## 37. Zagadnienia i przypadki szczególne rugowania.

Gdy w dwóch równaniach o postaci

$$(13) \qquad \begin{aligned} f(x, y, C) &= 0 \\ \varphi(x, y, C) &= 0 \end{aligned}$$

nad parametrem $C$ wykonane są działania *algebraiczne*, wtedy zagadnienie rugowania parametru $C$ z tych równań można zbadać szczegółowo, opierając się na własnościach równań algebraicznych.

Rozpatrzymy szczegółowiej tylko dwa wypadki, gdy w równaniach (13) parametr $C$ występuje w *pierwszej* lub *drugiej* potędze; wypadki te są właśnie głównie ważne w zagadnieniach Geometrji Analitycznej.

*PRZYPADEK PIERWSZEJ POTĘGI PARAMETRU.*

Rozważmy najpierw przypadek, gdy parametr $C$ występuje w równaniach danych (13) w pierwszej potędze, to znaczy gdy one mają postać

$$(14) \qquad \begin{cases} P(x, y) \cdot C + Q(x, y) = 0 \\ P'(x, y) \cdot C + Q'(x, y) = 0 \end{cases}$$

gdzie $P$, $P'$, $Q$, $Q'$, są to *dane funkcje* współrzędnych $(x, y)$. Aby wyrugować $C$ z dwóch równań (14), mnożymy obie strony pierwszego z tych równań przez $P'$, drugiego przez $P$ i odejmujemy, wykażemy w ten sposób, iż punkt $(x, y)$, który spełnia dwa równania (14) jednocześnie, spełnia też związek

$$(15) \qquad P(x, y)\, Q'(x, y) - P'(x, y)\, Q(x, y) = 0$$

niezawierający $C$, a więc dla dowolnej wartości tego parametru. Punkty przecięcia dwóch krzywych (14), dla dowolnej wartości $C$ leżą więc na krzywej, odpowiadającej równaniu (15). *Odwrotnie*, dla dowolnego punktu $(x_0, y_0)$, leżącego na krzywej o równaniu (15), to znaczy spełniającego związek

$$(16) \qquad P(x_0, y_0)\, Q'(x_0, y_0) - P'(x_0, y_0)\, Q(x_0, y_0) = 0$$

można, z pewnym wyjątkiem, dobrać taką wartość na $C$, aby punkt ten spełniał odpowiednie dwa równania (14).

Istotnie, przypuśćmy, iż dwie wartości $P(x_0, y_0)$ i $P'(x_0, y_0)$ nie znikają jednocześnie, np. $P(x_0, y_0) \neq 0$, wtedy pierwsze z równań (14) będzie spełnione w punkcie $(x_0, y_0)$, jeżeli na $C$ przyjmiemy wartość

$$C = -\frac{Q(x_0, y_0)}{P(x_0, y_0)}$$

wstawiając tę wartość do równania drugiego, otrzymamy wtedy

$$-P'(x, y)\frac{Q(x_0, y_0)}{P(x_0, y_0)} + Q'(x, y) = 0$$

równanie to będzie też spełnione w punkcie $(x_0, y_0)$, według założenia (16).

Krzywa, odpowiadająca rezultatowi rugowania (15), jest więc miejscem geometrycznem punktów przecięcia krzywych (14) dla wszelkich wartości na $C$; *wyjątek* stanowią te punkty $(x_0, y_0)$ krzywej (15), w których obie wartości $P(x_0, y_0)$ i $P'(x_0, y_0)$ *znikają jednocześnie:*

$$P(x_0, y_0) = 0; \qquad P'(x_0, y_0) = 0$$

zaś jedna przynajmniej z dwóch wartości $Q(x_0, y_0)$ i $Q'(x_0, y_0)$ *nie równa* się zeru, wtedy oczywiście równania (14) nie mogą być spełnione w punkcie $(x_0, y_0)$ dla żadnej wartości na $C$.

Nadmienimy jeszcze, że, jeśli w punkcie $(x_0, y_0)$ znikają, oprócz funkcyj $P$ i $P'$, obie funkcje $Q$ i $Q'$, to równania (14) będą w tym punkcie spełnione dla każdej wartości na $C$, to znaczy przez ten punkt przejdzie wszelka krzywa o równaniu (14).

