku cięciw równoległych (α, β, γ).

Mamy więc następującą własność.

TWIERDZENIE. Środki wszystkich cięciw równoległych powierzchni drugiego stopnia o dowolnym kierunku (α, β, γ), *odmiennym tylko od asymptotycznego,*

$$\varphi(\alpha, \beta, \gamma) \neq 0,$$

leżą na płaszczyźnie średnicowej o równaniu

$$\alpha f_x'(x_0, y_0, z_0) + \beta f_y'(x_0, y_0, z_0) + \gamma f_z'(x_0, y_0, z_0) = 0$$

związanej z danym kierunkiem cięciw.

PRZYPADEK $\Delta \neq 0$.

Rozważmy wpierw przypadek ogólniejszy, gdy wyznacznik charakterystyczny (25) na str. 393 nie równa się zeru, a więc gdy powierzchnia posiada jeden określony środek S o współrzędnych (x_s, y_s, z_s), spełniających równania

$$f_x'(x_s, y_s, z_s) = 0; \quad f_y'(x_s, y_s, z_s) = 0; \quad f_z'(x_s, y_s, z_s) = 0$$

Widzimy stąd natychmiast, na zasadzie równania (41), iż *każda płaszczyzna średnicowa przechodzi przez środek powierzchni*, co jest zresztą bezpośrednio oczywiste.

W celu ułatwienia dalszego rozumowania, obierzmy środek powierzchni, jako początek układu, wtedy równanie powierzchni danej będzie miało postać uproszczoną

$$(45) \quad f(x, y, z) = A x^2 + B y^2 + C z^2 + D x y + E x z + F y z + K = 0$$

zaś równanie płaszczyzny średnicowej, związanej z kierunkiem cięciw (α, β, γ), postać (po odrzuceniu znaczka o)

$$(46) \quad \alpha (2 Ax + Dy + Ez) + \beta (Dx + 2 By + Fz) + \gamma (Ex + Fy + 2 Cz) = 0$$

płaszczyzna ta przechodzi teraz przez początek układu.

Jeśli równanie (46) uporządkujemy według współrzędnych x, y, z, to otrzymamy postać

$$(46') \quad x (2 A\alpha + D\beta + E\gamma) + y (D\alpha + 2 B\beta + F\gamma) + z (E\alpha + F\beta + 2 C\gamma) = 0$$

skąd widzimy, przez porównanie z postacią (46), iż w równaniu płaszczyzny średnicowej *współrzędne* (x, y, z) i *współczynniki kierunkowe* (α, β, γ) *można wzajemnie przestawiać*, to znaczy iż równanie płaszczyzny średnicowej można napisać w dwóch postaciach takich:

$$(47) \qquad \begin{cases} \alpha f_x'(x, y, z) + \beta f_y'(x, y, z) + \gamma f_z'(x, y, z) = 0 \\ x f_\alpha'(\alpha, \beta, \gamma) + y f_\beta'(\alpha, \beta, \gamma) + z f_\gamma'(\alpha, \beta, \gamma) = 0 \end{cases}$$

Z powyższej własności budowy równania płaszczyzny średnicowej wynika prosty wniosek geometryczny. Rozważmy mianowicie dwie dowolne proste D i δ, wychodzące ze środka powierzchni S i nierównoległe do tworzących stożka asymptotycznego. Niech (α, β, γ) oznaczają współczynniki kierunkowe prostej D, zaś $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ — prostej δ; punkty tych prostych spełniają więc równania

$$(D) \qquad \frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma}$$

$$(\delta) \qquad \frac{x}{\alpha_1} = \frac{y}{\beta_1} = \frac{z}{\gamma_1}$$

Z dwóch postaci (47) równania płaszczyzny średnicowej wynika teraz natychmiast, że jeśli punkty prostej δ spełniają równanie

$$(P) \qquad \alpha f_x'(x, y, z) + \beta f_y'(x, y, z) + \gamma f_z'(x, y, z) = 0,$$

