8. Jeśli (X_1, Y_1) i (X_2, Y_2) są miarami rzutów dwóch wektorów w jednym układzie prostokątnym, zaś (X'_1, Y'_1) i (X'_2, Y'_2) miarami rzutów tych wektorów na osi innego układu prostokątnego, to mamy:

$$X_1 X_2 + Y_1 Y_2 = X'_1 X'_2 + Y'_1 Y'_2.$$

9. Dane są współrzędne wierzchołków trójkąta:

$$A\,(1,1);\quad B\,(2,3);\quad C\,(3,-1);$$

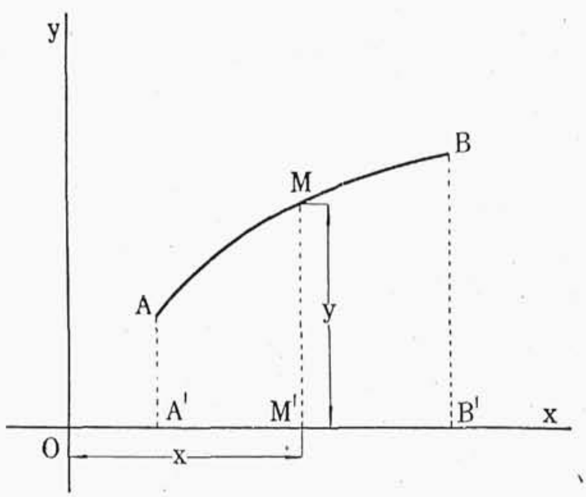
wyznaczyć cosinusy kątów tego trójkąta, opierając się na wzorze na cosinus kąta między osiami.

ROZDZIAŁ II.

WIADOMOŚCI OGÓLNE O LINJACH KRZYWYCH I ICH RÓWNANIACH.

10. Krzywa i pojęcie funkcji.

Rozważmy zbiór wszystkich punktów, leżących na osi Ox między punktami A' i B'. Niech x oznacza odciętą dowolnego punktu M' tego zbioru. Jeśli dla każdej liczby x dobierzemy pewną liczbę y i odmierzymy ją jako rzędną na prostopadłej w punkcie M',



Rys. 28.

to otrzymamy zbiór punktów M, tworzących łuk krzywej AB (rys. 28). Położenie i kształt tego łuku będzie określony, jeśli podamy s p o s ó b, według którego dla każdej liczby x danego zbioru należy dobrać odpowiednią wartość y. Zwykle sposób taki zawarty jest w pewnych wskazanych działaniach matematycznych, które trzeba wykonać nad liczbą x, aby otrzymać odpowiadającą jej liczbę y. Więc np. związki $y = 2x + 3$ lub $y = x^2$ określają w zupełności sposób, według którego dla każdej odciętej x należy dobrać wartość y, każdemu z tych dwóch związków odpowiada określony łuk linji krzywej.

Symbol x, który oznacza odciętą dowolnego punktu między A' i B', nazywamy symbolem zmiennej niezależnej, zaś symbol wielkości y *podporządkowanej* wielkości x — symbolem zmiennej zależnej lub funkcji zmiennej x i piszemy

$$y = f(x)$$

Pojęciu krzywej odpowiada zatem pojęcie analityczne funkcji. Różnym funkcjom, t. j. różnym sposobom podporządkowania wartości y wartościom x, odpowiadają więc różne łuki krzywych.

W poprzednim rozważaniu wprowadziliśmy pewien przedział $A'B'$ dla zmiennej niezależnej, w którym funkcja jest określona. Istnieją również rozważania, w których funkcję y określamy dla dowolnej wartości x dodatniej lub ujemnej.

