na oś s danego wektora AB (rys. 143), wtedy wniosek nasz napiszemy w tej postaci:

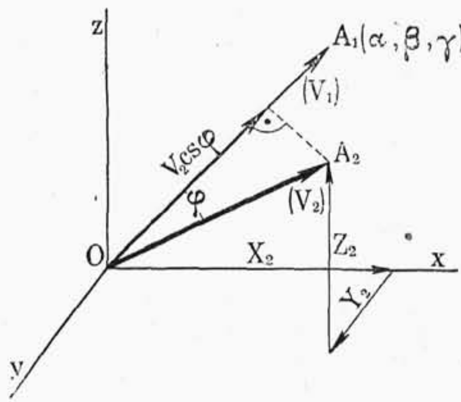
$$V_s = \underset{(\text{na } s)}{\text{rzut } X + \text{rzut } Y + \text{rzut } Z}$$

a więc

$$V_s = X \cos(xs) + Y \cos(ys) + Z \cos(zs) \tag{12}$$

6. Iloczyn skalarny dwóch wektorów i kąt między wektorami.

Kątem między dowolnemi dwoma wektorami w przestrzeni nazywamy kąt, zawarty między 0 i π, który one ze sobą będą tworzyły, jeśli je przesuniemy równolegle w ten sposób, aby miały wspólny początek. Kąt ten zależy tylko od kierunku danych wektorów.



Rys. 144.

Określenie. Nazywamy iloczynem skalarnym dwóch wektorów iloczyn ich wartości bezwzględnych przez cosinus kąta między niemi zawartego; inaczej mówiąc jest to iloczyn wartości jednego wektora przez miarę rzutu drugiego na oś zwróconą zgodnie z pierwszym wektorem.

Jeśli dwa dowolne wektory, po przesunięciu równoległem do wspólnego początku, zajęły położenia OA_1 i OA_2 (rys. 144) i tworzą ze sobą kąt φ, to iloczyn skalarny danych wektorów będzie równy wyrażeniu

$$V_1 V_2 \operatorname{Cos} \varphi \tag{13}$$

gdzie V_1 i V_2 oznaczają wartości bezwzględne danych wektorów.

Wartość iloczynu skalarnego nie zależy więc od kolejności mnożenia. Iloczyn skalarny jest dodatni, jeśli wektory tworzą ze sobą kąt ostry, ujemny zaś, jeśli tworzą kąt rozwarty.

Jeśli dwa wektory są do siebie prostopadłe, to znaczy $\varphi = \frac{\pi}{2}$, *wtedy ich iloczyn skalarny równa się zeru.*

Jeśli jeden wektor jest siłą, a drugi przesunięciem, wtedy ich iloczyn skalarny przedstawia pracę danej siły wzdłuż tego przesunięcia. W Geometrji Analitycznej pojęcie iloczynu skalarnego jest ważne z tego powodu, że wiąże się z pojęciem kąta między wektorami.

Oznaczmy teraz przez (X_1, Y_1, Z_1) i (X_2, Y_2, Z_2) miary składowych danych wektorów wzdłuż osi $(Oxyz)$ i postarajmy się wyznaczyć wartość iloczynu skalarnego (13) w zależności od tych składowych.

Otóż mamy

$$V_1 V_2 \operatorname{Cos} \varphi = V_1 \underset{(\text{na } OA_1)}{\text{rzut}} (OA_2)$$

ale, według twierdzenia o rzutach, miara rzutu wektora (OA_2) równa się sumie miar rzutów jego składowych X_2, Y_2, Z_2, więc

$$V_1 V_2 \operatorname{Cos} \varphi = V_1 \underset{(\text{na } OA_1)}{(\text{rzut } X_2 + \text{rzut } Y_2 + \text{rzut } Z_2)}$$

Jeśli oznaczymy przez α, β, γ kąty, które wektor OA_1 tworzy z osiami Ox, Oy, Oz, to będzie

$$V_1 V_2 \operatorname{Cos} \varphi = V_1 (X_2 \operatorname{Cos} \alpha + Y_2 \operatorname{Cos} \beta + Z_2 \operatorname{Cos} \gamma);$$

lecz $V_1 \operatorname{Cos} \alpha; V_1 \operatorname{Cos} \beta;\ V_1 \operatorname{Cos} \gamma$ są to miary rzutów X_1, Y_1, Z_1 wektora OA_1, będzie więc ostatecznie

$$V_1 V_2 \operatorname{Cos} \varphi = X_1 X_2 + Y_1 Y_2 + Z_1 Z_2 \tag{14}$$

Otrzymaliśmy jeden z najważniejszych wzorów Geometrji Analitycznej, który głosi, iż *iloczyn skalarny dwóch wektorów równa się sumie iloczynów miar odpowiednich rzutów tych wektorów na dowolny układ prostokątny osi.*

