8. Z danego punktu (x_0, y_0), leżącego na paraboli $y^2 = 2px$, wyprowadzić prostą normalną do paraboli w drugim punkcie przecięcia. Dyskusja.

9. Znaleść równanie paraboli, której kierownicą jest oś Ox i która jest styczna do prostej $y = 2x$ w punkcie (1, 2).

10. Znaleść równanie kierownicy i współrzędne ogniska paraboli o równaniu

$$(x - y)^2 + x = 0.$$

ROZDZIAŁ XIII.

ŚREDNICE SPRZĘŻONE.

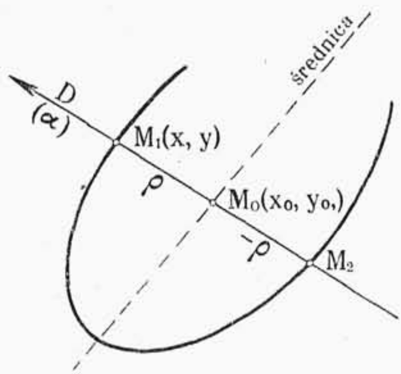
62. Średnica krzywej drugiego stopnia.

Niech będzie krzywa drugiego stopnia, określona przez równanie

(1) $$f(x, y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Rozważmy układ prostych (D) równoległych, tworzących z osią Ox stały kąt α i wyznaczmy równanie miejsca geometrycznego *środków* odcinków, zawartych między punktami przecięcia danych prostych z krzywą (1). Zakładamy, iż proste D nie są równoległe do asymptot krzywej, to znaczy, iż dany kąt α spełnia warunek

(2) $$A\cos^2\alpha + B\cos\alpha\sin\alpha + C\sin^2\alpha \neq 0$$



Rys. 108.

Oznaczmy przez M_1 i M_2 punkty przecięcia jednej z prostych (D) z krzywą (1), zaś przez M_0 środek odcinka $M_1 M_2$. Jeśli (x, y)

oznaczają współrzędne punktu M_1, zaś (x_0, y_0) współrzędne punktu M_0, to, według twierdzenia o rzucie wektora, możemy napisać

$$(3)\qquad \begin{aligned} x - x_0 &= \rho \operatorname{Cos} \alpha \\ y - y_0 &= \rho \operatorname{Sin} \alpha \end{aligned}$$

gdzie ρ oznacza miarę wektora $\overline{M_0 M_1}$; z równań (3) mamy

$$(3')\qquad \begin{aligned} x &= x_0 + \rho \operatorname{Cos} \alpha \\ y &= y_0 + \rho \operatorname{Sin} \alpha \end{aligned}$$

podstawiając te wartości w równanie (1) i porządkując według potęg ρ, otrzymamy, jak w artykule 45, równanie

$$(4)\qquad \rho^2 (A \operatorname{Cos}^2 \alpha + B \operatorname{Sin} \alpha \operatorname{Cos} \alpha + C \operatorname{Sin}^2 \alpha) +$$
$$+ \rho [(2Ax_0 + By_0 + D) \operatorname{Cos} \alpha + (Bx_0 + 2Cy_0 + E) \operatorname{Sin} \alpha] + f(x_0, y_0) = 0$$

Jeśli jednak punkt M_0 ma być środkiem odcinka $M_1 M_2$, to trzeba i wystarcza, aby równanie (4) było spełnione po podstawieniu $-\rho$ na miejsce ρ, a więc, aby współczynnik przy ρ w pierwszej potędze w równaniu (4) znikał; otrzymamy w ten sposób taki związek, który winny spełniać współrzędne (x_0, y_0) środka odcinka $M_1 M_2$:

$$(5)\qquad (2Ax_0 + By_0 + D) \operatorname{Cos} \alpha + (Bx_0 + 2Cy_0 + E) \operatorname{Sin} \alpha = 0$$

lub też krótko w postaci:

$$(5')\qquad f_x'(x_0, y_0) \operatorname{Cos} \alpha + f_y'(x_0, y_0) \operatorname{Sin} \alpha = 0$$

Równanie (5) jest pierwszego stopnia względem współrzędnych (x_0, y_0) i, po uporządkowaniu według tych współrzędnych, przybiera postać

$$(2A \operatorname{Cos} \alpha + B \operatorname{Sin} \alpha) x_0 + (B \operatorname{Cos} \alpha + 2C \operatorname{Sin} \alpha) y_0 +$$
$$+ (D \operatorname{Cos} \alpha + E \sin \alpha) = 0;$$

według warunku (2), współczynniki współrzędnych x_0 i y_0 w tem równaniu nie mogą znikać jednocześnie, a więc szukane miejsce geometryczne będzie określoną *linją prostą*)*; nazywa się ona *średnicą krzywej*, odpowiadającą kierunkowi α.

