Mamy np.

$$\begin{vmatrix} a_1+a_1', b_1, c_1 \\ a_2+a_2', b_2, c_2 \\ a_3+a_3', b_3, c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1, b_1, c_1 \\ a_2, b_2, c_2 \\ a_3, b_3, c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1', b_1, c_1 \\ a_2', b_2, c_2 \\ a_3', b_3, c_3 \end{vmatrix}$$

Własność ta jest oczywista z uwagi, iż wszystkie wyrazy danego wiersza lub kolumny znajdują się po jednym w każdym ze składników sumy (13'), a więc każdy z tych składników rozszczepi się wtedy na kilka składników, należących do wyznaczników odpowiednich.

WŁASNOŚĆ VI. Jeśli wszystkie elementy pewnego wiersza lub kolumny są takiemi samemi kombinacjami linjowemi pozostałych elementów, leżących w tych samych kolumnach lub wierszach, to wartość wyznacznika równa się zeru.

Mamy np.

$$a_1 = \alpha b_1 + \beta c_1$$
$$a_2 = \alpha b_2 + \beta c_2$$
$$a_3 = \alpha b_3 + \beta c_3$$

gdzie α i β są to pewne współczynniki, otrzymamy wtedy

$$\begin{vmatrix} a_1, b_1, c_1 \\ a_2, b_2, c_2 \\ a_3, b_3, c_3 \end{vmatrix} = 0$$

przez kolejne zastosowanie własności V, IV i III.

6. Rozwinięcie wyznacznika na podwyznaczniki.

Niech będzie wyznacznik

$$(17) \qquad \begin{vmatrix} a_{11}, a_{12} \ldots . a_{1n} \\ a_{21}, a_{22} \ldots . a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}, a_{n2} \ldots . a_{nn} \end{vmatrix};$$

W sumie iloczynów, przedstawiającej ten wyznacznik, wydzielmy grupę wszystkich tych iloczynów, które zawierają element a_{11}. Jeśli w takiej grupie wyrzucimy a_{11} przed nawias, to w nawiasie otrzymamy sumę iloczynów po $(n-1)$ elementów, która przedstawiać będzie wyznacznik następujący:

$$(18)\qquad \begin{vmatrix} a_{22}, a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{32}, a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n2}, a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

wynikający z wyznacznika danego (17) *po odrzuceniu pierwszego wiersza i pierwszej kolumny.* Wynika to wprost z określenia wyznacznika i z uwagi, iż wskaźniki elementu a_{11} poprzedzają wszelkie inne wskaźniki, wskutek czego liczba odwróceń wskaźników w iloczynach, przedstawiających wyznacznik (18), będzie taka sama, jak w odpowiednich iloczynach danej grupy, wydzielonej z wyznacznika (17).

Wydzielmy teraz w wyrażeniu wyznacznika (17) sumę wszystkich tych iloczynów, które zawierają dowolny element $a_{\lambda\mu}$, znajdujący się na przecięciu wiersza λ z kolumną μ. Aby zbadać wartość wydzielonej sumy, postarajmy się przenieść element $a_{\lambda\mu}$ na pierwsze miejsce, t. j. do pierwszego wiersza i pierwszej kolumny.

Otóż, przestawiając kolejno $\lambda-1$ razy wiersz λ z wierszami nad nim leżącemi, sprowadzimy wiersz ten na pierwsze miejsce i nie zmienimy przytem kolejności wierszy pozostałych. Dokonywując następnie $\mu-1$ przestawień kolumny μ z sąsiedniemi kolumnami po lewej stronie, sprowadzimy kolumnę μ na miejsce pierwsze i wobec tego ostatecznie otrzymamy wyznacznik, zawierający element $a_{\lambda\mu}$ na miejscu elementu a_{11} w wyznaczniku danym.

