53. Rozważmy układ parabol, których ogniskiem jest stały punkt F i które są styczne do stałej prostej D. Znaleść miejsce geometryczne wierzchołków tych parabol.

54. Niech będzie układ hyperbol równoosiowych, przechodzących przez końce średnicy stałej AB danego koła i przez końce dowolnej cięciwy tego koła CD, równoległej do AB. Znaleść miejsce geometryczne wierzchołków i ognisk tych hyperbol.

ROZDZIAŁ XVIII.

PRZEKSZTAŁCENIA KRZYWYCH.

75. Uwagi ogólne.

Jeśli każdemu punktowi M krzywej C na płaszczyźnie podporządkujemy punkty M' tej płaszczyzny, według pewnego prawa, to otrzymamy zbiór punktów, tworzących pewną linję C', którą nazywamy *przekształconą* krzywej C. Jeśli współrzędne punktu przekształconej $M'(x', y')$ zależą tylko od współrzędnych punktu $M(x, y)$ krzywej danej, a więc, jeśli przekształcenie określone jest przez związki o postaci

$$(1) \qquad \begin{aligned} x' &= f(x, y) \\ y' &= \varphi(x, y) \end{aligned}$$

to przekształcenie nazywamy *punktowem*.

Określając ze związków (1) współrzędne x i y w zależności od x' i y', otrzymamy funkcje

$$(2) \qquad x = f_1(x', y'); \quad y = \varphi_1(x', y');$$

które określają *przekształcenie odwrotne* względem przekształcenia (1).

Rozpatrzmy teraz szczególne typy przekształceń.

76. Jednokładność.

Przekształcenie nazywamy *jednokładnością*, jeśli punktom M podporządkowujemy punkty M', leżące na tej samej osi OM, wychodzącej z pewnego stałego punktu O (biegun przekształcenia), takie, iż miary wektorów $\overline{OM'}$ i $\overline{OM}$ są względem siebie proporcjonalne, a więc

$$\overline{OM'} = k \, . \, \overline{OM} \tag{3}$$

gdzie k oznacza pewien czynnik stały.

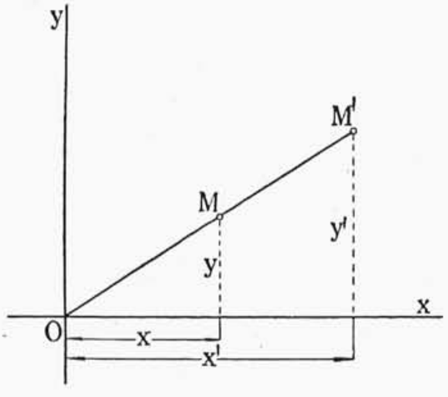
Jeśli biegun O obierzemy jako początek układu, to związki (1) będą w danym wypadku takie:

$$\begin{aligned} x' &= k\,x \\ y' &= k\,y \end{aligned} \tag{4}$$

Jednokładność zachowuje stopień równania krzywej, kąty figur przekształcanych, równoległość prostych i stosunki odcinków.

77. Przekształcenie przez promienie odwrotne.

W *przekształceniu przez promienie odwrotne* punktom M podporządkowujemy punkty M', leżące na tej samej osi, wycho-



Rys. 124.

dzącej z pewnego stałego punktu O (bieguna), dla których miary promieni $\overline{OM}$ i $\overline{OM'}$ są odwrotnie proporcjonalne, a więc

$$\overline{OM'} = \frac{k}{\overline{OM}},$$

gdzie k oznacza dany czynnik stały.

Jeśli obierzemy biegun jako początek układu, to związki (1) będą miały w obecnym wypadku postać

$$
(5) \qquad \begin{cases} x' = \overline{OM'}\dfrac{x}{\overline{OM}} = \dfrac{kx}{x^2+y^2} \\[2ex] y' = \overline{OM'}\dfrac{y}{\overline{OM}} = \dfrac{ky}{x^2+y^2} \end{cases}
$$

zaś związki odwrotne *postać identyczną*

$$
(5') \qquad \begin{cases} x = \dfrac{kx'}{x'^2+y'^2} \\[2ex] y = \dfrac{ky'}{x'^2+y'^2} \end{cases}
$$

Jeśli więc związek

$$f(x, y) = 0$$

jest równaniem krzywej danej, to związek

$$f\left(\frac{kx'}{x'^2+y'^2}, \frac{ky'}{x'^2+y'^2}\right) = 0$$

będzie równaniem krzywej przekształconej przez promienie odwrotne.

