ROZDZIAŁ IX.

POWIERZCHNIE DRUGIEGO STOPNIA.

30. Rozważania ogólne.

Ogólna postać równania powierzchni drugiego stopnia we współrzędnych prostokątnych będzie następująca:

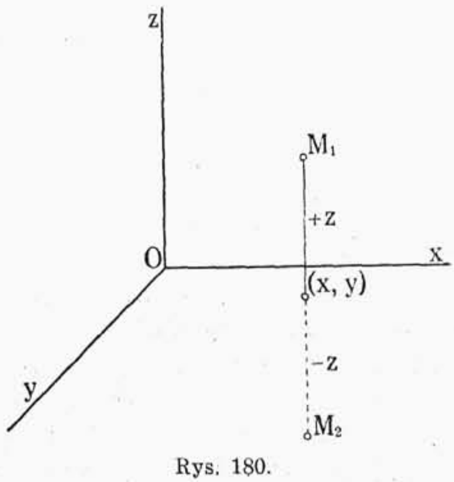
$$(1) \quad Ax^2+By^2+Cz^2+Dxy+Exz+Fyz+Gx+Hy+Iz+K=0$$

gdzie $A, B, C, D, E, F, G, H, I, K$ są to współczynniki stałe, określające powierzchnię. Położenie powierzchni drugiego stopnia zależy więc od *dziewięciu* stosunków między współczynnikami równania.

Przez dziewięć punktów w przestrzeni przechodzi zatem wogóle określona powierzchnia drugiego stopnia.

TWIERDZENIE. Dowolna płaszczyzna przecina powierzchnię drugiego stopnia wogóle wzdłuż krzywej drugiego stopnia; istotnie, możemy zawsze tak wybrać trójścian współrzędnych, aby płaszczyzna dana była płaszczyzną $z=0$, wtedy, podstawiając tę wartość w równanie powierzchni (1), otrzymamy związek drugiego stopnia z dwiema zmiennemi, będący równaniem przekroju.

Podamy teraz własności równania powierzchni, którym odpowiadają pewne cechy geometryczne, mianowicie istnienie środka powierzchni, płaszczyzny i osi symetrji.



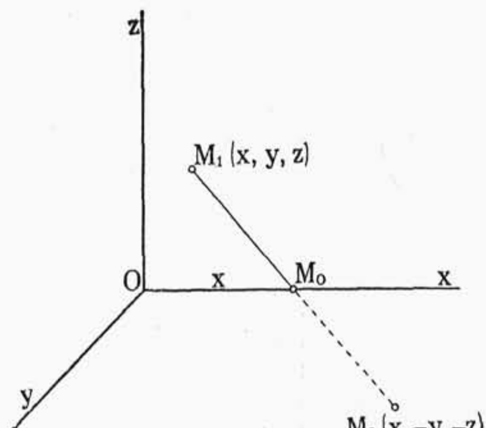
Rys. 180.

Jeśli równanie powierzchni nie ulega zmianie, gdy zmienimy na odwrotny znak jednej współrzędnej np. z, oznacza to, iż punkty $(x, y, +z)$ i $(x, y, -z)$ leżą obydwa na powierzchni, jeśli jeden z nich do tej powierzchni należy, a więc powierzchnia jest symetryczna wtedy względem płaszczyzny (Oxy), prostopadłej do Oz (rys. 180).

Mamy stąd taką regułę:

jeśli równanie powierzchni zawiera pewną współrzędną tylko w parzystej potędze, to wtedy płaszczyzna, zawierająca osi współrzędnych prostopadłe do osi, odpowiadającej danej współrzędnej, jest płaszczyzną symetrji powierzchni.

