3. Dane są współrzędne wierzchołków trójkąta (1, 2); (3, 5); (—3, —4); wyznaczyć równania boków.

4. Współrzędne wierzchołków trójkąta są: (0, 0); (1, 1); (2, —3). Znaleść równania wysokości tego trójkąta i dowieść, że one się przecinają w jednym punkcie.

5. Przez punkt (4, 3) poprowadzić dwie proste, które dzielą na trzy równe części odcinek, łączący punkty (1, 1) i (5, 2).

6. Dane są dwie proste o równaniach

$$mx + (2m - 1)\,y + 3 = 0\,; \qquad (4m - 7)\,x - (m + 2)\,y - 8 = 0.$$

a) wyznaczyć wartość parametru m, dla której proste te są do siebie prostopadłe i znaleść wtedy ich punkt przecięcia.
b) wyznaczyć m tak, aby te proste były równoległe i znaleść wtedy ich odległość.

7. Przez punkt (2, 3) poprowadzić prostą, której odległość od początku współrzędnych równałaby się 1.

8. Przez punkt przecięcia prostych o równaniach

$$-x + y - 1 = 0 \quad ; \quad -2x + y + 1 = 0\,;$$

poprowadzić prostą, której odległość od punktu (2, 1) równałaby się danej liczbie k.

Przeprowadzić dyskusję. Przypadek $k = 1$.

9. Dane są cztery proste, przechodzące przez jeden punkt. Dowieść, że proste te są harmonicznie sprzężone, jeśli prosta sieczna, równoległa do jednej z nich, przecina trzy pozostałe w trzech punktach, równooddalonych od siebie.

10. Dowieść analitycznie, iż

1) dwusieczne w trójkącie przecinają się w jednym punkcie;
2) wysokości w trójkącie przecinają się w jednym punkcie.

ROZDZIAŁ IV.

WŁASNOŚCI FORMY KWADRATOWEJ. RÓWNANIE JEDNORODNE.

25. Określenie i własności formy kwadratowej.

Formą kwadratową dwóch zmiennych niezależnych x i y nazywamy *funkcję jednorodną* drugiego stopnia:

$$f(x\,,y) = A\,x^2 + B\,x\,y + C\,y^2 \tag{1}$$

gdzie $A\,,B\,,C$ są to współczynniki stałe.

Zbadajmy zachowanie się wyrażenia (1) dla różnych wartości zmiennych niezależnych x i y. Rezultaty otrzymane ważne będą w późniejszych rozważaniach nad krzywemi drugiego stopnia. W badaniu formy (1) możemy założyć, iż zmienne niezależne x i y są współrzędnemi prostokątnemi punktów na płaszczyźnie. Z wyrażenia (1) mamy

$$f(x,y) = x^2\left(A + B\frac{y}{x} + C\frac{y^2}{x^2}\right) \tag{2}$$

widzimy, iż w nawiasie otrzymaliśmy trójmian drugiego stopnia względem stosunku $\frac{y}{x}$. W celu zbadania własności formy danej, postąpimy teraz podobnie, jak w dyskusji trójmianu drugiego stopnia; wydzielając więc w trójmianie (2) pełny kwadrat, otrzymamy, w założeniu, iż $C \neq 0$,

$$f(x,y) = Cx^2\left[\left(\frac{y}{x} + \frac{B}{2C}\right)^2 + \frac{4AC - B^2}{4C^2}\right] \tag{3}$$

lub

$$f(x,y) = C\left[\left(y + \frac{B}{2C}x\right)^2 + \frac{4AC - B^2}{4C^2}x^2\right] \tag{4}$$

Z postaci otrzymanej wynikają wnioski następujące.

1) Gdy $B^2 - 4AC < 0$, wtedy wyrażenie w nawiasie jest *sumą kwadratów* i forma dana przybiera wartości o znaku *stałym* dla wszystkich punktów rzeczywistych płaszczyzny (x, y), zerem zaś staje się forma tylko dla $x = 0$, $y = 0$. Formę kwadratową nazywamy w tym wypadku określoną.

