DODATEK.

O WYZNACZNIKACH I RÓWNANIACH LINJOWYCH.

1. Układ dwóch równań z dwiema niewiadomemi.

Rozważmy układ dwóch równań z dwiema niewiadomemi o postaci:

$$(1) \qquad \begin{aligned} a_1 x + b_1 y &= c_1 \\ a_2 x + b_2 y &= c_2 \end{aligned}$$

Aby wyznaczyć stąd niewiadome x i y, mnożymy obie strony przez b_2 względnie b_1 i odejmujemy stronami, podobnie mnożymy przez a_2 względnie a_1 i odejmujemy; otrzymamy wtedy takie związki:

$$(2) \qquad \begin{aligned} (a_1 b_2 - a_2 b_1)\, x &= c_1 b_2 - c_2 b_1\,; \\ (a_1 b_2 - a_2 b_1)\, y &= a_1 c_2 - a_2 c_1\,; \end{aligned}$$

Widzimy stąd, że gdy wyrażenie $a_1 b_2 - a_2 b_1$ nie jest zerem, wtedy wartości na x i y, spełniające układ (1), jeśli istnieją, to winny być jedyne i równe stosunkom

$$(3) \qquad \begin{aligned} x &= \frac{c_1 b_2 - c_2 b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}\,; \\ y &= \frac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}\,; \end{aligned}$$

liczniki i mianowniki tych wyrażeń mają pewną charakterystyczną budowę; nazywamy takie dwumiany *wyznacznikami* utworzonemi z czterech liczb odpowiednich. Mianownik jest wyznacznikiem utworzonym ze *współczynników przy niewiadomych*, nazywamy go *wyznacznikiem charakterystycznym* układu; oznaczmy go w ten sposób:

(4) $$a_1 b_2 - a_2 b_1 = \begin{vmatrix} a_1, b_1 \\ a_2, b_2 \end{vmatrix}$$

Liczniki wyrażeń (3) są wyznacznikami, które otrzymamy, zastępując w wyznaczniku charakterystycznym (4) kolumnę $(a_1\, a_2)$ lub $(b_1\, b_2)$ przez kolumnę $(c_1\, c_2)$:

$$c_1 b_2 - c_2 b_1 = \begin{vmatrix} c_1, b_1 \\ c_2, b_2 \end{vmatrix}; \quad a_1 c_2 - a_2 c_1 = \begin{vmatrix} a_1, c_1 \\ a_2, c_2 \end{vmatrix};$$

Wartości (3) możemy więc w ten sposób wyrazić:

(5) $$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1, b_1 \\ c_2, b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1, b_1 \\ a_2, b_2 \end{vmatrix}}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1, c_1 \\ a_2, c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1, b_1 \\ a_2, b_2 \end{vmatrix}};$$

Wstawiając te wartości do układu danego (1), stwierdzimy, że spełniają one ten układ. Mamy więc następującą własność.

TWIERDZENIE. Układ dwóch równań (1) *z dwiema niewiadomemi ma określone i jedyne rozwiązanie, dane przez wzory* (5), *gdy wyznacznik charakterystyczny tego układu nie równa się zeru:*

$$\begin{vmatrix} a_1, b_1 \\ a_2, b_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

Przypadek osobliwy.

Rozważmy przypadek osobliwy, gdy wyznacznik charakterystyczny układu (1) *równy jest zeru:*

(6) $$\begin{vmatrix} a_1, b_1 \\ a_2, b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$$

lecz niewszystkie współczynniki układu są równe zeru, przypuśćmy, iż np.

$$a_1 \neq 0$$

Otóż ze znikania wyznacznika (6) wynika wtedy, iż można dobrać taki współczynnik k, aby było

$$a_2 = k\,a_1$$
$$b_2 = k\,b_1$$

mamy teraz dwie możliwości:

1^0, gdy wyrazy wolne nie podlegają poprzedniej proporcjonalności, to znaczy

$$c_2 \neq k\,c_1$$

lub inaczej

$$a_1\,c_2 - a_2\,c_1 \neq 0\,,$$

wtedy układ dany (1) *nie posiada rozwiązań* na x i y, gdyż rozwiązania te musiałyby spełniać związki (2), to znaczy obecnie

$$0 \cdot x = c_1\,b_2 - c_2\,b_1$$
$$0 \cdot y = a_1\,c_2 - a_2\,c_1$$

co jest niemożliwe;

