a ponieważ miara rzutu wektora równa się jego mierze, pomnożonej przez cosinus odpowiedniego kąta między osiami, otrzymamy więc związki linjowe:

$$
\begin{aligned}
x &= \alpha_1 x' + \alpha_2 y' + \alpha_3 z' \\
y &= \beta_1 x' + \beta_2 y' + \beta_3 z' \qquad (7) \\
z &= \gamma_1 x' + \gamma_2 y' + \gamma_3 z'
\end{aligned}
$$

Zaznaczymy, iż takie same związki zachodzą między miarami rzutów (X, Y, Z) i (X', Y', Z') tego samego wektora $\overrightarrow{V}$ na osi jednego układu prostokątnego i na osi drugiego:

$$
\begin{aligned}
X &= \alpha_1 X' + \alpha_2 Y' + \alpha_3 Z' \\
Y &= \beta_1 X' + \beta_2 Y' + \beta_3 Z' \qquad (7') \\
Z &= \gamma_1 X' + \gamma_2 Y' + \gamma_3 Z'
\end{aligned}
$$

Podobnie rozumując, wyrazimy odwrotnie współrzędne x', y', z' w zależności od x, y, z:

$$
\begin{aligned}
x' &= \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z \\
y' &= \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z \qquad (8) \\
z' &= \alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z
\end{aligned}
$$

Związki (8) można wysnuć też ze związków (7), mnożąc je obustronnie przez $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$, i t. p. i dodając.

W przypadku ogólnym, gdy dwa układy nie mają wspólnego początku, prowadzimy przez początek jednego układu osi równoległe do drugiego i otrzymamy związki między współrzędnemi danego punktu w dwóch różnych układach, łącząc wzory (1) i (7).

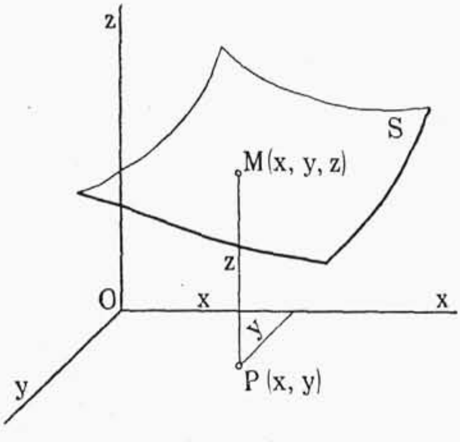
ROZDZIAŁ IV.

O POWIERZCHNI I LINJI W PRZESTRZENI.

11. Równanie powierzchni.

Jeśli każdemu punktowi $P(x, y)$ płaszczyzny (Oxy) (lub jej części) podporządkujemy określone wartości z i odmierzymy jako współrzędne na prostopadłych do płaszczyzny (Oxy), wystawionych z punktu P, to otrzymamy zbiór punktów $M(x, y, z)$ w przestrzeni, tworzących pewną powierzchnię S. Powierzchnia ta będzie więc określona, jeśli określone jest prawo, pozwalające dla dwóch dowolnych wartości x i y dobrać odpowiednią wartość z, to znaczy, jeśli określona jest *funkcja dwóch zmiennych niezależnych*

(1) $$z = f(x, y).$$



Rys. 152.

Pojęciu funkcji dwóch zmiennych niezależnych odpowiada zatem pojęcie geometryczne powierzchni.

W zastosowaniach zwykle funkcja $f(x, y)$ określona jest przez wskazanie działań matematycznych, które należy wykonać nad wielkościami x i y, żeby otrzymać wartość z. Oto przykłady funkcyj:

$$z = x + y; \quad z = x + \sqrt{y}; \quad z = \frac{xy}{x^3 + y^3}$$

każdej z nich odpowiada pewna powierzchnia w przestrzeni. Można również określić powierzchnię, jako zbiór wszystkich punktów przestrzeni, których współrzędne (x, y, z) spełniają zgóry dany związek między zmiennemi x, y, z; związek ten, po przeniesieniu wszystkich wyrazów na jedną stronę, napiszemy w postaci

(2) $$F(x, y, z) = 0$$

Związek (2), spełniony w punktach danej powierzchni, nazywa się *równaniem tej powierzchni.* Dowolny punkt przestrzeni o współrzędnych (a, b, c) leży na powierzchni (2) lub też znajduje się zewnątrz niej, zależnie od tego, czy wartość $F(a, b, c)$, którą przybiera wyrażenie $F(x, y, z)$ w tym punkcie, jest równą zeru, czy też jest od zera odmienna.