2) Gdy $B^2 - 4AC > 0$, wtedy wyrażenie (4) jest *różnicą kwadratów* i wobec tego formę daną można przedstawić jako iloczyn dwóch czynników pierwszego stopnia w postaci

$$f(x,y) = C(y - m_1 x)(y - m_2 x) \tag{5}$$

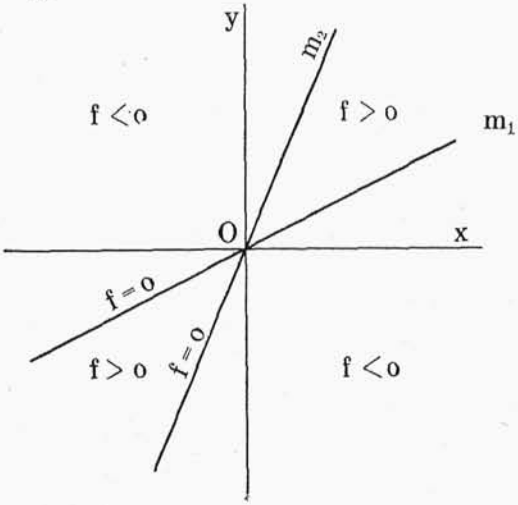
gdzie m_1 i m_2 są pierwiastkami równania

$$A + Bm + Cm^2 = 0 \tag{6}$$

Forma (1) staje się w tym wypadku równą zeru nietylko w punkcie (0,0), ale w każdym punkcie płaszczyzny, którego współrzędne spełniają jeden z dwóch związków

$$\begin{aligned} y &= m_1 x \\ y &= m_2 x \end{aligned} \tag{7}$$

to znaczy w punktach dwóch prostych o współczynnikach kątowych m_1 i m_2, wychodzących z początku układu. Pozatem w wypadku rozważanym $(B^2 - 4AC > 0)$ *forma nie ma stałego znaku*, lecz przybiera wartości o znakach naprzemian dodatnich i ujemnych w czterech częściach, na które proste (7) dzielą płaszczyznę zmiennych (x, y) (rys. 51). W wypadku omówionym formę nazywamy *nieokreśloną*.



Rys. 51.

Jeśli jeden ze współczynników wyrazów kwadratowych formy równa się zeru np. $C = 0$, wtedy formę bezpośrednio możemy przedstawić w postaci iloczynu czynników pierwszego stopnia:

$$f(x, y) = Ax^2 + Bxy = x(Ax + By)$$

podobnej do postaci (5), skąd wynikną wnioski analogiczne o znaku formy.

3) Gdy $B^2 - 4AC = 0$, wtedy forma jest pełnym kwadratem[1]), gdyż możemy ją napisać w postaci

$$f(x, y) = C\left(y + \frac{B}{2C}x\right)^2$$

w założeniu iż $C \neq 0$; forma ma znak stały, znika jednak w każdym punkcie prostej o równaniu

$$y + \frac{B}{2C}x = 0$$

[1]) To znaczy, ściślej mówiąc, równa się pełnemu kwadratowi dwumianu pomnożonemu przez czynnik stały dodatni lub ujemny. Nadal, dla uproszczenia, będziemy mówili krótko „pełny kwadrat" w sensie powyższym.

Wielkość charakterystyczna $B^2 - 4AC$ nazywa się *wyróżnikiem formy kwadratowej.*

Przykład. Forma $x^2 + xy + y^2$ jest określona, forma $x^2 - y^2$ jest nieokreślona.

26. Zamiana zmiennych.

Jeśli osi współrzędnych Oxy obrócimy o dowolny kąt α, wtedy współrzędne w nowym układzie (x', y') są związane ze współrzędnemi (x, y) zależnościami (art. 9)

$$\begin{aligned} x &= x' \operatorname{Cos} \alpha - y' \operatorname{Sin} \alpha \\ y &= x' \operatorname{Sin} \alpha + y' \operatorname{Cos} \alpha \end{aligned} \tag{8}$$

