ROZDZIAŁ IX.

# OGNISKA I KIEROWNICE KRZYWYCH DRUGIEGO STOPNIA.

## 50. Określenie ogniska i kierownicy.

Nazywamy ogniskiem krzywej drugiego stopnia taki punkt płaszczyzny $F$, iż odległość dowolnego punktu krzywej $M(x, y)$ od tego punktu da się wyrazić w postaci *funkcji wymiernej* pierwszego stopnia współrzędnych prostokątnych $(x, y)$ punktu $M$, to znaczy, jako wartość bezwzględna wyrażenia

$$MF = |\alpha x + \beta y + \gamma| \tag{1}$$

gdzie $\alpha, \beta, \gamma$ są to pewne stałe.

Powyższe określenie ogniska jest niezależne oczywiście od układu współrzędnych prostokątnych, gdyż wzory na zamianę współrzędnych są pierwszego stopnia i nie zmieniają określonej cechy funkcji (1).

Zanim udowodnimy istnienie określonego w ten sposób ogniska dla dowolnej krzywej drugiego stopnia, wykażemy wpierw, iż określona własność może przysługiwać krzywym conajwyżej drugiego stopnia; istotnie, zakładając, iż krzywa posiada ognisko $F$ o współrzędnych $(x_0, y_0)$, mamy

$$MF = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$

a więc, według własności określonej ogniska (1), punkty krzywej spełniają równanie

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = (\alpha x + \beta y + \gamma)^2 \tag{2}$$

które jest właśnie drugiego stopnia.

Określona własność analityczna ogniska ma proste znaczenie geometryczne. Jeśli mianowicie rozważymy prostą $D$, określoną przez równanie*)

$$\alpha x + \beta y + \gamma = 0, \tag{3}$$

to, jak wiadomo, odległość $MQ$ punktu krzywej $M(x, y)$ od tej prostej równa się wartości

$$MQ = \frac{|\alpha x + \beta y + \gamma|}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$$

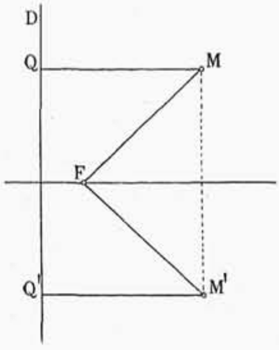
---

*) Wykluczamy tu wypadek, gdy $\alpha$ i $\beta$ znikają jednocześnie, który odpowiada oczywiście kołu ze środkiem w punkcie $F$.

wynikającej z postaci normalnej równania prostej. A więc *własność* (1) *ogniska F oznacza poprostu geometrycznie, iż stosunek odległości dowolnego punktu krzywej M od ogniska F i od prostej* (3) *ma wartość stałą dla wszystkich punktów krzywej:*

$$\frac{MF}{MQ} = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}; \tag{4}$$

Prostą $D$, związaną w powyższej własności z ogniskiem $F$, nazywamy *kierownicą krzywej drugiego stopnia*, zaś wartość stałą stosunku (4) *mimośrodem* tej krzywej.



Rys. 81.

Rozważmy dwa punkty $M$ i $M'$ (rys. 81), symetrycznie położone względem prostopadłej do kierownicy $D$, poprowadzonej przez ognisko $F$; stosunek (4) przybiera tę samą wartość dla punktów $M$ i $M'$. Stąd wynika, iż *ognisko krzywej drugiego stopnia może znajdować się tylko na osi symetrji krzywej, zaś kierownica odpowiednia winna być do tej osi prostopadła.*