W równaniu powierzchni (2) wartości dwóch zmiennych można wybrać dowolnie, wartość pozostałej zaś obliczamy na podstawie tych wartości poprzednich z równania. Oczywiście wybór tych dwóch wartości zmiennych niezależnych podlega wogóle pewnemu ograniczeniu, warunkującemu *istnienie* odpowiedniej wartości pozostałej zmiennej w związku (2) (patrz przykłady nast.). Może się zdarzyć, iż w związku (2) parze liczb (x, y) odpowiada kilka wartości na z, oznaczać to będzie geometrycznie, iż związkowi (2) odpowiada powierzchnia o kilku powłokach, które mogą być nawet ze sobą niepołączone.

Powierzchnia nazywa się *algebraiczną*, jeśli jej równanie (2) zawiera działania algebraiczne nad zmiennemi x, y, z. Powierzchnia algebraiczna nazywa się n-tego stopnia, jeśli jej równanie sprowadza się do związku n-tego stopnia względem zmiennych x, y, z.

Podobnie jak dla krzywych na płaszczyźnie, łatwo udowodnić, iż *stopień równania powierzchni nie zależy od wyboru układu osi współrzędnych.*

RÓWNANIE PIERWSZEGO STOPNIA.

Równanie ogólne powierzchni pierwszego stopnia ma postać

$$Ax + By + Cz + D = 0, \tag{3}$$

założymy, iż współczynniki A, B, C niewszystkie równają się zeru.

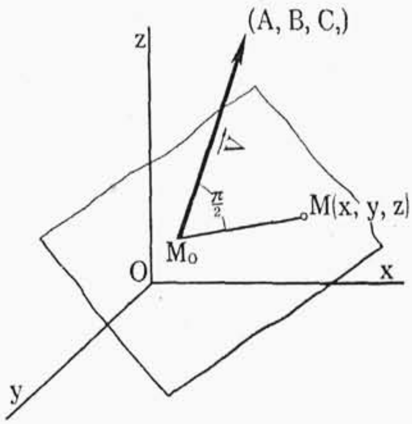
Niech $M_0(x_0, y_0, z_0)$ będzie dowolnym punktem tej powierzchni, a więc takim, iż

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0. \tag{3'}$$

Odejmując strony równości (3) i (3'), mamy

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \tag{4}$$

ale $x - x_0$, $y - y_0$, $z - z_0$ są to miary rzutów wektora, łączącego punkt zmienny $M(x, y, z)$ z punktem stałym $M_0(x_0, y_0, z_0)$, równanie (4) wyraża więc fakt geometryczny, iż *wektor* M_0M, *łączący dowolny punkt powierzchni M z punktem M_0, jest zawsze prostopadły do stałego wektora $\overrightarrow{V}$, którego rzuty na osi mają miary A, B, C* (rys. 153) — jest to charakterystyczna własność punktów płaszczyzny P, przechodzącej przez punkt M_0 i prostopadłej do wektora określonego $\overrightarrow{V}$. Każdy punkt, spełniający równanie (3), leży zatem na płaszczyźnie P i *odwrotnie*. A więc



Rys. 153.

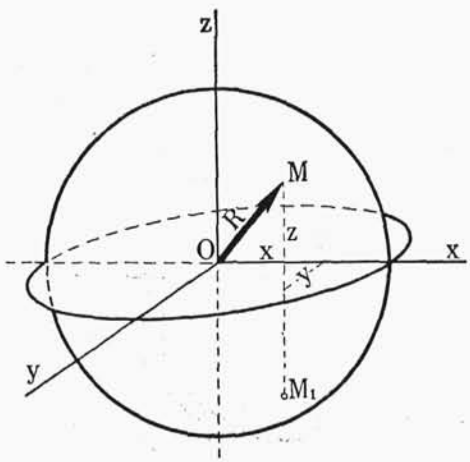
równanie pierwszego stopnia (3) *przedstawia płaszczyznę prostopadłą do wektora, którego miary rzutów na osi równe są współczynnikom A, B, C, występującym w równaniu.*

RÓWNANIE KULI.