Niekiedy z charakteru geometrycznego zagadnienia wynika, iż do danego miejsca geometrycznego należą punkty, otrzymane przez zmianę wartości parametru $C$ w związkach (14) tylko w pewnych granicach: $a \leqslant C \leqslant b$; w tym wypadku żądanem miejscem geometrycznem będzie tylko część krzywej (15), której punkty spełniają warunek

$$a \leqslant -\frac{Q(x, y)}{P(x, y)} \leqslant b$$

*PRZYPADEK DRUGIEJ POTĘGI PARAMETRU.*

Zbadajmy teraz przypadek, gdy w równaniach (13) nad parametrem $C$ wykonane są *działania kwadratowe*, to znaczy, gdy równania te mają postać ogólną następującą:

$$(17) \qquad \begin{cases} P(x, y)\cdot C^2 + Q(x, y)\cdot C + R(x, y) = 0 \\ P'(x, y)\cdot C^2 + Q'(x, y)\cdot C + R'(x, y) = 0 \end{cases}$$

gdzie $P, Q, R, P', Q', R'$ są określonemi funkcjami współrzędnych $x$ i $y$.

Aby wyrugować parametr $C$ ze związków (17), postaramy się zastąpić te związki innemi, zawierającemi $C$ tylko w pierwszej potędze.

Otóż, mnożąc obie strony pierwszego ze związków (17) przez $P'$, zaś drugiego przez $P$ i odejmując, następnie mnożąc też obie strony przez $Q'$ i $Q$ i odejmując, wykażemy, iż punkt $(x, y)$, spełniający dwa związki (17), będzie również spełniał dwa związki

$$(18) \qquad \begin{cases} (PQ'-P'Q)\,C+(PR'-P'R)=0 \\ (PQ'-P'Q)\,C^2+(Q'R-QR')=0 \end{cases}$$

a w takim razie również dwa związki

$$(19) \qquad \begin{cases} (PQ'-P'Q)\,C+(PR'-P'R)=0 \\ (PR'-P'R)\,C+(QR'-Q'R)=0 \end{cases}$$

zawierające $C$ tylko w pierwszej potędze.

Według zatem poprzednio rozważonego przypadku, punkt, spełniający oba związki (17), będzie też spełniał związek

$$(20) \qquad (PQ'-P'Q)\,(QR'-Q'R)-(PR'-P'R)^2=0$$

niezawierający parametru $C$; jest to właśnie szukany *rezultat rugowania* parametru $C$ z dwóch równań (17).

Rozpatrzmy teraz zasadniczą kwestję, czy *odwrotnie*, punkt $(x_0, y_0)$, spełniający rezultat rugowania (20), będzie spełniał dwa równania (17), przy *odpowiednio dobranej wartości na* $C$.

Oznaczmy przez $P_0, Q_0, R_0, P_0', Q_0', R_0'$ wartości funkcyj $P, Q, R, P', Q', R'$ dla $x=x_0$; $y=y_0$.

Mamy więc założenie, iż punkt $(x_0, y_0)$ spełnia rezultat rugowania (20), to znaczy

$$(21) \qquad (P_0Q_0'-P_0'Q_0)\,(Q_0R_0'-Q_0'R_0)-(P_0R_0'-P_0'R_0)^2=0$$

Przypuśćmy, iż

$$P_0Q_0'-P_0'Q_0 \neq 0,$$

wtedy punkt $(x_0, y_0)$ będzie spełniał oba związki (19), gdy obierzemy na $C$ wartość

$$C=-\frac{P_0R_0'-P_0'R_0}{P_0Q_0'-P_0'Q_0}$$

Wobec tego punkt $(x_0, y_0)$ będzie spełniał też dwa związki (18) i następnie, jak łatwo sprawdzić, *oba równania dane* (17).

W przypadku szczególnym, gdy w danym punkcie $(x_0, y_0)$, spełniającym warunek (21), mamy

$$P_0 Q_0' - P_0' Q_0 = 0$$

wtedy będzie również, według (21),

$$P_0 R_0' - P_0' R_0 = 0$$

jeśli więc jeden przynajmniej ze współczynników $P_0, P_0'$ nie równa się zeru, np. $P_0 \neq 0$, wtedy wszystkie współczynniki równań (17) będą w punkcie $(x_0, y_0)$ przybierały wartości do siebie proporcjonalne, to znaczy

$$\frac{P_0'}{P_0} = \frac{Q_0'}{Q_0} = \frac{R_0'}{R_0}$$

i dwa równania drugiego stopnia

$$(22) \qquad \begin{cases} P_0 \; C^2 + Q_0 \; C + R_0 \; = 0 \\ P_0' C^2 + Q_0' C + R_0' = 0 \end{cases}$$

będą miały parę pierwiastków $C_1, C_2$ wspólną. Punkt dany $(x_0, y_0)$ będzie spełniał oba związki (17), jeśli wtedy na $C$ podstawimy jeden z dwóch pierwiastków $C_1, C_2$.

