cinające się rzeczywiste, lub jedna prosta rzeczywista (oś Oz) w przypadku równania

$$Ax^2 + By^2 = 0,$$

zaś dwie płaszczyzny równoległe lub zjednoczone w przypadku równania

$$Ax^2 = D$$

Nadmienimy wreszcie, iż równaniu (10) nie będzie odpowiadał żaden twór rzeczywisty, gdy współczynniki A i B mają ten sam znak, lecz przeciwny względem znaku wyrazu D.

32. Powierzchnie drugiego stopnia bez środka.

Powierzchnie bez środka sprowadzają się do równania

$$Ay^2 + Bz^2 = Cx \tag{11}$$

Jeśli równanie jest pełne, to możliwe są tu tylko dwa typy powierzchni zwanych *paraboloidami,* zależnie od tego, czy znaki współczynników A i B są jednakowe, czy też przeciwne. Powierzchnie te posiadają dwie płaszczyzny symetrji i jedną oś symetrji Ox, która jest ich przecięciem. Punkt O, w którym oś symetrji przebija paraboloidę, nazywamy jej *wierzchołkiem.*

PARABOLOIDA ELIPTYCZNA.

Powierzchnia ta odpowiada równaniu, które napiszemy w postaci

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = \frac{x}{c} \tag{12}$$

Znak współczynnika c nie wpływa na postać powierzchni, lecz tylko na jej położenie względem dodatniego zwrotu Ox; jeśli przypuścimy, iż $c > 0$, wtedy powierzchnia będzie leżała całkowicie po dodatniej stronie płaszczyzny (Oyz).

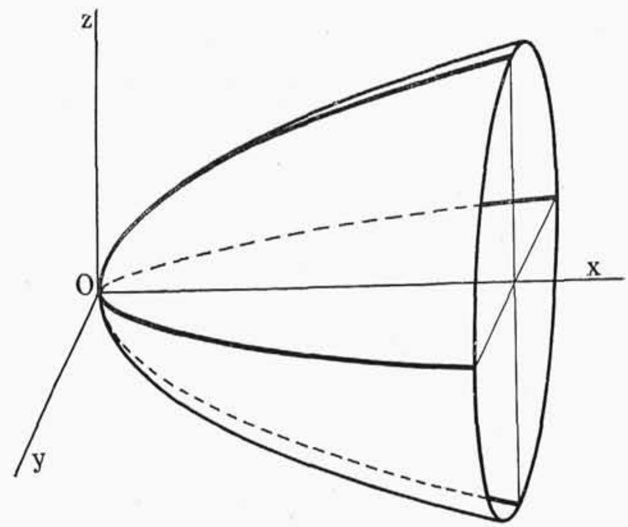
Przekroje paraboloidy (12) płaszczyznami $x = k$ (jeśli $k > 0$) są zawsze *elipsami,* identycznemi ze swemi rzutami o równaniach:

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = ck,$$

zaś przekroje płaszczyznami $y = 0$ i $z = 0$ są parabolami (rys. 189) o równaniach

$$z^2 = \frac{b^2}{c} x \text{ i } y^2 = \frac{a^2}{c} x$$

Jeśli $a = b$, wtedy paraboloida jest *obrotowa* dokoła osi Ox.



Rys. 189.

PARABOLOIDA HYPERBOLICZNA.

Powierzchnia ta odpowiada równaniu

(13) $$\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{b^2}=\frac{x}{c}$$

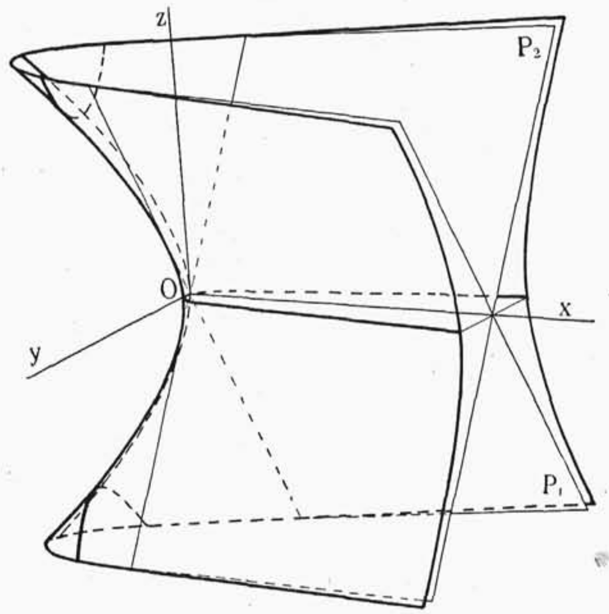
przypuścimy, iż $c>0$. Przekroje tej powierzchni płaszczyznami $z=0$ i $y=0$ są parabolami względem siebie przeciwnie zwróconemi o równaniach