Zmiana powyższa odbyła się wskutek $(\lambda-1)+(\mu-1)=\lambda+$ $+\mu-2$ przestawień wierszy i kolumn, a więc pociągnęła za sobą $\lambda+\mu-2$ zmian znaku wyznacznika, według własności II-ej; pomiędzy wyznacznikiem danym i przekształconym będziemy zatem mieli związek

$$(19)\qquad \begin{vmatrix} a_{11}, a_{12} \dots a_{1\mu} \dots a_{1n} \\ a_{21}, a_{22} \dots a_{2\mu} \dots a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{\lambda 1}, a_{\lambda 2} \dots a_{\lambda\mu} \dots a_{\lambda n} \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}, a_{n2} \dots a_{n\mu} \dots a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\lambda+\mu} \begin{vmatrix} a_{\lambda\mu}, & a_{\lambda 1}, a_{\lambda 2} \dots\dots a_{\lambda n} \\ \hline a_{1\mu} & \begin{array}{|l} a_{11}, a_{12} \dots\dots a_{1n} \end{array} \\ a_{2\mu} & \begin{array}{|l} a_{31}, a_{22} \dots\dots a_{2n} \end{array} \\ \dots & \begin{array}{|l} \dots\dots\dots\dots \end{array} \\ a_{n\mu} & \begin{array}{|l} a_{n1}, a_{n2} \dots\dots a_{nn} \end{array} \end{vmatrix}$$

Ponieważ element $a_{\lambda\mu}$ znajduje się na pierwszem miejscu w wyznaczniku przekształconym, a więc, według wyniku, podanego na początku tego artykułu, jeśli wybierzemy w tym wyznaczniku grupę iloczynów, zawierających element $a_{\lambda\mu}$ i wyrzucimy ten element przed nawias, to otrzymamy w nawiasie wyrażenie wyznacznika, powstałego przez odrzucenie pierwszego wiersza i pierwszej kolumny w wyznaczniku przekształconym t. j. wiersza λ i kolumny μ w wyznaczniku danym.

Na podstawie związku (19) widzimy więc, iż suma wszystkich iloczynów w wyrażeniu danego wyznacznika (17), zawierających element $a_{\lambda\mu}$, równa się iloczynowi tego elementu przez wartość wyznacznika, powstałego wskutek opuszczenia wiersza λ i kolumny μ w danym wyznaczniku *i nadto jeszcze przez* $(-1)^{\lambda+\mu}$.

Oznaczmy przez $D_{\lambda\mu}$ wartość wyznacznika o $(n-1)$ wierszach i kolumnach, otrzymanego przez opuszczenie wiersza λ i kolumny μ w wyznaczniku (17); taki nowy wyznacznik nazywamy *podwyznacznikiem* lub *minorem* danego wyznacznika, odpowiednim dla wyrazu $a_{\lambda\mu}$, leżącego na „przecięciu" opuszczonego wiersza λ i kolumny μ.

Wybierzmy teraz z wyrażenia danego wyznacznika (17) n sum wszystkich iloczynów, zawierających kolejno elementy tego samego wiersza λ, a więc element $a_{\lambda 1}$, element $a_{\lambda 2}$, element $a_{\lambda 3}$ i t. d. wreszcie element $a_{\lambda n}$. Według powyższych rozważań, wartości każdej z tych sum będą równe iloczynom jednego z tych elementów przez odpowiednie podwyznaczniki z właściwym znakiem, a więc będą wynosiły

$$(-1)^{\lambda+1} a_{\lambda 1} D_{\lambda 1}\,;\ (-1)^{\lambda+2} a_{\lambda 1}\, D_{\lambda 2}\,;\ (-1)^{\lambda+3} a_{\lambda 3} D_{\lambda 3}\,; \ldots (-1)^{\lambda+n} a_{\lambda n} D_{\lambda n}.$$

Suma tych n wyrażeń daje oczywiście pełną wartość danego wyznacznika (17), gdyż wyrażenia te nie mają jednakowych składników, a wiemy nadto, iż elementy tego samego wiersza

$$a_{\lambda 1},\ a_{\lambda 2},\ \ldots\ a_{\lambda\mu} \ldots\ a_{\lambda n} \tag{20}$$

tkwią *po jednym w każdym* z iloczynów tworzących dany wyznacznik.