Jeśli kierownica, przedstawiona przez równanie (2), jest prostopadła do osi $Ox$, wtedy winno być $\beta = 0$ i odległość punktu bieżącego krzywej $M(x, y)$ od odpowiedniego ogniska $F$ winna się wyrazić w postaci funkcji linjowej tylko odciętej $x$:

$$MF = |\alpha x + \gamma|$$

Aby teraz wykazać istnienie ogniska dla danej krzywej drugiego stopnia, weźmy równanie krzywych drugiego stopnia odniesione do wierzchołka (art. 48):

$$y^2 = 2px \mp \frac{p}{a} x^2 \tag{5}$$

gdzie

$$p = \frac{b^2}{a}$$

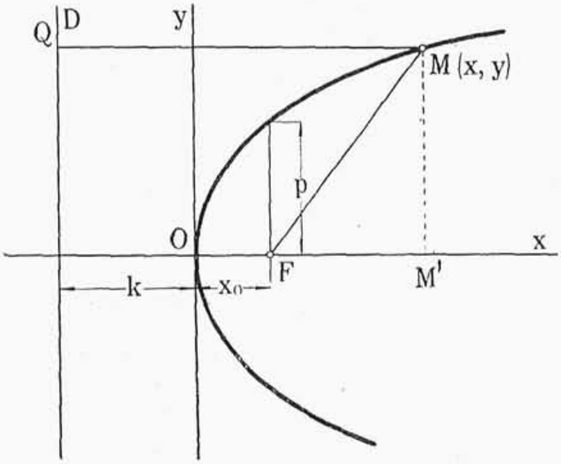
znak górny dotyczy elipsy, zaś dolny — hyperboli. Równanie (5) pozwoli jednocześnie przeprowadzić rozumowanie dla trzech typów krzywych, zakładając bowiem, iż $\frac{p}{a}$ dąży do zera, otrzymamy odpowiednie wnioski dla paraboli o równaniu

$$y^2 = 2px$$

Weźmy więc pod uwagę na osi symetrji $Ox$ pewien punkt $F$ o odciętej $x_0$ i prostą $D$ prostopadłą do osi $Ox$ (rys. 82), odpowiadającą odciętej

$$x = k;$$

korzystając ze związku (5), wyrazimy odległości dowolnego punktu




Rys. 82.

$M(x, y)$ krzywej (4) od punktu $F$ i od prostej $D$ w ten sposób:

$$MF = \sqrt{(x - x_0)^2 + y^2} = \sqrt{\left(1 \mp \frac{p}{a}\right) x^2 - 2(x_0 - p)x + x_0^2}$$

$$MQ = |x - k|$$

znak górny dotyczy elipsy, zaś dolny — hyperboli.

Zakładając, iż współczynnik $1 \mp \frac{p}{a}$ przy $x^2$ w trójmianie pod pierwiastkiem *jest większy od zera*, oznaczmy, dla uproszczenia

(6) $$\varepsilon = \sqrt{1 \mp \frac{p}{a}}$$

i, w myśl własności ogniska, rozważmy teraz stosunek tych dwóch odległości $MF$ i $MQ$:

(7) $$\frac{MF}{MQ} = \varepsilon \frac{\sqrt{x^2 - 2\frac{x_0 - p}{\varepsilon^2} x + \frac{x_0^2}{\varepsilon^2}}}{|x - k|}$$

Stosunek ten wogóle jest funkcją zmiennej $x$, spostrzegamy jednak natychmiast, że gdy tak dobierzemy $x_0$ i $k$, żeby trójmian pod pierwiastkiem był pełnym kwadratem funkcji w mianowniku, to wtedy *i tylko wtedy* wartość stosunku (7) będzie jednakowa dla wszystkich punktów krzywej, mianowicie będzie

$$\text{(8)} \qquad \frac{MF}{MQ} = \varepsilon$$

Otóż w tym celu należy na $x_0$ i $k$ wziąć wartości, spełniające związek

$$\text{(9)} \qquad \left(\frac{x_0 - p}{\varepsilon^2}\right)^2 = \frac{x_0^{\,2}}{\varepsilon^2} \text{ lub } \left(1 - \frac{p}{x_0}\right)^2 = \varepsilon^2$$

i

$$\text{(10)} \qquad k^2 = \frac{x_0^{\,2}}{\varepsilon^2}$$

Punkt $F$, określony przez związek (9), będzie zatem *ogniskiem* krzywej drugiego stopnia, zaś odpowiadająca mu prosta $D$ kierownicą krzywej.