11. Funkcja pierwszego stopnia i linja prosta.

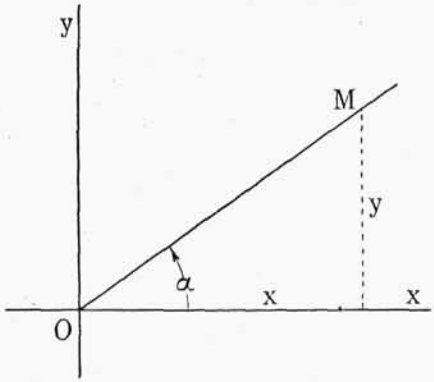
Najprostszą zależnością funkcjonalną w Matematyce jest proporcjonalność. Mówimy, iż zmienna y jest proporcjonalna względem zmiennej x, jeśli stosunek $\frac{y}{x}$ posiada wartość stałą m; y jest więc określoną funkcją zmiennej x daną przez wzór

$$y = mx \tag{1}$$

Niech x i y będą współrzędnemi prostokątnemi punktu M na płaszczyźnie (rys. 29). Stosunek $\frac{y}{x}$ przedstawia tangens kąta α, który tworzy z osią Ox dowolny z dwóch zwrotów prostej, przechodzącej przez punkty O i M; a więc stałość wartości stosunku współrzędnych $\frac{y}{x}$ oznacza, że punkty, spełniające związek (1), leżą na prostej, przechodzącej przez początek układu O, której jeden lub drugi zwrot tworzy z osią Ox taki kąt α, iż

$$tg\,\alpha = m$$

Odwrotnie, dowolny punkt tej prostej spełnia oczywiście związek (1).

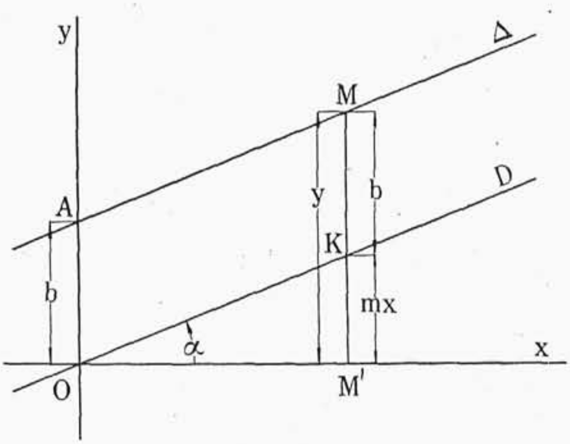


Rys. 29.

Danej wartości m odpowiadają na płaszczyźnie tylko dwa przeciwne zwroty, a zatem jedna określona prosta. Jeśli m jest dodatnie, to jeden ze zwrotów prostej tworzy kąt ostry z osią Ox, jeśli zaś m jest ujemne, to kąt rozwarty. Weźmy teraz pod uwagę funkcję ogólną pierwszego stopnia

$$y = mx + b \tag{2}$$

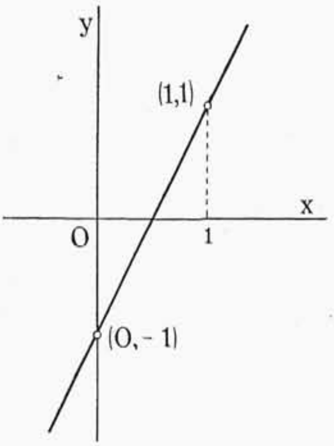
gdzie m i b są to stałe dodatnie lub ujemne. Punkty, których



Rys. 30.

rzędne $M'K$ równają się mx (rys. 30), leżą na prostej D, przechodzącej przez początek O i tworzącej z osią Ox kąt α taki, iż

$tg\,\alpha = m$. A więc punkty, których rzędne MM' obliczone są ze związku (2), będą leżały na prostej Δ równoległej do D i przesuniętej o wielkość b w dodatnim lub ujemnym zwrocie osi Oy, zależnie od znaku b; prosta Δ przecina oś Oy w punkcie A, mającym rzędną b, gdyż dla $x=0$ mamy $y=b$. *Funkcji* (2) *odpowiada zatem linja prosta, tworząca z osią* Ox *kąt* α *taki, iż* $tg\,\alpha = m$ *i odcinająca na osi* Oy *wektor* b.



Rys. 31.

Weźmy przykład liczbowy $y = 2x - 1$; aby wykreślić odpowiednią prostą, wystarczy znaleść dwa jej punkty; np. dla $x=0$ i $x=1$ odpowiednie rzędne będą $y=-1$ i $y=1$. Łącząc dwa otrzymane punkty $(0, -1)$ i $(1, 1)$, będziemy mieli szukaną prostą (rys. 31).