Może się zdarzyć, że równania (22) będą miały pierwiastki zespolone, jeśli zaś do rozważań wprowadzamy tylko zbiór krzywych, odpowiadających rzeczywistym wartościom na $C$, to powiemy wtedy, iż punkt $(x_0, y_0)$ krzywej o równaniu (20) nie należy do danego miejsca geometrycznego.

Jeśli oba współczynniki $P_0$ i $P_0'$ znikają

$$P_0 = 0 \qquad P_0' = 0$$

wtedy, dla spełnienia równań danych (17) w punkcie $(x_0, y_0)$, należy dobrać wartość na $C$ taką, aby zachodziły związki

$$Q_0 C + R_0 = 0$$
$$Q_0' C + R_0' = 0,$$

punkt $(x_0, y_0)$ spełnia więc w danym wypadku związki (17), jeśli,

$$Q_0 R_0' - Q_0' R_0 = 0$$

i bądź jedna z dwóch liczb $Q_0, Q_0'$ nie równa się zeru, bądź też wszystkie cztery $Q_0, Q_0', R_0, R_0'$ równają się zeru.

Nadmienimy jeszcze, iż, dla danych zgóry wartości współczynników $P_0, Q_0, R_0, P_0', Q_0', R_0'$, każde z dwóch równań drugiego stopnia

$$P_0 C^2 + Q_0 C + R_0 = 0$$

$$P_0' C^2 + Q_0' C + R_0' = 0$$

ma parę pierwiastków różnych lub zjednoczonych $(C_1, C_2)$ i $(C_1', C_2')$; otóż rozważania poprzednie wykazują, iż w przypadku

$$P_0 Q_0' - P_0' Q_0 \neq 0$$

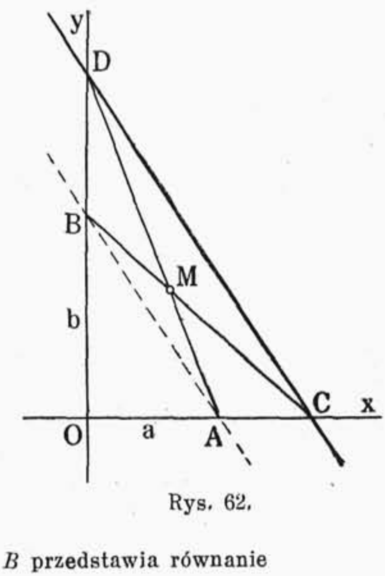
rezultat rugowania

$$(P_0 Q_0' - P_0' Q_0)(Q_0 R_0' - Q_0' R_0) - (P_0 R_0' - P_0 R_0') = 0$$

jest warunkiem koniecznym i dostatecznym, aby dwa dane równania drugiego stopnia miały jeden pierwiastek wspólny.

*PRZYKŁADY.*

Przykład 1. *Dany jest punkt $A(a, 0)$ na osi $Ox$ i punkt $B(0, b)$ na osi $Oy$. Poprowadźmy dowolną prostą, równoległą do prostej stałej $AB$ i oznaczmy przez $C$ i $D$ punkty, w których ona przecina oś $Ox$ i oś $Oy$. Wyznaczmy miejsce geometryczne punktów przecięcia $M$ prostych $AD$ i $BC$ (rys. 62).*




Rys. 62.

Prostą stałą $AB$ przedstawia równanie

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,$$

a zatem równanie prostej dowolnej $CD$, równoległej do poprzedniej, będzie miało postać

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \lambda,$$

gdzie $\lambda$ jest parametrem zmiennym; prosta zmienna $CD$ odcina na osiach współrzędnych wektory, mające miary

$$\overline{OC} = \lambda a; \quad \overline{OD} = \lambda b,$$

równania prostych $AD$ i $BC$ będą więc takie:

$$\text{(23)} \qquad \begin{cases} \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{\lambda b} = 1; \\[2mm] \dfrac{x}{\lambda a} + \dfrac{y}{b} = 1; \end{cases}$$

równanie miejsca geometrycznego punktów przecięcia $M$ tych prostych otrzymamy, rugując z dwóch równań (23) parametr zmienny $\frac{1}{\lambda}$, według wyniku (15), wypadnie wtedy związek

$$\frac{x}{a}\left(\frac{x}{a} - 1\right) - \frac{y}{b}\left(\frac{y}{b} - 1\right) = 0,$$

a stąd

$$\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1\right) = 0;$$

równanie to przedstawia *dwie proste* o równaniach

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0; \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0.$$