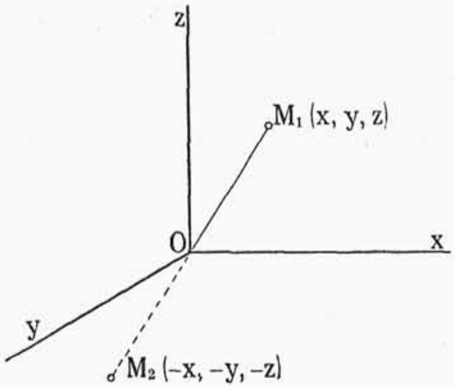
Gdy równanie powierzchni nie ulega zmianie, jeżeli zmienimy jednocześnie znaki dwóch współrzędnych np. y i z, oznacza to, iż punkty (x, y, z) i $(x, -y, -z)$ leżą obydwa na powierzchni danej, jeśli jeden z nich znajduje się na tej powierzchni, ale punkty $M_1(x, y, z)$ i $M_2(x, -y, -z)$, których dwie współrzędne różnią się tylko znakiem, są końcami odcinka M_1M_2 prostopadłego do osi Ox, którego środek M_0 leży na tej osi, oś Ox będzie więc osią symetrji powierzchni danej (rys. 181).



Rys. 181.

Jedna z osi współrzędnych jest więc osią symetrji powierzchni, gdy zmiana znaku dwóch współrzędnych, do tej osi prostopadłych, zachowuje postać równania krzywej.

Przypuśćmy wreszcie, że równanie pozostaje zachowane, gdy zmienimy jednocześnie znaki wszystkich trzech współrzędnych. Jeśli więc punkt $M_1(x, y, z)$ leży na powierzchni danej, to na tej powierzchni leżeć będzie wtedy również punkt $M_2(-x, -y, -z)$, ale te dwa punkty są końcami odcinka, którego środek znajduje się w początku układu (rys. 182); początek układu jest więc



Rys. 182.

wtedy środkiem cięciw powierzchni przez ten punkt przechodzących. Punkt taki nazywamy *środkiem powierzchni.* Mamy stąd regułę:

początek układu jest środkiem powierzchni, jeśli równanie tej powierzchni pozostaje zachowane, po zmianie jednoczesnej znaku wszystkich trzech współrzędnych.

Równanie drugiego stopnia w postaci najprostszej

$$A x^2 + B y^2 + C z^2 + D = 0$$

pozostaje zachowane, w razie zmiany znaku jednej, dwóch lub trzech współrzędnych jednocześnie, a więc początek układu jest środkiem powierzchni, płaszczyzny współrzędnych są płaszczyznami symetrji i osi współrzędnych są osiami symetrji powierzchni.

Równanie o postaci

$$A x^2 + B y^2 + C z^2 + D x y + E x z + F y z + K = 0$$

pozostaje zachowane w razie jednoczesnej zmiany znaku wszystkich współrzędnych, środek powierzchni znajduje się więc w początku układu; jeśli D, E i F są od zera odmienne, to płaszczyzny współrzędnych nie będą dla tej powierzchni płaszczyznami symetrji, ani też osi współrzędnych osiami symetrji.

Równanie

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Gz + K = 0$$

pozostaje zachowane w razie zmiany znaku współrzędnych x i y, oś Oz jest więc osią symetrji powierzchni.

Powyższe cechy równania drugiego stopnia są *odwracalne*.

Można wykazać, iż, przy pomocy odpowiedniego przesunięcia układu współrzędnych, równanie powierzchni drugiego stopnia, posiadającej środek, da się sprowadzić do postaci najprostszej następującej:

(2) $$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + D = 0$$

zaś równanie powierzchni bez środka do postaci najprostszej takiej:

(3) $$Ay^2 + Bz^2 + Cx = 0$$

zawierającej tylko *dwie współrzędne* w drugiej potędze. Sposób dokonania takiej redukcji podamy nieco później.

Zbadajmy więc postacie powierzchni, określonych przez równania (2) lub (3). Kształt powierzchni zależeć będzie od znaków współczynników w wyrazach drugiego stopnia.

31. Powierzchnie drugiego stopnia posiadające środek.

Rozważmy powierzchnie drugiego stopnia, odniesione do środka i do płaszczyzn symetrji, a więc odpowiadające równaniu

(1) $$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = D;$$

klasyfikację tych powierzchni przeprowadzimy ze względu na znaki współczynników A, B, C.