$$y^2=\frac{a^2}{c}x \quad \text{i} \quad z^2=-\frac{b^2}{c}x$$

mającemi wierzchołek w punkcie O. Przekroje płaszczyznami równoległemi $x=k$ są zawsze *hyperbolami* o równaniach

(14) $$\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{b^2}=\frac{k}{c};$$

osi rzeczywiste tych hyperbol są równoległe do Oy dla przekrojów, leżących po dodatniej stronie płaszczyzny $Oyz\,(k>0)$, dla przekrojów zaś leżących po przeciwnej stronie $(k<0)$, osi rzeczywiste hyperbol są równoległe do Oz. Na podstawie tych własności, wyprowadzamy wniosek o kształcie powierzchni, przypominającej siodło (rys. 190).



Rys. 190.

Paraboloida dana przenika płaszczyznę $Oyz\,(x=0)$ wzdłuż dwóch prostych

$$(15) \qquad \frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{b^2}=0$$

przecinających się w wierzchołku O. Do prostych (15) są oczywiście równoległe asymptoty wszelkich przekrojów hyperbolicznych (14), zbiór asymptot tych przekrojów tworzy więc dwie płaszczyzny P_1 i P_2, przesunięte przez proste (15) i przez oś paraboloidy Ox. Płaszczyzny P_1 i P_2 nazywają się *płaszczyznami kierunkowemi* paraboloidy hyperbolicznej. Płaszczyzny kierunkowe dzielą przestrzeń na cztery części; z dodatniej strony osi Ox punkty paraboloidy znajdują się w ćwiartkach przeciwległych poziomo, zaś z przeciwnej strony w ćwiartkach przeciwległych pionowo.

Wykażemy teraz, że *paraboloida hyperboliczna jest powierzchnią prostolinjową.*

Otóż widzimy odrazu, iż rugując parametr λ z układu dwóch równań pierwszego stopnia

$$(16)\qquad \begin{cases} \lambda\left(\frac{y}{a}+\frac{z}{b}\right)=\frac{x}{c} \\ \frac{y}{a}-\frac{z}{b}=\lambda \end{cases}$$

lub parametr λ' z układu

$$(17)\qquad \begin{cases} \lambda'\left(\frac{y}{a}-\frac{z}{b}\right)=\frac{x}{c} \\ \frac{y}{a}+\frac{z}{b}=\lambda' \end{cases}$$

otrzymujemy równanie paraboloidy (13). Paraboloida jest więc utworzona, albo przez układ prostych (16), albo przez układ prostych (17). Przez dowolny punkt (x_0, y_0, z_0) paraboloidy przechodzi oczywiście jedna tworząca z układu (16) i jedna tworząca z układu (17).

Widzimy, iż rzuty tworzących (16) i (17) na płaszczyznę Oyz są, dla dowolnych wartości λ i λ', równoległe do prostych (15) a stąd wynika, iż *tworzące prostolinjowe* (16) i (17) *paraboloidy hyperbolicznej są równoległe do odpowiednich płaszczyzn kierunkowych* P_1 *i* P_2.

Każda tworząca (16) przecina się z każdą tworzącą układu (17), współrzędne punktu wspólnego dwóch tworzących, odpowiadających wartościom λ i λ', są mianowicie takie:

$$(18)\qquad \begin{cases} x=c\lambda\lambda' \\ y=\frac{a}{2}(\lambda+\lambda') \\ z=\frac{b}{2}(\lambda'-\lambda) \end{cases}$$

Równania (18) przedstawiają paraboloidę hyperboliczną, odniesioną do dwóch układów swych tworzących prostolinjowych.