Zwykle jednak, w zagadnieniach przekształcania przez promienie odwrotne, wygodniej jest używać współrzędnych biegunowych, obierając biegun przekształcenia O jako biegun układu. Jeśli mianowicie promień wodzący $\overline{OM} = r$ punktu krzywej danej jest określoną funkcją amplitudy

$$r = f(\theta),$$

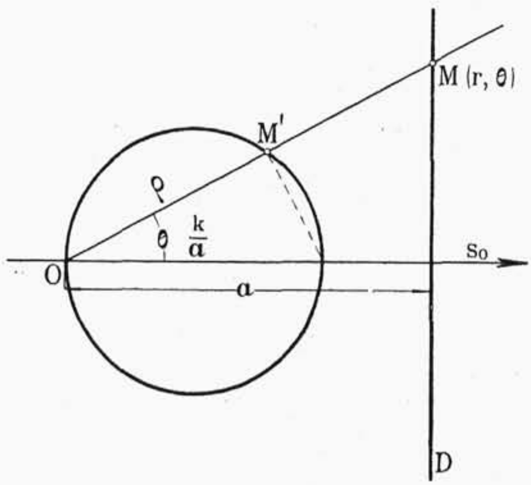
to promień wodzący $\rho = \overline{OM'}$ punktu krzywej przekształconej będzie uzależniony od amplitudy w ten sposób:

$$\rho = \frac{k}{f(\theta)}$$

Gdy jeden z punktów M, M' oddala się nieograniczenie, to punkt odpowiedni dąży do bieguna O.

ZAGADNIENIE 1. *Przekształcić prostą przez promienie odwrotne.*

Obierzmy biegun przekształcenia O jako biegun układu, zaś prostopadłą s_0, wyprowadzoną z bieguna do danej prostej D, jako oś początkową. (rys. 125).



Rys. 125.

Promień wodzący dowolnego punktu M na danej prostej D zależy od amplitudy θ w ten sposób:

$$r=\frac{a}{\cos\theta}$$

a zatem promień wodzący ρ punktu przekształconej M' będzie

$$\rho=\frac{k}{r}=\frac{k}{a}\cos\theta,$$

Przekształcona jest więc kołem, przechodzącem przez biegun O i opisanem na odcinku $\frac{k}{a}$, jako na średnicy (rys. 125).

ZAGADNIENIE 2. *Przekształcić koło przez promienie odwrotne.*

Niech początek układu Oxy będzie biegunem przekształcenia, zaś związek

$$A(x^2+y^2)+Bx+Cy+D=0 \tag{6}$$

równaniem dowolnie danego koła.

Podstawiając w równanie danego koła wyrażenia (5′) na miejscu współrzędnych x i y, otrzymamy równanie krzywej przekształconej w tej postaci:

$$A k^2 + B k x' + C k y' + D (x'^2 + y'^2) = 0 \tag{7}$$

skąd wysnuwamy ważny wniosek, iż *przekształcona koła przez promienie odwrotne jest również kołem.*

Jeśli w równaniu (6) koła danego znika wyraz stały D, to znaczy, iż koło dane przechodzi przez biegun przekształcenia O, *wtedy krzywa przekształcona* (7) *jest linją prostą.*

Jeśli zaś w równaniu danem (6) znika współczynnik A:

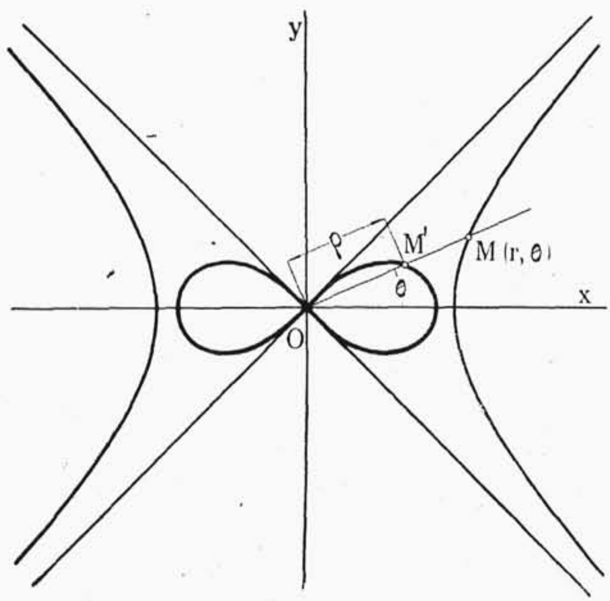
$$A = 0; \quad D \neq 0,$$

wtedy równanie to przedstawia linję prostą i *odwrotnie, krzywa przekształcona* (7) *będzie kołem, przechodzącem przez biegun przekształcenia,* zgodnie z otrzymanym już wynikiem zagadnienia poprzedniego.

ZAGADNIENIE 3. Przekształcić przez promienie odwrotne hyperbolę równoosiową

$$x^2 - y^2 = a^2,$$

obierając środek jej jako biegun.



Rys. 126.

Niech (r, θ) będą współrzędnemi biegunowemi punktu hyperboli M; wtedy

$$r^2 \operatorname{Cos}^2 \theta - r^2 \operatorname{Sin}^2 \theta = a^2$$

i stąd

$$r^2 = \frac{a^2}{\operatorname{Cos} 2\theta}$$

Promień wodzący ρ punktu przekształconej M' będzie

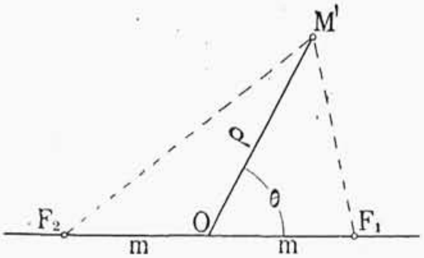
$$\rho = \frac{k}{r},$$

a zatem równanie biegunowe przekształconej ma postać

(8) $$\rho^2 = \frac{k^2}{a^2} \operatorname{Cos} 2\theta$$

Gdy punkt M oddala się nieograniczenie, wtedy punkt M' dąży do środka O, istotnie widzimy, że gdy θ dąży $\pm \frac{\pi}{4}$, to ρ dąży do zera. Krzywa posiada punkt podwójny O i jest symetryczna względem osi; z określenia stycznej wynika, iż asymptota hyperboli, jako graniczne położenie siecznej OM', jest styczna do krzywej otrzymanej w punkcie O. Krzywą otrzymana nazywa się *lemniskatą Bernouilli'ego* (rys. 126). Jest ona również *miejscem geometrycznem punktów, dla których iloczyn odległości od pewnych dwóch stałych punktów F_1 i F_2 jest stały i równy kwadratowi połowy odcinka, łączącego te punkty.* Istotnie, niech będą dwa punkty stałe $F_1\,(m, 0)$ i $F_2\,(-m, 0)$ (rys. 127), wtedy mamy dla punktu krzywej M':

$$\overline{M'F_1}^2 = \rho^2 + m^2 - 2\rho m \operatorname{Cos}\theta;$$
$$\overline{M'F_2}^2 = \rho^2 + m^2 + 2\rho m \operatorname{Cos}\theta;$$



Rys. 127.