Jeśli krzywa posiada środek, to wszystkie średnice krzywej dla różnych wartości kąta α przechodzą przez środek krzywej:

---

*) lub częścią tej prostej, w razie, gdy bierzemy pod uwagę tylko rzeczywiste punkty przecięcia.

wynika to bezpośrednio z ich definicji, lub też z równania (5), które spełniają współrzędne środka dla każdego α (patrz str. 133).

W przypadku szczególnym, gdy krzywa (1) jest parabolą i $A \neq 0$, mamy $C = \frac{B^2}{4A}$; wtedy równanie (5) będzie miało postać

$$(2Ax_0 + By_0 + D)\operatorname{Cos}\alpha + \left[\frac{B}{2A}(2Ax_0 + By_0) + E\right]\operatorname{Sin}\alpha = 0$$

widzimy stąd, iż *średnica paraboli dla każdej wartości kąta* α *jest równoległa do prostej* o równaniu

$$2Ax + By = 0,$$

a więc i do osi paraboli.

Oznaczając przez m współczynnik kątowy cięciw równoległych, jeśli $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$,

$$m = \frac{\operatorname{Sin}\alpha}{\operatorname{Cos}\alpha}$$

możemy ostatecznie równanie średnicy krzywej (1), odpowiadającej kierunkowi m, napisać w następujący sposób:

$$f'_x(x_0, y_0) + m f'_y(x_0, y_0) = 0 \tag{6}$$

62. Średnice sprzężone.

Załóżmy, iż krzywa rozpatrywana posiada określony i jedyny środek, więc

$$B^2 - 4AC \neq 0.$$

Z równania średnicy, będącej miejscem geometrycznem środków cięciw równoległych o współczynniku m,

$$2Ax_0 + By_0 + D + (Bx_0 + 2Cy_0 + E)m = 0$$

otrzymamy, iż współczynnik kątowy tej średnicy ma wartość

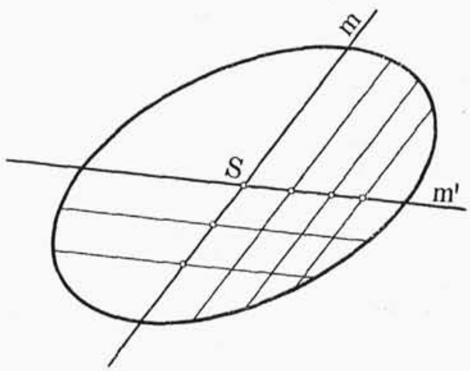
$$m' = -\frac{Bm + 2A}{2Cm + B} \tag{7}$$

a więc jest *funkcją homograficzną* współczynnika m.

Wyznaczając, odwrotnie, ze związku (7) wartość m w zależności od m', otrzymamy:

$$(7') \qquad m = -\frac{Bm' + 2A}{2Cm' + B}$$

spostrzegamy tu, iż *działania odwrotne, prowadzące od m' do m są identyczne z działaniami* (7), *prowadzącemi* od m do m'; fakt ten oznacza geometrycznie, iż *dwie średnice krzywej* (1) *o współczynnikach kątowych m i m', związanych zależnością* (7) *lub* (7'), *mają tę własność, iż każda z nich dzieli na połowy cięciwy równoległe do drugiej* (rys. 109). Takie dwie średnice nazywamy



Rys. 109.

z tego powodu *sprzężonemi*. Krzywa dana posiada nieskończenie wiele par średnic sprzężonych; jedna z nich może być wybrana dowolnie, byleby tylko nie schodziła się z asymptotą, drugą odpowiednią określa wtedy związek (7). Spostrzegamy, iż *dwie osi symetrji krzywej drugiego stopnia są parą średnic sprzężonych do siebie prostopadłych.*

Rozpatrzmy szczegółowiej położenie średnic sprzężonych dla elipsy i hyperboli.