ELIPSOIDA.

Załóżmy, iż wszystkie wielkości A, B, C, D są odmienne od zera i przypuśćmy, iż znaki współczynników A, B, C są jednakowe; rzeczywistość powierzchni wymaga, aby ten sam znak posiadał wyraz D. Możemy więc w danym wypadku równanie powierzchni napisać w postaci takiej:

(2) $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

gdzie a, b, c oznaczają wartości dodatnie.

Powierzchnia taka nazywa się *elipsoidą*. Jest ona przedewszystkiem *ograniczona*, mianowicie współrzędne jej punktów spełniają warunki

(3) $$|x| \leqslant a; \ |y| \leqslant b; \ |z| \leqslant c;$$

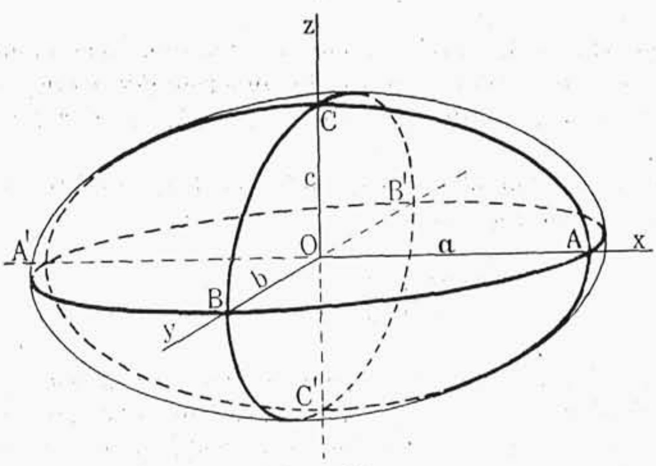
każda ze współrzędnych równa się swej wartości krańcowej $\pm a, \pm b, \pm c$, gdy pozostałe dwie współrzędne są równe zeru. A więc powierzchnia (2) przecina swe osi symetrji w punktach symetrycznych AA', BB', CC' o współrzędnych równych odpowiednio $\pm a, \pm b, \pm c$, punkty te nazywają się *wierzchołkami* elipsoidy. Odcinki $2a$, $2b$, $2c$, leżące na osiach symetrji i łączące przeciwległe wierzchołki, nazywają się *osiami elipsoidy*. Jeśli wszystkie trzy osi są różne, to elipsoida zwie się *trójosiową*. Kształt powierzchni poznamy, szukając przekrojów danej powierzchni płaszczyznami. Otóż, podstawiając w równanie (2) kolejno $x=0, y=0$, $z=0$, otrzymamy równania trzech elips:

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1; \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1; \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

które przedstawiają przekroje elipsoidy płaszczyznami symetrji; możemy stąd wnioskować o kształcie powierzchni danej (rys. 183). Wogóle przekrój elipsoidy dowolną płaszczyzną *jest zawsze elipsą*, gdyż przekrój ten musi być krzywą drugiego stopnia *ograniczoną*.

Jeśli osi a i b są sobie równe, to wtedy elipsoida odpowiada równaniu

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$



Rys. 183.

i jest *obrotowa* dokoła osi Oz, gdyż wtedy przekroje płaszczyznami $z =$ *stałej* są kołami. Podobnie elipsoida będzie obrotowa dokoła osi Ox, jeśli $b = c$ i obrotowa dokoła Oy, gdy $a = c$.

Jeśli wszystkie trzy osi są sobie równe: $a = b = c$, to elipsoida staje się kulą o równaniu

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

HYPERBOLOIDA JEDNOPOWŁOKOWA.