Tworząca jednego układu np. (16), opisując paraboloidę, dotyka stale wszystkich tworzących drugiego układu (17) i jest równoległa wciąż do jednej z płaszczyzn kierunkowych. Wiadomo jednak, iż wystarczy podać dwie proste, aby układ prostych, dotykających tych stałych prostych i równoległych do stałej płaszczyzny był określony. *Paraboloida hyperboliczna jest więc utworzona przez* *układ prostych, przecinających dwie stałe proste i równoległych do płaszczyzny stałej.*

Jeśli te dwie stałe proste są dowolnie dane, wtedy, jak wiemy z zagadnienia 2 (art. 29), otrzymamy dla powierzchni opisanej przez prostą, przecinającą dwie dane proste i równoległą do danej płaszczyzny, równanie drugiego stopnia wogóle nieodniesione do płaszczyzn symetrji i do osi, można je jednak wtedy sprowadzić do równania paraboloidy (13) przez odpowiednie przesunięcie układu współrzędnych.

Jeśli $a = b$, wtedy płaszczyzny kierunkowe P_1 i P_2 paraboloidy są do siebie prostopadłe. Płaszczyzny te staną się więc płaszczyznami współrzędnych, jeśli trójścian obrócimy o 45^0 dokoła osi Ox. Stosując wzory na zamianę współrzędnych

$$x = x'$$
$$y = \frac{y' + z'}{\sqrt{2}}$$
$$z = \frac{y' - z'}{\sqrt{2}}$$

otrzymamy wtedy równanie paraboloidy hyperbolicznej w postaci

$$y' z' = k' x'$$

odniesionej do płaszczyzn kierunkowych.

WALEC PARABOLICZNY.

Równanie (11) niepełne, np.

$$A y^2 = C x \tag{19}$$

przedstawia powierzchnię *walcową*, której tworzące są równoległe do osi Oz i która przecina płaszczyznę Oxy wzdłuż *paraboli*, w założeniu, iż $A \neq 0$, $C \neq 0$.

33. Poszukiwanie środka powierzchni drugiego stopnia.

Niech będzie powierzchnia drugiego stopnia

$$\begin{aligned} f(x, y, z) = A x^2 + B y^2 + C z^2 + D x y + E x z + F y z + \\ + G x + H y + I z + K = 0 \end{aligned} \tag{20}$$

W celu znalezienia środka tej powierzchni, użyjemy tej samej metody, co dla krzywych drugiego stopnia. Poszukujemy mianowicie takiego punktu przestrzeni $S(x_0, y_0, z_0)$, aby równanie powierzchni (20), odniesionej do układu osi współrzędnych, posiadających początek w punkcie S, nie zawierało wyrazów pierwszego stopnia; taki punkt S będzie wtedy środkiem powierzchni.

Oznaczmy przez x', y', z' współrzędne dowolnego punktu M względem układu osi $(S x' y' z')$ równoległych do $(O x y z)$ i przecinających się w punkcie S o współrzędnych x_0, y_0, z_0 względem układu $(O x y z)$; jeśli x, y, z oznaczają współrzędne tego samego punktu M w odniesieniu do układu $(O x y z)$, to mamy wtedy związki

$$\begin{aligned} x &= x' + x_0 \\ y &= y' + y_0 \\ z &= z' + z_0 \end{aligned} \tag{21}$$

Wstawiając te wartości do równania (20), otrzymamy równanie danej powierzchni odniesione do układu osi $(S x' y' z')$

$$\begin{aligned} &A x'^2 + B y'^2 + C z'^2 + D x' y' + E x' z' + F y' z' + \\ &+ f'_x(x_0, y_0, z_0) . x' + f'_y(x_0, y_0, z_0) . y' + f'_z(x_0, y_0, z_0) . z' + \\ &+ f(x_0, y_0, z_0) = 0 \end{aligned} \tag{22}$$

współczynniki wyrazów kwadratowych są, jak widzimy, niezmienione, zaś współczynniki wyrazów pierwszego stopnia są równe wartościom pochodnych cząstkowych funkcji trzech zmiennych $f(x, y, z)$ w punkcie (x_0, y_0, z_0):

$$\begin{aligned} f'_x(x_0, y_0, z_0) &= 2 A x_0 + D y_0 + E z_0 + G \\ f'_y(x_0, y_0, z_0) &= D x_0 + 2 B y_0 + F z_0 + H \\ f'_z(x_0, y_0, z_0) &= E x_0 + F y_0 + 2 C z_0 + I \end{aligned} \tag{23}$$