2^0, gdy wyrazy wolne podlegają proporcjonalności, zachodzącej dla współczynników przy niewiadomych, to znaczy, gdy mamy

$$a_2 = k\,a_1$$
$$b_2 = k\,b_1$$
$$c_2 = k\,c_1$$

a więc

$$a_1\,c_2 - a_2\,c_1 = 0$$

wtedy układ dany możemy napisać w postaci

$$\begin{cases} a_1\,x + b_1\,y = c_1 \\ k\,(a_1\,x + b_1\,y) = k\,c_1 \end{cases}$$

a stąd widzimy, iż wszelka para liczb (x, y), spełniająca pierwsze z tych równań, spełnia i drugie. Układ dany ma więc w danym wypadku nieskończenie wiele rozwiązań, gdyż wartość niewiadomej y możemy obrać dowolnie i znaleść odpowiednią wartość na x z pierwszego równania ($a_1 \neq 0$).

Gdyby w danym układzie (1) wszystkie współczynniki niewiadomych były równe zeru, to układ posiadałby rozwiązania tylko wtedy, jeżeliby nadto $c_1 = 0$, $c_2 = 0$ i rozwiązania te byłyby oczywiście liczbami dowolnemi.

2. Dwa równania jednorodne z dwiema niewiadomemi.

Przypuśćmy, iż w układzie (1) mamy $c_1 = c_2 = 0$, otrzymamy wtedy układ równań jednorodnych

$$a_1 x + b_1 y = 0\,;$$

$$a_2 x + b_2 y = 0\,;$$

Z rozwiązań (3) widzimy, iż w przypadku ogólnym, gdy

$$\begin{vmatrix} a_1, b_1 \\ a_2, b_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

układ dany ma tylko rozwiązanie *banalne*

$$x = 0\,; \qquad y = 0\,;$$

Jeśli zaś

$$\begin{vmatrix} a_1, b_1 \\ a_2, b_2 \end{vmatrix} = 0$$

lecz niewszystkie współczynniki znikają np. $a_1 \neq 0$, wtedy

$$a_2 = k\,a_1\,; \qquad b_2 = k\,b_1$$

i para liczb, spełniających pierwsze równanie, będzie spełniała i drugie; a więc w danym wypadku układ, oprócz rozwiązań zerowych, posiada rozwiązania, spełniające proporcję

$$\frac{x}{y} = -\frac{b_1}{a_1}$$

z których jedno przynajmniej *nie jest zerem,* rozwiązania te można przedstawić w postaci

$$x = \quad \rho\, b_1$$

$$y = -\rho\, a_1$$

gdzie ρ jest czynnikiem *dowolnym.*

Gdyby wszystkie współczynniki układu znikały, wtedy rozwiązania jego byłyby najzupełniej dowolne.

3. Dwa równania jednorodne z trzema niewiadomemi.

Rozważmy dwa równania *jednorodne* z trzema niewiadomemi

$$(7) \qquad \begin{aligned} a_1 x + b_1 y + c_1 z = 0; \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = 0; \end{aligned}$$

Układ taki posiada zawsze rozwiązania *banalne:*

$$(8) \qquad x = 0; \qquad y = 0; \qquad z = 0;$$

Postarajmy się teraz znaleść rozwiązania *od zera odmienne.* Przypuśćmy więc, iż niewszystkie wyznaczniki

$$a_1 b_2 - a_2 b_1; \qquad a_1 c_2 - a_2 c_1; \qquad b_1 c_2 - b_2 c_1$$

są równe zeru; jeśli np. $a_1 b_2 - a_2 b_1$ nie jest zerem, wtedy, podstawiając na z wartość dowolną, otrzymamy na x i y takie wartości określone:

$$x = z \cdot \frac{b_1 c_2 - b_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}$$

$$y = z \cdot \frac{c_1 a_2 - c_2 a_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}$$

spełniające układ (7); dla danej wartości na z rozwiązania te będą jedyne.