Zaznaczamy, iż wartość sumy (14) jest zawsze jednakowa, *niezależnie od wybranego układu osi współrzędnych prostokątnych.* Wzór (14) na iloczyn skalarny daje zarazem wartość kąta φ, zawartego między dwoma wektorami, których składowemi są (X_1, Y_1, Z_1) i (X_2, Y_2, Z_2), mamy bowiem

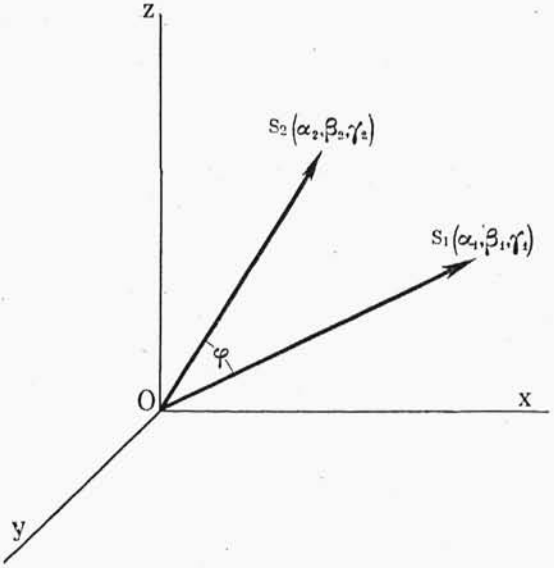
$$V_1 = \sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2}; \qquad V_2 = \sqrt{X_2^2 + Y_2^2 + Z_2^2}$$

a zatem

$$(15) \qquad \operatorname{Cos}\varphi = \frac{X_1 X_2 + Y_1 Y_2 + Z_1 Z_2}{\sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2} \cdot \sqrt{X_2^2 + Y_2^2 + Z_2^2}}$$

Wzór ten można też przekształcić tak, aby wyrażał wartość $\operatorname{Cos}\varphi$ w zależności od cosinusów kierunkowych wektorów V_1 i V_2. Mamy mianowicie z wyrażenia (14):

$$\operatorname{Cos}\varphi = \frac{X_1}{V_1} \cdot \frac{X_2}{V_2} + \frac{Y_1}{V_1} \cdot \frac{Y_2}{V_2} + \frac{Z_1}{V_1} \cdot \frac{Z_2}{V_2}$$



Rys. 145.

stosunki, które tu występują, przedstawiają, według art. 4, cosinusy kierunkowe wektorów danych, oznaczając więc przez $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ i $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ kąty, które tworzą dane dwa wektory lub dwie osi s_1 i s_2 z osiami współrzędnych (rys. 145), napiszemy dla kąta φ między wektorami lub osiami następujący wzór:

$$(16) \qquad \operatorname{Cos}\varphi = \operatorname{Cos}\alpha_1 \operatorname{Cos}\alpha_2 + \operatorname{Cos}\beta_1 \operatorname{Cos}\beta_2 + \operatorname{Cos}\gamma_1 \operatorname{Cos}\gamma_2$$

Cosinus kąta, zawartego między dwoma wektorami, równa się więc sumie iloczynów odpowiednich cosinusów kierunkowych danych wektorów.

Jeśli dwa wektory są do siebie prostopadłe, wtedy iloczyn skalarny jest zerem, rzuty tych wektorów spełniają wtedy, według wzoru (14), związek:

$$X_1 X_2 + Y_1 Y_2 + Z_1 Z_2 = 0; \tag{17}$$

mamy więc następujący ważny *warunek prostopadłości* dwóch wektorów.

TWIERDZENIE. Aby dwa wektory były do siebie prostopadłe, trzeba i wystarcza, żeby suma iloczynów miar ich rzutów odpowiednich na trzy osi prostokątne równała się zeru.

Jeśli dwa wektory są do siebie równoległe i zgodnie zwrócone, wtedy ich iloczyn skalarny sprowadza się do zwykłego iloczynu ich wartości.

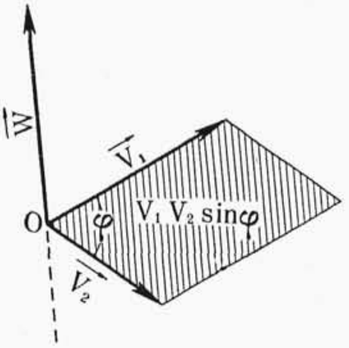
7. Iloczyn wektorowy dwóch wektorów.

Poznaliśmy poprzednio iloczyn skalarny dwóch wektorów. Była to operacja wykonana nad dwoma wektorami, której rezultatem jest skalar, to znaczy pojęcie niezwiązane z kierunkiem i określone przez jedną liczbę. Poznamy teraz operację nad dwoma wektorami, której rezultatem będzie pewien nowy wektor.