Stałą wartość $\varepsilon$ stosunku (8) nazwaliśmy *mimośrodem* krzywej; dla elipsy i hyperboli, z racji związku $p = \frac{b^2}{a}$, możemy wartość mimośrodu (6) wyrazić w ten sposób:

$$\text{(11)} \qquad \varepsilon = \sqrt{1 \mp \frac{p}{a}} = \sqrt{1 \mp \frac{b^2}{a^2}}$$

wielkość ta zależy tylko od stosunku osi $\frac{b}{a}$. Widzimy natychmiast, iż *mimośród elipsy jest mniejszy od jedności, mimośród hyperboli jest większy od jedności*, wreszcie, zakładając, iż $a \to \infty$, otrzymamy w granicy, iż *mimośród paraboli jest równy jedności*.

Związkowi (9) odpowiadają dwie wartości

$$\text{(12)} \qquad x_0' = \frac{p}{1+\varepsilon}; \qquad x_0'' = \frac{p}{1-\varepsilon};$$

jeśli $\varepsilon \neq 1$, elipsa i hyperbola posiadają więc dwa ogniska $F_1$ i $F_2$ na osi $Ox$; dla elipsy ($\varepsilon < 1$) obydwa te ogniska leżą po stronie dodatniej wierzchołka $O$, dla hyperboli ($\varepsilon > 1$) jedno tylko ognisko $F_1$ leży po stronie dodatniej; parabola wreszcie ($\varepsilon = 1$) posiada tylko jedno ognisko $F$, które znajduje się na osi tej paraboli w odległości $x_0 = \frac{p}{2}$ od wierzchołka.

Widzimy również z równań (9), iż wartości (12) spełniają związek:

$$p^2 = 2\,p\,x_0 \mp \frac{p}{a}\,x_0^2 \tag{13}$$

według równania (5) oznacza to, iż *rzędne punktów krzywej, wystawione w jej ogniskach, mają wartość równą parametrowi krzywej* $p$.

Z każdym ogniskiem związana jest odpowiednia kierownica. Kierownica $D_1$, odpowiadająca ognisku $F_1$ o dodatniej odciętej $x_0' = \frac{p}{1+\varepsilon}$, leży zawsze po przeciwnej stronie najbliższego dla $F_1$ wierzchołka $O$, mamy bowiem $x_0' < p$, a zatem trójmian pod pierwiastkiem (7) jest wtedy kwadratem sumy i wartość $k$, odpowiadająca ognisku $F_1$, będzie *ujemna*.

Z symetrji elipsy i hyperboli wynika, iż drugie ognisko $F_2$ i jego kierownica $D_2$ muszą być rozłożone symetrycznie z ogniskiem $F_1$ i jego kierownicą względem środka krzywej.

Nadmienimy wreszcie, iż odległość ogniska od jego kierownicy t. j. wartość $|x_0 - k|$ wynosi zawsze:

$$|x_0 - k| = \frac{p}{\varepsilon}, \tag{14}$$

wynika to, albo bezpośrednio z wartości (10) i (12), albo też z uwagi, iż dla punktu $(x_0, p)$, leżącego na krzywej, spełniony jest związek (8), to znaczy, iż

$$\frac{p}{|x_0 - k|} = \varepsilon$$

*Dowiedliśmy więc, iż każda krzywa drugiego stopnia niezwyrodniała, z wyjątkiem koła, jest miejscem geometrycznem punktów, dla których stosunek odległości od ogniska i od odpowiedniej kierownicy jest wielkością stałą, równą mimośrodowi krzywej* $\varepsilon$:

$$\frac{MF}{MQ} = \varepsilon \begin{cases} \text{dla elipsy} & \varepsilon < 1 \\ \text{„ paraboli} & \varepsilon = 1 \\ \text{„ hyperboli} & \varepsilon > 1 \end{cases} \tag{15}$$

Własność powyższa przysługuje oczywiście jeszcze tylko prostej lub parze prostych przecinających się, ognisko $F$ wtedy jest ich punktem przecięcia.

Rozpatrzmy szczegółowiej położenia ognisk i kierownic dla poszczególnych typów krzywych.