Weźmy kulę o promieniu R, której środek znajduje się w początku układu. Dowolny punkt kuli $M(x, y, z)$ ma tę własność, iż znajduje się w stałej odległości R od środka O (rys. 154), a więc wszystkie punkty kuli i tylko takie punkty spełniają równanie

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \tag{5}$$

Równanie kuli jest, jak widzimy, drugiego stopnia.



Rys. 154.

Jeśli środek kuli znajduje się w punkcie o współrzędnych (a, b, c), to, ze względu, iż rzuty wektora, łączącego środek (a, b, c) z dowolnym punktem kuli o współrzędnych (x, y, z), mają miary

$$x-a,\ y-b,\ z-c,$$

równanie kuli będzie miało postać

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$$

Z równania (5) otrzymujemy na z dwie wartości

$$z=+\sqrt{R^2-x^2-y^2}$$
$$z=-\sqrt{R^2-x^2-y^2}$$

odpowiadające półkulom, leżącym ponad płaszczyzną (Oxy) i poniżej tej płaszczyzny, wartości zmiennych niezależnych x i y muszą oczywiście podlegać następującemu ograniczeniu:

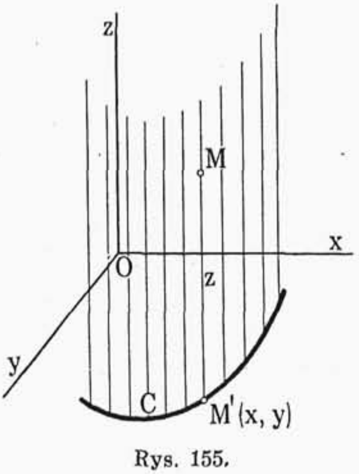
$$x^2+y^2 \leqslant R^2$$

RÓWNANIE Z DWIEMA ZMIENNEMI.

Rozważmy związek między dwiema współrzędnemi np.

$$f(x, y)=0$$

Jeśli na płaszczyźnie Oxy związek ten spełniony jest w punktach pewnej krzywej C, to w przestrzeni związek $f(x, y)=0$ będą spełniały te wszystkie punkty $M(x, y, z)$, których rzuty M' na



Rys. 155.

płaszczyznę Oxy leżą na krzywej C, wartość bowiem współrzędnej z jest dowolna. A więc równanie $f(x, y) = 0$ spełnione jest w punktach powierzchni, utworzonej przez prostopadłe do płaszczyzny Oxy, wystawione w punktach (x, y) krzywej C (rys. 155); powierzchnia tego rodzaju nazywa się *walcową*.

Analogicznie równanie z dwiema zmiennemi

$$f(y, z) = 0$$

spełnione jest w punktach powierzchni walcowej, utworzonej przez prostopadłe, wystawione w punktach krzywej o równaniu $f(y, z) = 0$, leżącej w płaszczyźnie Oyz i t. p. wniosek dla równania $f(x, z) = 0$.

W szczególnym wypadku równanie pierwszego stopnia np.

$$Ax + By + C = 0$$

spełnione jest w punktach płaszczyzny prostopadłej do płaszczyzny Oxy, której śladem na tej płaszczyźnie jest prosta, określona właśnie przez dany związek.

12. Równania linji w przestrzeni.

W równaniach poprzednich wprowadziliśmy pojęcie powierzchni, jako zbiór punktów, otrzymany przez zmianę *dwóch zmiennych niezależnych*. Pojęcie natomiast linji w przestrzeni wprowadzimy, jako zbiór punktów, otrzymany przez zmianę ciągłą wartości *jednej zmiennej niezależnej*.

Niech będą więc dane współrzędne prostokątne x, y, z, jako funkcje *jednej* zmiennej t zwanej parametrem:

$$\begin{aligned} x &= f_1(t) \\ y &= f_2(t) \\ z &= f_3(t) \end{aligned} \tag{7}$$

zmieniając t w sposób ciągły, w pewnych granicach, otrzymamy zbiór punktów $M(x, y, z)$ w przestrzeni, tworzących pewną linję krzywą. Związki (7), zwane równaniami parametrycznemi linji, określają analitycznie pojęcie krzywej w przestrzeni.

