gdzie (X, Y) oznaczają współrzędne bieżące punktów normalnej. Jeśli $f'(x) = 0$, wtedy normalna jest prostopadła do osi Ox i ma równanie $X - x = 0$.

Jeśli współrzędne punktów krzywej są funkcjami parametru, to, według równania (6), równanie normalnej napiszemy w postaci

$$Y - y = -\frac{\left(\frac{dx}{dt}\right)}{\left(\frac{dy}{dt}\right)}(X - x)$$

lub ogólniej

$$(X - x)\frac{dx}{dt} + (Y - y)\frac{dy}{dt} = 0 \tag{8}$$

Przykład. Dana jest krzywa o równaniu (art. 9)

$$y = \frac{1}{x},$$

współczynnik kątowy stycznej w punkcie (x, y) ma wartość

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2},$$

równanie stycznej w punkcie (x, y) będzie więc miało postać

$$Y - y = -\frac{1}{x^2}(X - x);$$

zaś równanie normalnej

$$Y - y = x^2 (X - x).$$

ROZDZIAŁ VI

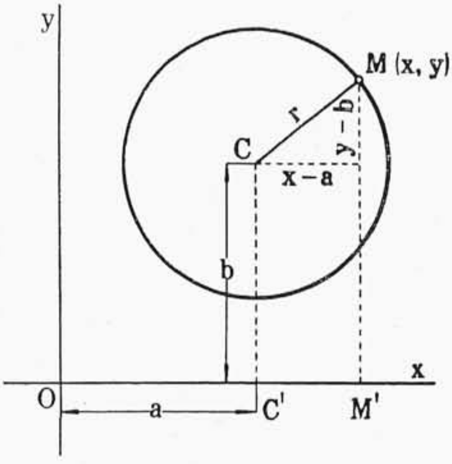
ZAGADNIENIA DOTYCZĄCE KOŁA.

30. Równanie koła.

Koło w układzie Oxy jest w zupełności określone, jeśli dane są współrzędne (a, b) jego środka C i promień r. Aby otrzymać równanie, które spełniają współrzędne (x, y) każdego punktu M, leżącego na okręgu i tylko takie punkty, wystarczy napisać, iż odległość dwóch punktów $M(x, y)$ i $C(a, b)$ jest równa r; ponieważ miary rzutów wektora CM są $x - a$ i $y - b$, otrzymamy więc związek szukany w tej postaci:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \tag{1}$$

Równanie koła jest zatem *drugiego stopnia.* Widzimy, iż koło jest określone przez *trzy* parametry a, b, r, układ kół na płaszczyźnie jest więc trójparametrowy. Z tego powodu w zagadnieniach, dotyczących prowadzenia kół, liczba warunków niezależnych nie powinna przewyższać trzech.



Rys. 53.

Jeśli środek koła leży w początku układu, wtedy $a = 0$, $b = 0$ i równanie przybiera postać szczególną

(2) $$x^2 + y^2 = r^2$$

Rozwijając kwadraty w równaniu (1), otrzymamy równanie z trzema współczynnikami α, β, γ o postaci

(3) $$x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0$$

odznaczające się tem, iż nie zawiera wyrazu xy.

Odwrotnie, wykażemy, iż związek drugiego stopnia

(4) $$A x^2 + A y^2 + B x + C y + D = 0,$$

w którym *współczynniki przy* x^2 *i* y^2 *są równe, lecz odmienne od zera i który nie zawiera wyrazu* xy, odpowiada, zależnie od współczynników, albo punktom pewnego okręgu koła, albo jednemu tylko punktowi płaszczyzny, albo też nie odpowiada żadnemu utworowi rzeczywistemu.

Istotnie, dzieląc wyrażenie (4) przez A, z założenia nierówne zeru i wydzielając dwa pełne kwadraty, mamy

$$\left(x^2+2\frac{B}{2A}x+\frac{B^2}{4A^2}\right)+\left(y^2+2\frac{C}{2A}y+\frac{C^2}{4A^2}\right)=\frac{B^2+C^2-4AD}{4A^2}$$

lub

$$\left(x+\frac{B}{2A}\right)^2+\left(y+\frac{C}{2A}\right)^2=\frac{B^2+C^2-4AD}{4A^2} \tag{5}$$