Mamy więc następujący ważny wzór, przedstawiający wartość wyznacznika w zależności od jego podwyznaczników, odpowiadających wyrazom tego samego wiersza λ:

$$
(21)\quad \begin{vmatrix} a_{11}, a_{12} \dots a_{1n} \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{\lambda 1}, a_{\lambda 2} \dots a_{\lambda n} \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}, a_{n2} \dots a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\lambda+1} a_{\lambda 1} D_{\lambda 1} + (-1)^{\lambda+2} a_{\lambda 2} D_{\lambda 2} + \dots \dots + (-1)^{\lambda+n} a_{\lambda n} D_{\lambda n}.
$$

Wartość wyznacznika równa się więc sumie iloczynów każdego z wyrazów tego samego wiersza przez podwyznaczniki, odpowiadające tym wyrazom i pomnożone nadto przez $+1$ lub -1 zależnie od tego czy suma numerów opuszczonego wiersza i kolumny jest parzysta czy też nieparzysta.

Wynik ten stosuje się też do rozkładu wyznacznika na sumę wyrazów, odpowiadających elementom tej samej kolumny dowolnej.

Otrzymana własność wyznacznika posiada doniosłe znaczenie, albowiem pozwala kolejno sprowadzać obliczenie danego wyznacznika do wyznaczników prostszych.

Przykład 1. Rozłóżmy wyznacznik z trzech wierszy i kolumn, według wyrazów pierwszego wiersza, otrzymamy wtedy

$$
(22)\quad \begin{vmatrix} a_1, b_1, c_1 \\ a_2, b_2, c_2 \\ a_3, b_3, c_3 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} a_1 \begin{vmatrix} b_2, c_2 \\ b_3, c_3 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} b_1 \begin{vmatrix} a_2, c_2 \\ a_3, c_3 \end{vmatrix} +
$$

$$
+ (-1)^{1+3} c_1 \begin{vmatrix} a_2, b_2 \\ a_3, b_3 \end{vmatrix} = a_1 (b_2 c_3 - b_3 c_2) - b_1 (a_2 c_3 - a_3 c_2) +
$$

$$
+ c_1 (a_2 b_3 - a_3 b_2) = a_1 b_2 c_3 + a_3 b_1 c_2 + a_2 b_3 c_1 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3 - a_3 b_2 c_1 .
$$

Przykład 2. Rozłóżmy wyznacznik poniższy według elementów np. pierwszej kolumny:

$$
\begin{vmatrix} 1, 2, & 0, -1 \\ 0, 3, -1, & 0 \\ 1, 2, & 0, & 1 \\ 0, 0, -1, & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 3, -1, 0 \\ 2, \ \ 0, 1 \\ 0, -1, 2 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 2, & 0, -1 \\ 3, -1, & 0 \\ 0, -1, & 2 \end{vmatrix} =
$$

$$
= 3 \cdot \begin{vmatrix} 0, 1 \\ -1, 2 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 2, 1 \\ 0, 2 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} -1, 0 \\ -1, 2 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 3, -1 \\ 0, -1 \end{vmatrix} =
$$

$$
= 3 \cdot 1 + 1 \cdot 4 + 2 \cdot (-2) - 1 \cdot (-3) = 6 .
$$

7. Układ trzech równań linjowych z trzema niewiadomemi.

Głównym celem w tworzeniu pojęcia wyznacznika jest uzyskanie rozwiązania układu równań linjowych z wieloma niewiadomemi. Zaczniemy wpierw, dla łatwiejszego zrozumienia metody, od układu trzech równań linjowych z trzema niewiadomemi x, y, z o postaci

$$\begin{aligned} a_1 x + b_1 y + c_1 z &= d_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z &= d_2 \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z &= d_3 \end{aligned} \tag{23}$$