Elipsa. Mamy wtedy

$$\varepsilon = \sqrt{1 - \frac{p}{a}} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \tag{16}$$

mimośród elipsy jest więc *mniejszy od jedności;* ponieważ musimy założyć $b < a$, a zatem dwa ogniska rzeczywiste $F_1$ i $F_2$, otrzymane w poprzednich rozważaniach, mogą istnieć tylko na *osi dużej* elipsy (rys. 83). Ogniska te leżą w jednakowej odległości od środka elipsy, mamy bowiem z wyrażenia (16)

$$p = a(1 - \varepsilon^2),$$

a następnie, według wartości odciętych ognisk (12),

$$a - x_0' = a - \frac{p}{1+\varepsilon} = a\varepsilon$$

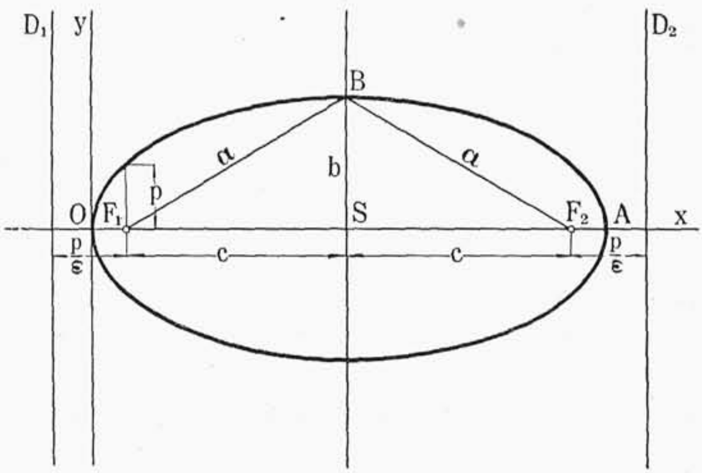
$$x_0'' - a = \frac{p}{1-\varepsilon} - a = a\varepsilon$$

oznaczając tę odległość przez $c$, mamy dla niej taką zależność od osi elipsy:

$$c = a\varepsilon \tag{17}$$

a stąd, według wartości (16),

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} \tag{18}$$




Rys. 83.

Ponieważ $\varepsilon < 1$, więc $c < a$, zatem ogniska leżą we wnętrzu elipsy. Następnie widzimy ze związku (18), iż odcinek $c$ jest przyprostokątną w trójkącie, którego przeciwprostokątna jest $a$, zaś druga przyprostokątna $b$. A więc *ogniska elipsy leżą na osi dużej elipsy w odległości równej połowie osi dużej $a$ od końców osi małej.* Zataczając więc z końca $B$ osi małej koło promieniem $a$, otrzymamy w przecięciu z osią dużą ogniska $F_1$ i $F_2$.

W odległości $\frac{p}{\varepsilon}$ od każdego z ognisk $F_1$ i $F_2$, po przeciwnej stronie najbliższego dla niego wierzchołka elipsy, leżą kierownice $D_1$ i $D_2$, odpowiadające tym ogniskom. Kierownice położone są symetrycznie względem osi małej elipsy i leżą zewnątrz elipsy (rys. 83).

Ze związku (17) widzimy, *iż mimośród elipsy równa się stosunkowi odległości ognisk do osi dużej elipsy*

$$\varepsilon = \frac{c}{a}$$

Nadmienimy jeszcze, że gdy $b$ dąży do $a$, to znaczy elipsa dąży do koła, wtedy $\varepsilon$ i $c$ dążą do zera, więc ogniska dążą do środka koła, a ich kierownice oddalają się nieograniczenie.

H y p e r b o l a. Mamy wtedy

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{p}{a}} = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} \tag{19}$$

mimośród jest więc teraz *większy od jedności.*

Odcięte ognisk $F_1$ i $F_2$, leżących na osi $Ox$, przecinającej hyperbolę, mają wartości