Niech będą $\overrightarrow{V_1}$ i $\overrightarrow{V_2}$ symbolami dwóch dowolnych wektorów w przestrzeni; przez V_1 i V_2 oznaczymy ich wartości bezwzględne. Przesuńmy te wektory równolegle w ten sposób, aby miały wspólny początek O i oznaczmy przez φ kąt między niemi ($\varphi < \pi$).

OKREŚLENIE. Iloczynem wektorowym wektora $\overrightarrow{V_1}$ przez wektor $\overrightarrow{V_2}$ nazywamy wektor $\overrightarrow{W}$ prostopadły do każdego z tych dwóch wektorów i którego wartość W równa się $V_1 V_2 \sin\varphi$, t. j. polu równoległoboku zbudowanego na danych dwóch wektorach (rys. 146). Nadto zwrot wektora $\overrightarrow{W}$ obieramy taki, aby dla obserwatora, patrzącego w jego kierunku, obrót od *pierwszego* wektora $\overrightarrow{V_1}$ do *drugiego* $\overrightarrow{V_2}$ o kąt φ mniejszy od π odbywał się w *umówionym* kierunku (np. zgodnie z obrotem wskazówki zegara).

Z określenia poprzedniego wynika, iż *w pojęciu iloczynu wektorowego odgrywa rolę kolejność, w jakiej wymieniamy wektory poddane operacji.* Jeśli mianowicie rozważymy, odwrotnie iloczyn wektorowy wektora $\overrightarrow{V_2}$ przez $\overrightarrow{V_1}$, to otrzymamy wektor o tej samej wartości $W = V_1 V_2 \sin\varphi$, lecz z przeciwnym zwrotem względem poprzedniego, albowiem obrót od $\overrightarrow{V_2}$ do $\overrightarrow{V_1}$ (o kąt mniejszy od π) odbywać się będzie w umówionym kierunku, jeśli obserwator patrzeć będzie w przeciwnym kierunku względem poprzedniego wektora.



Rys. 146.

Iloczyn wektorowy $\overrightarrow{W}$ wektora $\overrightarrow{V_1}$ przez $\overrightarrow{V_2}$ oznacza się zwykle w ten sposób:

$$\overrightarrow{W} = \left[\overrightarrow{V_1}, \overrightarrow{V_2}\right]$$

Widzieliśmy, iż zmiana kolejności czynników iloczynu wektorowego zmienia jego zwrot na przeciwny; zaznaczamy tę własność w sposób następujący:

$$\left[\overrightarrow{V_2}, \overrightarrow{V_1}\right] = -\left[\overrightarrow{V_1}, \overrightarrow{V_2}\right]$$

Nadmienimy jeszcze, że gdy wektory $\overrightarrow{V_1}$ i $\overrightarrow{V_2}$ są do siebie prostopadłe, to wartość iloczynu wektorowego równa się wtedy iloczynowi wartości tych wektorów $W = V_1 V_2$. *Jeśli zaś dwa wektory są do siebie równoległe, to ich iloczyn wektorowy równa się zeru.*

Przypuśćmy, że składowe wektorów $\overrightarrow{V_1}$ i $\overrightarrow{V_2}$ wzdłuż osi pewnego układu prostokątnego $(Oxyz)$ mają miary (X_1, Y_1, Z_1) i (X_2, Y_2, Z_2). Postarajmy się odnaleźć składowe iloczynu wektorowego $\overrightarrow{W}$, których miary oznaczymy przez W_x, W_y, W_z.

Otóż wektor $\overrightarrow{W}$ jest prostopadły zarówno do wektora $\overrightarrow{V_1}$, jak i do wektora $\overrightarrow{V_2}$, a więc, według warunku (17), jego szukane składowe W_x, W_y, W_z winny spełniać następujące dwa związki:

$$
(18) \qquad \begin{aligned} W_x X_1 + W_y Y_1 + W_z Z_1 &= 0; \quad (\overrightarrow{W} \perp \overrightarrow{V_1}) \\ W_x X_2 + W_y Y_2 + W_z Z_2 &= 0; \quad (\overrightarrow{W} \perp \overrightarrow{V_2}) \end{aligned}
$$

stąd otrzymujemy, iż miary W_x, W_y, W_z winny być proporcjonalne do wyznaczników, utworzonych z miar X_1, Y_1, Z_1 i X_2, Y_2, Z_2, a zatem

$$
(19) \qquad \left\{ \begin{aligned} W_x &= \rho (Y_1 Z_2 - Y_2 Z_1) \\ W_y &= \rho (Z_1 X_2 - Z_2 X_1) \\ W_z &= \rho (X_1 Y_2 - X_2 Y_1) \end{aligned} \right.
$$