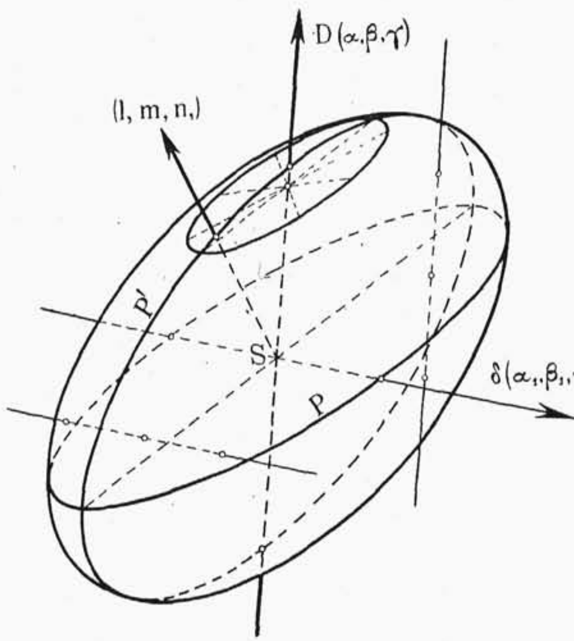
to punkty prostej D spełniają wtedy równanie

$$(P') \qquad \alpha_1 f_x'(x, y, z) + \beta_1 f_y'(x, y, z) + \gamma_1 f_z'(x, y, z) = 0;$$

oznacza to geometrycznie, że jeśli prosta δ leży na płaszczyźnie średnicowej P, związanej z kierunkiem (α, β, γ) prostej D, to naodwrót, prosta D leży na płaszczyźnie średnicowej P', związanej z kierunkiem $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ prostej δ (rys. 192).

Płaszczyzna P dzieli więc na połowy cięciwy równoległe do prostej D, leżącej w płaszczyźnie P' i odwrotnie, płaszczyzna P' dzieli na połowy cięciwy równoległe do prostej δ, leżącej w płaszczyźnie P.

Dwie płaszczyzny średnicowe P i P', mające tę własność, nazwiemy *sprzężonemi*.



Rys. 192.

Nie zmieniając płaszczyzny średnicowej P, związanej z danym kierunkiem (α, β, γ), a więc mającej równanie (P), rozważmy zbiór wszystkich płaszczyzn średnicowych z nią sprzężonych. Płaszczyzny te o równaniu (P') otrzymamy, biorąc pod uwagę wszelkie możliwe kierunki $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ prostej δ, leżącej w płaszczyźnie P (z wyjątkiem asymptotycznych), to znaczy, podstawiając w równanie (P') na $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ wszelkie wartości, spełniające związek

$$\alpha_1 l + \beta_1 m + \gamma_1 n = 0 \tag{48}$$

gdzie (l, m, n) są to współczynniki kierunkowe prostopadłej do płaszczyzny P, mającej jak wiemy następujące wartości stałe w danem rozumowaniu:

$$\left\{\begin{aligned} l &= 2A\alpha + D\beta + E\gamma \\ m &= D\alpha + 2B\beta + F\gamma \\ n &= E\alpha + F\beta + 2C\gamma \end{aligned}\right. \tag{49}$$

Według poprzednich rozważań, wszystkie te płaszczyzny P', sprzężone z daną płaszczyzną P, przechodzą przez stałą prostą D, wychodzącą ze środka powierzchni i mającą współczynniki kierunkowe (α, β, γ) cięciw równoległych, które właśnie płaszczyzna P dzieli na połowy. Ową prostą D nazywamy *średnicą* powierzchni drugiego stopnia *sprzężoną z daną płaszczyzną średnicową* P.

Położenie płaszczyzny średnicowej i średnicy z nią sprzężonej są związane wzorami (49), które uzależniają współczynniki kierunkowe (l, m, n) prostopadłej do płaszczyzny średnicowej P od współczynników kierunkowych (α, β, γ) średnicy z nią sprzężonej D. Ze wzorów tych widzimy, iż średnicy D, o kierunku danym zgóry (α, β, γ), odmiennym od asymptotycznego, odpowiada określona płaszczyzna P z nią sprzężona. Nadto średnica D jest jedyną sprzężoną z tą płaszczyzną P, gdyż, z racji nieznikania wyznacznika Δ, trójce liczb (l, m, n) odpowiada, odwrotnie, we wzorach (49) jedna tylko trójka liczb (α, β, γ).

Z określenia średnicy sprzężonej z daną płaszczyzną mamy następującą własność.

TWIERDZENIE. Płaszczyzna średnicowa dzieli na połowy cięciwy powierzchni równoległe do średnicy z nią sprzężonej, zaś ta średnica dzieli na połowy cięciwy, przecinające ją i równoległe do płaszczyzny średnicowej.