jeśli więc winno być

$$M'F_1 \cdot M'F_2 = m^2$$

to wtedy

$$(\rho^2 + m^2)^2 - 4\rho^2 m^2 \operatorname{Cos}^2\theta = m^4,$$

stąd wypada równanie

(8') $$\rho^2 = 2m^2 \operatorname{Cos} 2\theta$$

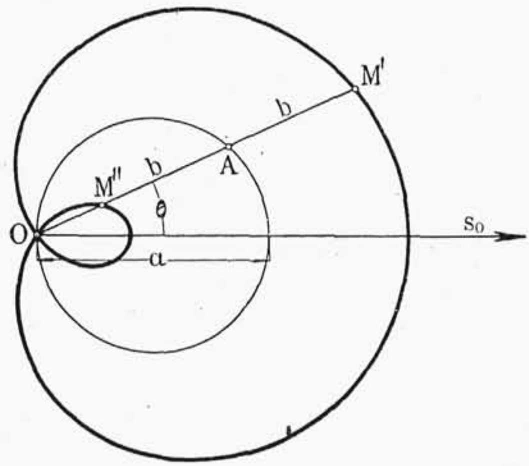
o postaci (8).

ZAGADNIENIE 4. Przekształcić przez promienie odwrotne stożkową, określoną przez związek

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \operatorname{Cos} \theta}$$

obierając ognisko jako biegun. Otrzymujemy odrazu dla promienia wodzącego $\rho = \frac{k}{r}$ punktów przekształconej wyrażenie

$$\rho = \frac{k}{r} = \frac{k}{p} + \frac{k\varepsilon}{p} \operatorname{Cos} \theta \tag{9}$$



Rys. 128.

Dla dwóch przeciwnych kierunków θ i $\theta + \pi$, promień wodzący (9) przybiera wartości

$$\rho = \pm \left(\frac{k\varepsilon}{p} \operatorname{Cos} \theta \pm \frac{k}{p} \right). \tag{9'}$$

Zgodnie z umową na str. 27 wzór ten stosować możemy również dla $\rho < 0$. Widzimy natychmiast stąd, iż punkty krzywej otrzymamy przy pomocy prostej konstrukcji geometrycznej; mianowicie składnik

$$\frac{k\varepsilon}{p} \operatorname{Cos} \theta$$

jest długością cięciwy *OA* w kole o średnicy

$$a = \frac{k\varepsilon}{p},$$

tworzącej kąt θ ze średnicą, odkładając więc w obu kierunkach od końca cięciwy *A* odcinek stały

$$b = \frac{k}{p}$$

otrzymamy punkty krzywej M' i M'', odpowiadające kątowi θ i $\pi + \theta$ (rys. 128); zmieniając teraz kąt θ od $-\frac{\pi}{2}$ do $+\frac{\pi}{2}$, otrzymamy w ten sposób wszystkie punkty, odpowiadające związkowi (9).

Jeśli $\varepsilon < 1$, to znaczy, gdy krzywa dana jest elipsą, wtedy ρ nigdy nie jest zerem i krzywa (9) obejmuje biegun, nie przechodząc przez niego.

Jeśli $\varepsilon > 1$, to znaczy w przypadku hyperboli, ρ staje się dwa razy zerem i krzywa przekształcona posiada punkt podwójny O, w którym krzyżują się gałąź zewnętrzna z gałęzią wewnętrzną, odpowiadające bliższej i dalszej gałęzi hyperboli. Punkt podwójny odpowiada oczywiście „punktom w nieskończoności" hyperboli (rys. 128) i dwie styczne w tym punkcie do krzywej są równoległe do asymptot hyperboli. Krzywa (9) nazywa się *ślimakiem Pascala.*

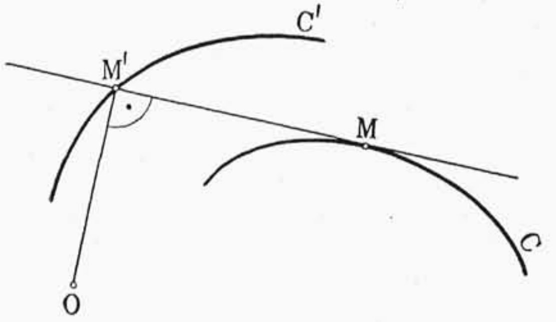
W szczególnym wypadku paraboli ($\varepsilon = 1$), krzywa przekształcona będzie miała równanie o postaci

$$\rho = a + a \operatorname{Cos} \theta,$$

jej promienie wodzące różnią się więc od promieni wodzących koła o średnicy a o stały odcinek, równy tejże średnicy a. Krzywa nie posiada gałęzi wewnętrznej, lecz tylko ostrze w punkcie O; nazywa się ona *kardioidą.*