W szczególnym wypadku, gdy funkcje (7) dla dowolnej wartości t spełniają pewien związek linjowy

$$Af_1(t) + Bf_2(t) + Cf_3(t) + D = 0$$

krzywa jest *płaską*, to znaczy jej punkty leżą na płaszczyźnie

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

Gdy przypadek ten nie zachodzi, krzywą w przestrzeni zwiemy *skośną*.

Linję w przestrzeni można też określić, jako zbiór punktów, spełniających *dwa związki* z trzema zmiennemi o postaci:

$$F(x, y, z) = 0 \qquad (8)$$
$$\Phi(x, y, z) = 0$$

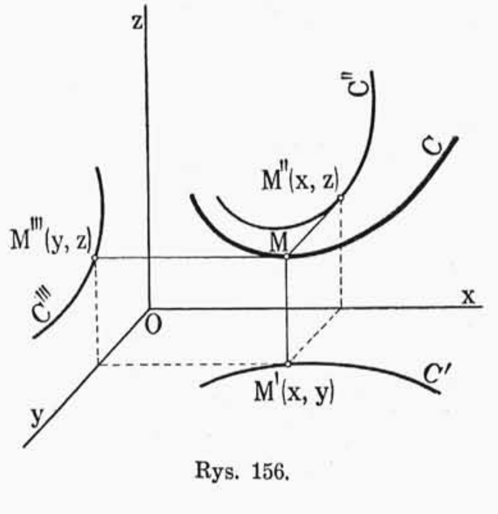
W związkach tych *tylko jedna* zmienna może być obrana jako niezależna, zaś pozostałe będą jej funkcjami — zgodnie z pojęciem linji. Z geometrycznego punktu widzenia *związki* (8) *określają linję, jako przecięcie dwóch powierzchni* o równaniach

$$F(x, y, z) = 0 \quad \text{i} \quad \Phi(x, y, z) = 0$$

Rugując ze związków (8) kolejno jedną ze zmiennych x, y, z, otrzymamy trzy związki, każdy z dwiema zmiennemi, o postaci

$$f(x, y) = 0; \quad \varphi(x, z) = 0; \quad \psi(y, z) = 0 \qquad (9)$$

Każdy z tych związków przedstawia równanie rzutu danej linji C na odpowiednią płaszczyznę współrzędnych, gdyż (x, y) są to współrzędne rzutu M' punktu linji M na płaszczyznę (Oxy), (x, z) współrzędne rzutu M'' na płaszczyznę (Oxz) i (yz) są to współrzędne rzutu M''' na płaszczyznę (Oyz) (rys. 156).



Rys. 156.

Gdy linja określona jest przez równania parametryczne (7), to równania rzutów tej linji otrzymamy, rugując parametr t ze związku pierwszego i drugiego, następnie z pierwszego i trzeciego i wreszcie z drugiego i trzeciego.

Zarówno postać parametryczna (7), jak i związki (8) nie określają danej linji w sposób jedyny; tę samą linję można określić nieskończenie wieloma sposobami parametrycznie, lub jako przecięcie dwóch powierzchni. Inaczej rzecz się ma ze związkami (9), te bowiem, jako równanie rzutów linji na płaszczyzny współrzędnych, są jedyne dla danej linji. Zaznaczymy, iż, określając linję przez równania jej rzutów, *możemy tylko dwa ze związków* (9) *podać dowolnie*, albowiem trzeci wynika wtedy z tych dwóch, przez wyrugowanie odpowiedniej zmiennej.