Z powyższego wynika również wniosek, iż *średnica powierzchni drugiego stopnia jest miejscem geometrycznem środków przekrojów powierzchni, równoległych do płaszczyzny średnicowej z nią sprzężonej* (rys. 192).

Średnica D sprzężona z płaszczyzną P jest to, jak wiemy, zbiór punktów, spełniających równanie

$$\alpha_1 f'_x(x, y, z) + \beta_1 f'_y(x, y, z) + \gamma_1 f'_z(x, y, z) = 0,$$

dla wszelkich kierunków $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1,)$ prostopadłych do kierunku stałego (l, m, n), to znaczy, gdy

$$\alpha_1 l + \beta_1 m + \gamma_1 n = 0;$$

ponieważ zaś jedna przynajmniej z liczb (l, m, n) nie równa się zeru, np. $n \neq 0$, średnica jest więc zbiorem punktów, spełniających związek

$$\alpha_1 \left(f'_x - \frac{l}{n} f'_z \right) + \beta_1 \left(f'_y - \frac{m}{n} f'_z \right) = 0$$

dla wszelkich wartości α_1 i β_1; stąd wynika, iż związki

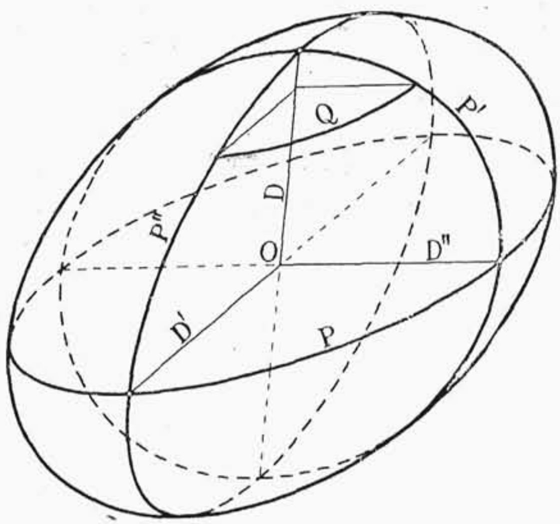
$$f'_x - \frac{l}{n} f'_z = 0; \; f'_y - \frac{m}{n} f'_z = 0$$

lub ostatecznie związki w postaci symetrycznej

$$\frac{f'_x}{l} = \frac{f'_y}{m} = \frac{f'_z}{n} \tag{50}$$

przedstawiają średnicę powierzchni $f(x, y, z) = 0$ sprzężoną z płaszczyzną średnicową, prostopadłą do wektora o składowych (l, m, n) (oczywiście z zastrzeżeniem, iż równanie (50) nie przedstawia prostej o kierunku asymptotycznym).

Rozważmy jeszcze w pewnej płaszczyźnie średnicowej P, sprzężonej ze średnicą D, dowolną średnicę D'; jej płaszczyzna



Rys. 193.

średnicowa P' przechodzi, jak wiemy, przez prostą D i przecina płaszczyznę P wzdłuż prostej D'', której znowu odpowiednia płaszczyzna średnicowa P'' winna przechodzić, odwrotnie, przez dwie proste D i D'. Otrzymaliśmy w ten sposób trójkę płaszczyzn P, P', P'' i trójkę prostych D, D', D'', mających tę własność, iż każda z tych płaszczyzn jest płaszczyzną średnicową względem prostej będącej przecięciem dwóch pozostałych (rys. 193). Takie trzy płaszczyzny lub trzy średnice nazywamy *sprzężonemi względem siebie*. Oczywiście każda płaszczyzna Q równoległa do jednej z trzech płaszczyzn średnicowych sprzężonych P, P', P'', np. do P, przecina dwie pozostałe wzdłuż pary prostych równoległych do średnic odpowiednich D' i D'', które będą zawsze tworzyły parę średnic sprzężonych względem krzywej przekroju powierzchni płaszczyzną Q.