Jeśli $B^2+C^2-4AD>0$, to równanie (5), a więc i (4), spełnione jest w punktach okręgu koła o promieniu

$$r=\frac{\sqrt{B^2+C^2-4AD}}{2|A|}$$

i którego środkiem jest punkt o współrzędnych

$$a=-\frac{B}{2A};\quad b=-\frac{C}{2A}$$

Jeśli $B^2+C^2-4AD=0$, wtedy równanie dane jest spełnione tylko w jednym punkcie rzeczywistym

$$x=-\frac{B}{2A};\quad y=-\frac{C}{2A}$$

Jeśli $B^2+C^2-4AD<0$, wtedy żaden punkt rzeczywisty płaszczyzny nie spełnia danego równania, gdyż prawa strona równania, jako suma kwadratów, nie może być ujemna. Mówimy też, iż równanie przedstawia wtedy koło urojone.

Gdy równanie (4) nie zawiera wyrazu Bx t. j. gdy $B=0$, wtedy $a=0$ i środek koła (jeśli ono istnieje) leży na osi rzędnych; gdy zaś równanie (4) nie zawiera wyrazu Cy t. j. $C=0$, wtedy $b=0$ i środek koła leży na osi odciętych.

Gdy równanie (4) nie zawiera wyrazu wolnego t. j. gdy $D=0$, wtedy spełnione ono jest w punkcie $(0,0)$, oznacza to, że koło dane przechodzi przez początek układu.

Przykład. Dane jest równanie

$$x^2+y^2+x=0;$$

przedstawia ono koło, przechodzące przez początek układu i mające środek na osi Ox. Wydzielając pełny kwadrat, mamy

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\frac{1}{4},$$

a zatem

$$a=-\frac{1}{2};\quad b=0;\quad r=\frac{1}{2}.$$

31. O przecięciu się koła z prostą. Styczna do koła.

Niech będzie prosta o równaniu

$$(6) \qquad y = mx + n$$

i koło określone przez równanie

$$(7) \qquad x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0$$

Aby wyznaczyć punkt przecięcia koła danego z prostą daną, trzeba znaleść parę liczb (x, y), spełniających *jednocześnie* dwa związki (6) i (7). Podstawiając w równanie (7) wyrażenie (6) na y, otrzymamy równanie drugiego stopnia

$$(8) \qquad x^2 + (mx + n)^2 + \alpha x + \beta (mx + n) + \gamma = 0,$$

określające odcięte punktów przecięcia koła z prostą. Uporządkujmy równanie (8) według potęg niewiadomej, będziemy mieli

$$(8') \qquad x^2 (1 + m^2) + x (2mn + m\beta + \alpha) + n^2 + \beta n + \gamma = 0$$

Jeśli wyróżnik tego równania jest dodatni:

$$(2mn + m\beta + \alpha)^2 - 4 (1 + m^2) (n^2 + \beta n + \gamma) > 0,$$

wtedy równanie (8') posiada dwa określone pierwiastki, a zatem istnieją dwa punkty przecięcia koła z prostą.

Jeśli wyróżnik równania (8') jest ujemny, wtedy równanie (8') nie ma rozwiązań rzeczywistych i prosta dana koła nie przecina.

Jeśli wreszcie współczynniki $m, n, \alpha, \beta, \gamma$ są takie, iż wyróżnik równania (8') jest równy zeru:

$$(9) \qquad (2mn + m\beta + \alpha)^2 - 4 (1 + m^2) (n^2 + \beta n + \gamma) = 0,$$

wtedy równanie (8') będzie miało pierwiastki równe, a to znaczy geometrycznie, iż prosta dana, z założenia nierównoległa do osi Oy, jest granicznem położeniem prostej, mającej z kołem dwa punkty wspólne, gdy odległość tych punktów dąży do zera. Prosta o równaniu (6) będzie więc w wypadku związku (9) *styczna do koła*.

Rozważania poprzednie dotyczą prostych nierównoległych do osi Oy. Aby otrzymać warunek przecięcia lub styczności z kołem prostej równoległej do osi Oy, a więc o równaniu np.

$$x = k$$

należy podstawić tę wartość x w równanie koła (7) i z otrzymanego równania kwadratowego względem współrzędnej y

$$y^2 + \beta y + (k^2 + \alpha k + \gamma) = 0$$

wysnuć, na podstawie wartości wyróżnika, wnioski geometryczne, jak wyżej.

Powyższe rozważanie, podporządkowujące pewnym własnościom równań algebraicznych własności tworów geometrycznych, charakteryzuje metodę Geometrji Analitycznej.