$$x_0' = \frac{p}{1+\varepsilon}; \qquad x_0'' = \frac{p}{1-\varepsilon}$$

a ponieważ, według wzoru (19),

$$p = a(\varepsilon^2 - 1)$$

więc

$$x_0' = a(\varepsilon - 1), \qquad x_0'' = -a(\varepsilon + 1$$

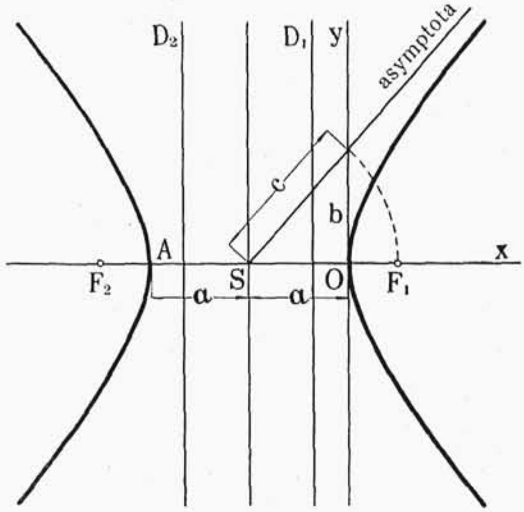
jedno ognisko leży zatem na prawo od wierzchołka $O$, a drugie po przeciwnej stronie, odległości tych ognisk od środka hyperboli $S$ są sobie równe i wynoszą

$$x'_0 + a = a\varepsilon$$
$$|x''_0 - a| = a\varepsilon$$

oznaczając tę odległość przez $c$, mamy takie zależności

$$\begin{aligned} c &= a\varepsilon \\ c &= \sqrt{a^2 + b^2} \end{aligned} \tag{20}$$

ponieważ dla hyperboli mamy $\varepsilon > 1$, a zatem będzie $c > a$, ogniska hyperboli leżą więc nazewnątrz odcinka, łączącego wierzchołki. Widzimy, iż *odległość $c$ ogniska hyperboli od jej środka jest równa przeciwprostokątnej w trójkącie, którego przyprostokątnemi są osi $a$ i $b$*; stąd wynika konstrukcja odcinka $c$ (rys. 84).




Rys. 84.

Nadto, podobnie jak dla elipsy, *mimośród hyperboli równa się stosunkowi odległości ognisk do odległości wierzchołków:*

$$\varepsilon = \frac{c}{a}$$

Każdemu z ognisk $F_1$ i $F_2$ odpowiada kierownica $D_1$ i $D_2$. Kierownice te leżą między środkiem hyperboli $S$ i odpowiednim ogniskiem.

Ponieważ, z natury rzeczy, kierownica nie powinna przecinać krzywej, a zatem hyperbola na drugiej osi symetrji ognisk rzeczywistych posiadać nie może.

P a r a b o l a. Własność paraboli otrzymujemy, jak wiadomo, zakładając, iż $\frac{p}{a} \rightarrow 0$; dla równania

$$y^2 = 2px$$

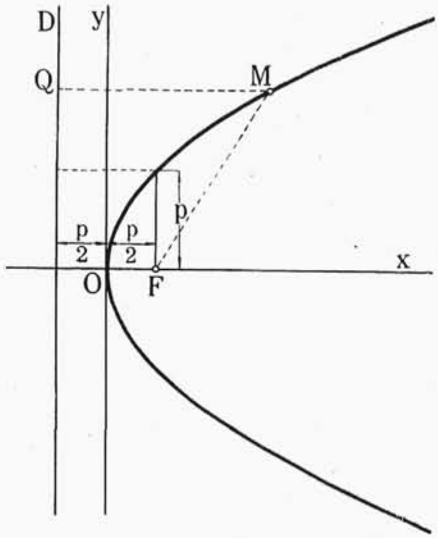
otrzymamy wtedy z wyrażenia (7)

$$\frac{MF}{MQ} = \frac{\sqrt{x^2 - 2(x_0 - p)x + x_0^2}}{x - k}$$

stosunek ten będzie stały i równy jedności, jeśli

$$x_0 = \frac{p}{2}; \quad k = -\frac{p}{2}$$

ognisko paraboli i kierownica leżą więc po obu stronach wierzchołka w odległości od niego równej połowie parametru $p$ (rys. 85). Po-




Rys. 85.