Jeśli wyrażenia te wstawimy na x i y do formy kwadratowej (1), to otrzymamy znowuż formę kwadratową względem zmiennych x', y':

$$A x^2 + B x y + C y^2 = A' x'^2 + B' x' y' + C' y'^2 \tag{9}$$

gdzie nowe współczynniki mają wartości następujące:

$$\begin{aligned} A' &= A \operatorname{Cos}^2 \alpha + B \operatorname{Sin} \alpha \operatorname{Cos} \alpha + C \operatorname{Sin}^2 \alpha \\ B' &= B \operatorname{Cos} 2\alpha + (C - A) . \operatorname{Sin} 2\alpha \\ C' &= A \operatorname{Sin}^2 \alpha - B \operatorname{Sin} \alpha . \operatorname{Cos} \alpha + C \operatorname{Cos}^2 \alpha \end{aligned} \tag{10}$$

mamy stąd

$$\begin{aligned} A' + C' &= A + C \\ A' - C' &= (A - C) \operatorname{Cos} 2\alpha + B \operatorname{Sin} 2\alpha \end{aligned} \tag{11}$$

i następnie dwa związki

$$\begin{aligned} (A' - C')^2 + B'^2 &= (A - C)^2 + B^2 \\ (A' + C')^2 &= (A + C)^2 \end{aligned} \tag{11'}$$

Jeśli dwa te związki odejmiemy stronami, to wypadnie podstawowy związek $B'^2 - 4A'C' = B^2 - 4AC$; mamy więc dwa związki zasadnicze

$$\begin{aligned} B'^2 - 4A'C' &= B^2 - 4AC \\ A' + C' &= A + C \end{aligned} \tag{12}$$

Wyróżnik formy kwadratowej, jak również suma współczynników kwadratów zmiennych nie zmieniają więc swej wartości wskutek obrotu osi, określonego przekształceniem (8).

A zatem forma kwadratowa określona lub nieokreślona zachowuje swą cechę po podstawieniu (8).

W szczególności, jeśli we wzorach (8) weźmiemy taką wartość kąta α, iż

$$B' = B \cos 2\alpha + (C - A) \sin 2\alpha = 0$$

t. j. gdy

$$\operatorname{cotg} 2\alpha = \frac{A - C}{B}; \quad (B \neq 0)$$

wtedy forma kwadratowa, przy użyciu nowych zmiennych (x', y'), wyrazi się w postaci sumy *tylko dwóch wyrazów kwadratowych*

$$(13) \qquad A x^2 + B x y + C y^2 = A' x'^2 + C' y'^2,$$

według (12), będzie wtedy

$$-4 A' C' = B^2 - 4 A C$$

a zatem, w przypadku, gdy forma dana jest określona ($B^2 - 4 A C < 0$), współczynniki A' i C' w wyrażeniu (13) będą miały *znaki jednakowe,* zaś w przypadku, gdy forma dana jest nieokreślona ($B^2 - 4 A C \geqslant 0$), współczynniki A' i C' będą miały *znaki przeciwne.*

27. Równanie jednorodne.

Związek jednorodny n-go stopnia między dwiema współrzędnemi x i y ma postać

$$(14) \quad a_0 x^n + a_1 x^{n-1} y + a_2 x^{n-2} y^2 + \ldots + a_{n-1} x y^{n-1} + a_n y^n = 0$$

gdzie $a_0, a_1, a_2, \ldots \, a_n$ oznaczają współczynniki stałe.

Wykażemy, iż *równanie to przedstawia pewną, niewiększą niż n, liczbę prostych wychodzących z początku układu.* Istotnie, dzieląc obie strony równania (14) przez x^n, w założeniu iż $x \neq 0$, otrzymamy

$$(15) \quad a_0 + a_1 \frac{y}{x} + a_2 \left(\frac{y}{x}\right)^2 + \ldots + a_{n-1} \left(\frac{y}{x}\right)^{n-1} + a_n \left(\frac{y}{x}\right)^n = 0$$

związek ten ma postać równania algebraicznego, określającego pewną, niewiększą niż n, liczbę stałych wartości rzeczywistych stosunku $\frac{y}{x}$, to znaczy

$$(16) \qquad \frac{y}{x} = m_1; \quad \frac{y}{x} = m_2; \quad \frac{y}{x} = m_3 \text{ i t. d.}$$

Zakładając wpierw, iż $a_n \neq 0$, widzimy, iż równanie (14), poza początkiem układu $x=0$, $y=0$, nie będzie spełnione w żadnym punkcie, którego odcięta x znika; wobec tego punkty, spełniające równanie (14), będą spełniały równanie (15), a zatem będą leżały na prostych, wychodzących z początku układu, określonych przez równania (16) i odwrotnie.