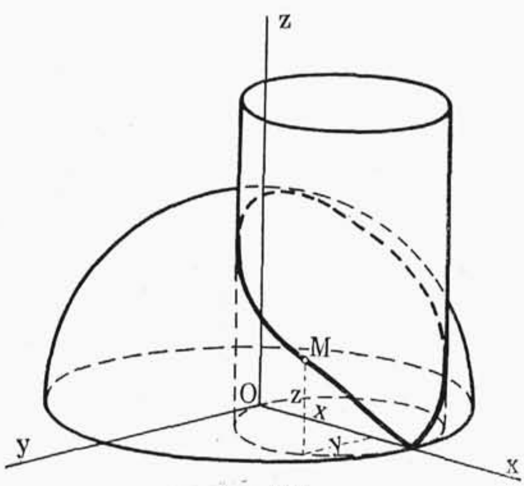
Nadmienimy jeszcze, iż linję można też określić przez dwa związki, z których jeden zawiera trzy współrzędne, a drugi dwie, to znaczy przez związki o postaci

$$F(x, y, z) = 0; \quad f(x, y) = 0$$

Przykład 1. Znaleść rzuty na płaszczyznę współrzędnych linji, będącej przecięciem kuli o równaniu

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

z walcem, którego oś jest równoległa do osi Oz i który przecina płaszczyznę Oxy wzdłuż koła o promieniu $\frac{r}{2}$ stycznego w początku układu do osi Oy (rys. 157).



Rys. 157.

Podstawą walca jest więc koło o równaniu

$$\left(x - \frac{r}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{r^2}{4};$$

to jest

$$x^2 + y^2 - rx = 0,$$

koło to jest rzutem danej linji na płaszczyznę Oxy, gdyż linja położona jest na walcu. Linję określają więc dwa związki:

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2;$$
$$x^2 + y^2 - rx = 0.$$

Rugując, przez odjęcie, zmienną y, otrzymamy związek

$$z^2 + rx = r^2,$$

rzut linji na płaszczyznę Oxz jest więc łukiem paraboli; rugując zmienną x, otrzymujemy równanie rzutu na płaszczyznę Oyz:

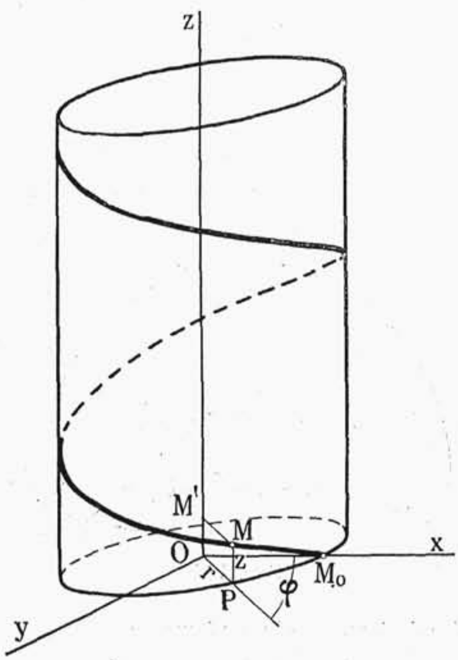
$$y^2 = z^2\left(1 - \frac{z^2}{r^2}\right)$$

jest to krzywa czwartego stopnia, posiadająca punkt podwójny w początku O.

Na rys. 157 przedstawiona jest tylko część krzywej przecięcia, leżąca nad płaszczyzną Oxy, pozostała część leży poniżej płaszczyzny Oxy i jest symetryczna względem podanej.

P r z y k ł a d 2 (L i n j a ś r u b o w a). Punkt M opisuje na powierzchni walca obrotowego *linję śrubową*, jeśli przesunięcie rzutu M' tego punktu na oś walca i odpowiedni kąt obrotu promienia MM' dokoła osi walca są do siebie proporcjonalne.

Niech oś Oz będzie osią walca o promieniu r. Obierzmy punkt M_0 na osi Ox, jako położenie początkowe punktu M. Łuk M_0M będzie łukiem linji śru-



Rys. 158.

bowej, jeśli przesunięcie OM' rzutu M' wzdłuż osi Oz jest proporcjonalne do kąta obrotu $POM_0 = \varphi$, który tworzy wektor OP z osią Ox (rys. 158), to znaczy

$$\frac{OM'}{\varphi} = k,$$

gdzie k jest pewną stałą. Pełnemu obrotowi $\varphi = 2\pi$ odpowiada więc przesunięcie $OM' = 2\pi k$ wzdłuż osi walca. Analitycznie określimy linję śrubową, wyznaczając współrzędne punktu M, jako funkcje kąta obrotu φ, mamy mianowicie natychmiast

$$\begin{cases} x = r\,\mathrm{Cos}\,\varphi \\ y = r\,\mathrm{Sin}\,\varphi \\ z = k\varphi \end{cases}$$