Widzimy, iż druga z tych prostych jest prostą $AB$, punkty tej prostej odpowiadają wartości parametru $\lambda = 1$ w równaniach (23), dla tej bowiem wartości obie proste (23) schodzą się ze sobą wszystkiemi punktami, tworzącemi prostą $AB$; prosta $AB$ jest t. zw. rozwiązaniem osobliwem. Właściwem więc miejscem geometrycznem punktów $M$ jest prosta, określona przez równanie

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0,$$

przechodząca przez początek układu.

P r z y k ł a d 2. *Dane jest koło i pęk prostych, wychodzących ze stałego punktu $A$. Znaleść miejsce geometryczne środków $M_0$ odcinków tych prostych, zawartych między rzeczywistemi punktami przecięcia $M_1$ i $M_2$ z kołem.*

Obierzmy środek koła $O$, jako początek układu, zaś prostą $OA$ jako oś $Ox$ (rys. 63). Niech $r$ będzie promieniem koła, zaś $(a, 0)$ współrzędnemi punktu stałego $A$. Dowolną sieczną, wychodzącą z punktu $A$, przedstawia równanie

$$y = m(x - a),$$

współczynnik kątowy $m$ tej siecznej będzie właśnie parametrem zmiennym żądanego miejsca geometrycznego. Punkty przecięcia $M_1$ i $M_2$ siecznej z kołem określa układ równań

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = r^2 \\ y = m\,(x - a) \end{cases}$$

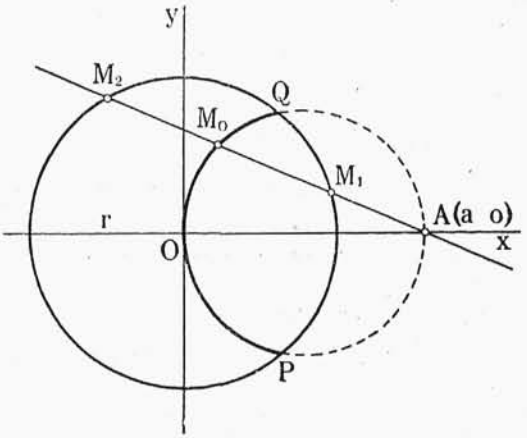
stąd otrzymujemy równanie drugiego stopnia

$$x^2\,(1 + m^2) - 2\,am^2 x + (\,a^2 m^2 - r^2\,) = 0, \tag{24}$$

którego pierwiastkami $x'$ i $x''$ są odcięte punktów przecięcia $M_1$ i $M_2$. W celu wyznaczenia położenia środka $M_0$ odcinka $M_1\,M_2$, zauważmy, iż współrzędne jego $(x_0\,, y_0)$ określone są przez związki

$$x_0 = \frac{x' + x''}{2}\,;$$

$$y_0 = m\,(x_0 - a);$$




Rys. 63

widzimy stąd, iż zbyteczne jest poszukiwanie pierwiastków $x'$, $x''$ równania (24), mamy bowiem odrazu, według własności równania kwadratowego,

$$x' + x'' = \frac{2\,a\,m^2}{1 + a^2},$$

a więc współrzędne środka $M_0$ spełniają dwa związki

$$\begin{cases} x_0 = \dfrac{a\,m^2}{1 + m^2} \\ y_0 = m\,(x_0 - a) \end{cases}$$

lub też

$$\begin{cases} m^2\,(\,x_0 - a\,) + x_0 = 0 \\ m\,(x_0 - a\,) - y_0 = 0\,, \end{cases} \tag{25}$$

rugując stąd zmienny parametr $m$, otrzymamy równanie żądanego miejsca geometrycznego w tej postaci:

$$x_0^2 + y_0^2 - a\,x_0 = 0. \tag{26}$$

Równanie to przedstawia *koło*, opisane na odcinku $OA$, jako na średnicy.

Jeśli punkt $A$ leży wewnątrz danego koła lub na jego obwodzie ($a \leqslant r$), wtedy równanie (24) ma zawsze pierwiastki rzeczywiste, to znaczy, iż wszystkie proste, wychodzące z punktu $A$, przecinają koło i, wobec tego, wszystkie punkty otrzymanego koła (26) należą do żądanego miejsca geometrycznego.