P r z y k ł a d. *Znaleść punkty przecięcia się koła o równaniu*

$$x^2 + y^2 + x - y - 1 = 0$$

z osią odciętych.

Punkty osi odciętych spełniają równanie $y = 0$, a więc odcięte szukanych punktów przecięcia otrzymamy ze związku

$$x^2 + x - 1 = 0,$$

skąd

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}; \quad x_2 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}.$$

ZAGADNIENIE 1. *Znaleść równanie stycznej do koła o równaniu*

$$x^2 + y^2 = r^2$$

równoległej do prostej danej

$$y = mx.$$

Szukana styczna będzie miała równanie o postaci

$$y = mx + n$$

Aby wyznaczyć parametr n, bierzemy pod uwagę układ równań

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = r^2 \\ y = mx + n \end{cases}$$

określający punkty wspólne prostej i koła i żądamy, aby wynikające stąd równanie

$$x^2 + (mx + n)^2 = r^2$$

miało jeden pierwiastek podwójny; po uporządkowaniu tego równania, określającego odcięte punktów przecięcia, otrzymamy

$$(1 + m^2)\, x^2 + 2mn\,x + (n^2 - r^2) = 0$$

i żądany warunek styczności w postaci

$$m^2 n^2 - (n^2 - r^2)(1 + m^2) = 0$$

lub, po dokonaniu redukcji,

$$n^2 - (1 + m^2) r^2 = 0$$

Według postaci normalnej równania prostej, wartość

$$\frac{n}{\pm \sqrt{1 + m^2}}$$

przedstawia odległość prostej o równaniu $y = m x + n$ od początku układu, a więc otrzymany warunek styczności wyraża znany fakt, iż odległość stycznej od środka koła równa się jego promieniowi. Ponieważ dla żądanej stycznej współczynnik kątowy m jest dany z góry, a zatem z warunku styczności otrzymamy wartość odpowiednią

$$n = \pm r \sqrt{1 + m^2}$$

i szukane równania dwóch stycznych

$$y = m x \pm r \sqrt{1 + m^2}$$

położonych oczywiście symetrycznie względem środka,

ZAGADNIENIE 2. *Z punktu danego* (x_0, y_0) *wyprowadzić styczną do koła o równaniu* $x^2 + y^2 = r^2$.

Prosta, przechodząca przez punkt dany (x_0, y_0), ma równanie

$$y - y_0 = m (x - x_0);$$

otóż trzeba dobrać wartość współczynnika kątowego m tak, aby prosta była do koła danego styczna. Zbadajmy więc przecięcie się prostej powyższej z kołem, w tym celu wyznaczmy y z równania prostej i wstawmy w równanie koła, otrzymamy wtedy równanie

$$x^2 (1 + m^2) + 2 m (y_0 - m x_0) x + (y_0 - m x_0)^2 - r^2 = 0$$

z którego wyznaczyć można odcięte x punktów przecięcia. Aby prosta szukana była styczna do koła, równanie otrzymane powinno mieć pierwiastki równe, stąd mamy warunek

$$m^2 (y_0 - m x_0)^2 - (1 + m^2) \{(y_0 - m x_0)^2 - r^2\} = 0,$$

na podstawie którego wyznaczymy szukany współczynnik kątowy stycznej. Po uproszczeniu, wypadnie równanie drugiego stopnia

$$m^2(r^2 - x_0^2) + 2m\, x_0 y_0 + r^2 - y_0^2 = 0; \tag{10}$$

równanie to ma dwa pierwiastki rzeczywiste m_1 i m_2, gdy $x_0^2 \neq r^2$ i jeśli $x_0^2 + y_0^2 - r^2 > 0$, to znaczy, jeśli punkt (x_0, y_0) leży zewnątrz koła danego.

W przypadku szczególnym, gdy $x_0 = \pm r$; $y_0 \neq 0$, równanie (10) jest pierwszego stopnia i daje tylko jedną styczną; drugą styczną, wychodzącą z punktu (x_0, y_0), będzie wtedy oczywiście prosta $x = \pm r$ równoległa do osi Oy. Z punktu zewnętrznego można zatem poprowadzić dwie styczne do koła.

RÓWNANIE STYCZNEJ.