78. Krzywe spodkowe.

Prowadząc ze stałego punktu O (bieguna) *prostopadłe do stycznych* w punktach M krzywej C, otrzymamy zbiór spodków prostopadłych M', które utworzą pewną krzywą przekształconą C', t. zw. *„spodkową"* (podaire) krzywej C (rys. 129).



Rys. 129.

Przekształcenie to *nie jest punktowe*, albowiem położenie punktu M' zależy nietylko od położenia punktu M, ale i od stycznej w tym punkcie.

P r z y k ł a d. Zastosujmy przekształcenie powyższe do paraboli

$$y^2 = 2px,$$

obierając wierzchołek paraboli, jako biegun O.

Styczna w punkcie $M(x, y)$ ma równanie

$$Yy = p(X + x)$$

zaś prostopadła OM', spuszczona na tę styczną, ma równanie

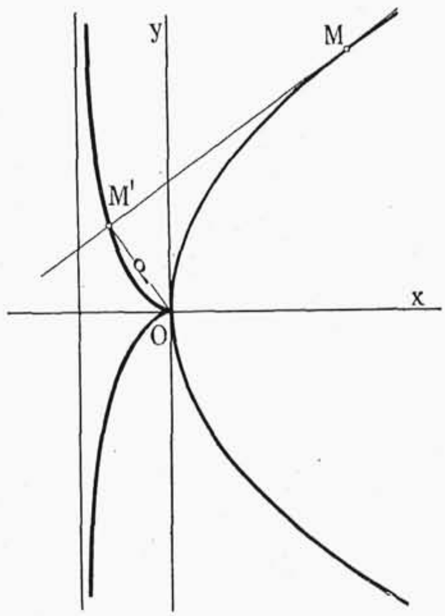
$$Y = -\frac{y}{p} X,$$

rugując x i y ze związków powyższych, otrzymamy równanie przekształconej

$$Y^2 = -\frac{2X^3}{2X + p},$$

lub

$$2X(X^2 + Y^2) + pY^2 = 0,$$



Rys. 130.

gdy X dąży do $-\frac{p}{2}$, to Y wzrasta nieskończenie, kierownica jest więc asymptotą krzywej; nadmienimy, iż krzywa posiada ostrze w punkcie O (rys. 130).

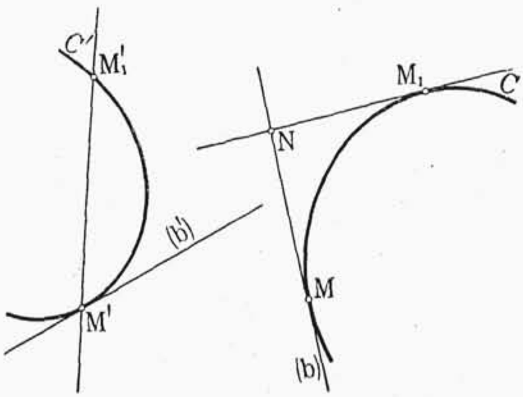
Równanie biegunowe krzywej będzie takie:

$$\rho = -\frac{p \operatorname{Sin}^2 \theta}{2 \operatorname{Cos} \theta} = -\frac{p}{2 \operatorname{Cos} \theta} + \frac{p}{2} \operatorname{Cos} \theta,$$

promień wodzący punktu krzywej jest więc różnicą między promieniem wodzącym punktów asymptoty $X = -\frac{p}{2}$ i promieniem wodzącym koła o średnicy $\frac{p}{2}$, które przechodzi przez O i jest styczne do tej asymptoty. Krzywa otrzymana nazywa się *cissoidą Dioklesa*.