Załóżmy, iż ten układ posiada rozwiązania x, y, z i zobaczmy jakie one winny mieć wartości. Dzięki pojęciu wyznacznika, zauważymy z łatwością, iż można obie strony każdego z równań (23) pomnożyć przez takie liczby, że po dodaniu wypadnie równanie zawierające *tylko jedną niewiadomą*. Otóż pomnóżmy obie strony każdego z równań (23) przez takie czynniki, aby, po dodaniu stron, otrzymać jako współczynnik niewiadomej x wyznacznik

$$D = \begin{vmatrix} a_1, b_1, c_1 \\ a_2, b_2, c_2 \\ a_3, b_3, c_3 \end{vmatrix} \tag{24}$$

utworzony ze współczynników przy niewiadomych w układzie (23). Na podstawie twierdzenia (21) o rozkładzie wyznacznika na podwyznaczniki, spostrzegamy natychmiast, iż należy pomnożyć obie strony równań (23) kolejno przez podwyznaczniki

$$\begin{vmatrix} b_2, c_2 \\ b_3, c_3 \end{vmatrix}; \quad -\begin{vmatrix} b_1, c_1 \\ b_3, c_3 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} b_1, c_1 \\ b_2, c_2 \end{vmatrix};$$

odpowiadające współczynnikom a_1, a_2, a_3 i wzięte ze znakiem zależnym od sumy numerów wiersza opuszczonego i kolumny. Otrzymamy wtedy, po zsumowaniu, równanie

$$\begin{vmatrix} a_1, b_1, c_1 \\ a_2, b_2, c_2 \\ a_3, b_3, c_3 \end{vmatrix} \cdot x + \begin{vmatrix} b_1, b_1, c_1 \\ b_2, b_2, c_2 \\ b_3, b_3, c_3 \end{vmatrix} \cdot y + \begin{vmatrix} c_1, b_1, c_1 \\ c_2, b_2, c_2 \\ c_3, b_3, c_3 \end{vmatrix} \cdot z = \begin{vmatrix} d_1, b_1, c_1 \\ d_2, b_2, c_2 \\ d_3, b_3, c_3 \end{vmatrix}; \tag{25}$$

w którym współczynnik przy x równa się wyznacznikowi (24), współczynniki przy y i z równe są wyznacznikom, które otrzymamy, zastępując w wyznaczniku (24) kolumnę pierwszą przez kolumnę współczynników przy tych niewiadomych y i z w układzie (23); wreszcie wyraz po prawej stronie jest równy wyznacznikowi, otrzymanemu przez zastąpienie w wyznaczniku (24) kolumny pierwszej, kolumną wyrazów z prawej strony w układzie (23). Ale w związku (25) współczynniki przy y i z są *równe zeru*, jako wyznaczniki o *dwóch identycznych kolumnach*, otrzymamy więc istotnie związek z jedną niewiadomą:

$$(26) \qquad \begin{vmatrix} a_1, b_1, c_1 \\ a_2, b_2, c_2 \\ a_3, b_3, c_3 \end{vmatrix} \cdot x = \begin{vmatrix} d_1, b_1, c_1 \\ d_2, b_2, c_2 \\ d_3, b_3, c_3 \end{vmatrix}$$

Postępując analogicznie, a więc mnożąc obie strony każdego z równań (23) przez podwyznaczniki, odpowiadające współczynnikom b_1, b_2, b_3,

$$-\begin{vmatrix} a_2, c_2 \\ a_3, c_3 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} a_1, c_1 \\ a_3, c_3 \end{vmatrix}; \quad -\begin{vmatrix} a_1, c_1 \\ a_2, c_2 \end{vmatrix};$$

otrzymamy równanie, zawierające tylko niewiadomą y:

$$(26') \qquad \begin{vmatrix} a_1, b_1, c_1 \\ a_2, b_2, c_2 \\ a_3, b_3, c_3 \end{vmatrix} \cdot y = \begin{vmatrix} a_1, d_1, c_1 \\ a_2, d_2, c_2 \\ a_3, d_3, c_3 \end{vmatrix};$$

i wreszcie, mnożąc przez podwyznaczniki, odpowiadające współczynnikom c_1, c_2, c_3,

$$\begin{vmatrix} a_2, b_2 \\ a_3, b_3 \end{vmatrix}; \quad -\begin{vmatrix} a_1, b_1 \\ a_3, b_3 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} a_1, b_1 \\ a_2, b_2 \end{vmatrix};$$

otrzymamy

$$(26'') \qquad \begin{vmatrix} a_1, b_1, c_1 \\ a_2, b_2, c_2 \\ a_3, b_3, c_3 \end{vmatrix} \cdot z = \begin{vmatrix} a_1, b_1, d_1 \\ a_2, b_2, d_2 \\ a_3, b_3, d_3 \end{vmatrix}$$