Jeśli punkt $A$ leży zewnątrz danego koła ($a > r$), wtedy równanie (24) ma pierwiastki rzeczywiste, to znaczy, iż prosta, wychodząca z punktu $A$, przecina koło dane, jeśli jej współczynnik kątowy $m$ spełnia warunek

$$a^2 m^4 - (1 + m^2)(a^2 m^2 - r^2) \geqslant 0,$$

stąd

$$m^2 \leqslant \frac{r^2}{a^2 - r^2}.$$

Według równań (25), do danego miejsca geometrycznego należą więc tylko te punkty koła (26), których odcięta $x_0$ spełnia warunek

$$\frac{a - x_0}{x_0} \geqslant \frac{a^2 - r^2}{r^2}$$

lub, gdy $a > 0$,

$$0 \leqslant x_0 \leqslant \frac{r^2}{a}$$

punkty te tworzą *łuk POQ koła* (26), leżący wewnątrz koła danego (rys. 63).

P r z y k ł a d 3. *Dany jest układ kół stycznych w początku układu do osi Oy. Znaleść miejsce geometryczne punktów tych kół, w których styczne są równoległe do danej prostej* $y = mx$.

Dane koło przedstawia równanie

$$(x - C)^2 + y^2 = C^2$$

lub

$$x^2 + y^2 - 2Cx = 0,$$

gdzie $C$ jest parametrem zmiennym. Różniczkując obie strony, otrzymujemy związek, określający współczynnik kątowy stycznej $\frac{dy}{dx}$ w punkcie koła $(x, y)$:

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} - 2C = 0,$$

ale z założenia współczynnik kątowy stycznej winien mieć daną zgóry wartość $m$

$$\frac{dy}{dx} = m,$$

żądane punkty styczności $(x, y)$ winny więc spełniać dwa związki:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2Cx = 0, \\ x + ym - C = 0; \end{cases}$$

rugując stąd parametr zmienny $C$, otrzymamy równanie żądanego miejsca geometrycznego w postaci

$$x^2 + 2mxy - y^2 = 0,$$

równanie to jest jednorodne i przedstawia *dwie proste* prostopadłe, wychodzące z początku układu.

## 38. Zagadnienia z dwoma parametrami.

Zagadnienia na miejsca geometryczne wprowadzają czasami w grę kilka parametrów zmiennych, związanych pewnemi zależnościami danemi.

Weźmy np. zagadnienie, sprowadzające się do wyznaczenia zbioru punktów $(x, y)$, spełniających dwa dane związki między współrzędnemi $(x, y)$ i dwoma parametrami $\alpha$ i $\beta$ o postaci

$$(27) \qquad \begin{cases} f(x, y, \alpha, \beta) = 0 \\ \varphi(x, y, \alpha, \beta) = 0 \end{cases}$$

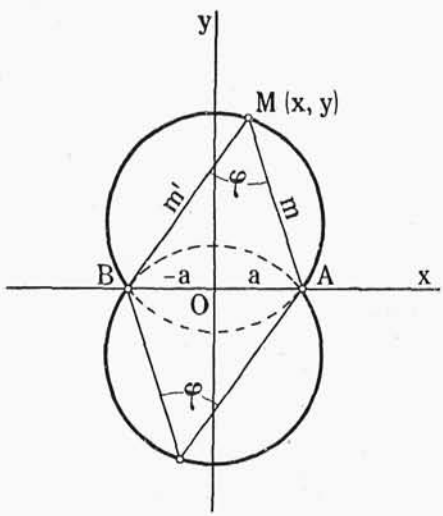
gdzie nadto parametry zmienne $\alpha, \beta$, związane są daną zależnością

$$(28) \qquad F(\alpha, \beta) = 0$$

Zagadnienie sprowadza się tu teoretycznie do przypadku jednego parametru zmiennego, jeśli ze związku (28) wyrazimy np. parametr $\beta$ w zależności od $\alpha$ i wstawimy do związków (27).

W zagadnieniach konkretnych, dogodniej jest jednak uzyskać rezultat rugowania, to znaczy równanie żądanego miejsca geometrycznego, *wyznaczając z dwóch związków* (27), *dwa parametry* $\alpha$ *i* $\beta$ *w zależności od zmiennych* $x$ *i* $y$ *i uzyskane wyrażenia wstawiając do związku* (28).