Rzutem danej linji śrubowej na płaszczyznę Oxy jest oczywiście koło. Aby znaleść równanie rzutu na płaszczyznę, przechodzącą przez oś walca, więc np. na płaszczyznę Oxz, rugujemy parametr φ z dwóch związków

$$x = r\,\mathrm{Cos}\,\varphi; \qquad z = k\varphi$$

i otrzymamy

$$x = r\,\mathrm{Cos}\,\frac{z}{k},$$

rzutem linji śrubowej na płaszczyznę, równoległą do osi walca jest więc sinusoida.

Nadmienimy jeszcze, iż, w razie rozwinięcia powierzchni walca na płaszczyźnie, linja śrubowa przekształci się na zbiór odcinków prostej.

13. Równania parametryczne powierzchni.

Analogicznie do określenia linji przez rozważenie współrzędnych x, y, z jako funkcyj *jednego* parametru zmiennego o postaci (7), rozważmy w przestrzeni współrzędne prostokątne x, y, z, jako funkcje pewnych *dwóch* zmiennych niezależnych u i v:

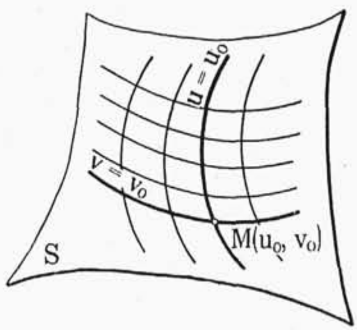
$$x = f_1(u, v)$$
$$y = f_2(u, v) \tag{10}$$
$$z = f_3(u, v)$$

Zmieniając w sposób ciągły i niezależnie od siebie wartości u i v, otrzymamy zbiór punktów, tworzących wogóle pewną powierzchnię S.

Równanie tej powierzchni w postaci zwykłej $F(x, y, z) = 0$ otrzymamy, rugując z trzech związków (10) dwie zmienne u i v, a mianowicie wyznaczamy np. z dwóch pierwszych związków zmienne u i v, w zależności od x i y i wstawiamy w związek trzeci (jeśli to jest efektywnie wykonalne).

Każdej parze liczb (u_0, v_0) odpowiada więc określony punkt M danej powierzchni S. Jeśli ustalimy wartość zmiennej $u = u_0$ i będziemy zmieniali wartość drugiej v w sposób ciągły, to otrzymamy pewną linję C_{u_0}, nakreśloną na powierzchni S, która łączy punkty, odpowiadające tej samej wartości $u = u_0$. Podobnie, ustalając wartość $v = v_0$ i zmieniając wartość u, otrzymamy linję C_{v_0}, nakreśloną na powierzchni S, która łączy punkty, odpowiadające tej samej wartości v_0 zmiennej v. Biorąc pod uwagę wszelkie możliwe wartości u_0 i v_0, otrzymamy dwa układy linij C_{u_0} i C_{v_0}, nakreślonych na danej powierzchni.

Dowolny punkt M powierzchni, określony przez parę liczb (u_0, v_0), jest więc przecięciem się krzywej $u = u_0$ jednego układu z krzywą $v = v_0$ drugiego układu (rys 159); z tego powodu zmienne (u, v) w równaniach (10) nazywamy *współrzędnemi krzywolinjowemi* punktów powierzchni danej.



Rys. 159.

Przykład. Niech będą związki

$$x = r \operatorname{Sin} u \operatorname{Cos} v;$$

$$(11) \qquad y = r \operatorname{Sin} u \operatorname{Sin} v;$$

$$z = r \operatorname{Cos} u.$$

Rugując, przez zsumowanie kwadratów, zmienne u i v, mamy równanie

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2.$$

Powierzchnia określona przez równania (11) jest więc kulą. Ze względu na wzory (2) (art. 2), widzimy, iż współrzędne u i v są to: kąt biegunowy i amplituda. Linje $u =$ *stałej* są więc równoleżnikami powierzchni kulistej, zaś $v =$ *stałej* są jej południkami. Każdy punkt powierzchni kuli jest więc określony, jako przecięcie pewnego równoleżnika z pewnym południkiem.