Elipsa. Dla elipsy, odniesionej do osi symetrji, mamy

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

równanie średnicy, odpowiadającej współczynnikowi cięciw m, będzie miało, według związku (6), postać

$$\frac{x}{a^2} + \frac{y}{b^2} m = 0;$$

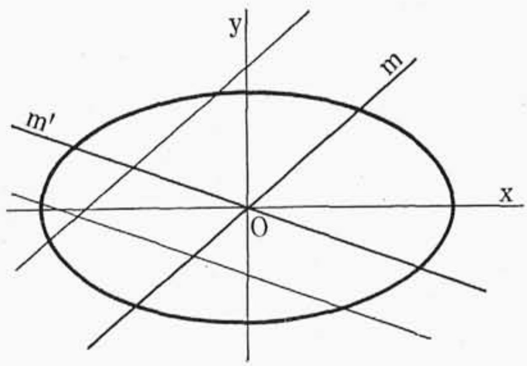
Współczynnik kątowy m' tej średnicy ma wartość

$$m' = -\frac{b^2}{a^2 m}$$

stąd wynika, iż *iloczyn współczynników kątowych średnic sprzężonych elipsy, odniesionej do osi symetrji, ma wartość stałą:*

$$(8) \qquad m\,m' = -\frac{b^2}{a^2}$$

Ze związku tego widzimy, iż średnice sprzężone elipsy leżą w dwóch odmiennych ćwiartkach płaszczyzny względem osi Oxy, gdyż ich współczynniki kątowe mają przeciwne znaki (rys. 110). *Gdy elipsa jest kołem, wtedy średnice sprzężone są do siebie zawsze prostopadłe.*



Rys. 110.

Nadmienimy jeszcze, iż rzuty prostokątne lub ukośne dwóch średnic koła, prostopadłych do siebie, będą średnicami sprzężonemi rzutu tego koła, t. j. elipsy; własność ta wynika z uwagi, iż cecha charakterystyczna średnic sprzężonych, to znaczy dzielenie na połowy cięciw równoległych, zachowuje się w rzucie powyższym.

Hyperbola. Współczynniki kątowe m i m' dwóch średnic sprzężonych hyperboli, odniesionej do osi symetrji o równaniu

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$$

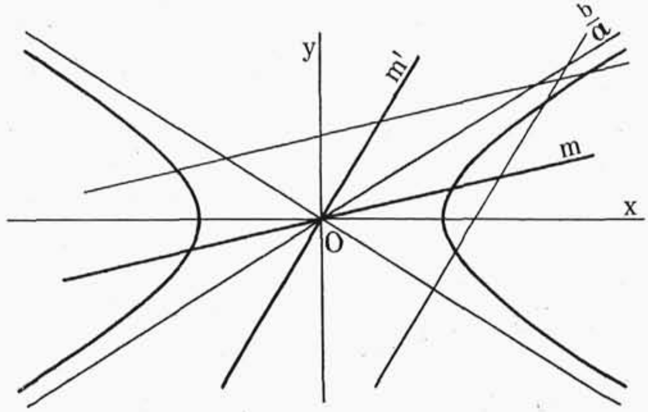
będą, według równości (8), związane zależnością

$$(9) \qquad m\,m' = +\frac{b^2}{a^2}$$

Wynika stąd, iż średnice sprzężone hyperboli leżą zawsze w tych samych ćwiartkach; nadto, jeśli

$$|m| < \frac{b}{a} \quad \text{to} \quad |m'| > \frac{b}{a}$$

ponieważ zaś $\frac{b}{a}$ jest wartością współczynnika kątowego jednej z asymptot, a więc wnioskujemy, iż *para średnic sprzężonych*



Rys. 111.

hyperboli rozdziela zawsze parę asymptot (rys. 111). Ze związku (9) widzimy, że, *gdy jedna ze średnic dąży do asymptoty* np.

$$m \longrightarrow \frac{b}{a},$$

to średnica z nią sprzężona również dąży do tej samej asymptoty:

$$m' \longrightarrow \frac{b}{a}$$

Położenie średnic sprzężonych nie zależy od wyrazu wolnego w równaniu krzywej, a więc para średnic sprzężonych hyperboli jest zarazem parą średnic sprzężonych względem krzywej zwyrodniałej

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0,$$

to znaczy względem asymptot hyperboli; każda średnica hyperboli dzieli więc zarazem na połowy odcinki zawarte między asymptotami i równoległe do średnicy z nią sprzężonej. Stąd też wynika, iż każda para średnic sprzężonych hyperboli rozdziela harmonicznie parę jej asymptot.