Współczynniki kątowe prostych (16) są pierwiastkami równania n-go stopnia

$$(15') \qquad a_0 + a_1 m + a_2 m^2 + \ldots + a_{n-1} m^{n-1} + a_n m^n = 0$$

Jeśli równanie (15') nie ma pierwiastków rzeczywistych i $a_n \neq 0$, wtedy równanie jednorodne (14) spełnione jest tylko w jednym punkcie rzeczywistym (0, 0).

Jeśli pewna liczba współczynników końcowych w równaniu (14) znika:

$$a_n = 0;\ a_{n-1} = 0;\ \text{i t. d.}$$

wtedy możemy w równaniu tem wyrzucić przed nawias zmienną x w odpowiedniej potędze, skąd widzimy, iż w takim wypadku równanie jednorodne (14) spełnione będzie w każdym punkcie prostej o równaniu

$$x = 0$$

to znaczy osi rzędnych i w punktach pewnej liczby prostych o równaniach (16).

Stosując otrzymane wyniki do przypadku szczególnego równania jednorodnego drugiego stopnia

$$(17) \qquad Ax^2 + Bxy + Cy^2 = 0$$

widzimy, zgodnie z art. 25, iż przedstawia ono, w przypadku $B^2 - 4AC > 0$, dwie proste, przecinające się w początku układu, o równaniach

$$(18) \qquad \frac{y}{x} = m_1;\ \frac{y}{x} = m_2,$$

których współczynniki kątowe m_1 i m_2 są pierwiastkami równania

$$(19) \qquad A + Bm + Cm^2 = 0$$

Gdy $C = 0$, wtedy równanie jednorodne ma postać

$$x(Ax + By) = 0$$

a zatem przedstawia też dwie proste o równaniach

$$x = 0;\ Ax + By = 0$$

W przypadku, gdy $B^2-4AC<0$, równanie (17) spełnione jest tylko w jednym punkcie rzeczywistym (0, 0); można też powiedzieć, iż wtedy równanie przedstawia *dwie proste urojone* określone przez równania (18), gdzie m_1 i m_2 są pierwiastkami zespolonemi równania (19).

Wreszcie w przypadku $B^2-4AC=0$, lewa strona równania jest pełnym kwadratem

$$A\left(x+\frac{B}{2A}y\right)^2=0$$

i przedstawia ono jedną prostą o równaniu

$$x+\frac{B}{2A}y=0;$$

mówimy też, iż równanie przedstawia wtedy jedną *prostą podwójną,* jako zjednoczenie dwóch prostych (18).

Przykład 1. Równanie

$$3x^2+xy-y^2=0$$

przedstawia dwie proste o równaniach

$$y=\frac{-1+\sqrt{13}}{2}x;$$

$$y=\frac{-1-\sqrt{13}}{2}x.$$

Przykład 2. Równanie

$$xy=0$$

przedstawia zespół osi współrzędnych.

Przykład 3. Niech będzie równanie jednorodne

$$x^3-2x^2y-3xy^2+6y^3=0;$$

mamy stąd

$$1-2\frac{y}{x}-3\frac{y^2}{x^2}+6\frac{y^3}{x^3}=0$$

i następnie

$$\left(1-2\frac{y}{x}\right)\left(1-3\frac{y^2}{x^2}\right)=0;$$

równanie dane przedstawia więc trzy następujące proste:

$$y=\frac{1}{2}x;\quad y=\frac{1}{\sqrt{3}}x;\quad y=-\frac{1}{\sqrt{3}}x.$$

ZAGADNIENIE. Znaleść warunek, żeby równanie jednorodne

$$Ax^2+Bxy+Cy^2=0$$

przedstawiało dwie proste prostopadłe względem siebie.

Jeśli $C \neq 0$, wtedy współczynniki kątowe m_1 i m_2 tych prostych są pierwiastkami równania

$$A + Bm + Cm^2 = 0;$$

otóż warunkiem prostopadłości jest związek

$$m_1 m_2 = -1,$$

a że bezpośrednio z równania mamy

$$m_1 m_2 = \frac{A}{C},$$

więc warunkiem koniecznym i wystarczającym prostopadłości dwóch prostych, przedstawionych przez równanie jednorodne, będzie związek

$$\frac{A}{C} = -1$$

lub

(20) $$A + C = 0$$

Jeśli $C = 0$, wtedy jedną z prostych jest oś rzędnych $x = 0$, a zatem, w razie ich prostopadłości, drugą winna być oś odciętych $y = 0$, równanie jednorodne ma wtedy postać

$$xy = 0$$

a więc warunek (20) jest też spełniony.