Stąd wynika, iż układ (7) spełniają trzy liczby x, y, z, niewszystkie równe zeru, proporcjonalne do następujących wyznaczników:

$$(9) \qquad x = \rho \begin{vmatrix} b_1, c_1 \\ b_2, c_2 \end{vmatrix}; \qquad y = \rho \begin{vmatrix} c_1, a_1 \\ c_2, a_2 \end{vmatrix}; \qquad z = \rho \begin{vmatrix} a_1, b_1 \\ a_2, b_2 \end{vmatrix}$$

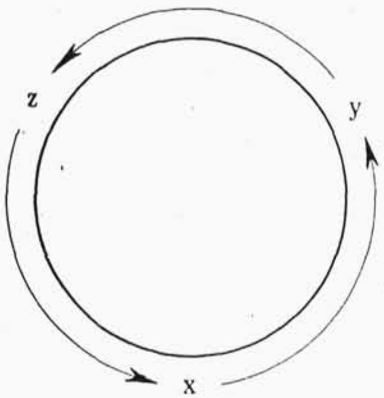
gdzie ρ oznacza czynnik dowolny.

Wynik otrzymany możemy też napisać w tej postaci, często stosowanej:

$$(9') \qquad \frac{x}{\begin{vmatrix} b_1, c_1 \\ b_2, c_2 \end{vmatrix}} = \frac{y}{\begin{vmatrix} c_1, a_1 \\ c_2, a_2 \end{vmatrix}} = \frac{z}{\begin{vmatrix} a_1, b_1 \\ a_2, b_2 \end{vmatrix}}$$

umawiając się jednak, aby, w razie znikania *jednego* lub *dwóch* mianowników, dla liczników odpowiednich przyjąć wartość zero.

Zwracamy uwagę na sposób tworzenia wyznaczników we wzorach (9). Każda z niewiadomych x, y, z jest mianowicie proporcjonalna do wyznacznika, utworzonego z czterech współczynników przy dwóch pozostałych niewiadomych; nadto kolejność kolumn odpowiada przesunięciom kołowym trzech wielkości (x, y, z) (rys. 203): x jest proporcjonalne do wyznacznika, którego pierwszą



Rys. 203.

kolumną są współczynniki niewiadomej y, a drugą współczynniki przy z; y jest proporcjonalne do wyznacznika, którego pierwszą kolumną są współczynniki przy z, a drugą przy x i t. d.

Podkreślamy szczególniej porządek kolumn w wyznaczniku drugim: y jest proporcjonalne do wyznacznika $c_1 a_2 - a_1 c_2$.

Wyniki (9) odgrywają ważną rolę w różnych zastosowaniach.

Jeśli wszystkie trzy wyznaczniki powyższe są równe zeru, lecz niewszystkie współczynniki układu znikają np. $a_1 \neq 0$, wtedy współczynniki a_2, b_2, c_2 są odpowiednio proporcjonalne do współczynników a_1, b_1, c_1, to znaczy, można dobrać taki czynnik k, iż

$$a_2 = k a_1; \qquad b_2 = k b_1; \qquad c_2 = k c_1$$

i wobec tego każda trójka liczb (x, y, z), spełniających pierwsze z równań (7), będzie spełniała i drugie; a więc rozwiązania niewszystkie równe zeru otrzymamy w danym wypadku, podstawiając na y i z wartości dowolne i wyznaczając odpowiednią wartość na x z pierwszego równania $(a_1 \neq 0)$.

Gdyby wszystkie współczynniki znikały, wtedy wartości niewiadomych mogłyby być najzupełniej dowolne.

4. Ogólne określenie wyznacznika.

Pojęcie ogólne wyznacznika powstało na gruncie zagadnienia rozwiązania układu równań linjowych z wieloma niewiadomemi. Niech będzie zbiór n^2 liczb dowolnych (elementów) ugrupowanych w wiersze i kolumny w sposób następujący:

$$\begin{array}{l} a_{11}, a_{12}, a_{13} \dots\dots a_{1n} \\ a_{21}, a_{22}, a_{23} \dots\dots a_{2n} \\ a_{31}, a_{32}, a_{33} \dots\dots a_{3n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}, a_{n2}, a_{n3} \dots\dots a_{nn} \end{array} \tag{10}$$

pierwsze wskaźniki są numerami wierszy, zaś drugie wskaźniki są numerami kolumn, do których dany element należy. Miejsce, w którym dany element jest umieszczony w zbiorze (10) odgrywa rolę główną w tworzeniu z liczb (10) pewnego wyrażenia, zwanego wyznacznikiem, określonego poniżej.