P r z y k ł a d 1. *Znaleść miejsce geometryczne punktów* $M$, *z których dany odcinek stały* $AB$ *widać pod danym kątem* $\varphi$ *mniejszym od* $\pi$.




Rys. 64.

Obierzmy prostą, przechodzącą przez punkty $A$ i $B$, jako oś $Ox$, zaś prostopadłą, wystawioną ze środka odcinka $AB$, jako oś $Oy$; niech $(a, 0)$ i $(-a, 0)$ będą współrzędnemi punktów $A$ i $B$ (rys. 64). Niech $m$ oznacza współczynnik kątowy prostej $AM$, zaś $m'$ — prostej $BM$. Kąt $\varphi$, pod jakim z punktu $M(x, y)$ widać odcinek $AB$, jest równy różnicy kąta, który tworzy wektor $AM$ z osią $Ox$ i kąta, który tworzy wektor $BM$ z osią $Ox$, jeśli $y > 0$, równa się zaś różnicy w odwrotnym porządku, gdy $y < 0$; między parametrami zmiennemi $m$ i $m'$ mamy więc związek

$$\frac{m - m'}{1 + m m'} = \pm \operatorname{tg} \varphi. \tag{29}$$

Znak górny dotyczy punktów $M$, leżących ponad osią $Ox$, znak dolny — punktów poniżej tej osi. Proste $AM$ i $BM$ mają równania

$$\begin{cases} y = m\,(x - a) \\ y = m'\,(x + a) \end{cases} \tag{30}$$

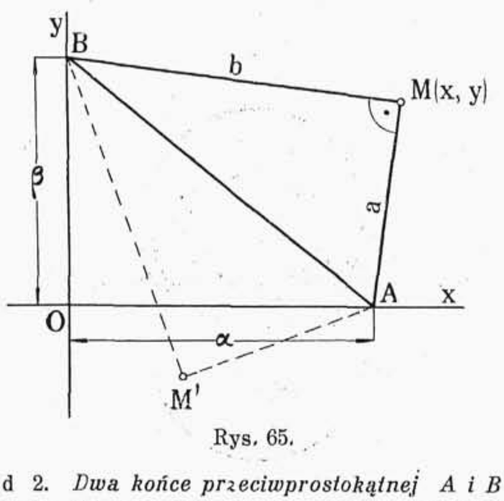
trzeba znaleść miejsce geometryczne punktów przecięcia $M$ prostych (30), wiedząc iż parametry zmienne $m$ i $m'$ związane są zależnością (29). Według uwagi uczynionej poprzednio, równanie miejsca geometrycznego uzyskamy, określając parametry zmienne w zależności od $x$ i $y$ z równań (30)

$$m = \frac{y}{x - a}; \quad m' = \frac{y}{x + a}$$

i podstawiając te wyrażenia do związku (29), otrzymamy w ten sposób, z powodu dwoistości znaku, dwa koła

$$x^2 + y^2 - (2a \operatorname{Cotg} \varphi)\, y - a^2 = 0;$$
$$x^2 + y^2 + (2a \operatorname{Cotg} \varphi)\, y - a^2 = 0;$$

do danego miejsca geometrycznego należą punkty łuku pierwszego koła, leżące ponad osią $Ox$ i punkty łuku drugiego koła, leżące poniżej tej osi (rys. 64). Pozostałe dwa łuki odpowiadają kątowi widzenia $\pi - \varphi$.




Rys. 65.

P r z y k ł a d 2. *Dwa końce przeciwprostokątnej A i B danego trójkąta prostokątnego ślizgają się po osiach współrzędnych; znaleść krzywą, po której porusza się trzeci wierzchołek M danego trójkąta* (Rys. 65).

Niech $a$ i $b$ oznaczają stałe przyprostokątne danego trójkąta: $AM = a$ $BM = b$. Parametrami zmiennemi zagadnienia będą współrzędne $\alpha$ i $\beta$ punktów $A$ i $B$: $\overline{OA} = \alpha$; $\overline{OB} = \beta$.