Równanie stycznej do koła o równaniu

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 - r^2 = 0$$

w danym punkcie (x, y), otrzymamy według rozważań rozdziału V. Aby wyznaczyć współczynnik kątowy stycznej w punkcie (x, y), to znaczy pochodną $\frac{dy}{dx}$, *różniczkujemy obie strony równania koła względem zmiennej niezależnej x, traktując zmienną y jako funkcję zmiennej x;* otrzymamy wtedy

$$2(x - a) + 2(y - b)\frac{dy}{dx} = 0$$

stąd

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x - a}{y - b}$$

Ponieważ stosunek $\frac{y - b}{x - y}$ jest współczynnikiem kątowym prostej, łączącej środek koła (a, b) z punktem styczności (x, y), otrzymana więc wartość na $\frac{dy}{dx}$ wskazuje, iż styczna do koła jest do tej prostej prostopadła.

Równanie stycznej do koła w punkcie x, y będzie więc takie:

$$Y - y = -\frac{x - a}{y - b}(X - x)$$

równanie to, po uporządkowaniu, wypadnie w postaci

$$(X - a)(x - a) + (Y - b)(y - b) - r^2 = 0 \tag{11}$$

łatwej do zapamiętania, przez porównanie z postacią równania koła.

W szczególności dla koła o równaniu

$$x^2+y^2=r^2,$$

którego środkiem jest początek układu, równanie stycznej w punkcie (x, y) będzie miało postać

$$Xx+Yy=r^2; \tag{11}$$

przypominamy, iż X, Y oznaczają współrzędne bieżące punktu stycznej, zaś x, y współrzędne punktu styczności *związane równaniem koła.*

32. Poszukiwanie kół, spełniających dane warunki.

ZAGADNIENIE 1. *Znaleść równanie koła, przechodzącego przez trzy dane punkty*:

$$A_1(x_1, y_1), \quad A_2(x_2, y_2), \quad A_3(x_3, y_3).$$

Koło będzie określone, jeśli wyznaczymy wartości trzech parametrów, tkwiących w jego równaniu.

Zamiast bezpośrednio poszukiwać wielkości a, b, r w równaniu (1), wygodniej jest wyznaczyć wpierw współczynniki α, β, γ w równaniu koła o postaci

$$x^2+y^2+\alpha x+\beta y+\gamma=0 \tag{12}$$

gdyż współczynni i te występują w pierwszej potędze. Po wyznaczeniu wartości α, β, γ z danych warunków, znajdziemy elementy geometryczne a, b, r koła, sprowadzając postać (12) do postaci (5) metodą podaną w art. 30. Żądanie, aby koło przechodziło przez trzy dane punkty, oznacza, iż równanie jego (12) winno być spełnione w trzech danych punktach, otrzymamy więc warunki

$$\begin{aligned} x_1^2+y_1^2+\alpha x_1+\beta y_1+\gamma&=0\\ x_2^2+y_2^2+\alpha x_2+\beta y_2+\gamma&=0\\ x_3^2+y_3^2+\alpha x_3+\beta y_3+\gamma&=0 \end{aligned} \tag{13}$$

Warunki te tworzą układ trzech równań pierwszego stopnia względem niewiadomych α, β, γ, z którego wyznaczymy te wartości w sposób jednoznaczny, jeśli wyznacznik charakterystyczny, to znaczy wyznacznik utworzony ze współczynników przy niewiadomych α, β, γ, *nie równa się zeru*:

$$(14) \qquad \begin{vmatrix} x_1, y_1, 1 \\ x_2, y_2, 1 \\ x_3, y_3, 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

Według art. 20 (zagadnienie 3), nierówność ta wyraża znany warunek geometryczny, *aby trzy punkty* (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) *nie leżały na jednej prostej*.

ZAGADNIENIE 2. *Znaleść równanie koła, przechodzącego przez dwa punkty dane* $(0,1)$, $(2,2)$ *i stycznego do osi* Ox.