gdzie ρ jest czynnikiem narazie nieokreślonym. Wartości (19) określają tylko kierunek wektora $\overrightarrow{W}$; aby określić miary składowych W_x, W_y, W_z, należy wyznaczyć wartość czynnika ρ, korzystając z warunku, dotyczącego wartości wektora $\overrightarrow{W}$:

$$
W = V_1 V_2 \sin \varphi
$$

Otóż mamy

$$
W^2 = W_x^2 + W_y^2 + W_z^2,
$$

wstawiając zaś tu wyrażenia (19), otrzymamy

$$
\rho^2 [(Y_1 Z_2 - Y_2 Z_1)^2 + (Z_1 X_2 - Z_2 X_1)^2 + (X_1 Y_2 - X_2 Y_1)^2] = W^2
$$

grupując zaś inaczej wyrazy sumy w nawiasie, według tożsamości Lagrange'a*), mamy następnie

$$
\rho^2 [(X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2)(X_2^2 + Y_2^2 + Z_2^2) - (X_1 X_2 + Y_1 Y_2 + Z_1 Z_2)^2] = W^2
$$

*) Tożsamość Lagrange'a, dotycząca wyznaczników, utworzonych z sześciu liczb dowolnych $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix}$, ma postać:

$$
\begin{aligned} (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 + (b_1 c_2 - b_2 c_1)^2 + (a_1 c_2 - a_2 c_1)^2 &\equiv \\ \equiv (a_1^2 + b_1^2 + c_1^2)(a^2_2 + b^2_2 + c^2_2) - (a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2)^2. \end{aligned}
$$

sumy w nawiasach mają znany sens geometryczny, mianowicie

$$X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2 = V_1^2$$

$$X_2^2 + Y_2^2 + Z_2^2 = V_2^2$$

$$X_1 X_2 + Y_1 Y_2 + Z_1 Z_2 = V_1 V_2 \cos\varphi$$

a zatem

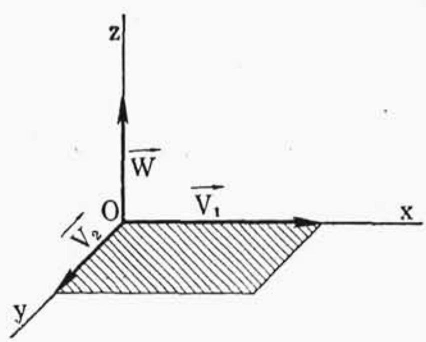
$$\rho^2 \cdot V_1^2 V_2^2 \sin^2\varphi = W^2$$

stąd, według umowy co do wartości W, wypada

$$\rho^2 = 1 ; \quad \rho = \pm 1$$

Składowe iloczynu wektorowego będą więc wprost równe wyznacznikom we wzorach (19) pomnożonym przez $+1$ lub -1, zależnie od przyjęcia jednego lub drugiego z dwóch możliwych zwrotów wektora $\overrightarrow{W}$.

Otóż, mając dany układ osi współrzędnych, umówmy się, aby obrót wektora od $\overrightarrow{V_1}$ do $\overrightarrow{V_2}$ o kąt mniejszy od π, dla patrzącego w kierunku wektora $\overrightarrow{W}$, był zgodny z obrotem od osi Ox do Oy, dla patrzącego w kierunku dodatnim osi Oz; w takiem założeniu zwrot wektora $\overrightarrow{W}$ będzie zgodny z dodatnim zwrotem osi Oz, gdy w szczególnym wypadku wektor pierwszy $\overrightarrow{V_1}$ będzie zgodnie zwrócony z osią Ox, a wektor $\overrightarrow{V_2}$ zgodnie z osią Oy i wzory (19) winny dać: $W = W_z = X_1 Y_2$, gdyż wtedy tylko składowe X_1 i Y_2 będą od zera odmienne (rys. 147). Stąd widzimy, iż, w razie



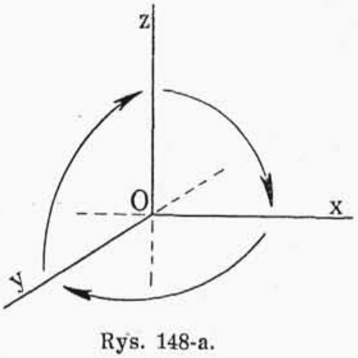
Rys. 147.

przyjęcia umowy powyższej co do zwrotu iloczynu wektorowego, trzeba przyjąć wartość $\rho = +1$ we wzorach (19) i otrzymamy wobec tego następujące wzory dla składowych iloczynu wektorowego:

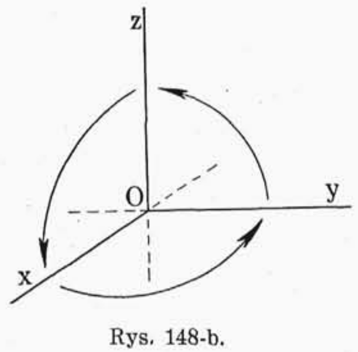
$$(20) \qquad \begin{cases} W_x = Y_1 Z_2 - Y_2 Z_1 \\ W_y = Z_1 X_2 - Z_2 X_1 \\ W_z = X_1 Y_2 - X_2 Y_1 \end{cases}$$

Zwracamy uwagę na prawidłowość tych wyrażeń. Każda mianowicie składowa wektora $\overrightarrow{W}$ wyraża się przez te składowe (X_1, Y_1, Z_1) i (X_2, Y_2, Z_2), które są do niej prostopadłe. Nadto, jeśli w pierwszych wyrazach różnic (20), napiszemy wpierw składową pierwszego wektora $\overrightarrow{V_1}$, a w drugich wyrazach wpierw składową drugiego wektora $\overrightarrow{V_2}$, to wtedy osi, na których te składowe leżą, będą następowały po sobie w porządku, odpowiadającym w trzech wypadkach temu samemu kierunkowi ich obrotu dokoła trzeciej osi. A więc w wyrażeniu składowej W_x w kierunku osi Ox następują po sobie składowe w porządku, odpowiadającym obrotowi od osi Oy do Oz dokoła Ox, w wyrażeniu składowej W_y następują po sobie składowe w porządku, odpowiadającym obrotowi od osi Oz do Ox i wreszcie, w wyrażeniu składowej W_z, w porządku, odpowiadającym obrotowi od osi Ox do Oy. Wszystkie te trzy obroty dokoła osi Ox, Oy, Oz są ze sobą zgodne dla obserwatora, patrzącego w kierunku dodatnim osi odpowiedniej (rys. 148).

Zależnie od tego, czy kierunek powyższych obrotów jest zgodny, czy też przeciwny obrotowi wskazówki zegara, rozróżniamy *prawoskrętne* i *lewoskrętne* układy osi współrzędnych. We wszystkich rysunkach poprzednich podawaliśmy układy lewoskrętne (rys. 148-a),



Rys. 148-a.



Rys. 148-b.

rysunek 148-b przedstawia układ prawoskrętny. W badaniach Geometrji rodzaj układu jest obojętny. W Fizyce natomiast, rozważamy częściej układy prawoskrętne.

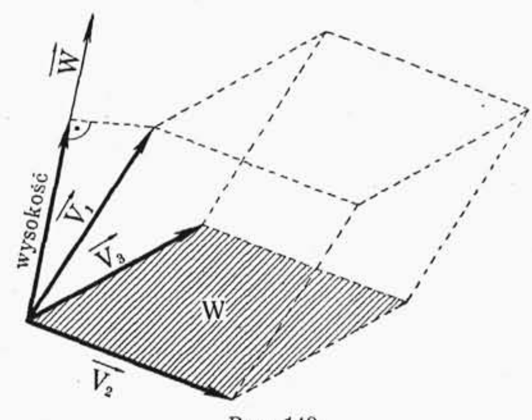
Z pojęciem iloczynu wektorowego spotykamy się stale w naukach stosowanych, szczególnie w Teorji Elektryczności. Odgrywa ono również rolę podstawową w Mechanice. Jeśli mianowicie jeden wektor jest siłą, a drugi promieniem wodzącym pewnego punktu A, to ich iloczyn wektorowy nazywamy momentem siły względem danego punktu A.

8. Objętość równoległościanu.

Niech będą trzy wektory $\overrightarrow{V_1}, \overrightarrow{V_2}, \overrightarrow{V_3}$, określone przez miary swych składowych wzdłuż osi współrzędnych:

$$(X_1, Y_1, Z_1); \quad (X_2, Y_2, Z_2); \quad (X_3, Y_3, Z_3).$$

Wyznaczmy, w zależności od tych składowych, objętość równoległościanu, którego krawędziami są dane wektory (rys. 149). Otóż iloczyn wektorowy $\left[\overrightarrow{V_2}, \overrightarrow{V_3}\right]$ jest to wektor, prostopadły do ściany zbudowanej na wektorach $\overrightarrow{V_2}$ i $\overrightarrow{V_3}$ (rys. 149), którego wartość bezwzględna W równa się polu tej ściany; wysokością



Rys. 149.