Położenie wierzchołka $M(x, y)$ określimy, pisząc, iż jego odległości od punktów $A(\alpha, 0)$ i $B(0, \beta)$ równają się stałym wartościom $a$ i $b$:

$$
(31) \qquad \begin{cases} (x - \alpha)^2 + y^2 = a^2; \\ x^2 + (y - \beta)^2 = b^2, \end{cases}
$$

między dwoma parametrami zmiennemi zachodzi nadto związek

$$
(32) \qquad \alpha^2 + \beta^2 = a^2 + b^2.
$$

W myśl uwagi, uczynionej w tym artykule o rugowaniu dwóch parametrów, w celu otrzymania równania żądanego miejsca geometrycznego, wyznaczamy parametry zmienne $\alpha$ i $\beta$ w zależności od $x$ i $y$ z równań (31):

$$
(33) \qquad \begin{aligned} \alpha &= x \pm \sqrt{a^2 - y^2} \\ \beta &= y \pm \sqrt{b^2 - x^2} \end{aligned}
$$

i podstawiamy do związku (32), wypadnie wtedy równanie

$$
\pm x \sqrt{a^2 - y^2} = y \sqrt{b^2 - x^2},
$$

stąd zaś

$$
a^2 x^2 = b^2 y^2.
$$

Równanie to przedstawia dwie proste

$$
(34) \qquad \frac{y}{x} = \frac{a}{b}; \quad \frac{y}{x} = -\frac{a}{b}
$$

przechodzące przez początek układu i odpowiadające dwóm położeniom $M$ i $M'$ wierzchołków trójkąta $ABM$. Niewszystkie jednak punkty tych prostych należą do żądanego miejsca geometrycznego. Istotnie, ze związków (33) widzimy, iż danym współrzędnym punktów prostych (34) odpowiadają określone wartości parametrów $\alpha$ i $\beta$, jeśli spełnione są warunki

$$
-b \leqslant x \leqslant +b
$$

$$
-a \leqslant y \leqslant +a
$$

Żądanem miejscem geometrycznem są więc dwa odcinki prostych (34), łączące parę punktów $(-b, -a)$; $(b, a)$ i parę punktów $(-b, a)$; $(b, -a)$.

## 39. Uwaga o rugowaniu funkcyj trygonometrycznych.

Zagadnienia na miejsca geometryczne prowadzą często do dwóch związków, zawierających sinus i cosinus pewnego parametru $\alpha$, o postaci następującej:

$$
(35) \qquad \begin{cases} P \operatorname{Sin} \alpha + Q \operatorname{Cos} \alpha = R \\ P' \operatorname{Sin} \alpha + Q' \operatorname{Cos} \alpha = R' \end{cases}
$$

Z równań tych wyrugujemy parametr $\alpha$, korzystając ze związku

$$
\operatorname{Sin}^2 \alpha + \operatorname{Cos}^2 \alpha = 1.
$$

A mianowicie, z równań (35) wynikają związki

$$(36) \qquad \begin{cases} (PQ' - P'Q) \operatorname{Sin} \alpha = RQ' - R'Q \\ (PQ' - P'Q) \operatorname{Cos} \alpha = PR' - P'R \end{cases}$$

Sumując kwadraty obydwóch stron, widzimy, iż związki (35) pociągają za sobą związek

$$(37) \qquad (PQ' - P'Q)^2 = (PR' - P'R)^2 + (QR' - Q'R)^2,$$

t. j. właśnie rezultat rugowania parametru $\alpha$. Odwrotnie, jeśli dane współczynniki spełniają warunek (37) i $PQ' - P'Q \neq 0$, wtedy z równań (36) dobierzemy określone wartości na sin $\alpha$ i cos $\alpha$, zawarte, według związku (37), między $-1$ i $+1$, a dla wartości tych będą spełnione, jak łatwo sprawdzić, równania dane (35). Jeśli $PQ' - P'Q = 0$, wtedy, według związku (37), znikać muszą również dwa pozostałe wyznaczniki, a więc współczynniki równań (35) będą wtedy do siebie odpowiednio proporcjonalne i spełnienie jednego równania pociągnie za sobą spełnienie drugiego. W celu dobrania kąta $\alpha$, sprowadzimy więc wtedy zagadnienie do dyskusji równania trygonometrycznego znanego typu, które może posiadać, lub może nie posiadać rozwiązań (oczywiście założyliśmy tu, iż nie wszystkie współczynniki $PP'QQ'$ znikają).

Ćwiczenia.

1. Znaleść miejsce geometryczne punktów, dla których suma lub stosunek odległości od dwóch prostych stałych ma wartość stałą.

2. Znaleść m. g. punktów, dla których kwadrat odległości od prostej stałej $x + y = a$ równa się iloczynowi ich odległości od danych osi współrzędnych.