Poszukujemy równania koła w postaci

$$x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0;$$

należy teraz wyrazić analitycznie trzy dane warunki geometryczne; otóż dwa pierwsze, iż koło przechodzi przez dwa dane punkty, dają natychmiast dwa związki między poszukiwanemi współczynnikami:

$$(15) \qquad \begin{gathered} 1 + \beta + \gamma = 0 \\ 8 + 2\alpha + 2\beta + \gamma = 0 \end{gathered}$$

W celu otrzymania trzeciego związku, zbadajmy przecięcie się koła z osią Ox. Odcięte punktów przecięcia otrzymamy, podstawiając w równanie koła wartość $y = 0$; wypada wtedy równanie

$$x^2 + \alpha x + \gamma = 0,$$

określające wartości x_1 i x_2 odciętych punktu przecięcia koła z osią Ox; ale z założenia koło winno być styczne do osi i równanie otrzymane winno mieć pierwiastki równe, zatem

$$(16) \qquad \alpha^2 - 4\gamma = 0,$$

jest to szukany związek między współczynnikami, wyrażający warunek styczności koła do osi Ox. Z trzech równań (15) i (16) określimy niewiadome α, β, γ i otrzymamy *dwa* koła żądane, przedstawione przez równania

$$x^2 + y^2 + (4 + 2\sqrt{10})\,x - (15 + 4\sqrt{10})\,y + (14 + 4\sqrt{10}) = 0$$
$$x^2 + y^2 + (4 - 2\sqrt{10})\,x - (15 - 4\sqrt{10})\,y + (14 - 4\sqrt{10}) = 0$$

środki i promienie tych kół określa postać (5).

ZAGADNIENIE 3. *Znaleść równanie koła, przechodzącego przez punkt* (1,2) *i stycznego do prostej* $y=x$ *w punkcie* (3,3).

Koło szukane o równaniu

$$x^2+y^2+\alpha x+\beta y+\gamma=0$$

przechodzi przez punkt (1,2), więc mamy związek

$$5+\alpha+2\beta+\gamma=0 \tag{17}$$

Następnie koło winno być styczne do prostej $y=x$; odciętą punktu wspólnego dla koła i prostej danej otrzymamy, wstawiając do równania koła wyrażenie $y=x$, wypada

$$2x^2+(\alpha+\beta)x+\gamma=0 \tag{18}$$

ale, z racji styczności koła do prostej, równanie (18) winno mieć pierwiastki równe, więc

$$(\alpha+\beta)^2-8\gamma=0\,, \tag{19}$$

zaś wartość wtedy tego pierwiastka będzie

$$x=-\frac{\alpha+\beta}{4} \tag{20}$$

Punkt styczności jest jednak z góry dany, mianowicie odcięta jego ma wartość $x=3$, mamy więc trzeci związek

$$-\frac{\alpha+\beta}{4}=3 \tag{20'}$$

Z trzech równań (17), (19) i (20′) otrzymamy wartości α, β i γ; wypada $\gamma=18$ i następnie $\alpha=-1$, $\beta=-11$. Mamy więc równanie szukane

$$x^2+y^2-x-11y+18=0\,,$$

któremu odpowiada koło rzeczywiste o promieniu

$$r=\frac{5\sqrt{2}}{2}$$

ze środkiem w punkcie

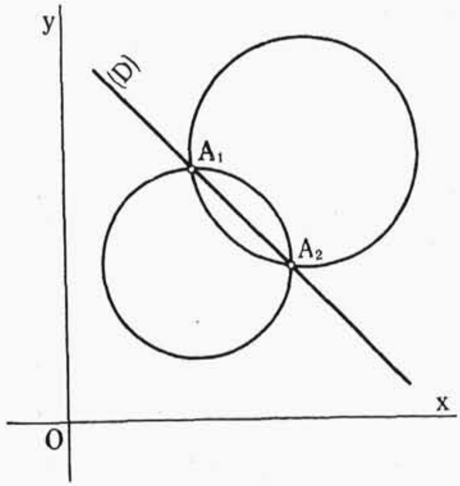
$$a=\frac{1}{2}; \qquad b=\frac{11}{2}$$

33. O przecięciu się dwóch kół.

Dane są dwa koła o równaniach

$$(21)\quad \begin{aligned} &(x-a_1)^2+(y-b_1)^2-r_1{}^2=0 \\ &(x-a_2)^2+(y-b_2)^2-r_2{}^2=0 \end{aligned}$$

Wyznaczenie punktów przecięcia kół danych polega na znalezieniu dwóch liczb (x, y), spełniających jednocześnie dwa związki (21). Widzimy natychmiast, iż para liczb (x, y), spełniająca



Rys. 54.

obydwa związki (21), spełnia również związek, otrzymany przez odjęcie stron równań (21):

$$(22)\quad \{(x-a_1)^2+(y-b_1)^2-r_1{}^2\}-\{(x-a_2)^2+(y-b_2)^2-r_2{}^2\}=0$$

t. j., po wykonaniu redukcji, związek *pierwszego stopnia*:

$$(23)\quad 2(a_2-a_1)x+2(b_2-b_1)y+(a_1{}^2+b_1{}^2-r_1{}^2-a_2{}^2-b_2{}^2+r_2{}^2)=0$$

Fakt ten oznacza geometrycznie, iż punkty przecięcia kół danych leżą na pewnej prostej, przedstawionej przez równanie (23). *Odejmując więc strony równań dwóch kół, otrzymujemy natychmiast związek pierwszego stopnia* (23), *który przedstawia równanie prostej, przechodzącej przez punkty przecięcia się kół danych* (jeśli te punkty istnieją).