Ćwiczenia.

1. Znaleść tangens kąta między prostemi, przedstawionemi przez równanie

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 = 0.$$

2. Aby dwie proste o równaniach

$$y = m_1 x; \quad y = m_2 x;$$

oraz dwie proste, przedstawione przez równanie

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 = 0,$$

były harmonicznie sprzężone, trzeba i wystarcza, żeby między współczynnikami m_1 i m_2 zachodził związek

$$A + \frac{1}{2} B(m_1 + m_2) + Cm_1 m_2 = 0.$$

3. Aby dwie proste, przedstawione przez równanie

$$A x^2 + Bxy + Cy^2 = 0$$

były harmonicznie sprzężone z prostemi, przedstawionemi przez równanie,

$$A'x^2 + B'xy + C'y^2 = 0,$$

trzeba i wystarcza, żeby było:

$$AC' + A'C = \frac{1}{2} BB'.$$

4. Dowieść, iż para prostych określona przez równanie

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + \lambda (x^2 + y^2) = 0.$$

ma stałe dwusieczne dla różnych wartości parametru λ.

5. Dane są dwie proste, przedstawione przez równanie jednorodne

$$x^2 + 4xy + y^2 + \lambda (2x^2 - 2xy - y^2) = 0.$$

Wyznaczyć λ tak, aby te dwie proste tworzyły ze sobą dany kąt φ. Dyskusja i minimum φ.

6. Określić zbiór punktów płaszczyzny, spełniających równanie

$$ax^4 + bx^2y^2 + cy^4 = 0.$$

ROZDZIAŁ V.

STYCZNA I NORMALNA DO KRZYWEJ.

28. Styczna do krzywej.

Styczną do krzywej w danym punkcie M nazywamy prostą, która jest granicznem położeniem prostej, przechodzącej przez punkt M i punkt sąsiedni krzywej M_1, gdy odległość tych punktów dąży do zera.

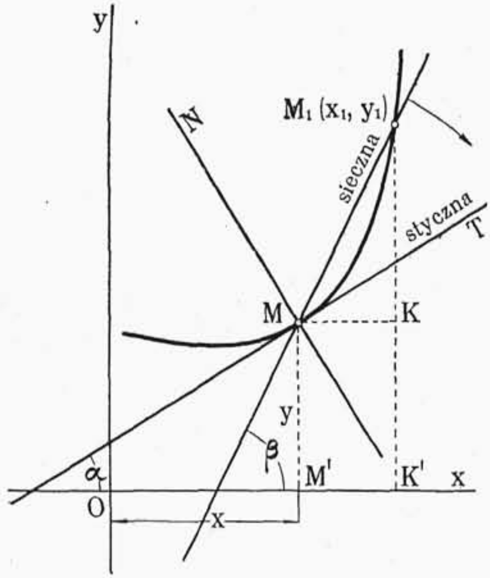
Niech więc będzie krzywa, która odpowiada związkowi

$$y = f(x)$$

między odciętą i rzędną jej punktów. Poprowadźmy prostą przez punkt krzywej M o współrzędnych (x, y) i punkt krzywej sąsiedni M_1 o współrzędnych (x_1, y_1) (rys. 52); równanie tej prostej będzie miało postać

$$(1) \qquad Y - y = \frac{y_1 - y}{x_1 - x}(X - x)$$

Oznaczyliśmy w powyższem równaniu przez X i Y współrzędne bieżące punktów siecznej MM_1, *wielkości* x *i* y *będą zaś w danem rozumowaniu stałe.* Stosunek $\frac{y_1 - y}{x_1 - x}$ jest współczynnikiem kątowym $tg\beta$ siecznej MM_1. Aby więc znaleść graniczne położenie



Rys. 52.

siecznej, gdy punkt sąsiedni M_1 dążyć będzie do punktu M, należy zbadać stosunek $\frac{y_1 - y}{x_1 - x}$, w założeniu, iż wartość x_1 dąży do x

Otóż, jeśli stosunek $\frac{y_1 - y}{x_1 - x}$ dąży do określonej granicy, gdy x_1 dąży do x *z lewej lub z prawej strony* tej wartości, to granicę tę, zależną od wybranej wartości x, nazywamy **pochodną funkcji danej** $y = f(x)$ **względem odciętej** x i oznaczamy symbolem $f'(x)$ lub $\frac{dy}{dx}$:

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \lim_{x_1 \to x} \frac{y_1 - y}{x_1 - x} \tag{2}$$

Istnienie tej pochodnej w danym punkcie oznacza więc geometrycznie, iż granicznem położeniem siecznej t. j. styczną w punkcie M będzie prosta, przechodząca przez punkt M i mająca współczynnik kątowy $tg\,\alpha$ *równy pochodnej* $f'(x)$.