12. Inne przykłady funkcyj i krzywych.

1. Weźmy funkcję

$$y = a x^2$$

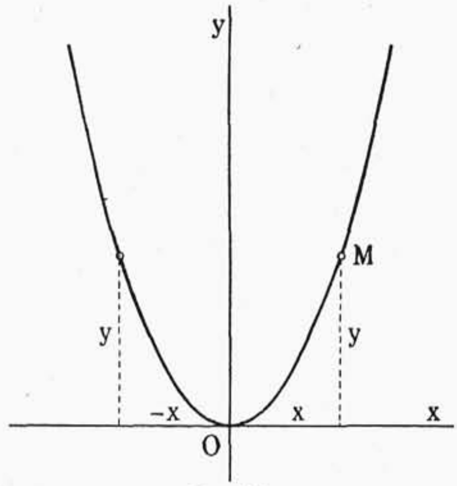
gdzie a oznacza stałą dodatnią.

Gdy $x=0$, wtedy $y=0$, a więc krzywa, odpowiadająca danej funkcji, przechodzi przez początek układu O. Gdy zmienna x przybierać będzie wartości coraz to większe dodatnie, wtedy odpowiednia zmienna y również wzrastać będzie bez granic, odpowiednia gałąź krzywej wychodzi więc z punktu O i wznosi się nieograniczenie ponad oś Ox. Z lewej strony osi Oy gałąź krzywej będzie położona symetrycznie względem poprzedniej, albowiem y przybiera wartości jednakowe dla $+x$ i dla $-x$ (rys. 32), krzywa odpowiednia nazywa się p a r a b o l ą.

2. Niech będzie teraz funkcja

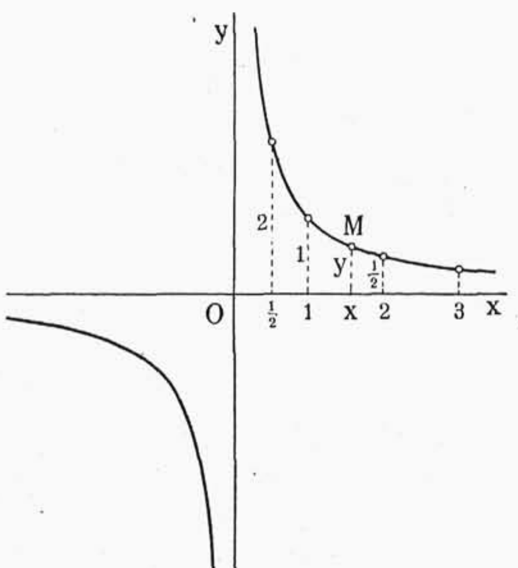
$$y = \frac{1}{x}$$

Gdy zmienna x przybiera coraz to większe wartości dodatnie, wtedy zmienna y przybiera coraz to mniejsze wartości dodatnie, dążąc do zera; odpowiednia gałąź krzywej zbliżać się będzie, jak mówimy, *asymptotycznie* do osi Ox. Gdy x dąży do zera przez wartości dodatnie, wtedy odpowiednia wartość y wzrasta nieogra-



Rys. 32.

niczenie, a zatem punkty krzywej wznosić się będą nieograniczenie, zbliżając się asymptotycznie do osi Oy (rys. 33).



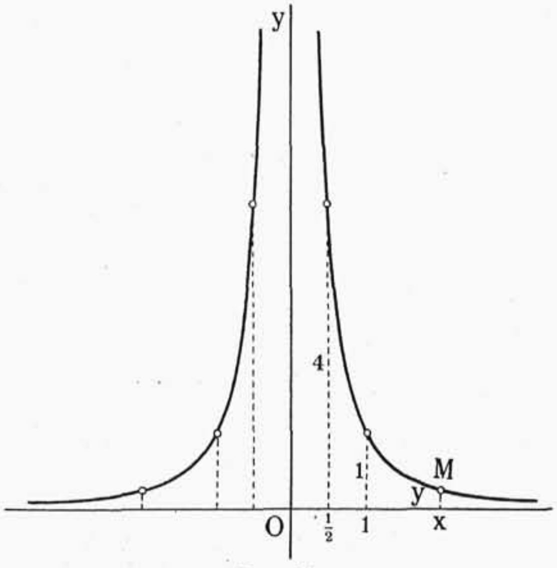
Rys. 33.