64. Wyznaczenie osi symetrji krzywej.

Z pojęcia średnic sprzężonych wynika bezpośredni i zręczny sposób wyznaczenia równań osi symetrji krzywej drugiego stopnia, określonej przez równanie (1). Mianowicie, w celu otrzymania równań tych osi, *należy odszukać taką parę średnic sprzężonych, któreby były względem siebie prostopadłe.*

Otóż wiemy, że, jeśli średnica ma współczynnik kątowy m, to średnica z nią sprzężona ma równanie

$$(2Ax+By+D)+m(Bx+2Cy+E)=0 \tag{10}$$

jej współczynnik kątowy ma więc wartość

$$m'=-\frac{Bm+2A}{2Cm+B}$$

Prosta (10) będzie zatem osią symetrji krzywej (1), jeśli spełniony jest warunek prostopadłości

$$m\,m'=-1$$

t. j. równanie

$$-\frac{Bm+2A}{2Cm+B}m=-1\,,$$

otrzymujemy stąd równanie drugiego stopnia

$$Bm^2+2(A-C)m-B=0 \tag{11}$$

którego pierwiastki m_1, m_2 są współczynnikami kątowemi szukanych osi*); *wstawiając te wartości na m w równanie* (10), *otrzymamy osi symetrji danej krzywej drugiego stopnia.* Poszukiwanie środka jest więc zbędne. W przecięciu tych osi z krzywą otrzymamy jej wierzchołki.

Zagadnienie upraszcza się w przypadku paraboli ($B^2-4AC=0$), gdy równanie ma postać

$$A\left(x+\frac{B}{2A}y\right)^2+Dx+Ey+F=0\,,$$

wiemy bowiem odrazu, iż oś jest równoległa do prostej $x+\frac{B}{2A}y=0$, a więc dzieli na połowy cięciwy o współczynniku kątowym $m=\frac{B}{2A}$,

*) Wypadek $B=0$ jest oczywisty bezpośrednio.

podstawiając tę wartość w równaniu (10), otrzymamy odrazu równanie osi paraboli

$$(2Ax+By+D)+\frac{B}{2A}(Bx+2Cy+E)=0$$

t. j., po uporządkowaniu,

$$2Ax+By=-\frac{2AD+BE}{2(A+C)} \tag{12}$$

Ze związku między współczynnikami kątowemi dwóch średnic sprzężonych, który możemy napisać w postaci

$$A+\frac{1}{2}B(m+m')+Cmm'=0$$

widzimy jeszcze, iż wspólna wartość graniczna m_0 współczynników m i m' spełnia związek

$$A+Bm_0+Cm_0^2=0 \tag{13}$$

określający, jak wiemy, *kierunki asymptot* krzywej, co jest zgodne z rozumowaniem poprzedniego artykułu.

65. Warunek równoległości lub wspólności asymptot i osi symetrji dwóch krzywych.

Z równania średnicy krzywej drugiego stopnia

$$(2Ax+By+D)+m(Bx+2Cy+E)=0$$

widzimy, iż kierunek średnicy, odpowiadającej danemu współczynnikowi m, zależy tylko od stosunku między współczynnikami A, B, C grupy kwadratowej $Ax^2+Bxy+Cy^2$ w równaniu krzywej, zaś położenie średnicy *nie zależy od wyrazu stałego F*. Jeśli więc współczynniki wyrazów kwadratowych w równaniach dwóch krzywych drugiego stopnia

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$$
$$A_1x^2+B_1xy+C_1y^2+D_1x+E_1y+F_1=0$$

są do siebie proporcjonalne:

$$\frac{A_1}{A}=\frac{B_1}{B}=\frac{C_1}{C}$$

to średnice tych krzywych, odpowiadające temu samemu kierunkowi cięciw (m), będą do siebie *równoległe*. Jeśli wszystkie współczynniki równania krzywych, oprócz wyrazów stałych F i F_1, będą do siebie proporcjonalne:

$$\frac{A_1}{A} = \frac{B_1}{B} = \frac{C_1}{C} = \frac{D_1}{D} = \frac{E_1}{E}$$

wtedy równania można sprowadzić do postaci, *różniących się tylko wyrazami stałemi* i oczywiście obie krzywe będą miały *wspólne* wszystkie średnice, odpowiadające tym samym kierunkom cięciw (m).