równoległościanu względem tej ściany będzie rzut wektora $\overrightarrow{V_1}$ na wektor $\overrightarrow{W} = \left[\overrightarrow{V_2}, \overrightarrow{V_3}\right]$. Stąd wynika, iż objętość równoległościanu danego równa się bezwzględnej wartości iloczynu skalarnego wektora $\overrightarrow{V_1}$ przez wektor $\overrightarrow{W}$; według wyrażeń (20) dla składowych iloczynu wektorowego i wzoru (14) na iloczyn skalarny, otrzymamy zatem dla szukanej objętości wyrażenie:

$$Obj. = | X_1 (Y_2 Z_3 - Y_3 Z_2) + Y_1 (Z_2 X_3 - Z_3 X_2) + Z_1 (X_2 Y_3 - X_3 Y_2) |$$

to znaczy wartość bezwzględną wyznacznika, utworzonego z dziewięciu składowych danych trzech wektorów:

$$Obj. = \pm \begin{vmatrix} X_1, Y_1, Z_1 \\ X_2, Y_2, Z_2 \\ X_3, Y_3, Z_3 \end{vmatrix}$$

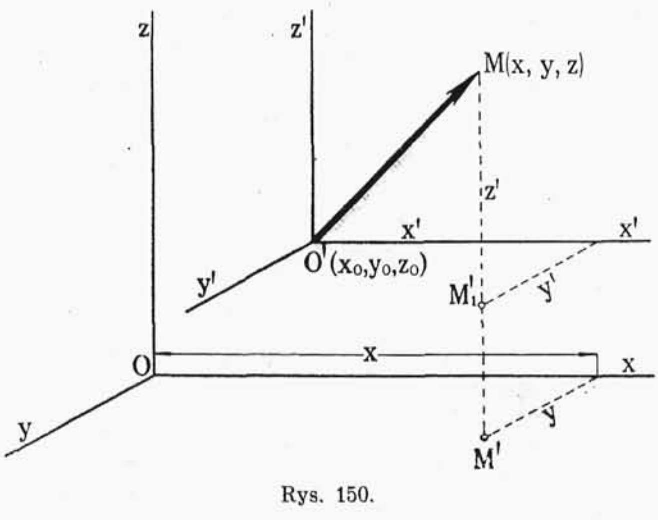
Przyrównywując ten wyznacznik do zera, otrzymamy warunek, aby trzy wektory były równoległe do tej samej płaszczyzny. Widzimy też, iż objętość czworościanu, którego jeden wierzchołek znajduje się w początku układu, równa się szóstej części wyznacznika, utworzonego ze współrzędnych trzech pozostałych jego wierzchołków.

ROZDZIAŁ III.

ZAMIANA WSPÓŁRZĘDNYCH PROSTOKĄTNYCH.

9. Przypadek osi równoległych.

Niech będą dwa układy prostokątne $(O\,x\,y\,z)$ i $(O'\,x'\,y'\,z')$ osi równoległych i zgodnie zwróconych. Niech (x_0, y_0, z_0) oznaczają współrzędne początku O' układu $(O'\,x'\,y'\,z')$ względem układu



Rys. 150.

$(Oxyz)$. Jeśli współrzędne dowolnego punktu M względem układu $(Oxyz)$ oznaczymy przez x, y, z, to współrzędne x', y', z' tegoż punktu względem układu $(O'x'y'z')$, jako rzuty wektora $O'M$, będą, według twierdzenia 3 na str. 300, miały wartości

$$(1) \qquad \begin{aligned} x' &= x - x_0 \\ y' &= y - y_0 \\ z' &= z - z_0 \end{aligned}$$

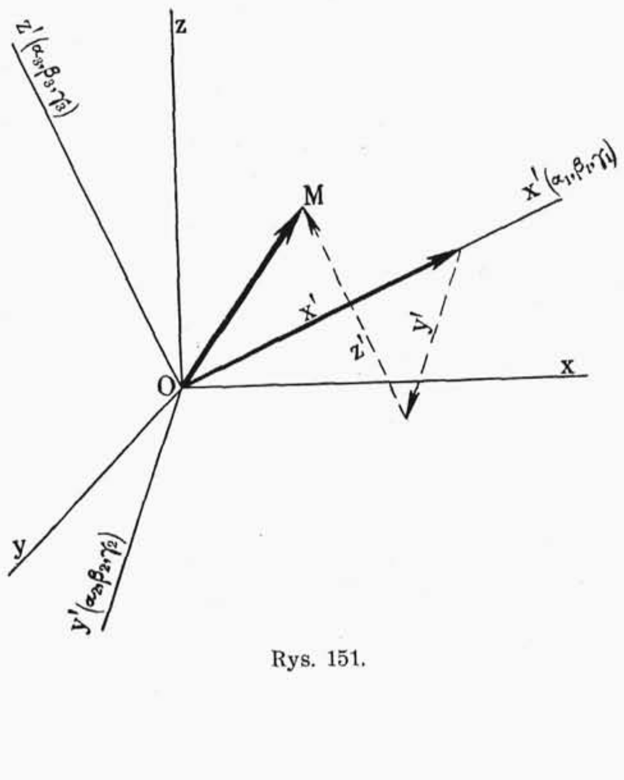
inaczej możemy napisać

$$(1') \qquad \begin{aligned} x &= x_0 + x' \\ y &= y_0 + y' \\ z &= z_0 + z' \end{aligned}$$

są to wzory na zamianę współrzędnych w przypadku osi równoległych.