Dla ujemnych wartości zmiennej x funkcja y przybiera wartości ujemne i przebieg funkcji jest analogiczny; gdy x dążyć będzie do zera, przybierając ujemne wartości, wtedy odpowiednie punkty krzywej zniżać się będą nieograniczenie. Krzywa, przedstawiająca funkcję $y = \frac{1}{x}$, składa się więc z dwóch oddzielnych gałęzi, zbliżających się asymptotycznie do osi współrzędnych.

3. W przypadku funkcji

$$y = \frac{1}{x^2}$$

otrzymujemy przebieg podobny z tą różnicą, iż dla ujemnych wartości zmiennej x gałąź krzywej będzie symetryczną względem



Rys. 34.

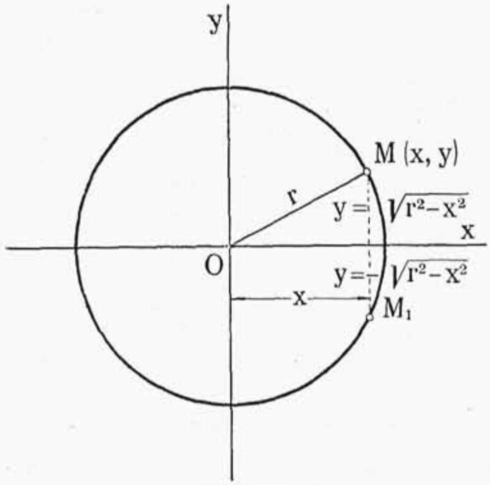
gałęzi, odpowiadającej dodatnim wartościom tej zmiennej. Obydwie gałęzie, wznoszą się więc w tym samym kierunku, gdy x dąży do zera (rys. 34).

13. Ogólne pojęcie równania krzywej.

Linję krzywą na płaszczyźnie można również określić analitycznie jako zbiór wszystkich punktów, których współrzędne (x, y) spełniają pewne równanie z dwiema wielkościami x i y. Weźmy np. związek

$$x^2 + y^2 - r^2 = 0 \tag{3}$$

gdzie r jest daną wielkością stałą i dodatnią; punkty, których współrzędne prostokątne (x, y) spełniają dane równanie (3), będą w stałej odległości $OM = r$ od punktu O i odwrotnie, gdyż $x^2 + y^2$ jest kwadratem odległości punktu (x, y) od początku układu. A więc wszystkie punkty, spełniające równanie (3) i tylko te



Rys. 35.

punkty, tworzą okrąg koła o promieniu r, którego środkiem jest początek układu (rys. 35).

Związek z dwiema zmiennemi x, y, który spełniają wszystkie punkty odpowiedniej krzywej i tylko punkty tej krzywej, nazywamy równaniem krzywej. Wogóle równanie krzywej, po przeniesieniu wszystkich wyrazów związku na jedną stronę, można napisać symbolicznie w ten sposób:

$$F(x, y) = 0 \tag{4}$$

gdzie $F(x, y)$ jest symbolem pewnego wyrażenia matematycznego utworzonego z wielkości x i y.

Traktując w równaniu krzywej (4) jedną z wielkości, np. x, jako niezależną, można (z pewnem zastrzeżeniem) wyznaczyć odpowiednie wartości drugiej y jako funkcji pierwszej. Może się zdarzyć, iż dla tej samej wartości na x znajdziemy z równania dwie lub więcej wartości na y; oznaczać to będzie geometrycznie, iż tej samej odciętej odpowiada kilka punktów, leżących na różnych gałęziach krzywej. Z równania (1) np. otrzymujemy, gdy $|x| < r$, dwie wartości na y:

$$y = +\sqrt{r^2 - x^2}$$

$$y = -\sqrt{r^2 - x^2}$$

pierwsza funkcja odpowiada punktom półkola, leżącego nad osią Ox, zaś druga — punktom półkola, leżącego poniżej tej osi (rys. 35).

Przy pomocy jednego równania $F(x, y) = 0$ można więc określić analitycznie kilka gałęzi krzywej, z których każda wymagałaby oddzielnej funkcji, w razie przedstawienia bezpośredniego zmiennej y w zależności od x.