Przykład elipsoidy i jej przekrojów kołowych. Niech będzie równanie elipsoidy, odniesionej do osi symetrji

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$$

Jeśli prosta o równaniach

$$\frac{x}{\alpha}=\frac{y}{\beta}=\frac{z}{\gamma}$$

jest średnicą elipsoidy, to równanie płaszczyzny średnicowej z nią sprzężonej przybierze teraz postać taką:

$$\frac{\alpha x}{a^2}+\frac{\beta y}{b^2}+\frac{\gamma z}{c^2}=0$$

a zatem związki (49) będą teraz następujące:

$$l=\frac{\alpha}{a^2};\quad m=\frac{\beta}{b^2};\quad n=\frac{\gamma}{c^2}$$

Ponieważ stożek asymptotyczny elipsoidy o równaniu

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$$

nie ma tworzących rzeczywistych, oznacza to, iż każda prosta przecina elipsoidę w dwóch punktach rzeczywistych lub urojonych, różnych lub zjednoczonych.

Widzimy stąd, iż dowolna prosta $\frac{x}{\alpha}=\frac{y}{\beta}=\frac{z}{\gamma}$, wychodząca z początku układu, może być uważana, jako średnica sprzężona z odpowiednią płaszczyzną średnicową i odwrotnie, dowolna płaszczyzna o równaniu

$$lx+my+nz=0$$

przechodząca przez środek elipsoidy, może być uważana za płaszczyznę średnicową, sprzężoną z odpowiednią średnicą o współczynnikach kierunkowych

$$\alpha=a^2 l;\quad \beta=b^2 m;\quad \gamma=c^2 n$$

Trzy osi symetrji powierzchni są oczywiście średnicami prostopadłemi do płaszczyzn średnicowych (zarazem płaszczyzn symetrji) z niemi sprzężonych.

Jeśli elipsoida jest trójosiowa, to znaczy osi a, b, c są wszystkie różne, wtedy osi Ox, Oy, Oz są *jedyną* trójką osi symetrji powierzchni, żądając bowiem prostopadłości średnicy do płaszczyzny średnicowej, otrzymujemy proporcję

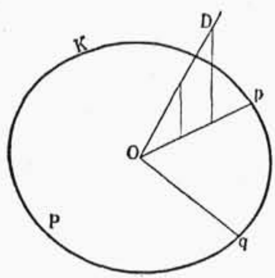
$$\frac{l}{\alpha} = \frac{m}{\beta} = \frac{n}{\gamma}$$

którą mogą spełniać tylko osi Ox, Oy, Oz.

Z własności ogólnych, podanych poprzednio, wynika, iż przekroje elipsoidy płaszczyznami, równoległemi do danej płaszczyzny średnicowej P, są elipsami, których środki leżą na średnicy D sprzężonej z daną płaszczyzną; osi tych elips są oczywiście równoległe do osi przekroju elipsoidy daną płaszczyzną P.

Jeśli przekrój elipsoidy płaszczyzną P jest kołem, to wszystkie przekroje płaszczyznami równoległemi są też kołami. Otóż postarajmy się znaleść te płaszczyzny średnicowe, dające przekrój kołowy elipsoidy.

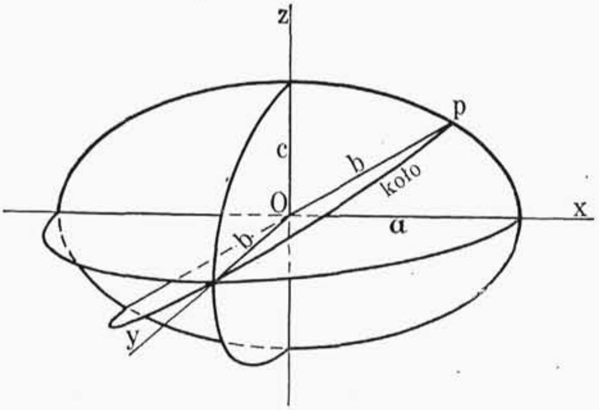
Niech K będzie przekrojem kołowym elipsoidy płaszczyzną P sprzężoną ze średnicą D (rys. 194). Niech następnie Op będzie rzutem średnicy D na płaszczyznę koła P. Prowadząc w płaszczyźnie koła prostopadłą Oq do Op, otrzymamy trójkę średnic Op, Oq, OD względem siebie sprzężonych. Wobec tego średnica koła Oq będzie sprzężona z płaszczyzną (Dp), a ponieważ jest do niej prostopadła, więc będzie osią symetrji powierzchni. A zatem widzimy, iż płaszczyzna przekroju kołowego elipsoidy, jeśli istnieje, to winna przechodzić przez jedną z osi symetrji elipsoidy. Przypuśćmy, iż elipsoida jest trójosiowa i osi jej a, b, c następują w porządku wielkości, to znaczy:



Rys. 194.