Wartości na x, y, z, spełniające równania (23), będą zatem spełniały też i równania (26), (26'), (26''). W przypadku ogólnym założymy, iż wyznacznik (24), utworzony ze współczynników przy niewiadomych, jest odmienny od zera:

$$(27) \qquad \begin{vmatrix} a_1, b_1, c_1 \\ a_2, b_2, c_2 \\ a_3, b_3, c_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

wtedy z równań (26), (26') i (26'') widzimy, że jeśli istnieją liczby spełniające układ (23), to te liczby są jedyne i mają wartości następujące:

$$(28) \quad x = \frac{\begin{vmatrix} d_1, b_1, c_1 \\ d_2, b_2, c_2 \\ d_3, b_3, c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1, b_1, c_1 \\ a_2, b_2, c_2 \\ a_3, b_3, c_3 \end{vmatrix}}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1, d_1, c_1 \\ a_2, d_2, c_2 \\ a_3, d_3, c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1, b_1, c_1 \\ a_2, b_2, c_2 \\ a_3, b_3, c_3 \end{vmatrix}}; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} a_1, b_1, d_1 \\ a_2, b_2, d_2 \\ a_3, b_3, d_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1, b_1, c_1 \\ a_2, b_2, c_2 \\ a_3, b_3, c_3 \end{vmatrix}};$$

Wyznacznik (27), utworzony ze współczynników przy niewiadomych, nazywa się *wyznacznikiem charakterystycznym* danego układu (23). Należy teraz wykazać, iż liczby (28) spełniają układ (23). Wstawmy więc wartości (28) na x, y, z np. w pierwsze z równań (23); otrzymamy wtedy po lewej stronie taką wartość:

$$(29) \qquad \frac{a_1 \begin{vmatrix} d_1, b_1, c_1 \\ d_2, b_2, c_2 \\ d_3, b_3, c_3 \end{vmatrix} + b_1 \begin{vmatrix} a_1, d_1, c_1 \\ a_2, d_2, c_2 \\ a_3, d_3, c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_1, b_1, d_1 \\ a_2, b_2, d_2 \\ a_3, b_3, d_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1, b_1, c_1 \\ a_2, b_2, c_2 \\ a_3, b_3, c_3 \end{vmatrix}}$$

jeśli wyznaczniki w liczniku rozłożymy według wyrazów kolumny d_1, d_2, d_3 i otrzymaną sumę uporządkujemy, według tychże wyrazów, to wypadnie w liczniku wartość

$$d_1\left[a_1\cdot\begin{vmatrix} b_2, c_2 \\ b_3, c_3 \end{vmatrix} - b_1\cdot\begin{vmatrix} a_2, c_2 \\ a_3, c_3 \end{vmatrix} + c_1\cdot\begin{vmatrix} a_2, b_2 \\ a_3, b_3 \end{vmatrix}\right] +$$

$$+ d_2\left[-a_1\cdot\begin{vmatrix} b_1, c_1 \\ b_3, c_3 \end{vmatrix} + b_1\cdot\begin{vmatrix} a_1, c_1 \\ a_3, c_3 \end{vmatrix} - c_1\cdot\begin{vmatrix} a_1, b_1 \\ a_3, b_3 \end{vmatrix}\right] +$$

$$+ d_3\left[a_1\cdot\begin{vmatrix} b_1, c_1 \\ b_2, c_2 \end{vmatrix} - b_1\cdot\begin{vmatrix} a_1, c_1 \\ a_2, c_2 \end{vmatrix} + c_1\cdot\begin{vmatrix} a_1, b_1 \\ a_2, b_2 \end{vmatrix}\right],$$