79. Przekształcenie przez biegunową wzajemną.

Niech będzie stożkowa podstawowa S i dowolna krzywa C. Każdemu punktowi M krzywej C podporządkujmy biegun M' stycznej (b) w punkcie M do krzywej C, względem stożkowej S. Zbiorowi stycznych do C odpowiadać więc będzie zbiór biegunów M', tworzących pewną krzywą C', zwaną *przekształconą przez biegunową wzajemną*. Przekształcenie to ma tę ciekawą



Rys. 131.

własność, że jest identyczne ze swoim odwrotnem; wykażemy bowiem, iż odwrotnie, *punkt M jest biegunem stycznej (b') w punkcie M' do krzywej C'*. Istotnie, weźmy dwa punkty M i M_1 krzywej C i odpowiadające im dwa punkty M' i M_1' krzywej C' (rys. 131). Punkty M' i M_1' są biegunami stycznych w punktach M i M_1, a więc sieczna, łącząca punkty M' i M_1' jest biegunową punktu przecięcia N tych stycznych. W granicy, gdy M_1 dąży do M, sieczna $M'M_1'$ dąży do stycznej (b') w punkcie M', zaś punkt N dąży do M; więc punkt M jest biegunem stycznej w punkcie M' do C'.

Własność tę można udowodnić również analitycznie. Jako stożkową podstawową S weźmy np. parabolę

$$x^2 = 2y.$$

Równanie biegunowej dowolnego punktu (x', y') płaszczyzny ma wtedy postać

$$Xx' = Y + y'.$$

Aby punkt (x', y') był biegunem stycznej

$$Y - y = \frac{dy}{dx}(X - x)$$

w punkcie (x, y) do krzywej o równaniu $y = f(x)$, trzeba i wystarcza, żeby jego współrzędne miały wartości

$$x' = \frac{dy}{dx}; \quad y' = x\frac{dy}{dx} - y, \tag{10}$$

wzory te określają analitycznie przekształcenie przez biegunową wzajemną. Różniczkując wyrażenia (10), mamy

$$\frac{dy'}{dx'} = \frac{\left(\frac{dy'}{dx}\right)}{\left(\frac{dx'}{dx}\right)} = \frac{x\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - \frac{dy}{dx}}{\frac{d^2y}{dx^2}} = x$$

stąd wynikają związki

$$(10') \qquad x = \frac{dy'}{dx'}; \qquad y = x'\frac{dy'}{dx'} - y',$$

które wyrażają własność, wykazaną poprzednio, iż odwrotnie, punkt (x, y) jest biegunem stycznej w punkcie (x', y') do krzywej przekształconej.

W przypadku przekształcenia przez biegunową wzajemną krzywej drugiego stopnia, zbyteczne jest stosowanie wzorów (10), zagadnienie rozwiązuje się bowiem w sposób prosty przy pomocy metody, wskazanej już w rozdziale poprzednim (zagadnienie 9 na str. 264).

Ćwiczenia.

1. Przekształcić przez promienie odwrotne parabolę, biorąc wierzchołek jako biegun.

2. Znaleść spodkową koła, biorąc jako biegun jeden punkt tego koła.

3. Znaleść spodkową hyperboli, biorąc jej środek jako biegun.

4. Dany jest zbiór stycznych do hyperboli $xy = 1$. Znaleść miejsce geometryczne biegunów tych stycznych względem elipsy $2x^2 + y^2 = 1$.

ROZDZIAŁ XIX.

KRZYWE CYKLICZNE.