Aby punkt $S(x_0, y_0, z_0)$ był środkiem powierzchni, trzeba i wystarcza, żeby równanie (22) nie uległo zmianie wskutek jednoczesnej zmiany znaku wszystkich trzech współrzędnych $x' y' z'$, a więc żeby zniknęły współczynniki (23) wyrazów pierwszego stopnia:

$$f'_x(x_0, y_0, z_0) = 0; \quad f'_y(x_0, y_0, z_0) = 0; \quad f'_z(x_0, y_0, z_0) = 0 \tag{24}$$

t. j. wyraźnie:

$$\begin{aligned} 2 A x_0 + D y_0 + E z_0 + G &= 0 \\ D x_0 + 2 B y_0 + F z_0 + H &= 0 \\ E x_0 + F y_0 + 2 C z_0 + I &= 0 \end{aligned} \tag{24'}$$

Mamy tu układ trzech równań linjowych z trzema niewiadomemi x_0, y_0, z_0. Powierzchnia (20) posiada więc jedyny środek określony, gdy wyznacznik charakterystyczny układu (24') jest od zera odmienny:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2A, & D, & E \\ D, & 2B, & F \\ E, & F, & 2C \end{vmatrix} \neq 0 \tag{25}$$

Znikanie natomiast tego wyznacznika wskazuje, iż powierzchnia środka nie posiada, lub też posiada ich nieskończenie wiele, co ma miejsce w tym wypadku, gdy trzy płaszczyzny, odpowiadające równaniom (24'), przecinają się wzdłuż jednej prostej, lub są zjednoczone.

Zbiór środków utworzy w tym ostatnim wypadku linję prostą, lub w szczególności płaszczyznę.

Jeśli, po odniesieniu równania do środka powierzchni, okaże się, iż wyraz wolny znika:

$$f(x_0, y_0, z_0) = 0$$

oznacza to, iż środek leży na powierzchni; równanie powierzchni (22) przybierze wtedy postać *jednorodną*

$$A x'^2 + B y'^2 + C z'^2 + D x' y' + E x' z' + F y' z' = 0$$

która, jak wiemy, przedstawiać będzie pewną *powierzchnię stożkową* z wierzchołkiem w nowym początku układu, to znaczy w środku powierzchni S.

Przykład. Wyznaczmy środek powierzchni o równaniu

$$f = x^2 - y^2 - 2xz - x + y = 0,$$

otrzymanem w zagadnieniu 3 (art. 29). Położenie środka określają następujące równania:

$$\begin{cases} f'_x = 2x_0 - 2z_0 - 1 = 0; \\ f'_y = -2y_0 + 1 = 0; \\ f'_z = -2x_0 = 0; \end{cases}$$

stąd otrzymujemy współrzędne środka

$$x_0 = 0; \qquad y_0 = \frac{1}{2}; \qquad z_0 = -\frac{1}{2}.$$

34. O przecięciu się prostej z powierzchnią drugiego stopnia. Przypadek $\Delta = 0$; redukcja równania powierzchni.

Rozważania obecne będą analogiczne do badania przecięcia się prostej z krzywą drugiego stopnia, podanego w Geometrji na płaszczyźnie (str. 151).

Niech będzie powierzchnia drugiego stopnia

$$(26) \quad f(x,y,z) = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + \\ + Gx + Hy + Iz + K = 0$$

i linja prosta, określona przez równania

$$(27) \quad \frac{x - x_0}{\alpha} = \frac{y - y_0}{\beta} = \frac{z - z_0}{\gamma} = \rho\,;$$

jeśli α, β, γ oznaczają *cosinusy kierunkowe* danej prostej, wtedy ρ jest miarą wektora, łączącego punkt prostej (x_0, y_0, z_0) z punktem bieżącym (x, y, z); współrzędne bieżące punktu danej prostej są więc następującemi funkcjami parametru ρ:

$$(27') \quad \begin{cases} x = x_0 + \alpha\rho \\ y = y_0 + \beta\rho \\ z = z_0 + \gamma\rho \end{cases}$$