Widzimy, iż w zagadnieniu przecięcia się dwóch kół, *wpierw* odnajdujemy z łatwością równanie prostej, łączącej punkty przecięcia kół, a *następnie* szukamy przecięcia się tej prostej z jednem z dwóch kół. Z rozważań geometrycznych wiadomo, iż punkty przecięcia istnieją, jeśli odległość środków jest mniejsza lub równa sumie promieni danych kół; jest zaś większa lub równa różnicy tych promieni.

Warunek ten można wysnuć też z rozważań analitycznych. Przypuśćmy więc, iż mamy dwa koła o promieniach r_1 i r_2, których odległość środków wynosi d. W celu uproszczenia, możemy umieścić początek układu w środku jednego z kół, zaś oś Ox skierować wzdłuż linji środków danych kół. Poszukiwanie punktów przecięcia kół danych sprowadza się więc do rozwiązania układu równań

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = r_1^2 \\ (x - d)^2 + y^2 = r_2^2 \end{cases}$$

odejmując od siebie strony tych równań, widzimy, iż szukane punkty, są przecięciem prostej równoległej do osi Oy o równaniu

$$x = \frac{d^2 + r_1^2 - r_2^2}{2d}$$

z jednem z kół; podstawiając tę wartość na x do równania np. pierwszego koła, otrzymamy równanie, określające wartości rzędnych punktów przecięcia

$$y^2 = r_1^2 - \frac{(d^2 + r_1^2 - r_2^2)^2}{4d^2};$$

punkty przecięcia rzeczywiste, różne lub zjednoczone, istnieją, jeśli jest spełniony warunek

$$\frac{|d^2 + r_1^2 - r_2^2|}{2d} \leqslant r_1$$

stąd zaś, w założeniu iż $r_1 > r_2$, otrzymamy

$$(d - r_1)^2 \leqslant r_2^2$$

i ostatecznie znany warunek

$$r_1 - r_2 \leqslant d \leqslant r_1 + r_2$$

Rozważmy teraz kombinację linjową równań kół (21), to znaczy związek o postaci

$$(24) \quad [(x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 - r_1^2] + \lambda\,[(x - a_2)^2 + (y - b_2)^2 - r_2^2] = 0$$

związek ten, dla dowolnej wartości współczynnika λ (z wyjątkiem $\lambda = -1$), po odpowiedniem uporządkowaniu, będzie miał postać (4) charakterystyczną dla koła. Równanie (24) przedstawia więc koło dla każdej wartości λ, z wyjątkiem $\lambda = -1$ i tych wartości, dla których równanie to sprowadzi się do postaci sumy kwadratów przyrównanej do liczby ujemnej.

Jeśli koła (21) przecinają się, to *koło o równaniu* (24), *dla dowolnej wartości* λ, *przechodzi przez punkty przecięcia tych kół.* Istotnie, każda para liczb, spełniających jednocześnie obydwa związki (21), będzie spełniała również związek (24), niezależnie od wartości stałej λ.

ZAGADNIENIE. Znaleść równanie koła, które przechodzi przez punkty przecięcia się kół o równaniach

$$x^2 + y^2 = 1$$

$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 3$$

i nadto przez punkt (5,3) (łatwo sprawdzić, iż punkty przecięcia istnieją).