Z określenia równania krzywej wypływają następujące kryterja dla poznania, czy dany z góry punkt M o współrzędnych (a, b) leży na danej krzywej, czy też znajduje się zewnątrz niej:

1) punkt o współrzędnych (a, b) leży na krzywej o równaniu $f(x, y) = 0$, jeśli liczby a i b, wstawione na miejsce x i y w równanie krzywej, spełniają to równanie;

2) punkt nie leży na krzywej, jeśli jego współrzędne nie spełniają równania krzywej.

Oznaczmy przez $f(a, b)$ wartość, którą przybierze wyrażenie $f(x, y)$, jeśli na miejsce x i y wstawimy dane liczby a i b; wtedy możemy napisać krótko:

jeśli $f(a, b) = 0$, *to punkt* (a, b) *leży na krzywej danej;*

jeśli $f(a, b) \neq 0$, *to punkt* (a, b) *nie leży na krzywej danej.*

Weźmy np. równanie koła

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$$

i punkt $(1, 2)$; mamy wtedy $f(1, 2) = 1^2 + 2^2 - 1 = 4 \neq 0$, zatem punkt $(1, 2)$ nie leży na danem kole.

Krzywą nazywamy a l g e b r a i c z n ą, jeśli jej równanie zawiera tylko działania algebraiczne nad zmiennemi x i y. W przeciwnym wypadku krzywa nazywa się p r z e s t ę p n ą. Przy pomocy znanych z Algebry przekształceń, mianowicie przez podnoszenie do potęgi obu stron równania i sprowadzanie do wspólnego mianownika, można zawsze równanie krzywej algebraicznej doprowadzić do postaci *wymiernej i całkowitej* względem zmiennych x i y, to znaczy do związku

$$f(x, y) = 0$$

którego lewa strona $f(x, y)$ jest *wielomianem algebraicznym całkowitym* względem zmiennych x i y. Jeśli n jest stopniem tego wielomianu względem zmiennych x i y, to *krzywa algebraiczna nazywa się n-go stopnia.*

Krzywe np., odpowiadające równaniom

$$y = ax^2; \quad y = \frac{1}{x}; \quad x^2 + y^2 = 1$$

podane poprzednio, są drugiego stopnia; krzywa odpowiadająca równaniu

$$y = \frac{1}{x^2} \quad \text{lub} \quad x^2 y = 1$$

jest trzeciego stopnia (rys. 31).

TWIERDZENIE. Stopień równania krzywej nie zależy od wyboru układu osi współrzędnych.

Istotnie, według artykułu 9-go, między współrzędnemi prostokątnemi danego punktu (x, y) i (x', y'), względem dwóch dowolnych układów osi, zachodzą związki pierwszego stopnia o postaci

$$\left\{\begin{array}{l} x = a\,x' + b\,y' + c \\ y = a_1 x' + b_1 y' + c_1 \end{array}\right. \tag{5}$$

podstawiając więc te wyrażenia do równania krzywej n-go stopnia

$$f(x, y) = 0 \tag{6}$$

otrzymamy związek między współrzędnemi x', y' o postaci

$$\varphi(x', y') = 0 \tag{7}$$

którego stopień względem współrzędnych x', y' nie może być wyższy niż n; ale i odwrotnie, przy pomocy związków pierwszego stopnia, analogicznych do związków (5), możemy przejść od związku $\varphi(x', y') = 0$ do związku $f(x, y) = 0$, a więc stopień równania (6) nie może być wyższy niż równania (7), stąd wynika, iż stopnie równań (6) i (7) są jednakowe, c. b. d. d.

Stopień równania krzywej jest jej główną, niezmienną cechą, według której przeprowadzamy w Geometrji Analitycznej *klasyfikację krzywych algebraicznych.*

Ogólna postać równania *linji pierwszego stopnia* jest następująca:

$$A\,x + B\,y + C = 0$$

gdzie A, B, C są to stałe współczynniki. Ogólna postać równania *linji drugiego stopnia* będzie taka:

$$A\,x^2 + B\,x\,y + C\,y^2 + D\,x + E\,y + F = 0$$

gdzie A, B, C, D, E, F, są to stałe współczynniki.

Głównym przedmiotem rozdziałów następnych będzie właśnie badanie krzywych pierwszego i drugiego stopnia.