Aby wyznaczyć punkty przecięcia się danej prostej z daną powierzchnią, podstawmy wyrażenia (27′) w równanie (26); po uporządkowaniu względem ρ, otrzymamy równanie drugiego stopnia

$$(28) \quad \rho^2 \varphi(\alpha, \beta, \gamma) + \rho\,[\alpha f'_x(x_0, y_0, z_0) + \beta f'_y(x_0, y_0, z_0) + \gamma f'_z(x_0, y_0, z_0)] + \\ + f(x_0, y_0, z_0) = 0$$

gdzie oznaczono

$$(29) \quad \varphi(\alpha, \beta, \gamma) = A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 + D\alpha\beta + E\alpha\gamma + F\beta\gamma,$$

równanie (28) określa wartości na ρ, odpowiadające punktom przecięcia.

Jeśli dany kierunek prostej jest taki, iż

$$\varphi(\alpha, \beta, \gamma) \neq 0$$

wtedy istnieją dwa punkty przecięcia rzeczywiste lub urojone, różne lub zjednoczone.

Jeśli dany kierunek prostej (α, β, γ) jest taki, iż wartość współczynnika przy ρ^2 w równaniu (28) znika:

$$\varphi(\alpha, \beta, \gamma) = 0 \tag{30}$$

współczynnik zaś przy ρ jest odmienny od zera, wtedy istnieje jeden tylko punkt przecięcia się prostej z powierzchnią. Z tej samej racji, co w art. 45 Geometrji na płaszczyźnie, jeśli prosta, przecinająca powierzchnię w dwóch punktach, dąży do prostej, przecinającej powierzchnię w jednym punkcie, to jeden z punktów przecięcia oddala się nieskończenie.

Kierunek, spełniający związek (30), nazwiemy *kierunkiem asymptotycznym* danej powierzchni drugiego stopnia.

Otóż równaniu (30) odpowiada zbiór kierunków prostych o równaniach $\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma}$, będących tworzącemi pewnej *powierzchni stożkowej,* którą otrzymamy, *przyrównywując do zera grupę kwadratową w równaniu danej powierzchni:*

$$\varphi(x, y, z) = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz = 0 \tag{30'}$$

równanie to, jako jednorodne, przedstawia istotnie powierzchnię stożkową z wierzchołkiem w początku układu. Powierzchnię (30′) nazywamy *stożkiem kierunków asymptotycznych* danej powierzchni drugiego stopnia.

Zbiór prostych, wychodzących z danego punktu przestrzeni $M_0(x_0, y_0, z_0)$ i mających kierunki asymptotyczne, utworzy powierzchnię stożkową z wierzchołkiem M_0, której tworzące są równoległe do odpowiednich tworzących stożka (30′). W szczególności te z pomiędzy tworzących, wychodzących z punktu M_0, *nieleżącego na danej powierzchni* (26), dla których znika nadto drugi współczynnik równania (28):

$$\alpha f'_x(x_0, y_0, z_0) + \beta f'_y(x_0, y_0, z_0) + \gamma f'_z(x_0, y_0, z_0) = 0 \tag{31}$$

nie mają z daną powierzchnią żadnego punktu wspólnego, gdyż $f(x_0, y_0, z_0) \neq 0$. Jeśli punkt M_0 leży na powierzchni danej, wtedy

$$f(x_0, y_0, z_0) = 0$$

i jak widzimy z równania (28), proste, wychodzące z punktu M_0 równolegle do tworzących stożka (30′), bądź nie mają, poza punktem M_0 $(\rho = 0)$, żadnego drugiego punktu wspólnego z powierzchnią, bądź też niektóre z nich, spełniające nadto związek (31), przystają całkowicie do powierzchni, w tym ostatnim bowiem wypadku znikają wszystkie współczynniki równania (28) i spełnione jest ono dla każdej wartości ρ. Zbierając otrzymane wyniki, wygłosimy następującą własność.

TWIERDZENIE. Proste w przestrzeni, równoległe do tworzących stożka kierunków asymptotycznych, bądź przecinają daną powierzchnię drugiego stopnia w jednym punkcie, bądź nie przecinają jej w żadnym punkcie rzeczywistym lub urojonym, bądź wreszcie przylegają do niej wszystkiemi punktami.