Przypuśćmy, iż znaki współczynników A, B, C nie są jednakowe i równanie (1) sprowadza się do postaci

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \tag{4}$$

Przekroje tej powierzchni płaszczyznami $z = k$, równoległemi do Oxy, są elipsami podobnemi, spełniają bowiem związek

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{k^2}{c^2}$$

Przekrój płaszczyzną $x = 0$ jest hyperbolą, określoną przez równanie

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

zaś przekrój płaszczyzną $y = 0$, hyperbolą o równaniu

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

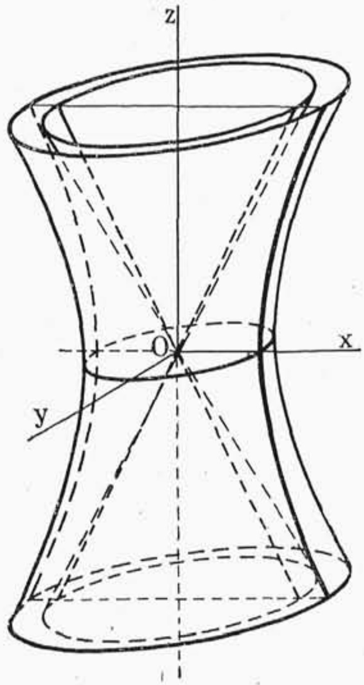
Stąd wnioskujemy o kształcie powierzchni, podanej na rys. 184. Powierzchnia taka nazywa się *hyperboloidą jednopowłokową.*

Jeśli $a = b$, wtedy hyperboloida staje się *obrotowa* dokoła osi Oz.

Odrzucając jedynkę w równaniu powierzchni (4), otrzymamy *równanie jednorodne* o postaci

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \tag{4'}$$

które, jak wiemy, przedstawia *powierzchnię stożkową z wierzchołkiem w środku hyperboloidy O.* Tworzące tej powierzchni są oczywiście *asymptotami* przekrojów odpowiednich hyperboloidy płaszczyznami, przesuniętemi przez *środek O*; własność tę zbadamy jeszcze dokładniej nieco później. Powierzchnię (4') nazywamy *stożkiem asymptotycznym* hyperboloidy (rys. 184).



Rys. 184.

Dowiedziemy teraz, *iż hyperboloida jednopowłokowa jest powierzchnią prostokreślną*, to znaczy utworzoną przez pewien układ linij prostych (rys. 185). Trzeba w tym celu wykazać, iż *równanie hyperboloidy* (4) *jest rezultatem rugowania pewnego parametru z dwóch równań pierwszego stopnia z trzema zmiennemi.* Otóż, istotnie, pisząc równanie (4) w postaci

(4) $$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{y^2}{b^2}$$

lub $$\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=\left(1+\frac{y}{b}\right)\left(1-\frac{y}{b}\right)$$

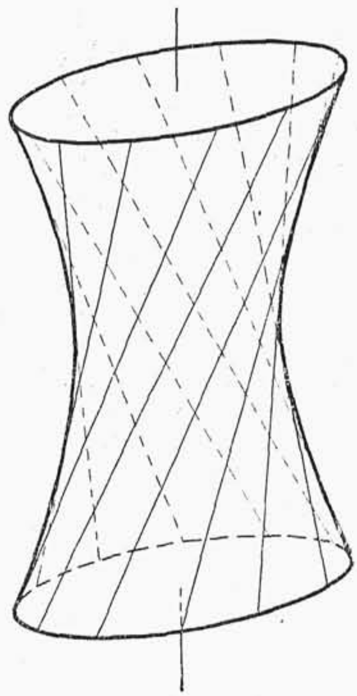
spostrzegamy natychmiast, iż można je uważać za wynik rugowania parametru zmiennego λ z układu dwóch równań pierwszego stopnia o postaci:

(5) $$\begin{cases} \dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}=\left(1+\dfrac{y}{b}\right)\lambda \\ \lambda\left(\dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}\right)=1-\dfrac{y}{b} \end{cases}$$

lub parametru λ' z układu

$$(6) \qquad \begin{cases} \dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}=\left(1-\dfrac{y}{b}\right)\lambda' \\ \lambda'\left(\dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}\right)=1+\dfrac{y}{b} \end{cases}$$