Gdy lewa strona równania krzywej rozszczepia się na dwa czynniki, to znaczy, gdy równanie ma postać:

$$f(x, y) . \varphi(x, y) = 0$$

wtedy zbiór punktów płaszczyzny, spełniających to równanie, jest zespołem dwóch krzywych o równaniach

$$f(x, y) = 0 \text{ i } \varphi(x, y) = 0$$

punkt bowiem, spełniający jedno z tych równań, spełnia też równanie $f(x, y) . \varphi(x, y) = 0$ i odwrotnie.

Przykład 1. Równanie

$$x^2 - y^2 = 0,$$

można napisać w postaci

$$(x + y)(x - y) = 0,$$

a więc spełnione ono jest przez każdy punkt dwóch prostych

$$x + y = 0 \text{ i } x - y = 0$$

Przykład 2. Równanie $xy = 0$ spełnione jest przez każdy punkt osi rzędnych lub odciętych.

Przykład 3. Równanie

$$x^3 + xy^2 - x = 0$$

przedstawia koło $x^2 + y^2 - 1 = 0$ i oś rzędnych $x = 0$.

Odwrotnie, kilka krzywych o równaniach np.

$$f(x, y) = 0 ; \quad \varphi(x, y) = 0 ; \quad \psi(x, y) = 0$$

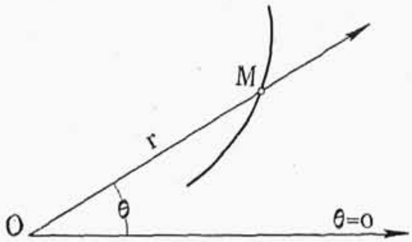
można przedstawić przy pomocy jednego równania

$$f(x, y) \varphi(x, y) \psi(x, y) = 0$$

związek ten spełniony jest bowiem przez każdy punkt danych krzywych i nowych punktów nie daje, gdyż iloczyn może znikać tylko za pośrednictwem swoich czynników.

14. Równanie we współrzędnych biegunowych.

Niech (r, θ) będą współrzędnemi biegunowemi punktu M na płaszczyźnie. Łuk krzywej jest określony, jeśli dane jest prawo, które pozwala dla każdej wartości amplitudy θ (w pewnych granicach) obliczyć odpowiednią wartość dodatnią lub ujemną promienia wodzącego r punktu dowolnego M tego łuku; inaczej mówiąc, łuk jest określony, jeśli promień wodzący jego punktów jest znaną funkcją amplitudy:



Rys. 36.

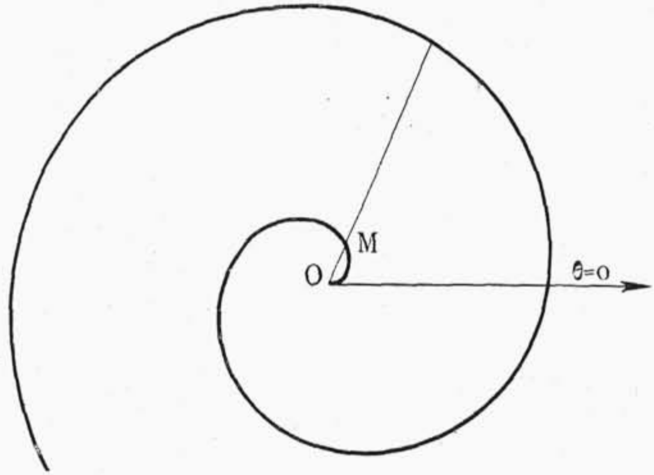
$$r = f(\theta)$$

lub też, jeśli znany jest związek $f(r, \theta) = 0$ między współrzędnemi biegunowemi. Związek ów nazywamy równaniem krzywej we współrzędnych biegunowych.

Weźmy np. związek

(5) $$r = k\theta$$

gdzie k jest współczynnikiem dodatnim; gdy θ wzrasta nieograniczenie, od zera począwszy, wtedy promień wodzący również nieograniczenie rośnie, od zera począwszy; odpowiedni punkt M, obracając się dokoła bieguna O, oddalać się będzie od niego stale i nieograniczenie, a zatem opisze pewną linję spiralną zwaną spiralną Archimedesa (rys. 37).