80. Określenie.

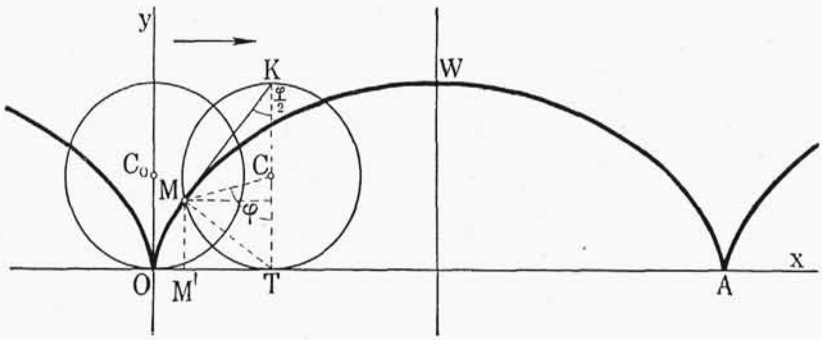
Krzywą cykliczną nazwiemy linję, którą opisuje dowolny punkt płaszczyzny koła, toczącego się *„bez ślizgania"* po prostej lub po kole stałem. Mówimy, iż toczenie odbywa się „bez ślizgania", jeśli prędkość punktu koła toczącego się, dotykającego *w danej chwili* prostej lub koła stałego, równa się zeru. Matematycznie oznacza to, iż *długości łuków koła stałego i toczącego się, zawarte między odpowiadającemi sobie kolejnemi punktami zetknięcia się, są sobie równe.*

81. Cykloida.

Cykloida jest to linja, którą opisuje dowolny punkt okręgu koła, toczącego się bez ślizgania po prostej, którą nazwiemy *podstawą*.

Oznaczmy przez r promień koła toczącego się i obierzmy podstawę daną, jako oś Ox. Przypuśćmy, iż w chwili początkowej rozważany stały punkt koła toczącego się leży w początku układu. Gdy koło obróci się o kąt φ, punkt rozważany zajmie położenie M, zaś punktem zetknięcia koła z prostą będzie punkt T (rys. 132); ponieważ toczenie odbywa się bez ślizgania, winno więc być

$$O\,T = \text{łuk}\, M\,T = r\,\varphi \tag{1}$$



Rys. 132.

Dla badania krzywej, najwygodniej jest wyrazić współrzędne (x, y) punktu cykloidy M, jako funkcje parametru φ. Otóż mamy (rys. 132)

$$x = \overline{OM'} = \overline{OT} - \overline{M'T} = r\,\varphi - r\sin\varphi;$$
$$y = \overline{M'M} = r - r\cos\varphi$$

równania parametryczne cykloidy będą więc następujące:

$$\begin{aligned} x &= r\,(\varphi - \sin\varphi) \\ y &= r\,(1 - \cos\varphi) \end{aligned} \tag{2}$$

Gdy koło wykona pół obrotu ($\varphi = \pi$), wtedy punkt M opisze gałąź $O\,W$ i znajdzie się w najwyższym punkcie W o współrzędnych $(\pi\,r, 2\,r)$; następne pół obrotu daje gałęź WA, symetryczną względem pierwszej. Obroty następne dają identyczne gałęzie cykloidy.

Wyznaczmy współczynnik kątowy stycznej do cykloidy w punkcie M. Oznaczmy więc przez Δx i Δy przyrosty współrzędnych, odpowiadające przyrostowi $\Delta\varphi$ kąta φ. Współczynnik kątowy siecznej, przechodzącej przez punkty, odpowiadające wartościom φ i $\varphi + \Delta\varphi$, będzie można napisać w ten sposób:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\left(\frac{\Delta y}{\Delta \varphi}\right)}{\left(\frac{\Delta x}{\Delta \varphi}\right)}$$

granica tej wartości, t. j. współczynnik kątowy stycznej będzie więc

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\left(\frac{dy}{d\varphi}\right)}{\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)} \tag{3}$$

jeśli $\frac{dx}{d\varphi} \neq 0$, a zatem, według związków (2), współczynnik kątowy stycznej do cykloidy w punkcie M będzie miał wartość

$$\frac{dy}{dx} = \frac{r \sin\varphi}{r(1-\cos\varphi)} = \operatorname{cotg}\frac{\varphi}{2} \tag{4}$$