a więc wartość (29) będzie

$$(29') \qquad \frac{d_1\begin{vmatrix} a_1, b_1, c_1 \\ a_2, b_2, c_2 \\ a_3, b_3, c_3 \end{vmatrix} + d_2\begin{vmatrix} a_1, b_1, c_1 \\ a_1, b_1, c_1 \\ a_3, b_3, c_3 \end{vmatrix} + d_3\begin{vmatrix} a_1, b_1, c_1 \\ a_1, b_1, c_1 \\ a_2, b_2, c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1, b_1, c_1 \\ a_2, b_2, c_2 \\ a_3, b_3, c_3 \end{vmatrix}}$$

wyznaczniki przy d_2 i d_3, jako mające po dwa wiersze identyczne, są równe zeru i wyrażenie (29′) równa się d_1; liczby (28) spełniają zatem pierwsze z równań (23), podobnie stwierdzimy, iż spełniają one i dwa pozostałe.

Mamy zatem twierdzenie następujące:

Jeśli wyznacznik, utworzony ze współczynników przy niewiadomych w układzie (23), *ma wartość od zera odmienną*

$$D = \begin{vmatrix} a_1, b_1, c_1 \\ a_2, b_2, c_2 \\ a_3, b_3, c_3 \end{vmatrix} \neq 0,$$

to istnieją jedyne określone trzy liczby:

$$(30) \qquad x = \frac{\begin{vmatrix} d_1, b_1, c_1 \\ d_2, b_2, c_2 \\ d_3, b_3, c_3 \end{vmatrix}}{D}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1, d_1, c_1 \\ a_2, d_2, c_2 \\ a_3, d_3, c_3 \end{vmatrix}}{D}; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} a_1, b_1, d_1 \\ a_2, b_2, d_2 \\ a_3, b_3, d_3 \end{vmatrix}}{D};$$

spełniające układ dany.

Podkreślamy widoczną prawidłowość budowy wzorów (30). Rozwiązania (30) na x, y, z wyrażają się mianowicie w postaci trzech ułamków o *jednakowym mianowniku, równym wyznacznikowi, utworzonemu ze współczynników przy niewiadomych; liczniki zaś tych ułamków są wyznacznikami, które otrzymamy, zastępując w wyznaczniku poprzednim wyrazami wolnemi d_1, d_2, d_3 elementy kolumny, które są współczynnikami niewiadomej, przedstawionej właśnie przez dany ułamek.*

Przykład. Dany jest układ:

$$2x - y + z = 1;$$
$$3x + y - 2z = 0;$$
$$x - 3y - z = 2;$$

wyznacznik charakterystyczny ma wartość

$$D = \begin{vmatrix} 2, & -1, & 1 \\ 3, & 1, & -2 \\ 1, & -3, & -1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1, & -2 \\ -3, & -1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 3, & -2 \\ 1, & -1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 3, & 1 \\ 1, & -3 \end{vmatrix} =$$
$$= 2(-1-6) + 1(-3+2) + 1(-9-1) = -25,$$

istnieją więc określone rozwiązania następujące:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1, & -1, & 1 \\ 0, & 1, & -2 \\ 2, & -3, & -1 \end{vmatrix}}{D}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2, & 1, & 1 \\ 3, & 0, & -2 \\ 1, & 2, & -1 \end{vmatrix}}{D}; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 2, & -1, & 1 \\ 3, & 1, & 0 \\ 1, & -3, & 2 \end{vmatrix}}{D}$$

rozkładając wyznaczniki w licznikach, według elementów kolumny 1, 0, 2, otrzymamy

$$x = \frac{1 \begin{vmatrix} 1, & -2 \\ -3, & -1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} -1, & 1 \\ 1, & -2 \end{vmatrix}}{D} = \frac{1}{5};$$

$$y = \frac{-1 \begin{vmatrix} 3, & -2 \\ 1, & -1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2, & 1 \\ 3, & -2 \end{vmatrix}}{D} = -\frac{3}{5};$$

$$z = \frac{1 \begin{vmatrix} 3, & 1 \\ 1, & -3 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 2, & -1 \\ 3, & 1 \end{vmatrix}}{D} = 0.$$

PRZYPADEK $D = 0$.