Wybierzmy ze zbioru (10) n elementów w ten sposób, aby *z każdego wiersza i kolumny brać po jednym elemencie,* to znaczy, aby w otrzymanej grupie n elementów a_{ij} ani pierwszy ani też drugi wskaźnik dwa razy się nie powtórzył; n elementów wybranych możemy zawsze napisać w porządku, odpowiadającym kolejnym wierszom, to znaczy według porządku pierwszych wskaźników:

$$a_{1\alpha},\ a_{2\beta},\ a_{3\gamma},\ \dots\ a_{n\lambda} \tag{11}$$

$\alpha, \beta, \gamma, \dots \lambda$ są to numery kolumn, do których należą elementy, wybrane z pierwszego, drugiego, trzeciego i t. d. wiersza.

Nie zmieniając w zbiorze (11) porządku pierwszych wskaźników i przestawiając między sobą wszelkiemi możliwemi sposobami n drugich wskaźników, otrzymamy wszelkie możliwe grupy, zawierające po n elementów, wybranych ze zbioru (10), po jednej z każdego wiersza i z każdej kolumny; *grupy te różnić się będą mię-*

dzy sobą conajmniej dwoma wyrazami. Liczba grup (11), które można wybrać ze zbioru (10), równa się więc liczbie przestawień n liczb po n naraz, a więc równa się iloczynowi:

$$1 \, . \, 2 \, . \, 3 \, \ldots \ldots \, n$$

Do zbioru grup (11) należeć będzie między innemi grupa elementów

$$a_{11} \, , a_{22} \, , a_{33} \ldots \ldots a_{nn}$$

o równych wskaźnikach, leżących na przekątnej zbioru (10).

Weźmy pod uwagę jedną z grup n elementów, wybranych w sposób wyżej wskazany ze zbioru (10) i napisanych w dowolnym porządku:

$$a_{\alpha'\alpha} \, , a_{\beta'\beta} \, , a_{\gamma'\gamma} \, , \ldots \ldots a_{\lambda'\lambda} \tag{12}$$

Rozważmy teraz *kolejność*, w jakiej występują pierwsze wskaźniki $(\alpha', \beta', \gamma', \ldots \lambda')$ i drugie wskaźniki $(\alpha, \beta, \gamma, \ldots \lambda)$, które są przestawionemi liczbami zbioru $1, 2, 3, \ldots n$.

Porównywując dwie dowolne, niekoniecznie obok siebie leżące, liczby w ciągu $(\alpha', \beta', \gamma', \ldots \lambda')$, lub $(\alpha, \beta, \gamma, \ldots \lambda)$, zauważymy, iż liczby te następują w tych ciągach, bądź w porządku, odpowiadającym ich wielkości, bądź też odwrotnie, to znaczy mniejsza następuje po większej; w tym ostatnim wypadku własność takiej pary nazwiemy *odwróceniem*.

Weźmy pod uwagę wszelkie możliwe pary wybrane z ciągu wskaźników $(\alpha', \beta', \gamma' \ldots \lambda')$ i tak samo z ciągu $(\alpha, \beta, \gamma \ldots \lambda)$ w porządku takim, w jakim w tych ciągach występują; policzmy następnie *liczbę odwróceń* w pierwszym ciągu i w drugim i utwórzmy *sumę tych dwóch liczb* — owa suma liczb odwróceń będzie nam potrzebna w tworzeniu wyznacznika.