Związki (5) i (6) określają dwa układy prostych, gdyż są to związki pierwszego stopnia. Proste takie leżą na danej hyperboloidzie, gdyż związki (5), jak również (6), pociągają za sobą związek (4) dla dowolnych wartości parametrów λ i λ'. Odwrotnie, trzem liczbom (x_0, y_0, z_0), spełniającym równanie (4'), odpowiadają określone wartości na λ i λ', przy których liczby (x_0, y_0, z_0) będą



Rys. 185.

spełniały związki (5) i (6); przez każdy punkt hyperboloidy przechodzi więc jedna tworząca z układu (5) i jedna tworząca z układu (6). Wyjątek stanowią punkty prostej, odpowiadającej równaniom $\dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}=0$, $1+\dfrac{y}{b}=0$ i prostej, odpowiadającej równaniom

$\frac{x}{a} - \frac{z}{c} = 0$, $1 - \frac{y}{b} = 0$, które leżą na hyperboloidzie, lecz nie są objęte równaniami (5) i (6).

Każda tworząca układu (5) przecina się z każdą tworzącą układu (6), do jednej zaś jest równoległa. Istotnie, z czterech związków (5) i (6) między trzema współrzędnemi x, y, z jeden jest zawsze kombinacją trzech pozostałych, np. związek ostatni otrzymujemy, mnożąc strony związków (5) i dzieląc stronami przez pierwszy ze związków (6); stąd można wykazać, iż układ równań (5) i (6) ma wspólne rozwiązanie, a więc dwie dowolne tworzące przecinają się w punkcie o współrzędnych

$$x = a\,\frac{\lambda\lambda' + 1}{\lambda + \lambda'}$$

$$y = b\,\frac{\lambda' - \lambda}{\lambda + \lambda'} \tag{7}$$

$$z = c\,\frac{\lambda\lambda' - 1}{\lambda + \lambda'}$$

gdy $\lambda + \lambda' \neq 0$, są zaś do siebie równoległe, gdy $\lambda + \lambda' = 0$, równania te wyrażają współrzędne prostokątne punktów hyperboloidy w zależności od parametrów λ i λ', określających dwie tworzące prostolinjowe, przez ten punkt przechodzące. Równania (7) przedstawiają więc hyperboloidę, odniesioną do jej tworzących prostolinjowych; jest to szczególny przykład przedstawienia (art. 11) trzech współrzędnych prostokątnych punktów powierzchni w zależności od dwóch parametrów u i v.

Mówiliśmy już, iż tworząca układu np. (5), opisując hyperboloidę, przecina stale wszystkie tworzące układu (6). Wiadomo jednak, iż wystarczy podać trzy proste, aby układ prostych, przecinających te trzy stałe proste, był określony. *Hyperboloidę jednopowłokową można więc uważać jako powierzchnię, utworzoną przez układ prostych, przecinających pewne trzy stałe proste w przestrzeni.*

Jeśli te trzy proste są dowolnie dane, wtedy, jak wiemy z zagadnienia 3 (artykuł 29), dla powierzchni, utworzonej przez układ prostych, przecinających trzy dane proste, otrzymujemy równanie drugiego stopnia w postaci wogóle nieodniesionej do środka i do płaszczyzn symetrji. Równanie takie można wtedy sprowadzić do równania hyperboloidy (4) przez odpowiednie przesunięcie układu współrzędnych.

Zaznaczymy jeszcze, iż posiadanie tworzących prostolinjowych jest cechą każdej powierzchni drugiego stopnia, nie dla każdej tylko są one rzeczywiste.

Np. kula

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

posiada również dwa układy tworzących prostolinjowych, lecz oczywiście urojonych; pisząc mianowicie równanie kuli w postaci

$$(x + yi)(x - yi) = (r + z)(r - z)$$

gdzie $i^2 = -1$, mamy dwa układy tworzących prostolinjowych kuli:

$$\begin{cases} x + yi = (r + z)\lambda \\ x - yi = (r - z)\dfrac{1}{\lambda} \end{cases} \qquad \begin{cases} x + yi = (r - z)\lambda' \\ x - yi = (r + z)\dfrac{1}{\lambda'} \end{cases}$$

HYPERBOLOIDA DWUPOWŁOKOWA.