Jeśli powierzchnia posiada środek (x_0, y_0, z_0), *nieleżący na powierzchni*, wtedy

$$f'_x(x_0, y_0, z_0) = 0; \; f'_y(x_0, y_0, z_0) = 0; \; f'_z(x_0, y_0, z_0) = 0$$

$$f(x_0, y_0, z_0) \neq 0;$$

gdy teraz przez ten środek poprowadzimy proste równoległe do tworzących stożka (30'), to otrzymamy stożek, którego żadna tworząca nie przetnie danej powierzchni (26), równanie (28) nie może być bowiem wtedy spełnione dla żadnej wartości rzeczywistej lub urojonej na ρ. Stożek taki nazywamy *asymptotycznym* (porównaj art. 31).

W szczególnym wypadku, gdy środek spełnia równanie powierzchni

$$f(x_0, y_0, z_0) = 0$$

stożek asymptotyczny schodzi się z daną powierzchnią, gdyż równanie (28) będzie wtedy spełnione dla każdej wartości na ρ. Nadmienimy jeszcze, iż prowadząc przez wierzchołek stożka kierunków asymptotycznych (30') dowolną płaszczyznę P, otrzymamy w przecięciu z tym stożkiem dwie tworzące równoległe do asymptot przekroju powierzchni danej (26) tą samą płaszczyzną P. Istotnie, możemy zawsze tak obrać układ współrzędnych, aby płaszczyzna sieczna miała równanie $z = 0$ i wtedy widzimy, iż przekrojem stożka będą dwie proste, określone przez związek

$$Ax^2 + By^2 + Dxy = 0$$

równoległe do asymptot przekroju powierzchni, odpowiadającego równaniu

$$Ax^2 + By^2 + Dxy + Gx + Hy + K = 0$$

PRZYPADEK $\Delta=0$; *REDUKCJA RÓWNANIA POWIERZCHNI.*

Rozważmy teraz postać stożka kierunków asymptotycznych określonego równaniem

$$\varphi(x,y,z)=Ax^2+By^2+Cz^2+Dxy+Exz+Fyz=0 \tag{32}$$

w przypadku, gdy znika wyznacznik charakterystyczny równań, określających środek powierzchni:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 2A, & D, & E \\ D, & 2B, & F \\ E, & F, & 2C \end{vmatrix}=0$$

Otóż znikanie tego wyznacznika oznacza, jak wiadomo, iż trzy płaszczyzny, określone przez równania jednorodne

$$\left\{\begin{aligned} \varphi'_x &= 2Ax_0+Dy_0+Ez_0=0 \\ \varphi'_y &= Dx_0+2By_0+Fz_0=0 \\ \varphi'_z &= Ex_0+Fy_0+2Cz_0=0 \end{aligned}\right. \tag{33}$$

posiadają jedną prostą wspólną, bądź też są zjednoczone. Ale, według artykułu poprzedniego, każdy punkt, spełniający układ (33), jest środkiem powierzchni stożkowej (32), a zatem, w przypadku znikania wyznacznika Δ, istnieje linja środków δ, określona przez związki (33), której każdy punkt jest środkiem powierzchni stożkowej (32); w razie zjednoczenia trzech płaszczyzn (33) w jedną, możemy jako linję środków δ obrać dowolną prostą, leżącą w tej płaszczyźnie.

Jeśli więc obierzemy teraz układ współrzędnych w ten sposób, aby linja środków δ zeszła się z osią Ox, to w tym układzie współrzędnych odpowiednie równania środków (33) winny być spełnione, gdy $y_0=0$, $z_0=0$, zaś x_0 jest wartością dowolną, a zatem wtedy winno być:

$$A=0;\quad D=0;\quad E=0$$

i równanie stożka kierunków asymptotycznych przybierze postać niezawierającą zmiennej x:

$$By^2+Cz^2+Fyz=0 \tag{34}$$

Równanie to przedstawia dwie płaszczyzny rzeczywiste, przecinające się wzdłuż osi Ox, jeśli $F^2-4BC>0$, tylko samą oś Ox ($y=0$, $z=0$) t. j. prostą δ, gdy $F^2-4BC<0$ i wreszcie jedną tylko płaszczyznę przesuniętą przez oś Ox, gdy $F^2-4BC=0$.

Ten ostatni wypadek odpowiada zjednoczeniu trzech płaszczyzn (33) w jedną, przedstawiającą sam stożek kierunków asymptotycznych (34). Mamy więc taką własność.