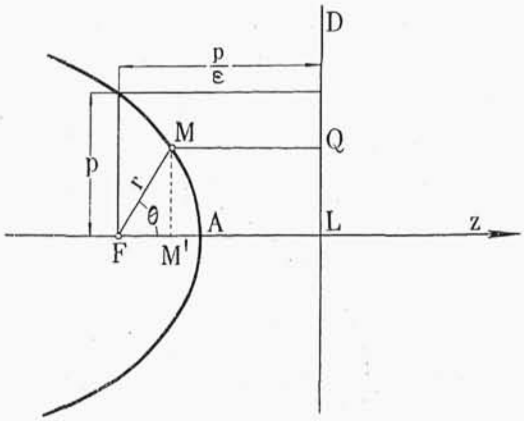
nieważ teraz $\frac{MF}{MQ} = \varepsilon = 1$, więc *parabola jest miejscem geometrycznem punktów, których odległości od ogniska i od kierownicy są sobie równe.*

## 51. Równanie krzywych drugiego stopnia we współrzędnych biegunowych.

Najprostszą postać równania we współrzędnych biegunowych otrzymamy wtedy, jeśli jako biegun obierzemy ognisko krzywej, wtedy bowiem, jak widzieliśmy, promień wodzący wyraża się wymiernie przez współrzędne prostokątne. Obierzmy więc jako biegun jedno z ognisk krzywej $F$, zaś za oś biegunową $Fz$ — prostopadłą, wyprowadzoną z tego ogniska do jego kierownicy i zwróconą w stronę najbliższego wierzchołka $A$, położonego zawsze między ogniskiem i jego kierownicą.

Niech $p$ będzie parametrem krzywej, zaś $\varepsilon$ jej mimośrodem, wtedy odległość ogniska $F$ od kierownicy wynosi (rys. 86)

$$\overline{FL} = \frac{p}{\varepsilon}$$




Rys. 86.

Niech $(r, \theta)$ oznaczają współrzędne biegunowe punktu krzywej $M$, związek między temi współrzędnemi otrzymamy natychmiast z własności charakterystycznej krzywych drugiego stopnia:

$$\frac{MF}{MQ} = \varepsilon$$

Mamy następnie, umawiając się narazie iż $r > 0$,

$$MF = r; \; MQ = |\overline{M'L}|;$$

otóż miara wektora $\overline{M'L}$ wynosi

$$\overline{M'L} = \overline{FL} - \overline{FM'} = \frac{p}{\varepsilon} - r \cos$$

miara ta jest dodatnia, jeśli, jak na rysunku 86-ym, punkt $M$ leży po tej samej stronie kierownicy, co i biegun $F$, jest zaś ujemna, jeśli punkt $M$ leży po stronie przeciwnej; mamy więc dla tych dwóch przypadków związek

$$\frac{MF}{MQ} = \frac{r}{\pm\left(\frac{p}{\varepsilon} - r \cos \theta\right)} = \varepsilon$$

stąd otrzymamy zależność

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \theta}$$

dla punktów krzywej, leżących po tej samej stronie kierownicy co i ognisko $F$, zaś zależność

$$-r = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos \theta}$$

dla punktów przeciwnie położonych. W przypadku elipsy lub paraboli ($\varepsilon \leqslant 1$) zależność pierwsza obejmuje wszystkie punkty krzywej, w przypadku zaś hyperboli ($\varepsilon > 1$) zależność pierwsza dotyczy gałęzi bliższej względem ogniska $F$, zaś zależność druga gałęzi dalszej, leżącej po przeciwnej stronie kierownicy $D$.

Przyjmując znaną umowę, aby ujemne wartości promienia wodzącego $r' = -r$ uważać, jako odpowiadające amplitudzie $\theta' = \theta + \pi$, możemy obie gałęzie krzywej przedstawić przy pomocy jednego równania

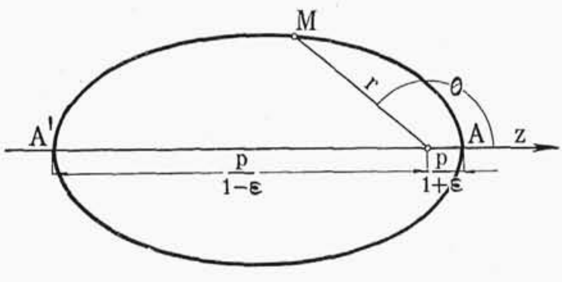
$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \theta} \tag{21}$$

Jest to właśnie żądane równanie we współrzędnych biegunowych, mające postać wspólną dla wszystkich trzech krzywych drugiego stopnia. Równanie (21) przedstawia elipsę, jeśli $\varepsilon < 1$, parabolę, jeśli $\varepsilon = 1$, hyperbolę, jeśli $\varepsilon > 1$.