Zbadamy teraz przypadek osobliwy, gdy wyznacznik charakterystyczny D *równa się zeru*,

$$D = 0,$$

a więc wzory (30) nie stosują się.

Oznaczmy dla krótkości przez

$$D_1;\ D_2;\ D_3$$

trzy wyznaczniki, występujące w licznikach wzorów (30); wyznaczniki te powstają z wyznacznika D, jeśli w nim kolumnę pierwszą, drugą lub trzecią zastąpimy kolumną wyrazów wolnych d_1; d_2; d_3.

Według wyników poprzednich, liczby x, y, z, spełniające układ dany, winny spełniać też związki (26), (26'), (26''), które napiszemy krótko w ten sposób:

$$\begin{cases} D \cdot x = D_1 \\ D \cdot y = D_2 \\ D \cdot z = D_3 \end{cases}$$

Ponieważ z założenia $D = 0$, a więc widzimy, że, gdy przynajmniej jeden z wyznaczników

$$D_1;\ D_2;\ D_3$$

nie równa się zeru, to układ dany *nie będzie posiadał rozwiązań.*

Rozpatrzmy więc teraz przypadek, gdy

$$D_1 = 0;\ D_2 = 0;\ D_3 = 0$$

Przypuśćmy wpierw, iż niewszystkie podwyznaczniki wyznacznika D równają się zeru; przypuśćmy, iż np. mamy

$$D = 0;\ \text{lecz} \begin{vmatrix} a_1, b_1 \\ a_2, b_2 \end{vmatrix} \neq 0;$$

otóż wykażemy, iż wtedy rozwiązania dwóch pierwszych równań układu danego

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2 \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z = d_3 \end{cases} \tag{23}$$

będą spełniały też równanie trzecie, albowiem to ostatnie będzie poprostu kombinacją linjową dwóch pierwszych. Otóż istotnie, mnożąc lewe strony każdego z równań (23) przez podwyznaczniki

$$k_1 = \begin{vmatrix} a_2, b_2 \\ a_3, b_3 \end{vmatrix}; \quad k_2 = -\begin{vmatrix} a_1, b_1 \\ a_3, b_3 \end{vmatrix}; \quad k_3 = \begin{vmatrix} a_1, b_1 \\ a_2, b_2 \end{vmatrix}$$

odpowiadające elementom kolumny c_1, c_2, c_3, otrzymamy, po zsumowaniu tych lewych stron, jak wiadomo, tożsamość następującą:

$$k_1 (a_1 x + b_1 y + c_1 z) + k_2 (a_2 x + b_2 y + c_2 z) +$$
$$+ k_3 (a_3 x + b_3 y + c_3 z) \equiv D \cdot z$$

po zsumowaniu zaś prawych stron, pomnożonych odpowiednio przez te same podwyznaczniki, otrzymamy wartość

$$k_1 d_1 + k_2 d_2 + k_3 d_3 = D_3$$

Ale w danym wypadku mamy

$$D = 0 \text{ i } D_3 = 0$$

a ponieważ nadto z założenia

$$k_3 = \begin{vmatrix} a_1, b_1 \\ a_2, b_2 \end{vmatrix} \neq 0,$$

więc obie strony trzeciego z równań (23) są temi samemi kombinacjami o postaci:

$$\begin{cases} a_3 x + b_3 y + c_3 z = -\dfrac{k_1}{k_3} (a_1 x + b_1 y + c_1 z) - \dfrac{k_2}{k_3} (a_2 x + b_2 y + c_2 z) \\ d_3 = -\dfrac{k_1}{k_3} d_1 - \dfrac{k_2}{k_3} d_2 \end{cases}$$

i układ (23) możemy napisać w ten sposób:

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2 \\ \lambda_1 (a_1 x + b_1 y + c_1 z) + \lambda_2 (a_2 x + b_2 y + c_2 z) = \lambda_1 d_1 + \lambda_2 d_2. \end{cases}$$

Rozwiązania układu otrzymamy więc, podstawiając na z wartość dowolną i wyznaczając odpowiednie wartości na x i y z dwóch pierwszych równań, co jest możliwe, gdyż

$$\begin{vmatrix} a_1, b_1 \\ a_2, b_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

Otrzymane rozwiązania będą spełniały oczywiście i trzecie równanie danego układu.