TWIERDZENIE. *Jeśli znika wyznacznik charakterystyczny* Δ, *to stożek kierunków asymptotycznych o równaniu*

$$\varphi(x, y, z) = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz = 0$$

sprowadza się do jednej prostej δ, *określonej przez związki* (33), *bądź też do dwóch płaszczyzn, przecinających się wzdłuż tej prostej, lub zjednoczonych.*

Otrzymane własności stożka kierunków asymptotycznych pozwalają dokonać redukcji równania powierzchni drugiego stopnia o postaci ogólnej

$$\begin{aligned} f(x, y, z) = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exy + Fyz + \\ + Gx + Hy + Iz + K = 0 \end{aligned} \tag{35}$$

w przypadku, gdy $\Delta = 0$. Istotnie, według poprzedniego, jeśli oś Ox skierujemy wzdłuż prostej, spełniającej równania (33), to grupa wyrazów kwadratowych w równaniu powierzchni sprowadzi się tylko do formy kwadratowej *dwóch zmiennych:*

$$By^2 + Cz^2 + Fyz$$

którą jeszcze, przez obrót osi (Oyz) dokoła osi Ox, sprowadzić można do postaci prostej

$$My^2 + Nz^2$$

a więc równanie powierzchni do postaci

$$My^2 + Nz^2 + Px + Qy + Rz + T = 0 \tag{36}$$

Jeżeli współczynniki M i N są odmienne od zera, to wystarczy już teraz tylko przesunąć równolegle układ współrzędnych, by równanie powierzchni sprowadzić do postaci charakterystycznej dla paraboloid

$$My^2 + Nz^2 + Px = 0; \quad \text{gdy } P \neq 0 \tag{37}$$

i do postaci

$$My^2 + Nz^2 + T' = 0; \quad \text{gdy } P = 0 \tag{37'}$$

Jeden z dwóch współczynników M i N w równaniu (36) zniknie wtedy, jeśli forma kwadratowa w równaniu stożka (34), a więc i w równaniu (32), jest pełnym kwadratem, stożek kierunków asymptotycznych sprowadza się wtedy do jednej płaszczyzny.

W takim wypadku, np. gdy $N=0$, równanie (36), przy pomocy przesunięcia równoległego wzdłuż osi (y), doprowadzimy do postaci

$$My^2+Px+Rz+T'=0$$

a następnie jeszcze, przez obrót dokoła osi (y) w płaszczyźnie (xz) do postaci takiej:

$$My^2+P'x+T''=0 \tag{37''}$$

obejmującej również wypadek $P'=0$.

Na podstawie więc wyników poprzedniego artykułu, widzimy, ż, *w przypadku gdy*

$$\Delta=\begin{vmatrix} 2A, & D, & E \\ D, & 2B, & F \\ E, & F, & 2C \end{vmatrix}=0,$$

równanie drugiego stopnia (35) *przedstawia paraboloidę eliptyczną lub hyperboliczną, bądź też walec eliptyczny, hyperboliczny lub paraboliczny;* oś symetrji tych powierzchni (w przypadku walców równoległa do tworzących) jest równoległa do prostej określonej przez równania (33).

Widzimy nadto, iż stożek kierunków asymptotycznych w wierzchołku paraboloidy, jako określonej przez równanie

$$My^2+Nz^2=0,$$

sprowadza się bądź do jej osi symetrji, bądź do jej płaszczyzn kierunkowych, zależnie od tego czy paraboloida jest eliptyczna czy też hyperboliczna.

Równanie (37') i (37'') obejmuje również wypadek powierzchni zwyrodniałej, sprowadzającej się do jednej prostej lub do dwóch płaszczyzn przecinających się, równoległych czy też zjednoczonych; wreszcie równaniu może nie odpowiadać twór geometryczny rzeczywisty.

35. Płaszczyzny średnicowe i średnice powierzchni.

Niech będzie powierzchnia drugiego stopnia

$$\begin{aligned} f(x,y,z)=Ax^2+By^2+Cz^2+Dxy+Exz+ \\ +Fyz+Gx+Hy+Iz+K=0 \end{aligned} \tag{38}$$

Rozważmy zbiór prostych równoległych o *cosinusach kierunkowych* (α,β,γ), założymy, iż proste te nie są równoległe do kierun-