Zauważmy, że gdy w ciągu liczb $(\alpha, \beta, \gamma \ldots \lambda)$ przestawimy między sobą dwie sąsiednie liczby np. β i γ, to otrzymamy ciąg $(\alpha, \gamma, \beta, \ldots \lambda)$, którego ilość odwróceń zmieni się o jedność, a mianowicie jedno odwrócenie przybędzie, gdy $\beta < \gamma$, zaś jedno ubędzie, gdy $\beta > \gamma$. Jeśli przestawimy między sobą dwie niesąsiadujące liczby np. α i γ, to otrzymamy ciąg $(\gamma, \beta, \alpha, \ldots \lambda)$, którego ilość odwróceń zmieniona będzie wogóle o *nieparzystą* liczbę, gdyż przestawienie dwóch dowolnych liczb można dokonać przy pomocy nieparzystej ilości kolejnych przestawień dwóch sąsiadujących ze sobą liczb, w danym wypadku przy pomocy trzech przestawień liczb (α, β) (α, γ) (β, γ). *Wskutek przestawienia dwóch do-*

wolnych liczb ciągu $(\alpha, \beta, \gamma, \ldots \lambda)$ *ilość odwróceń w tym ciągu zmieni się z parzystej na nieparzystą i odwrotnie.*

Widzimy stąd, że *suma liczby odwróceń ciągu pierwszych wskaźników* $(\alpha', \beta', \gamma', \ldots \lambda')$ *i ciągu drugich* $(\alpha, \beta, \gamma \ldots \lambda)$ *dla grupy*

$$a_{\alpha'\alpha},\ a_{\beta'\beta},\ a_{\gamma'\gamma},\ \ldots\ldots\ a_{\lambda'\lambda} \tag{12}$$

pozostaje parzystą lub nieparzystą przy dowolnem przestawieniu elementów a_{ij}, gdyż każdemu przestawieniu dwóch wyrazów towarzyszą *dwa przestawienia wskaźników*, jedno w ciągu $(\alpha', \beta', \gamma', \ldots \lambda')$ i jedno w ciągu $(\alpha, \beta, \gamma, \ldots \lambda)$.

Możemy teraz przystąpić do określenia wyznacznika.

Wyznacznikiem zbioru n^2 *elementów, ugrupowanych w tablicy* (10), *nazywamy wyrażenie, które jest sumą wszelkich możliwych iloczynów*

$$(\pm 1)\, a_{\alpha'\alpha} \cdot a_{\beta'\beta} \cdot a_{\gamma'\gamma} \cdot \cdot \cdot\ a_{\lambda'\lambda} \tag{13}$$

n elementów wybranych ze zbioru (10) *po jednej z każdego wiersza i z każdej kolumny, iloczyny te winny być pomnożone przez* $+1$ *lub* -1 *zależnie od tego, czy suma liczby odwróceń pierwszych i drugich wskaźników jest parzysta czy też nieparzysta.*

Znak ten, według własności przed chwilą podanej, jest charakterystyczny dla każdego iloczynu, gdyż nie zależy od porządku w jakim następują liczby w iloczynie (13). Możemy więc zawsze w tworzeniu wyznacznika pisać wyrazy iloczynu (13) według porządku wierszy, a więc w tej postaci:

$$(\pm 1)\, a_{1p} \cdot a_{2q} \cdot a_{3r} \cdot \cdot \cdot\ a_{nt}$$

i wystarczy teraz obliczyć ilość odwróceń ciągu drugich wskaźników, gdyż ilość odwróceń ciągu pierwszych wskaźników jest wtedy równa zeru.

Wyznacznik oznaczamy w ten sposób, iż obejmujemy zbiór odpowiednio ugrupowanych liczb (10), z których on jest utworzony, dwiema pionowemi kreskami, mamy zatem:

$$\begin{vmatrix} a_{11}, a_{12}, a_{13}, \ldots a_{1n} \\ a_{21}, a_{22}, a_{23}, \ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}, a_{n2}, a_{n3}, \ldots a_{nn} \end{vmatrix} = \Sigma\, (\pm\, a_{1p} \cdot a_{2q} \cdot a_{3r} \ldots a_{nt}). \tag{13'}$$

gdzie Σ jest symbolem sumy.

Ponieważ ze zbioru n^2 elementów a_{ij} możemy wybrać liczbę $1.2.3\ldots.n$ grup o postaci (13), a więc wyznacznik jest sumą o ilości $1.2.3\ldots.n$ wyrazów.

W tworzeniu wyznacznika odgrywa rolę główną miejsce, w którem napisane są elementy a_{ij}. Weźmy dla przykładu wyznacznik dziewięciu elementów, zawierający trzy wiersze i trzy kolumny:

$$\begin{vmatrix} a_{11}, a_{12}, a_{13} \\ a_{21}, a_{22}, a_{23} \\ a_{31}, a_{32}, a_{33} \end{vmatrix}; \tag{14}$$

$a_{11}, a_{12}, a_{13}, \ldots$ są to symbole dowolnie danych liczb.