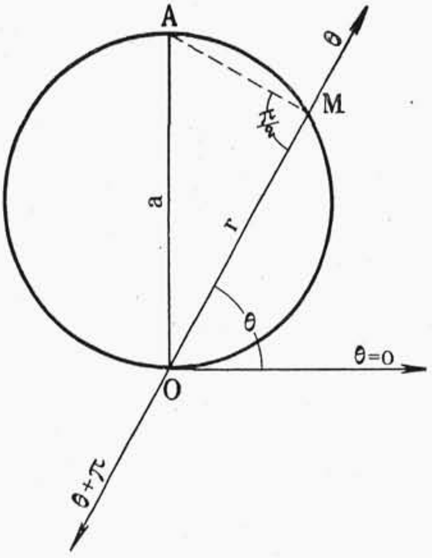


Rys. 37.

Weźmy jeszcze związek

$$r = a \sin\theta;$$

widzimy, iż r jest przyprostokątną przeciwległą kątowi θ w trójkącie o przeciwprostokątnej a; jeśli więc θ wzrasta od 0 do π, to punkt $M(r, \theta)$ opisuje oczywiście okrąg koła o średnicy $OA = a$, stycznego do osi biegunowej (rys. 38). W razie dalszego wzrostu kąta θ od π do 2π, punkt M opisze drugi raz ten sam okrąg koła, gdyż, według umowy dla ujemnych wartości na r, kątom θ i $\theta + \pi$ odpowiadać będzie w danym przykładzie ten sam punkt M.



Rys. 38.

Znając równanie krzywej we współrzędnych prostokątnych, możemy otrzymać jej równanie we współrzędnych biegunowych i odwrotnie, korzystając ze związków

$$(6) \qquad x = r \cos \theta \qquad y = r \sin \theta$$

słusznych w razie, gdy biegun znajduje się w początku układu, zaś oś biegunowa jest osią Ox.

P r z y k ł a d 1. Weźmy np. równanie

$$y = 2x + 1,$$

przedstawiające linię prostą (rys. 39). Podstawiając wyrażenia (6), otrzymamy związek między r i θ t. j. równanie naszej prostej we współrzędnych biegunowych

$$r \,.\, Sin\theta = 2\,r \,.\, Cos\theta + 1$$

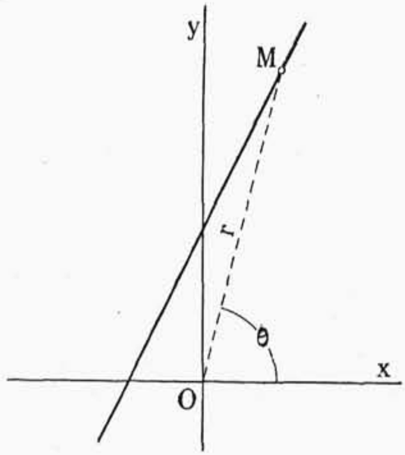
stąd wyraźnie

$$r = \frac{1}{Sin\,\theta - 2\,Cos\,\theta}.$$

Przykład 2. — Dany jest związek

$$r = a \, Sin \, \theta ,$$

przedstawiający, jak wiemy, koło.



Rys. 39.

Korzystając ze wzorów (6), możemy wyrazić $Sin \, \theta$ i r w zależności od x i y, mianowicie będzie

$$r = \pm \sqrt{x^2 + y^2}; \qquad Sin \, \theta = \pm \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}};$$

podstawiając te wyrażenia w równanie dane, otrzymamy równanie krzywej we współrzędnych prostokątnych

$$x^2 + y^2 = ay.$$

15. Równania parametryczne krzywej.

Przypuśćmy, iż współrzędne x i y punktu na płaszczyźnie są określonemi funkcjami pewnej zmiennej t:

$$(7) \qquad \begin{aligned} x &= f(t) \\ y &= \varphi(t) \end{aligned}$$

każdej więc wartości zmiennej t (w pewnym przedziale) odpowiada pewne położenie punktu (x, y) na płaszczyźnie; jeśli wielkość t zmienia się w sposób ciągły, wtedy odpowiedni punkt o współrzędnych (x, y) opisuje łuk linji krzywej. Linja ta określona jest więc analitycznie przez związki (7); zmienna niezależna t zwie się **parametrem**, zaś związki (7) zwą się **równaniami parametrycznemi** krzywej.