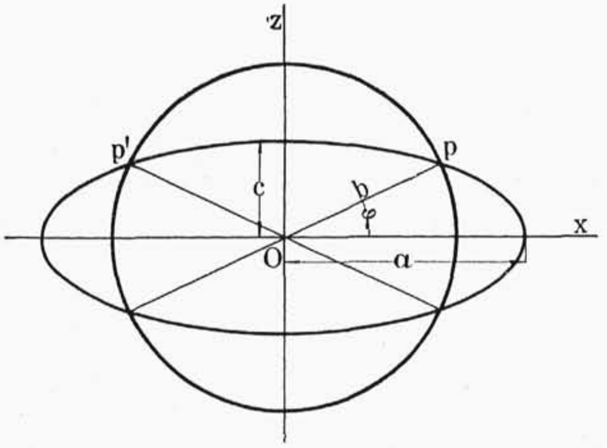
$$a > b > c$$

Otóż przekrój elipsoidy płaszczyzną, przesuniętą przez jedną z jej osi, jest elipsą, której jedna oś równa się tej właśnie osi elipsoidy, zaś druga Op (rys. 195) zawiera się między dwiema pozo-



Rys. 195.

stałemi osiami elipsoidy. Stąd wnioskujemy, iż *przekrojem kołowym może być tylko przekrój płaszczyzną, przechodzącą przez oś średnią elipsoidy*, w naszym wypadku przez oś (b). Otóż przekrój



Rys. 196.

ten będzie kołem, jeśli $Op = b$, a więc położenie tego śladu Op otrzymamy, przecinając elipsę o osiach a i c w płaszczyźnie (xz) kołem o promieniu b zatoczonym ze środka (rys. 196).

Istnieją więc dwa przekroje kołowe, symetryczne względem osi Oz i Ox, tworzące z płaszczyzną (xy) kąt φ taki, iż

$$\cos\varphi = \frac{a\sqrt{b^2 - c^2}}{b\sqrt{a^2 - c^2}}$$

Przykład hyperboloidy.

Równanie hyperboloidy, odniesionej do osi symetrji, ma postać

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=\pm 1$$

znak + dotyczy hyperboloidy jednopowłokowej, znak — dwupowłokowej. Jeśli równania

$$(D) \qquad \frac{x}{\alpha}=\frac{y}{\beta}=\frac{z}{\gamma}$$

przedstawiają średnicę powierzchni, to równanie płaszczyzny średnicowej z nią sprzężonej będzie

$$(P) \qquad \frac{\alpha x}{a^2}+\frac{\beta y}{b^2}-\frac{\gamma z}{c^2}=0$$

należy założyć, iż średnica D nie jest równoległa do tworzących stożka asymptotycznego o równaniu

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$

wspólnego obu powierzchniom, to znaczy, iż

$$\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}-\frac{\gamma^2}{c^2}\neq 0$$

Odwrotnie, płaszczyzna, przechodząca przez środek, o równaniu

$$lx+my+nz=0$$

może być uważana za płaszczyznę średnicową sprzężoną z prostą, wychodzącą ze środka i mającą współczynniki kierunkowe

$$\alpha=a^2 l; \qquad \beta=b^2 m; \qquad \gamma=-c^2 n$$

jeśli liczby (l, m, n) spełniają warunek

$$a^2 l^2+b^2 m^2-c^2 n^2\neq 0$$

Pisząc równania średnicy w postaci parametrycznej

$$x=\alpha\rho; \qquad y=\beta\rho; \qquad z=\gamma\rho$$

widzimy, iż punkty przecięcia tej średnicy z hyperboloidą określa równanie

$$\rho^2\left(\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}-\frac{\gamma^2}{c^2}\right)=\pm 1$$

Średnica przecina więc hyperboloidę jednopowłokową w dwóch punktach rzeczywistych, jeśli

$$\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}-\frac{\gamma^2}{c^2}>0$$

zaś w dwóch punktach urojonych, jeśli

$$\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}-\frac{\gamma^2}{c^2}<0$$

dla hyperboloidy dwupowłokowej natomiast odwrotnie. Geometrycznie oznacza to, iż średnica przecina hyperboloidę jednopowłokową w punktach rzeczywistych, jeśli średnica ta leży zewnątrz stożka asymptotycznego, zaś dla hyperboloidy dwupowłokowej odwrotnie.