Równanie stycznej w punkcie (x, y) będzie więc miało postać

$$Y - y = f'(x)(X - x) \tag{3}$$

lub

(3′)
$$Y-y=\frac{dy}{dx}(X-x)$$

Zaznaczamy, iż jest to równanie pierwszego stopnia względem symbolów X i Y, oznaczających współrzędne dowolnego punktu stycznej; (x, y) natomiast oznaczają współrzędne punktu styczności, a więc *dla danej stycznej są to wielkości stałe, grające rolę parametrów.*

Przykład. Weźmy parabolę $y=ax^2$ (porównaj art. 12). Współczynnik kątowy stycznej w punkcie, odpowiadającym odciętej x, ma wartość

$$\frac{dy}{dx}=2ax,$$

a więc równanie stycznej do paraboli danej w punkcie (x, y) będzie następujące:

$$Y-y=2ax(X-x),$$

gdzie $y=ax^2$. Widzimy, iż dla $x=0$ współczynnik kątowy stycznej równa się zeru, a więc *parabola dana jest styczna do osi Ox w początku współrzędnych.*

Jeśli dwie krzywe, przechodzące przez dany punkt, mają w tym punkcie wspólną styczną, to mówimy wtedy, iż są między sobą styczne.

Uwaga 1. Jeśli krzywa, odpowiadająca równaniu $y=f(x)$, przechodzi przez początek układu, wtedy sieczna, wychodząca z początku układu i przechodząca przez punkt sąsiedni krzywej $A(x, y)$, ma współczynnik kątowy $\frac{y}{x}$ i *granica tego stosunku,* gdy x dąży do zera, będzie *współczynnikiem kątowym stycznej do krzywej danej w początku układu.* Dla paraboli np. o równaniu $y=ax^2$ mamy

$$\frac{y}{x}=\frac{ax^2}{x}=ax;$$

skąd widzimy odrazu, iż stosunek $\frac{y}{x}$ dąży do zera, gdy x dąży do zera, więc parabola jest styczna w początku układu do osi Ox.

Uwaga 2. Nadmienimy jeszcze, iż w pewnych wypadkach styczna może istnieć w punktach krzywej, w których pochodna w sensie (2) nie istnieje. Jeśli np. stwierdzimy, iż współczynnik kątowy siecznej

$$\frac{y_1-y}{x_1-x}$$

nie ma granicy i jego wartość bezwzględna rośnie nieskończenie, gdy x_1 dąży do x, oznaczać to będzie, iż kąt nachylenia siecznej względem osi Ox dąży do kąta prostego, a więc powiemy wtedy, iż w punkcie $M(x,y)$ istnieje styczna prostopadła do osi Ox. Fakt ten zachodzi np. dla krzywej o równaniu $y^2=x$ w punkcie $(0,0)$, albowiem współczynnik kątowy siecznej, wychodzącej z punktu $(0,0)$, ma wartość

$$\frac{y}{x}=\frac{1}{y}$$

która rośnie nieskończenie, gdy x dąży do zera.

29. Styczna do krzywej określonej przez równania parametryczne.

Dane są współrzędne punktów krzywej jako funkcje parametru

$$x=f(t);\ y=\varphi(t). \tag{4}$$

W celu wyznaczenia równania stycznej, zgodnie z definicją, rozważmy punkt krzywej $M(x,y)$, odpowiadający wartości parametru t i punkt krzywej M_1, odpowiadający wartości sąsiedniej $t+\Delta t$; różnice między współrzędnemi punktów M i M_1 oznaczymy w ten sposób:

$$\Delta x=f(t+\Delta t)-f(t)$$
$$\Delta y=\varphi(t+\Delta t)-\varphi(t)$$

będą to miary rzutów na osi współrzędnych wektora MM_1.