Według uwagi poprzedniej, zbyteczne jest poszukiwanie punktów przecięcia się kół danych; wiemy mianowicie, iż równanie

$$\lambda (x^2 + y^2 - 1) + (x - 1)^2 + (y - 2)^2 - 3 = 0$$

przedstawia koła, przechodzące przez punkty przecięcia kół danych. Skorzystajmy więc z dowolności parametru λ i tak dobierzmy jego wartość, aby koło poszukiwane przechodziło przez punkt (5,3), wypada warunek

$$\lambda (5^2 + 3^2 - 1) + (5 - 1)^2 + (3 - 2)^2 - 3 = 0$$

stąd $\lambda = -\frac{14}{33}$, szukane koło będzie więc miało takie równanie:

$$19 x^2 + 19 y^2 - 66 x - 132 y + 80 = 0.$$

34. O potędze punktu względem koła. Koła ortogonalne.

Niech będzie równanie koła

$$F(x, y) = (x - a)^2 + (y - b)^2 - r^2 = 0 \tag{25}$$

i punkt dowolny płaszczyzny $A (\alpha, \beta)$. *Potęgą punktu A względem danego koła nazywamy wartość funkcji*

$$F(\alpha, \beta) = (\alpha - a)^2 + (\beta - b)^2 - r^2 \tag{26}$$

przedstawiającą różnicę kwadratu odległości punktu A od środka koła danego i kwadratu promienia koła r. Potęga (25) jest *dodatnia* dla punktów A, leżących *zewnątrz* koła, *ujemna* dla punktów *wewnętrznych* koła, zaś *równa zeru* na samym okręgu koła. Potęga punktu, leżącego zewnątrz koła, przedstawia *kwadrat długości stycznej* wyprowadzonej z danego punktu do koła.

Niech będą dwa koła, mające równania w postaci

$$(27)\qquad \begin{aligned} F_1(x,y) &= (x-a_1)^2+(y-b_1)^2-r_1^2=0 \\ F_2(x,y) &= (x-a_2)^2+(y-b_2)^2-r_2^2=0 \end{aligned}$$

Potęgi dowolnego punktu płaszczyzny (x,y) względem każdego z tych kół są równe wyrażeniom $F_1(x,y)$ i $F_2(x,y)$, a więc punkty, których potęgi względem danych kół (27) są sobie równe, spełniają równanie

$$(28)\qquad F_1(x,y)-F_2(x,y)=0$$

Ale równanie (28) jest pierwszego stopnia i przedstawia określoną prostą, jeśli koła dane (27) *nie są współśrodkowe*, a zatem *miejscem geometrycznem punktów, których potęgi względem dwóch kół są sobie równe, jest linja prosta.* Linję tę nazywamy *osią pierwiastną* dwóch kół.

Jeśli koła się przecinają, to oś pierwiastna *przechodzi przez ich punkty przecięcia.* Gdy dane koła się nie przecinają, to ich oś pierwiastna nie ma z niemi punktów wspólnych. Oczywiście *oś pierwiastna* dwóch kół jest zawsze *prostopadła do prostej, łączącej środki tych kół.*

Rozważmy teraz równanie

$$(29)\qquad F_1(x,y)+\lambda F_2(x,y)=0,$$

będące kombinacją linjową równań kół niewspółśrodkowych (27).

Mówiliśmy już, iż równanie (29) dla dowolnej wartości parametru λ (z wyjątkiem $\lambda=-1$) ma postać równania koła; a więc, zmieniając wartość parametru λ w równaniu (29), otrzymamy pewien układ kół na płaszczyźnie; nazywamy go *układem linjowym* kół.

Wykażemy, iż *potęga dowolnego punktu na osi pierwiastnej* (28) *względem każdego koła układu linjowego* (29) *ma jedną i tę samą wartość, niezależną zatem od* λ. Istotnie, równanie (29) możemy napisać w postaci

$$(1+\lambda)F_1(x,y)+\lambda[F_2(x,y)-F_1(x,y)]=0,$$

lub też, gdy $\lambda \neq -1$,

$$(30)\qquad F_1(x,y)+\frac{\lambda}{1+\lambda}[F_2(x,y)-F_1(x,y)]=0;$$

ponieważ różnica F_2-F_1 nie zawiera wyrazów drugiego stopnia, więc, według określenia (26), potęga dowolnego punktu (x_0,y_0) względem koła o równaniu (30) równa się wartości lewej strony tego równania w punkcie (x_0, y_0), otóż, podstawiając w wyrażeniu (30) współrzędne (x_0, y_0) dowolnego punktu, leżącego na osi pierwiastnej o równaniu (28), otrzymamy wartość

$$F_1(x_0, y_0),$$

niezależną od λ, co było do okazania.