Nadmienimy jeszcze, iż tworzące stożka asymptotycznego nie przecinają hyperboloidy w żadnym punkcie rzeczywistym lub urojonym.

PRZYPADEK $\Delta=0$.

Wiemy już z art. 34, iż w przypadku $\Delta=0$ powierzchnia drugiego stopnia jest walcową lub też paraboloidą, poza wypadkami zwyrodnienia.

W przypadku powierzchni walcowej, eliptycznej lub hyperbolicznej, oś tej powierzchni, równoległa do tworzących, jest linją środków, będącą wtedy przecięciem trzech płaszczyzn o równaniach

(51)
$$\begin{cases} f_x'(x_0, y_0, z_0)=0 \\ f_y'(x_0, y_0, z_0)=0 \\ f_z'(x_0, y_0, z_0)=0 \end{cases}$$

Wnioskujemy stąd odrazu, na podstawie równania płaszczyzny średnicowej

$$\alpha f_x'+\beta f_y'+\gamma f_z'=0,$$

iż wszystkie płaszczyzny średnicowe walca hyperbolicznego lub eliptycznego przechodzą przez linję środków tej powierzchni.

Rozpatrzmy teraz wypadek powierzchni *nieposiadającej środka*. Wiemy już, iż równanie takiej powierzchni sprowadza się do postaci uproszczonej

$$(52) \qquad A y^2 + B z^2 + C x = 0$$

a więc przedstawia paraboloidę eliptyczną lub hyperboliczną, w szczególności zaś walec paraboliczny, gdy A lub B znika.

Pojęcie i postać równania płaszczyzny średnicowej stosuje się do paraboloid bez zmiany; a mianowicie, jeśli (α, β, γ) są współczynnikami kierunkowemi dowolnej prostej, nierównoległej do płaszczyzn kierunkowych paraboloidy, to znaczy spełniającemi warunek

$$A\beta^2 + B\gamma^2 \neq 0$$

to miejscem geometrycznem środków cięciw równoległych o kierunku (α, β, γ) będzie płaszczyzna, mająca równanie

$$\alpha f_x' + \beta f_y' + \gamma f_z' = 0$$

a więc, w przypadku postaci uproszczonej (52), równanie

$$(53) \qquad 2 A \beta y + 2 B \gamma z + C \alpha = 0$$

widzimy stąd, iż *wszystkie płaszczyzny średnicowe paraboloidy są równoległe do jej osi*. W szczególności, jeżeli cięciwy są prostopadłe do osi paraboloidy, wtedy $\alpha = 0$ i płaszczyzna średnicowa przechodzi przez tę oś.

Aby utworzyć teraz pojęcie średnicy paraboloidy, zauważmy, iż nie możemy jej pojmować, jako sprzężonej z pewną płaszczyzną średnicową, tak jak dla powierzchni ze środkiem, przekroje bowiem równoległe do płaszczyny średnicowej paraboloidy są równoległe do jej osi i nie mają środków.

Średnicą paraboloidy nazwiemy mianowicie miejsce geometryczne środków przekrojów tej paraboloidy płaszczyznami prostopadłemi do stałego, danego zgóry kierunku (l, m, n), lecz nierównoległemi do osi paraboloidy.

Podobnie, jak w rozważaniach poprzednich, średnica tak określona jest też zbiorem punktów wspólnych płaszczyznom średnicowym

$$\alpha f_x' + \beta f_y' + \gamma f_z' = 0$$

odpowiadającym wszelkim kierunkom cięciw (α, β, γ) prostopadłym do stałego kierunku (l, m, n), więc spełniającym związek

$$\alpha l + \beta m + \gamma n = 0$$

Stąd wynika, jak wiemy, iż szukana średnica określona jest przez układ równań:

$$(54) \qquad \frac{f_x'(x,y,z)}{l} = \frac{f_y'(x,y,z)}{m} = \frac{f_z'(x,y,z)}{n}$$

Aby zbadać jej położenie, zastosujmy równania (54) do postaci uproszczonej (52), otrzymamy wtedy równania

$$(55) \qquad \frac{C}{l} = \frac{2Ay}{m} = \frac{2Cz}{n}$$

przedstawiające określoną prostą równoległą do osi Ox, gdyż z założenia kierunek (l, m, n) nie jest prostopadły do osi paraboloidy, więc $l \neq 0$.