Równanie siecznej, przechodzącej przez punkty M i M_1, będzie miało postać

$$\frac{X-x}{\Delta x}=\frac{Y-y}{\Delta y} \tag{5}$$

gdzie (X, Y) oznaczają współrzędne bieżące punktów tej siecznej. W celu uwidocznienia położenia granicznego prostej (5), dzielimy oba mianowniki stosunków (5) przez Δt i otrzymamy

$$\frac{X-x}{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)}=\frac{Y-y}{\left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)}$$

Gdy punkt M_1 dąży do punktu M, a więc gdy Δt, dodatnie lub ujemne, dąży do zera, to stosunki

$$\frac{\Delta x}{\Delta t},\ \frac{\Delta y}{\Delta t}$$

dążą do pochodnych (jeśli takowe istnieją) funkcyj (4)

$$\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt};$$

a zatem, *jeżeli te pochodne nie znikają jednocześnie*, to sieczna dąży do prostej, określonej przez równanie

$$\frac{X-x}{\frac{dx}{dt}} = \frac{Y-y}{\frac{dy}{dt}} \tag{6}$$

Jest to właśnie równanie stycznej do krzywej w punkcie $M(x, y)$.

Równanie (6) słuszne jest z zachowaniem umowy znanej o znikaniu licznika w razie znikania mianownika. A więc, jeśli w danym punkcie mamy

$$\frac{dx}{dt} = 0; \ \frac{dy}{dt} \neq 0,$$

to $X - x = 0$ i styczna jest równoległa do osi Oy, jeśli zaś w danym punkcie mamy

$$\frac{dy}{dt} = 0; \ \frac{dx}{dt} \neq 0$$

to $Y - y = 0$ i styczna jest w tym punkcie równoległa do osi Ox.

Gdyby pochodne $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}$ w danym punkcie znikały jednocześnie, wtedy równanie (6) nie określałoby położenia stycznej; badanie tego przypadku przekracza jednak zakres niniejszej książki.

30. Normalna do krzywej.

Normalną do krzywej w danym punkcie nazywamy prostą MN prostopadłą do stycznej, wystawioną z punktu styczności M (rys. 52).

Według równania (3), współczynnik kątowy normalnej w punkcie $M(x, y)$ będzie miał wartość

$$-\frac{1}{f'(x)}$$

jeśli $f'(x) \neq 0$, a więc równanie normalnej w punkcie (x, y) do krzywej o równaniu $y = f(x)$ będzie miało postać

$$Y - y = -\frac{1}{f'(x)}(X - x) \tag{7}$$

gdzie (X, Y) oznaczają współrzędne bieżące punktów normalnej. Jeśli $f'(x)=0$, wtedy normalna jest prostopadła do osi Ox i ma równanie $X-x=0$.

Jeśli współrzędne punktów krzywej są funkcjami parametru, to, według równania (6), równanie normalnej napiszemy w postaci

$$Y-y=-\frac{\left(\frac{dx}{dt}\right)}{\left(\frac{dy}{dt}\right)}(X-x)$$

lub ogólniej

$$(X-x)\frac{dx}{dt}+(Y-y)\frac{dy}{dt}=0 \tag{8}$$

P r z y k ł a d. Dana jest krzywa o równaniu (art. 9)

$$y=\frac{1}{x},$$

współczynnik kątowy stycznej w punkcie (x, y) ma wartość

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{x^2},$$

równanie stycznej w punkcie (x, y) będzie więc miało postać

$$Y-y=-\frac{1}{x^2}(X-x);$$

zaś równanie normalnej

$$Y-y=x^2(X-x).$$

ROZDZIAŁ VI

ZAGADNIENIA DOTYCZĄCE KOŁA.

30. Równanie koła.

Koło w układzie Oxy jest w zupełności określone, jeśli dane są współrzędne (a, b) jego środka C i promień r. Aby otrzymać równanie, które spełniają współrzędne (x, y) każdego punktu M, leżącego na okręgu i tylko takie punkty, wystarczy napisać, iż odległość dwóch punktów $M(x, y)$ i $C(a, b)$ jest równa r; ponieważ miary rzutów wektora CM są $x-a$ i $y-b$, otrzymamy więc związek szukany w tej postaci:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2 \tag{1}$$