10. Dwa trójściany dowolne.

Niech będą dwa trójściany prostokątne $(Oxyz)$ i $(Ox'y'z')$, mające wspólny początek O i jednakowy *rozkład osi*, to znaczy obydwa prawoskrętne lub lewoskrętne. Oznaczmy wprost przez $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ cosinusy kierunkowe osi Ox' względem układu $(Oxyz)$,



Rys. 151.

to znaczy cosinusy kątów, które oś Ox' tworzy z osiami Ox, Oy, Oz. Podobnie oznaczmy przez $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ cosinusy kierunkowe osi Oy' i przez $(\alpha_3, \beta_3, \gamma_3)$ cosinusy kierunkowe osi Oz' (rys. 151). Odpowiedniość tę najlepiej przedstawia następująca tabelka:

	x	y	z
x'	α_1	β_1	γ_1
y'	α_2	β_2	γ_2
z'	α_3	β_3	γ_3

Widzimy natychmiast, iż wyrazy kolumn tej tabelki $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$; $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ przedstawiają cosinusy kierunkowe osi Ox, Oy, Oz względem układu $Ox'y'z'$.

Zajmiemy się wpierw zbadaniem związków między dziewięcioma cosinusami tabelki. Otóż wiemy, iż suma kwadratów cosinusów kierunkowych dowolnego wektora równa się jedności i że suma iloczynów cosinusów kierunków dwóch wektorów do siebie prostopadłych równa się zeru. Cosinusy załączonej tabelki spełniają więc związki:

$$
\begin{array}{lll}
 & \alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2=1 & \alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2+\gamma_1\gamma_2=0 \\
(2) & \alpha_2^2+\beta_2^2+\gamma_2^2=1 & \alpha_2\alpha_3+\beta_2\beta_3+\gamma_2\gamma_3=0 \\
 & \alpha_3^2+\beta_3^2+\gamma_3^2=1 & \alpha_1\alpha_3+\beta_1\beta_3+\gamma_1\gamma_3=0
\end{array}
$$

A więc z dziewięciu cosinusów, określających położenie układu $(Ox'y'z')$ względem układu $(Oxyz)$, tylko t r z y można podać dowolnie (nie dla tej samej osi).

Biorąc pod uwagę trójki cosinusów osi Ox, Oy, Oz względem układu $(Ox'y'z')$ możemy napisać, analogicznie do związków (2), związki między elementami kolumn powyższej tabelki:

$$
\begin{array}{lll}
 & \alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2=1; & \alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3=0 \\
(3) & \beta_1^2+\beta_2^2+\beta_3^2=1; & \beta_1\gamma_1+\beta_2\gamma_2+\beta_3\gamma_3=0 \\
 & \gamma_1^2+\gamma_2^2+\gamma_3^2=1; & \alpha_1\gamma_1+\alpha_2\gamma_2+\alpha_3\gamma_3=0
\end{array}
$$

Na podstawie związków (2), łatwo wyrazić cosinusy kierunkowe jednej osi przez cosinusy kierunkowe dwóch osi do niej prostopadłych. Wyraźmy np. cosinusy kierunkowe $(\alpha_3, \beta_3, \gamma_3)$ osi Oz' w zależności od cosinusów osi (Ox') i (Oy'). Otóż $(\alpha_3, \beta_3, \gamma_3)$ można uważać jako miary rzutów iloczynu wektorowego dwóch wektorów jednostkowych, położonych wzdłuż osi Ox' i Oy', a więc których rzuty na osi $(Oxyz)$ mają miary równe cosinusom $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ i $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$. Na podstawie więc wzorów (20) poprzedniego artykułu, napiszemy odrazu:

$$
\begin{aligned}
&\alpha_3 = \beta_1 \gamma_2 - \beta_2 \gamma_1 \\
(4) \qquad &\beta_3 = \gamma_1 \alpha_2 - \gamma_2 \alpha_1 \\
&\gamma_3 = \alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1
\end{aligned}
$$