Wszelka średnica paraboloidy jest zatem równoległa do jej osi i wobec tego przecina tę paraboloidę w jednym punkcie.

W przypadku szczególnym, gdy wektor (l, m, n) jest równoległy do osi paraboloidy, odpowiednia średnica schodzi się wtedy z jej osią. Wynika stąd prosty sposób wyznaczania równań osi paraboloidy, określonej przez równanie w postaci ogólnej.

36. Poszukiwanie osi i redukcja równania powierzchni posiadającej środek.

Wskazaliśmy już poprzednio metodę redukcji równania i poszukiwania osi powierzchni drugiego stopnia w przypadku $\Delta = 0$. Teraz rozpatrzymy więc już tylko wypadek gdy $\Delta \neq 0$, a więc, gdy powierzchnia drugiego stopnia posiada określony i jedyny środek.

W celu określenia osi i płaszczyzn symetrji, zauważmy, iż *oś symetrji jest to taka średnica powierzchni, która jest prostopadła do płaszczyzny średnicowej z nią sprzężonej i będącej wtedy płaszczyzną symetrji powierzchni.*

Rozważmy więc równanie powierzchni drugiego stopnia odniesionej do jej jedynego środka

$$(56) \qquad f(x,y,z) = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + K = 0.$$

Wiemy, iż współczynniki kierunkowe (l, m, n) prostopadłej do płaszczyzny średnicowej są związane ze współczynnikami kierunkowemi (α, β, γ) średnicy z nią sprzężonej wzorami

$$(57) \qquad \begin{cases} l = 2A\alpha + D\beta + E\gamma \\ m = D\alpha + 2B\beta + F\gamma \\ n = E\alpha + F\beta + 2C\gamma \end{cases}$$

Aby odnaleść położenie osi symetrji powierzchni (56), trzeba więc odszukać takie trzy liczby (α, β, γ), żeby wartości (57) spełniały warunki równoległości dwóch wektorów:

$$\frac{l}{\alpha}=\frac{m}{\beta}=\frac{n}{\gamma} = s$$

lub

(58) $$l = s\alpha; \quad m = s\beta; \quad n = s\gamma;$$

gdzie s jest współczynnikiem proporcjonalności, nierównym zeru. Wstawiając wartości (58) w związki (57), otrzymamy równania

(59) $$\begin{cases} (2A-s)\alpha + D\beta + E\gamma = 0 \\ D\alpha + (2B-s)\beta + F\gamma = 0 \\ E\alpha + F\beta + (2C-s)\gamma = 0 \end{cases}$$

Układ ten posiada rozwiązania α, β, γ *niewszystkie równe zeru*, wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest warunek

równanie wiekowe lub sekularne

(60) $$\begin{vmatrix} 2A-s, & D, & E \\ D, & 2B-s, & F \\ E, & F, & 2C-s \end{vmatrix} = 0$$

Otrzymany związek ma postać równania *trzeciego stopnia*, określającego wartość współczynnika s. Nie badając szczegółowej własności pierwiastków tego równania, zauważymy tylko, iż ma ono, jak każde równanie trzeciego stopnia, przynajmniej jeden pierwiastek rzeczywisty s. Wartość jego musi być *różna od zera*, w przeciwnym bowiem wypadku równanie (60) prowadziłoby do związku $\Delta = 0$, wbrew założeniu. Podstawiając ten pierwiastek do układu (59), otrzymamy stąd na α, β, γ rozwiązania niewszystkie równe zeru, które będą odpowiadały przynajmniej jednej osi symetrji danej powierzchni.

Jeśli teraz tę znalezioną oś obierzemy za oś Ox' nowego układu współrzędnych, to równanie powierzchni przyjmie postać uproszczoną

(61) $$A'x'^2 + B'y'^2 + C'z'^2 + D'y'z' + K = 0$$

Wystarcza już teraz obrócić osi $(Oy'z')$ dokoła osi Ox' o określony kąt, aby równanie przybrało postać najprostszą

$$A'x'^2 + B''y''^2 + C''z''^2 + K = 0 \tag{62}$$

otrzymane w ten sposób osi Oy'' i Oz'' będą osiami symetrji powierzchni, tworzącemi z osią Ox' trójścian prostokątny.

Wszystkie trzy współczynniki A', B'', C'' w równaniu uproszczonem (62) będą *odmienne od zera*, w przeciwnym bowiem wypadku równanie to przedstawiałoby powierzchnię walcową, mającą nieskończenie wiele środków, wbrew założeniu, iż $\Delta \neq 0$.