Stąd wynika również, iż ta sama prosta (28) jest zawsze osią pierwiastną dwóch dowolnych kół wybranych ze zbioru (29). Prostą o równaniu

$$F_2(x, y) - F_1(x, y) = 0$$

nazwiemy osią pierwiastną układu kół, określonego przez równanie (29) lub (30).

Koła ortogonalne.

Dwa koła nazywamy *ortogonalne*, jeśli styczne w punktach przecięcia tych kół są względem siebie prostopadłe.

Dla dwóch kół ortogonalnych, promienie, doprowadzone do punktów przecięcia, są do tych kół nawzajem styczne i tworzą z odcinkiem, łączącym środki, trójkąt prostokątny.

Według określenia potęgi punktu względem koła, widzimy, że, gdy dwa koła są ortogonalne, to potęgi wzajemne środków tych kół są równe kwadratom ich promieni.

Warunek konieczny i wystarczający ortogonalności dwóch kół, określonych przez równania

$$(x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 - r_1^2 = 0;$$

$$(x - a_2)^2 + (y - b_2)^2 - r_2^2 = 0;$$

otrzymamy, pisząc, iż suma kwadratów promieni tych kół równa się kwadratowi odległości ich środków, wypadnie więc taki warunek:

$$(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2 = r_1^2 + r_2^2 \tag{31}$$

Koło jest ortogonalne do dwóch kół danych, jeśli potęgi jego środka względem tych kół równają się kwadratowi jego promienia. Z określenia osi pierwiastnej i jej własności wynikają więc następujące dwa wnioski:

1. *Miejscem geometrycznem środków kół ortogonalnych do dwóch kół danych jest oś pierwiastna tych kół.*
2. *Koła ortogonalne do dwóch kół o równaniach*

$$F_1(x, y) = (x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 - r_1^2 = 0$$

$$F_2(x, y) = (x - a_2)^2 + (y - b_2)^2 - r_2^2 = 0$$

są ortogonalne do wszystkich kół układu linjowego

$$F_1(x, y) + \lambda F_2(x, y) = 0.$$

Ćwiczenia.

1. Znaleść równanie koła, przechodzącego przez punkt (3, 1), stycznego do osi odciętych i do prostej $y = x$.

2. Znaleść równanie koła opisanego i wpisanego w trójkąt ograniczony trzema danemi prostemi:

$$y = 0; \quad y = x; \quad 2x + y = 1.$$

3. Znaleść równanie koła stycznego do osi Ox w punkcie (3, 0) i do prostej $x + y = 1$ w punkcie niepodanym z góry.

4. Przez punkt (1, 3) poprowadzić koło styczne w początku współrzędnych do prostej $y = 7x$.

5. Przez punkty przecięcia się kół, określonych przez równania

$$x^2 + y^2 = 1 \quad \text{i} \quad (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 3$$

poprowadzić koło styczne do osi Ox.

6. Dowieść, iż w każdym trójkącie dziewięć punktów następujących leży na jednym kole: 1⁰) środki boków, 2⁰) spodki wysokości, 3⁰) środki odcinków, łączących wierzchołki z punktem przecięcia wysokości.

7. Znaleść koło ortogonalne do trzech kół danych.

8. Dowieść, iż koła ortogonalne do dwóch kół danych tworzą układ linjowy, którego oś pierwiastna przechodzi przez środki dwóch danych kół.

9. Znaleść równania wspólnych stycznych do dwóch kół danych:

$$x^2 + y^2 = 1,$$

$$x^2 + y^2 + 4x = 0$$

10. Przez punkt (2, 3) poprowadzić koło styczne do koła danego

$x^2 + y^2 = 5$ w punkcie (1, 2).

11. Znaleść równanie koła stycznego do koła

$$x^2 + y^2 = 5$$

w punkcie (1, 2) i do koła

$$(x - 3)^2 + y^2 = 1$$

w punkcie niepodanym z góry.

12. Wyznaczyć koło styczne do trzech kół danych (wskazać metodę analityczną rozwiązania).

13. Wyznaczyć zbiór punktów płaszczyzny, spełniających nierówność

$$(x - y)(x^2 + y^2 + x) > 0.$$

ROZDZIAŁ VII.

MIEJSCA GEOMETRYCZNE.

35. Rozważania ogólne.

Miejscem geometrycznem nazywamy zbiór wszystkich punktów, posiadających określoną własność geometryczną wspólną.

Geometrja Analityczna daje właśnie metodą ogólną, poznawania postaci linji krzywej, którą utworzą punkty określonego