Przypuśćmy teraz, że wszystkie podwyznaczniki wyznacznika D są równe zeru, lecz niewszystkie współczynniki przy niewiadomych znikają, np.

$$a_1 \neq 0$$

Otóż w tym wypadku odpowiednie współczynniki niewiadomych danych trzech równań będą do siebie proporcjonalne, to znaczy, iż możemy dobrać takie czynniki k i l, iż

$$\left\{\begin{array}{ll} a_2 = k\,a_1\,; & a_3 = l\,a_1 \\ b_2 = k\,b_1\,; & b_3 = l\,b_1 \\ c_2 = k\,c_1\,; & c_3 = l\,c_1 \end{array}\right.$$

Układ dany możemy więc teraz napisać w postaci takiej:

$$\begin{aligned} a_1 x + b_1 y + c_1 z &= d_1 \\ k\,(a_1 x + b_1 y + c_1 z) &= d_2 \\ l\,(a_1 x + b_1 y + c_1 z) &= d_3 \end{aligned}$$

Widzimy teraz odrazu, że, gdy wyrazy wolne nie podlegają proporcjonalności, przysługującej współczynnikom przy niewiadomych, to znaczy

$$d_2 \neq k\,d_1\,; \quad d_3 \neq l\,d_1$$

lub inaczej

$$a_1 d_2 - a_2 d_1 \neq 0$$

$$a_1 d_3 - a_3 d_1 \neq 0$$

to układ *rozwiązań nie może posiadać*, jeśli zaś wyrazy wolne podlegają proporcjonalności, przysługującej współczynnikom przy niewiadomych, to znaczy, gdy

$$d_2 = k\,d_1\,; \quad d_3 = l\,d_1$$

lub

$$a_1 d_2 - a_2 d_1 = 0$$

$$a_1 d_3 - a_3 d_1 = 0$$

to każda trójka liczb, spełniająca pierwsze równanie danego układu, będzie spełniała i dwa pozostałe. Otrzymamy więc nieskończenie wiele rozwiązań danego układu, podstawiając na y i z wartości dowolne w pierwsze równanie i dobierając x, co jest możliwe, gdyż założyliśmy $a_1 \neq 0$.

Gdyby wreszcie wszystkie współczynniki przy niewiadomych były równe zeru, to układ będzie posiadał rozwiązanie tylko wtedy, gdy również $d_1 = 0$ i $d_2 = 0$ i rozwiązania te będą wówczas wszystkie trzy najzupełniej dowolne.

8. Układ trzech równań jednorodnych z trzema niewiadomemi.

Układ równań (23) nazywamy jednorodnym, jeśli

$$d_1 = d_2 = d_3 = 0;$$

mamy wtedy

$$\begin{aligned} a_1 x + b_1 y + c_1 z &= 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z &= 0 \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z &= 0 \end{aligned} \tag{31}$$

Własności takiego układu zawierają się już właściwie w rozważaniach poprzedniego artykułu, ze względu jednak na częstą stosowalność układu (31), rozważymy jego własności niezależnie, powtarzając częściowo poprzednie rozumowanie.

Układ jednorodny posiada oczywiście zawsze rozwiązania zerowe

$$x = 0; \quad y = 0; \quad z = 0.$$

Zobaczmy, w jakich wypadkach są one jedyne. Otóż wiemy, iż rozwiązania, spełniające układ (31), muszą spełniać również związki (26), (26′), (26″); ale wszystkie wyrazy kolumny d_1, d_2, d_3 są z założenia równe zeru, więc w związkach tych znikają wyznaczniki po prawej stronie i będzie

$$D \cdot x = 0; \quad D \cdot y = 0; \quad D \cdot z = 0, \tag{32}$$

gdzie D jest wyznacznikiem charakterystycznym

$$D = \begin{vmatrix} a_1, b_1, c_1 \\ a_2, b_2, c_2 \\ a_3, b_3, c_3 \end{vmatrix} \tag{33}$$

Mamy więc następującą własność