Widzimy bezpośrednio z równania (21), iż w przypadku $\varepsilon < 1$ krzywa jest ograniczona, albowiem $r$ zmienia się w granicach

$$\frac{p}{1+\varepsilon} \leqslant r \leqslant \frac{p}{1-\varepsilon}$$

gdy $\theta$ zmienia się od 0 do $\pi$ (rys. 87).

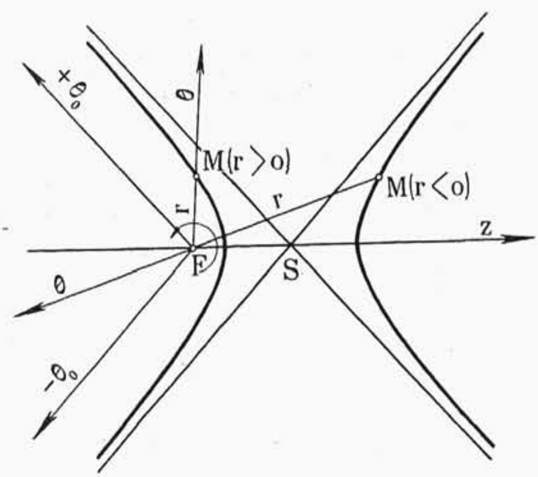



Rys. 87.

W przypadku natomiast $\varepsilon > 1$, krzywa jest nieograniczona, widzimy bowiem bezpośrednio z równania (21), iż $r$ rośnie nieskończenie, gdy $\theta$ dąży do wartości $\pm\theta_0$ takiej, iż $1+\varepsilon\cos\theta_0 = 0$, a więc

$$\cos\theta_0 = -\frac{1}{\varepsilon},$$

dla kąta $\theta_0$ przyjmiemy określoną wartość zawartą między $\frac{\pi}{2}$ i $\pi$, jest to kąt, który tworzy jedna z asymptot z osią początkową $Fz$. Zgodnie z umową o znaku promienia $r$, punkt $M$, dany przez wzór (21), opisze bliższą gałąź hyperboli, gdy $\theta$ będziemy zmieniali od $-\theta_0$ do $+\theta_0$, opisze zaś dalszą gałąź, gdy $\theta$ będziemy zmieniali w dalszym ciągu od $\theta_0$ do $2\pi-\theta_0$ (rys. 88).




Rys. 88.

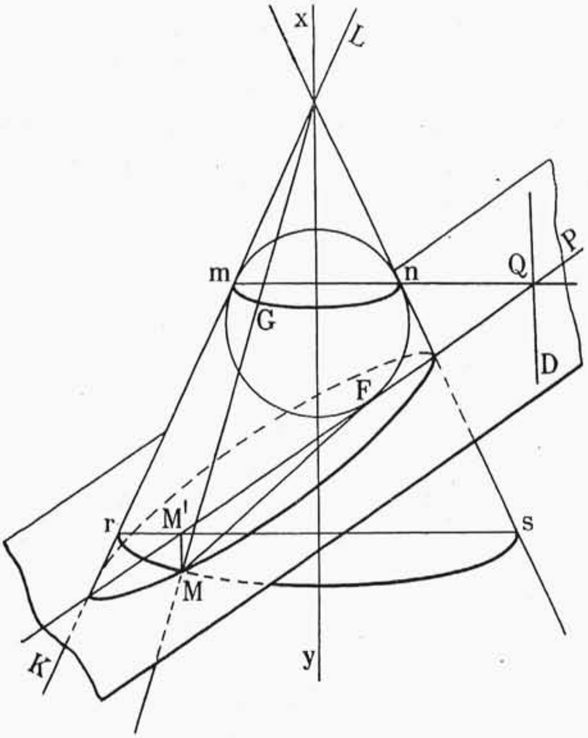
## 52. Przecięcia stożkowe.