Według określenia wyznacznika, utwórzmy trójki czynników, wybierając po jednym elemencie z każdego wiersza i kolumny, otrzymamy wtedy liczbę $1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$ iloczynów o postaci (każdy wyraz dwa razy się powtórzy)

$$\begin{array}{lll} a_{11}\,a_{22}\,a_{33}\,; & a_{11}\,a_{23}\,a_{32}\,; & a_{12}\,a_{23}\,a_{31}\,; \\ a_{12}\,a_{21}\,a_{33}\,; & a_{13}\,a_{22}\,a_{31}\,; & a_{13}\,a_{21}\,a_{32}\,; \end{array} \tag{15}$$

Obliczmy teraz liczbę odwróceń drugich wskaźników w każdym iloczynie:

$(1, 2, 3)$ — 0 odwróceń

$(1, 3, 2)$ — 1 odwrócenie $(3, 2)$.

$(2, 3, 1)$ — 2 odwrócenia $(2, 1)$ i $(3, 1)$

$(2, 1, 3)$ — 1 odwrócenie $(2, 1)$

$(3, 2, 1)$ — 3 odwrócenia $(3, 2), (3, 1), (2, 1)$

$(3, 1, 2)$ — 2 odwrócenia $(3, 2), (3, 1)$

według tych liczb odwróceń mnożymy iloczyny (15) przez $+1$ lub -1 i otrzymamy rozwinięcie wyznacznika (14):

$$\begin{vmatrix} a_{11}, a_{12}, a_{13} \\ a_{21}, a_{22}, a_{23} \\ a_{31}, a_{32}, a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\,a_{22}\,a_{33} + a_{12}\,a_{23}a_{31} + a_{13}\,a_{21}\,a_{32} + \tag{16}$$

$$- a_{11}\,a_{23}\,a_{32} - a_{12}\,a_{21}\,a_{33} - a_{13}\,a_{22}\,a_{31}\,.$$

Sposób bezpośredni obliczenia wyznacznika, oparty na jego definicji, jest złożony, gdyż wymaga obliczenia ilości odwróceń w ciągu wskaźników; podamy poniżej sposób bardziej praktyczny otrzymania wyrażenia wyznacznika, oparty na jego własnościach.

Zaznaczymy jeszcze, iż określenie szczególnego wyznacznika z czterech elementów

$$\begin{vmatrix} a_1, b_1 \\ a_2, b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1 ;$$

podane w rozdziale o równaniach z dwiema niewiadomemi, jest zgodne z określeniem ogólnem.

5. Własności wyznacznika.

WŁASNOŚĆ I. Wartość wyznacznika nie zmienia się wskutek przestawienia wierszy na miejsce kolumn w tym samym porządku.

Wynika to wprost z określenia wyznacznika.

WŁASNOŚĆ II. Znak wartości wyznacznika zmienia się na odwrotny wskutek przestawienia między sobą dwóch dowolnych wierszy lub kolumn.

Istotnie, przestawienie dwóch dowolnych wierszy pociąga za sobą przestawienie dwóch odpowiednich wskaźników *pierwszych* w każdym z wyrazów (13), bez zmiany wskaźników drugich, a to zmienia ilość odwróceń o liczbę nieparzystą w każdym z wyrazów (13) i wobec tego znak każdego wyrazu na przeciwny.

Podobny fakt zachodzi przy przestawieniu dwóch kolumn.

Mamy np.:

$$\begin{vmatrix} a_1, b_1, c_1, d_1 \\ a_2, b_2, c_2, d_2 \\ a_3, b_3, c_3, d_3 \\ a_4, b_4, c_4, d_4 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} c_1, b_1, a_1, d_1 \\ c_2, b_2, a_2, d_2 \\ c_3, b_3, a_3, d_3 \\ c_4, b_4, a_4, d_4 \end{vmatrix}$$

WŁASNOŚĆ III. Wyznacznik, posiadający dwa wiersze lub dwie kolumny identyczne, równa się zeru.