W razie nieznikania żadnego ze współczynników A, B, C, D, pozostał jeszcze do rozpatrzenia wypadek równania o postaci

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \tag{8}$$

Przekroje tej powierzchni płaszczyznami $z = 0$ i $y = 0$ są hyperbolami o równaniach

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ i } \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1;$$

przekroje płaszczyznami równoległemi do Oyz

$$x = k$$

są elipsami o równaniach

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \frac{k^2}{a^2} - 1$$

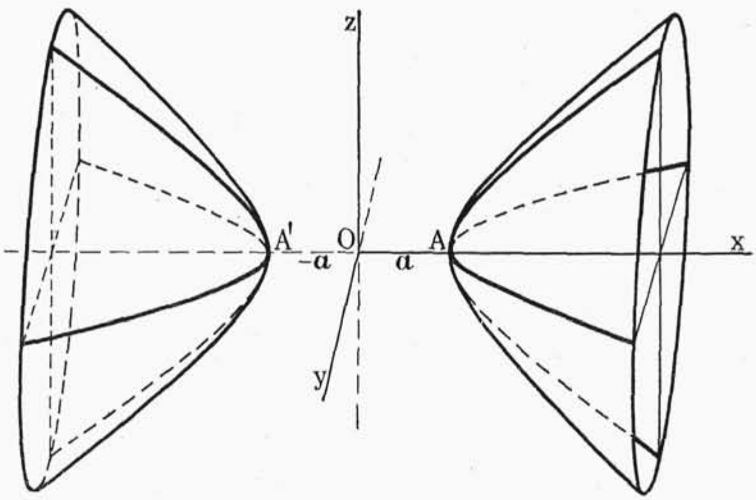
i istnieją wtedy, gdy $k > a$ lub $k < -a$, powierzchnia nie istnieje więc między płaszczyznami $x = a$ i $x = -a$. Powierzchnia składa się z dwóch oddzielnych powłok (rys. 186), symetrycznych względem płaszczyzny (Oyz) i przecinających oś Ox w punktach A i A' o współrzędnych $\pm a$. Powierzchnię daną nazywamy *hyperboloidą dwupowłokową*. W przypadku $b = c$, hyperboloida ta jest obrotowa dokoła osi Ox.

Podobnie, jak przedtem, równanie jednorodne

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \tag{8'}$$

przedstawia powierzchnię stożkową z wierzchołkiem w środku hyperboloidy, której tworzące są asymptotami odpowiednich przekrojów osiowych hyperboloidy — nazywamy ją *stożkiem asymptotycznym* hyperboloidy dwupowłokowej.

Z postaci równania hyperboloidy dwupowłokowej i wprost z jej kształtu widzimy, iż nie posiada ona tworzących prostolinjowych rzeczywistych.



Rys. 186.

POWIERZCHNIA STOŻKOWA I WALCOWA.

Rozpatrzmy teraz wypadki, gdy równanie (1) jest *niepełne*. Jeśli wyraz stały D jest równy zeru, wtedy równanie

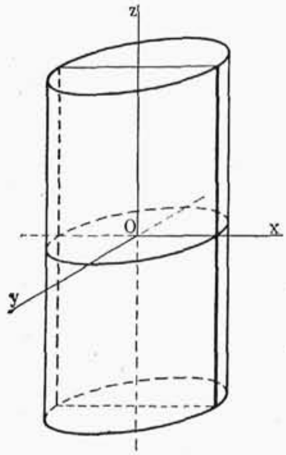
$$A x^2 + B y^2 + C z^2 = 0 \tag{9}$$

jest jednorodne, a zatem, według art. 27-go, przedstawia *powierzchnię stożkową* z wierzchołkiem (a więc i środkiem) w początku układu.