Na podstawie własności charakterystycznej (15), można łatwo udowodnić, iż przecięcia płaskie stożka kołowego są krzywemi drugiego stopnia.

Niech więc będzie powierzchnia stożkowa, otrzymana przez obrót prostej $KL$ dokoła osi $xy$ (rys. 89).

Rozważmy dowolną płaszczyznę sieczną $P$, możemy przypuścić, iż ona jest prostopadła do płaszczyzny rysunku. Niech $M$ oznacza dowolny punkt krzywej przecięcia płaszczyzny $P$ z powierzchnią stożkową. Zbudujmy teraz powierzchnię kulistą, która byłaby styczną do powierzchni stożkowej i do płaszczyzny $P$;

niech $mn$ będzie śladem płaszczyzny koła styczności tej kuli z powierzchnią stożkową na płaszczyźnie rysunku, a $F$ niech będzie punktem styczności tej kuli z płaszczyzną sieczną $P$. Płaszczyzna koła $mn$ przecina się z płaszczyzną $P$ wzdłuż prostej $D$, prostopadłej do płaszczyzny rysunku i przebijającej tę płaszczyznę




Rys. 89.

w punkcie $Q$. Poprowadźmy przez punkt krzywej $M$ płaszczyznę prostopadłą do osi stożka, niech $rs$ będzie jej śladem na płaszczyźnie rysunku; rzut $M'$ punktu $M$ na płaszczyznę rysunku będzie leżał na przecięciu odcinka $rs$ ze śladem płaszczyzny $P$. Wreszcie przez $M$ poprowadźmy tworzącą stożka, która przetnie koło $mn$ w punkcie $G$. Mamy

$$MF = MG$$

*jako styczne wyprowadzone z tego samego punktu M do kuli,* następnie

$$MG = rm$$

więc

$$MF = rm$$

Dla dowolnego punktu przecięcia $M$ stosunek $\frac{rm}{M'Q}$ będzie miał oczywiście stałą wartość, a więc i stosunek $\frac{MF}{M'Q}$ będzie miał wartość stałą, ponieważ zaś $M'Q$ równa się odległości punktu $M$ od prostej $D$, zatem dla każdego punktu $M$ przecięcia stożkowego stosunek odległości od punktu $F$ i od prostej $D$ ma tę samą wartość. Przecięcie stożkowe jest więc krzywą drugiego stopnia, której ogniskiem jest punkt styczności $F$, a kierownicą prosta $D$. Krzywa ta jest elipsą, hyperbolą lub parabolą, zależnie od położenia płaszczyzny siecznej $P$. Ze względów powyższych, krzywe drugiego stopnia nazywamy krótko „stożkowemi".

## ROZDZIAŁ X.

## WŁASNOŚCI SZCZEGÓLNE ELIPSY.

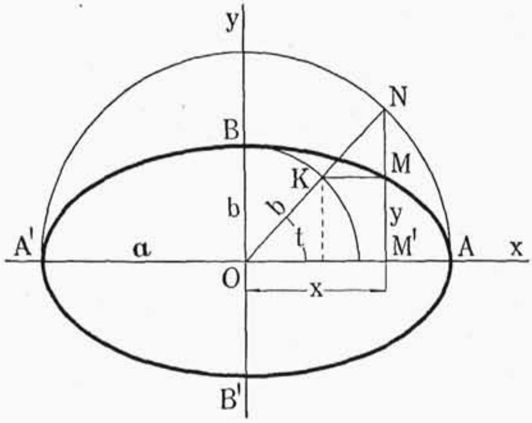
### 53. Elipsa i koło.

W celu zbadania własności elipsy, obierzmy jej osi symetrji za osi współrzędnych, mamy wtedy

(1) $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Załóżmy, iż $a$ jest półosią dużą i rozważmy koło oparte na osi $2a$, jako na średnicy, równanie tego koła będzie

(2) $$x^2+y^2=a^2$$




Rys. 90.