Wynika to natychmiast z poprzedniej własności, gdyż przestawienie dwóch dowolnych kolumn lub wierszy zmienia znak wyznacznika na przeciwny, a że przestawienie dwóch wierszy lub dwóch kolumn identycznych nie zmienia wartości wyznacznika, a zatem wartość wyznacznika może być wtedy tylko równą zeru.

Mamy np.

$$\begin{vmatrix} 2, 2, 1 \\ 5, 5, 3 \\ 6, 6, 7 \end{vmatrix} = 0,$$

co można też sprawdzić bezpośrednio.

WŁASNOŚĆ IV. Jeśli wszystkie elementy tego samego wiersza lub tej samej kolumny pomnożymy przez ten sam czynnik, to wartość wyznacznika będzie przez ten czynnik pomnożona.

Istotnie, wszystkie elementy pewnego wiersza lub kolumny znajdują się po jednym w każdym ze składników sumy (13'), przedstawiającej wartość wyznacznika. Pomnożenie wszystkich wyrazów tego samego wiersza lub kolumny przez ten sam czynnik powoduje więc pomnożenie wszystkich wyrazów sumy (13') przez ten czynnik. Mamy np.

$$\begin{vmatrix} k\,a_1, b_1, c_1 \\ k\,a_2, b_2, c_2 \\ k\,a_3, b_3, c_3 \end{vmatrix} = k \cdot \begin{vmatrix} a_1, b_1, c_1 \\ a_2, b_2, c_2 \\ a_3, b_3, c_3 \end{vmatrix};$$

Stąd wynika też, że, *gdy wszystkie elementy jednego wiersza lub kolumny są równe zeru, to wartość wyznacznika równa się zeru, np.*

$$\begin{vmatrix} a_1, b_1, c_1 \\ 0\ , 0\ , 0 \\ a_3, b_3, c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

WŁASNOŚĆ V. Jeśli każdy z elementów jednego wiersza lub kolumny przedstawimy pod postacią sumy kilku składników, to wartość wyznacznika będzie równa sumie kilku wyznaczników, z odpowiedniemi kolumnami, równemi poszczególnym składnikom.

Mamy np.

$$\begin{vmatrix} a_1 + a_1', b_1, c_1 \\ a_2 + a_2', b_2, c_2 \\ a_3 + a_3', b_3, c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1, b_1, c_1 \\ a_2, b_2, c_2 \\ a_3, b_3, c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1', b_1, c_1 \\ a_2', b_2, c_2 \\ a_3', b_3, c_3 \end{vmatrix}$$

Własność ta jest oczywista z uwagi, iż wszystkie wyrazy danego wiersza lub kolumny znajdują się po jednym w każdym ze składników sumy (13'), a więc każdy z tych składników rozszczepi się wtedy na kilka składników, należących do wyznaczników odpowiednich.

WŁASNOŚĆ VI. *Jeśli wszystkie elementy pewnego wiersza lub kolumny są takiemi samemi kombinacjami linjowemi pozostałych elementów, leżących w tych samych kolumnach lub wierszach, to wartość wyznacznika równa się zeru.*

Mamy np.

$$a_1 = \alpha\, b_1 + \beta\, c_1$$

$$a_2 = \alpha\, b_2 + \beta\, c_2$$

$$a_3 = \alpha\, b_3 + \beta\, c_3$$

gdzie α i β są to pewne współczynniki, otrzymamy wtedy

$$\begin{vmatrix} a_1, b_1, c_1 \\ a_2, b_2, c_2 \\ a_3, b_3, c_3 \end{vmatrix} = 0$$

przez kolejne zastosowanie własności V, IV i III.

6. Rozwinięcie wyznacznika na podwyznaczniki.

Niech będzie wyznacznik

$$(17) \qquad \begin{vmatrix} a_{11}, a_{12} \ldots . a_{1n} \\ a_{21}, a_{22} \ldots . a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}, a_{n2} \ldots . a_{nn} \end{vmatrix};$$

W sumie iloczynów, przedstawiającej ten wyznacznik, wydzielmy grupę wszystkich tych iloczynów, które zawierają element a_{11}. Jeśli w takiej grupie wyrzucimy a_{11} przed nawias, to