3. Znaleść m. g. punktów, dla których suma kwadratów odległości od dwóch punktów stałych $A$ i $B$ równa się sumie kwadratów odległości od dwóch innych punktów stałych $C$ i $D$.

4. Dwa wierzchołki $A$ i $B$ trójkąta są stałe, zaś trzeci $C$ porusza się po danej prostej. Znaleść m. g. środków ciężkości tego trójkąta.

5. Znaleść m. g. punktów, których suma odległości od trzech boków danego trójkąta ma wartość stałą.

6. Dane są cztery punkty $A, B, C, D$, znaleść m. g. punktów $M$, dla których suma pól trójkątów $MAB$ i $MDC$ ma wartość stałą daną.

7. Znaleść m. g. środków prostokątów wpisanych w dany trójkąt.

8. Dane są dwa trójkąty równoboczne $ABC$ i $ABD$, mające wspólny bok $AB$. Przez punkt $D$ prowadzimy sieczną, która przecina proste $AC$ i $BC$ w punktach $E$ i $F$, wyznaczyć m. g. punktów przecięcia prostych $AF$ i $BE$.

9. Dany jest układ kół stycznych do dwóch danych prostych. Znaleść m. g. punktów tych kół, w których styczne są równoległe do danej trzeciej prostej.

10. Dany jest układ kół, przechodzących przez dany punkt stały $P$ i stycznych do prostej danej $D$. Znaleść m. g. punktów, w których styczne są równoległe do prostej $D$.

11. Jedna podstawa trapezu ma stałe położenie, zaś druga podstawa i jeden z boków nierównoległych mają dane stałe długości. Znaleść m. g. punktów przecięcia przekątnych trapezu.

12. Znaleść m. g. środków kół, które przechodzą przez dany punkt stały i przecinają dane stałe koło w punktach średnicowo-przeciwnych.

13. Dany jest trójkąt stały $ABC$ i punkt stały $O$, leżący na prostej $AC$. Przez punkt $O$ prowadzimy sieczną zmienną, która przecina boki $AB$ i $BC$ w punktach $D$ i $E$. Znaleść m. g. punktów przecięcia kół opisanych na trójkątach $OAD$ i $OCE$.

14. Podstawa trójkąta jest stała, zaś przeciwległy wierzchołek porusza się po równoległej do podstawy. Znaleść m. g. punktów przecięcia się wysokości trójkąta.

15. Dowieść, że jeśli koło toczy się bez ślizgania wewnątrz drugiego koła o promieniu dwa razy większym, to dowolny punkt tego koła porusza się po średnicy stałego koła.

16. Dane są dwie proste $D_1$ i $D_2$ i stały punkt $P$. Przez punkt $P$ prowadzimy sieczną zmienną, przecinającą dane proste w punktach $A$ i $B$; znaleść m. g. punktów $M$, rozdzielających z punktem $P$ harmonicznie parę $AB$.

17. Dane jest koło i dwa stałe punkty $A$ i $B$, leżące na średnicy tego koła, poprowadźmy średnicę zmienną $CD$; znaleść m. g. punktów przecięcia prostych $AC$ i $BD$.

# ROZDZIAŁ VIII.

# BADANIE KRZYWYCH DRUGIEGO STOPNIA.

## 40. Symetrja krzywej względem prostej i środek krzywej.

Jeżeli równanie krzywej algebraicznej zawiera zmienną $x$ tylko w potędze *parzystej*, to wtedy równanie pozostaje zachowane, gdy wartość współrzędnej prostokątnej $x$ zmienimy na $-x$. Jeśli więc punkt $M_1(x, y)$ należy do krzywej danej, to punkt $M_2(-x, y)$, leżący po przeciwnej stronie prostopadłej do osi $Oy$ wyprowadzonej z punktu $M_1$, w tej samej odległości od osi $Oy$ co i punkt $M_1$ (rys. 66), będzie też do danej krzywej należał; oznacza to, iż krzywa jest wtedy *symetryczna względem osi $Oy$*.

Jeśli równanie krzywej zawiera zmienną $y$ tylko w potędze *parzystej*, to wtedy równanie będzie spełnione przy tej samej wartości na $x$ dla par punktów, mających rzędne różniące się tylko znakiem. Krzywa jest więc wtedy *symetryczna względem osi $Ox$*. Np. krzywa o równaniu $x^6 - y = 0$ jest położona symetrycznie względem osi $Oy$, lecz niesymetrycznie względem $Ox$. Prosta, względem