Pamiętając teraz o znaczeniu, jakie mają osi symetrji krzywej i jej asymptoty względem pojęcia średnicy, wyprowadzimy następujące wnioski.

WNIOSEK 1. *Jeśli współczynniki wyrazów kwadratowych w równaniach dwóch krzywych drugiego stopnia są odpowiednio proporcjonalne, to krzywe mają osi symetrji i asymptoty równoległe.*

WNIOSEK 2. *Jeśli wszystkie współczynniki w równaniach dwóch krzywych drugiego stopnia, z wyjątkiem wyrazów stałych F, są odpowiednio proporcjonalne, a zatem, gdy można te dwa równania sprowadzić do postaci, różniących się tylko wyrazami stałemi, to krzywe mają wspólne asymptoty i osi symetrji.*

Odwrotnie, jeśli dwie krzywe drugiego stopnia mają obie asymptoty, a więc wtedy i obie osi symetrji, do siebie równoległe, to współczynniki wyrazów kwadratowych w równaniach krzywych będą do siebie proporcjonalne; jeśli zaś dwie krzywe mają wspólne obie asymptoty, co pociąga za sobą wspólność osi symetrji, to można równania tych krzywych sprowadzić do postaci, różniących się tylko wyrazem stałym.

Nadmienimy jeszcze, iż równoległość lub wspólność obu osi symetrji dwóch krzywych *nie pociąga* za sobą równoległości lub wspólności asymptot, a więc nie pociąga też za sobą powyższej własności współczynników równania.

Ćwiczenia.

1. Wyznaczyć osi symetrji i wierzchołki stożkowych, określonych przez równania:

$$x^2 + xy + 3y^2 + x - y = 0;$$

$$2x^2 + xy - y^2 + x + y - 1 = 0;$$

$$(x + 3y)^2 + x + y = 0.$$

2. Wyznaczyć średnice sprzężone elipsy jednakowej długości.

3. Znaleść warunek równoległości i zgodności osi symetrji dwóch krzywych stożkowych, mających wogóle odmienne kierunki asymptotyczne.

4. Dowieść, iż suma kwadratów dwóch średnic sprzężonych elipsy jest wielkością stałą.

5. Dowieść, iż asymptoty hyperboli równoosiowej są dwusiecznemi kąta, utworzonego przez dwie dowolne średnice sprzężone.

ROZDZIAŁ XIV.

OGÓLNA POSTAĆ RÓWNANIA STYCZNEJ DO KRZYWEJ DRUGIEGO STOPNIA. BIEGUN I BIEGUNOWA.

66. Styczna do krzywej drugiego stopnia.

Aby otrzymać współczynnik kątowy stycznej w punkcie (x, y) do krzywej drugiego stopnia, określonej przez równanie w postaci ogólnej

$$f(x,y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

różniczkujemy obie strony danego równania, traktując y, jako funkcję zmiennej x, wypada

$$2Ax + By + D + \frac{dy}{dx}(Bx + 2Cy + E) = 0$$

stąd otrzymamy żądany współczynnik kątowy stycznej

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2Ax + By + D}{Bx + 2Cy + E} = -\frac{f_x'(x,y)}{f_y'(x,y)}$$

jeśli $Bx + 2Cy + E \neq 0$ i równanie stycznej w punkcie (x, y):

(1) $$Y - y = -\frac{2Ax + By + D}{Bx + 2Cy + E}(X - x)$$

lub ogólniej

(1') $$(X - x)(2Ax + By + D) + (Y - y)(Bx + 2Cy + E) = 0$$

X, Y oznaczają współrzędne dowolnego punktu stycznej. Równanie (1') przedstawia styczną do krzywej drugiego stopnia w punk-