Wyznaczniki (4) są podwyznacznikami wyznacznika, utworzonego z dziewięciu cosinusów powyższej tabelki, ponieważ zaś

$$
\begin{vmatrix} \alpha_1, \beta_1, \gamma_1 \\ \alpha_2, \beta_2, \gamma_2 \\ \alpha_3, \beta_3, \gamma_3 \end{vmatrix} = \alpha_3 \begin{vmatrix} \beta_1, \gamma_1 \\ \beta_2, \gamma_2 \end{vmatrix} + \beta_3 \begin{vmatrix} \gamma_1, \alpha_1 \\ \gamma_2, \alpha_2 \end{vmatrix} + \gamma_3 \begin{vmatrix} \alpha_1, \beta_1 \\ \alpha_2, \beta_2 \end{vmatrix} =
$$
$$
= \alpha_3^2 + \beta_3^2 + \gamma_3^2,
$$

a zatem mamy następującą własność dziewięciu cosinusów kierunkowych:

$$
(5) \qquad \begin{vmatrix} \alpha_1, \beta_1, \gamma_1 \\ \alpha_2, \beta_2, \gamma_2 \\ \alpha_3, \beta_3, \gamma_3 \end{vmatrix} = 1
$$

Wyznacznik, utworzony z cosinusów kierunkowych trzech dowolnych wektorów do siebie wzajemnie prostopadłych, równa się jedności. Wektory te trzeba rozważać w takiej kolejności, aby trójścian z nich utworzony miał rozkład zgodny z rozkładem trójścianu $(Oxyz)$.

Weźmy dowolny punkt w przestrzeni M (rys. 151), współrzędne jego niech będą (x, y, z) względem układu $(Oxyz)$ i (x', y', z') względem układu $(Ox'y'z')$. Związki między temi współrzędnemi otrzymamy przy pomocy twierdzenia o rzutach sumy geometrycznej, podobnie jak w geometrji na płaszczyźnie. Mianowicie współrzędne x, y, z można uważać jako miary rzutów wektora OM na osi współrzędnych $(Oxyz)$, wektor ten jest jednak sumą geometryczną swoich składowych x', y', z' wzdłuż osi $(Ox'y'z')$ (rys. 151), będzie więc, według twierdzenia o rzucie sumy geometrycznej:

$$
(6) \qquad \left\{
\begin{aligned}
x &= \underset{(\text{na } Ox)}{\text{rzut } x' + \text{rzut } y' + \text{rzut } z'} \\
y &= \underset{(\text{na } Oy)}{\text{rzut } x' + \text{rzut } y' + \text{rzut } z'} \\
z &= \underset{(\text{na } Oz)}{\text{rzut } x' + \text{rzut } y' + \text{rzut } z'}
\end{aligned}
\right.
$$

a ponieważ miara rzutu wektora równa się jego mierze, pomnożonej przez cosinus odpowiedniego kąta między osiami, otrzymamy więc związki linjowe:

$$\begin{aligned} x &= \alpha_1 x' + \alpha_2 y' + \alpha_3 z' \\ y &= \beta_1 x' + \beta_2 y' + \beta_3 z' \\ z &= \gamma_1 x' + \gamma_2 y' + \gamma_3 z' \end{aligned} \tag{7}$$

Zaznaczymy, iż takie same związki zachodzą między miarami rzutów (X, Y, Z) i (X', Y', Z') tego samego wektora $\overrightarrow{V}$ na osi jednego układu prostokątnego i na osi drugiego:

$$\begin{aligned} X &= \alpha_1 X' + \alpha_2 Y' + \alpha_3 Z' \\ Y &= \beta_1 X' + \beta_2 Y' + \beta_3 Z' \\ Z &= \gamma_1 X' + \gamma_2 Y' + \gamma_3 Z' \end{aligned} \tag{7'}$$

Podobnie rozumując, wyrazimy odwrotnie współrzędne x', y', z' w zależności od x, y, z:

$$\begin{aligned} x' &= \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z \\ y' &= \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z \\ z' &= \alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z \end{aligned} \tag{8}$$

Związki (8) można wysnuć też ze związków (7), mnożąc je obustronnie przez $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$, i t. p. i dodając.

W przypadku ogólnym, gdy dwa układy nie mają wspólnego początku, prowadzimy przez początek jednego układu osi równoległe do drugiego i otrzymamy związki między współrzędnemi danego punktu w dwóch różnych układach, łącząc wzory (1) i (7).

ROZDZIAŁ IV.

O POWIERZCHNI I LINJI W PRZESTRZENI.

11. Równanie powierzchni.

Jeśli każdemu punktowi $P(x, y)$ płaszczyzny (Oxy) (lub jej części) podporządkujemy określone wartości z i odmierzymy jako współrzędne na prostopadłych do płaszczyzny (Oxy), wystawionych z punktu P, to otrzymamy zbiór punktów $M(x, y, z)$ w przestrzeni, tworzących pewną powierzchnię S. Powierzchnia ta będzie