Z powyższej redukcji równania powierzchni widzimy, iż, *w przypadku badanym $\Delta \neq 0$, równanie drugiego stopnia przedstawia elepsoidę, hyperboloidę jedno lub dwupowłokową, powierzchnię stożkową, jeden punkt, lub wreszcie nie odpowiada tworowi rzeczywistemu.*

Jeśli wszystkie współczynniki A', B'', C'' w równaniu (62) są różne, wtedy, jak wiemy, trzy otrzymane osi, do których to równanie jest odniesione, są jedyną trójką osi symetrji powierzchni. Jeśli dwa z tych współczynników równają się sobie np. $A' = B''$, wtedy powierzchnia jest obrotowa dokoła osi Oz' i wobec tego wszystkie osi do niej prostopadłe i wychodzące ze środka będą osiami symetrji powierzchni. Wreszcie, jeśli wszystkie współczynniki A', B'', C'' są sobie równe, to powierzchnia jest kulą (rzeczywistą lub urojoną) i każda prosta, wychodząca z jej środka, jest osią symetrji.

Ćwiczenia.

1. Zbadać przecięcie płaszczyzny

$$lx + my + nz = k$$

z elipsoidą

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Znaleść warunek, aby płaszczyzna ta miała z elipsoidą jeden punkt wspólny

2. Dany jest stożek obrotowy i dowolna płaszczyzna sieczna. Dowieść, iż ogniskiem rzutu przecięcia stożkowego na płaszczyznę prostopadłą do osi jest punkt przecięcia osi z tą płaszczyzną,

3. Dowieść, iż płaszczyzny równoległe przecinają powierzchnię drugiego stopnia wzdłuż stożkowych, mających ten sam kierunek osi.

4. Niech będzie układ powierzchni:

$$\frac{x^2}{a^2 - \lambda} + \frac{y^2}{b^2 - \lambda} + \frac{z^2}{c^2 - \lambda} - 1 = 0$$

z parametrem zmiennym λ. Dowieść, iż przez punkt dowolny przestrzeni (x_0, y_0, z_0) przechodzą trzy powierzchnie tego układu, z których jedna jest elipsoidą, druga — hyperboloidą jednopowłokową i trzecia — hyperboloidą dwupowłokową.

5. Wyznaczyć miejsce geometryczne środków powierzchni o równaniu

$$x^2 + y^2 + z^2 + \lambda z(x - a + \mu y) - R^2 = 0;$$

gdzie λ i μ są to zmienne parametry.

6. Dowieść, iż powierzchnia o równaniu

$$13x^2 + 10y^2 + 5z^2 - 4xy - 6xz - 12yz + 2x + 4y + 6z - 1 = 0$$

nie ma środka i znaleść równania jej osi symetrji.

ROZDZIAŁ X.

PŁASZCZYZNA STYCZNA DO POWIERZCHNI DRUGIEGO STOPNIA.

37. Styczna do linji w przestrzeni.

Prostą styczną do linji w przestrzeni w danym punkcie określamy, podobnie jak na płaszczyźnie, jako położenie graniczne siecznej, przechodzącej przez dany punkt krzywej i jej punkt sąsiedni, gdy ten punkt sąsiedni dąży do danego.

Niech będzie krzywa C, której punkty mają współrzędne określone przez funkcje parametru t:

$$x = f_1(t); \quad y = f_2(t); \quad z = f_3(t) \tag{1}$$

Rozważmy punkt krzywej M, odpowiadający wartości t i punkt sąsiedni krzywej M_1, odpowiadający wartości $t + \Delta t$; oznaczmy różnicę współrzędnych punktów M i M' w ten sposób:

$$\begin{aligned} \Delta x &= f_1(t + \Delta t) - f_1(t) \\ \Delta y &= f_2(t + \Delta t) - f_2(t) \\ \Delta z &= f_3(t + \Delta t) - f_3(t) \end{aligned} \tag{2}$$

są to oczywiście miary rzutów wektora, łączącego punkty M i M_1 (rys. 197). Równania siecznej, łączącej punkty M i M_1, będą więc miały postać

$$\frac{X - x}{\Delta x} = \frac{Y - y}{\Delta y} = \frac{Z - z}{\Delta z} \tag{3}$$