Jeśli w równaniu (1) brak wyrazu zmiennego np. $C = 0$, wtedy równanie z dwiema zmiennemi

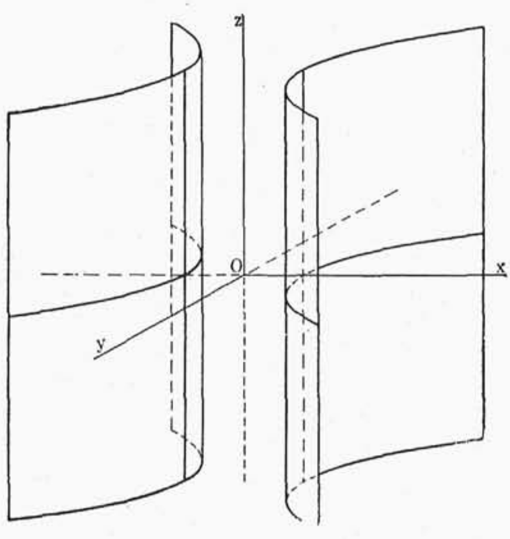
$$A x^2 + B y^2 = D \tag{10}$$

przedstawia *powierzchnię walcową*, której tworzące są równoległe do osi Oz i która przecina płaszczyznę (Oxy) wzdłuż elipsy lub hyperboli o równaniu (10); wypadnie według tego rozróżnić *po-*



Rys. 187.

wierzchnię walcową eliptyczną i hyperboliczną rys. 187 i 188. Zaznaczymy, iż początek układu jest dla powierzchni walcowej jednym z *nieskończenie wielu środków, które wszystkie leżą na osi Oz.*



Rys. 188.

Gdy w równaniu (1) brak dwóch wyrazów, wtedy odpowiada mu powierzchnia zwyrodniała, a mianowicie dwie płaszczyzny przecinające się rzeczywiste, lub jedna prosta rzeczywista (oś Oz) w przypadku równania

$$Ax^2 + By^2 = 0,$$

zaś dwie płaszczyzny równoległe lub zjednoczone w przypadku równania

$$Ax^2 = D$$

Nadmienimy wreszcie, iż równaniu (10) nie będzie odpowiadał żaden twór rzeczywisty, gdy współczynniki A i B mają ten sam znak, lecz przeciwny względem znaku wyrazu D.

32. Powierzchnie drugiego stopnia bez środka.

Powierzchnie bez środka sprowadzają się do równania

(11) $$Ay^2 + Bz^2 = Cx$$

Jeśli równanie jest pełne, to możliwe są tu tylko dwa typy powierzchni zwanych *paraboloidami*, zależnie od tego, czy znaki współczynników A i B są jednakowe, czy też przeciwne. Powierzchnie te posiadają dwie płaszczyzny symetrji i jedną oś symetrji Ox, która jest ich przecięciem. Punkt O, w którym oś symetrji przebija paraboloidę, nazywamy jej *wierzchołkiem*.

PARABOLOIDA ELIPTYCZNA.

Powierzchnia ta odpowiada równaniu, które napiszemy w postaci

(12) $$\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = \frac{x}{c}$$

Znak współczynnika c nie wpływa na postać powierzchni, lecz tylko na jej położenie względem dodatniego zwrotu Ox; jeśli przypuścimy, iż $c > 0$, wtedy powierzchnia będzie leżała całkowicie po dodatniej stronie płaszczyzny (Oyz).

Przekroje paraboloidy (12) płaszczyznami $x = k$ (jeśli $k > 0$) są zawsze *elipsami,* identycznemi ze swemi rzutami o równaniach:

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = ck,$$

zaś przekroje płaszczyznami $y = 0$ i $z = 0$ są parabolami (rys. 189) o równaniach

$$z^2 = \frac{b^2}{c}x \text{ i } y^2 = \frac{a^2}{c}x$$

Jeśli $a = b$, wtedy paraboloida jest *obrotowa* dokoła osi Ox.