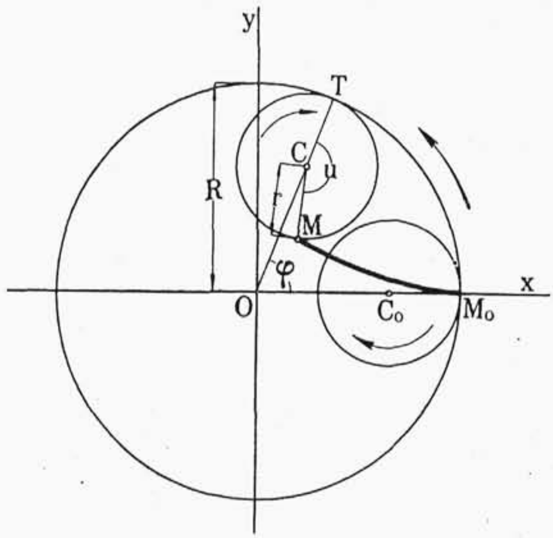
styczna tworzy więc kąt $\frac{\varphi}{2}$ z osią Oy, a zatem przechodzi przez punkt średnicowo przeciwny K względem punktu styczności T, gdyż kąt MKC równa się $\frac{\varphi}{2}$. *Normalna do cykloidy w punkcie M, przechodzi więc zawsze przez punkt styczności T koła toczącego się z podstawą Ox.*

82. Hypocykloida i epicykloida.

Hypocykloidę opisuje punkt okręgu koła, toczącego się bez ślizgania *wewnątrz*[1]) stałego koła, zaś *epicykloidę* — *zewnątrz* stałego koła. Krzywe te, oczywiście, składają się z szeregu równych łuków, mających punkty zwrotu na kole stałym, łuki te tworzą krzywą zamkniętą, jeśli stosunek promieni kół danych (lub ich długości) jest wymierny, w przeciwnym wypadku krzywa nie zamyka się.

*) Ściślej mówiąc, jeżeli środek koła stałego i środek koła toczącego się, znajdują się po jednej stronie punktu styczności.

Niech więc będzie koło stałe o promieniu R i koło o promieniu r, toczące się wewnątrz niego. Obierzmy początek układu w środku koła stałego i przypuśćmy, że w położeniu początkowem punkt M_0 znajduje się na osi Ox i w punkcie styczności kół (rys. 133).



Rys. 133.

Gdy koło obróci się o kąt u w kierunku wskazanym na rysunku, wtedy punkt M opisze łuk $M_0 M$, zaś punktem styczności będzie punkt T taki, iż łuki $M_0 T$ i MT danych kół są sobie równe, stąd mamy

$$(5) \qquad R\varphi = ru; \qquad u = \frac{R}{r}\varphi$$

gdzie φ oznacza kąt środkowy stałego koła, odpowiadający łukowi $M_0 T$. Oznaczmy przez (x, y) współrzędne punktu M, zaś przez C środek koła toczącego się, wtedy, według twierdzenia o rzutach, mamy

$$x = \underset{(\text{na } Ox)}{\text{rzut } \overline{OC} + \text{rzut } \overline{CM}}$$

$$y = \underset{(\text{na } Oy)}{\text{rzut } \overline{OC} + \text{rzut } \overline{CM}}$$

Jeśli, jak wskazano na rys. 133, wektor $\overline{OC}$ obraca się zgodnie z dodatnim kierunkiem obrotu (x, y), to wektor $\overline{CM}$ obraca się w kierunku przeciwnym, a zatem, gdy wektor OC tworzy z osią Ox kąt φ, to wektor CM tworzy kąt $\varphi - u$, wobec tego będziemy mieli

$$x = |OC| \operatorname{Cos} \varphi + |CM| \operatorname{Cos} (\varphi - u)$$

$$y = |OC| \operatorname{Sin} \varphi + |CM| \operatorname{Sin} (\varphi - u)$$

więc, według związku (5),

$$(6) \qquad \begin{aligned} x &= (R - r) \operatorname{Cos} \varphi + r \operatorname{Cos} \left(\frac{R}{r} - 1\right) \varphi \\ y &= (R - r) \operatorname{Sin} \varphi - r \operatorname{Sin} \left(\frac{R}{r} - 1\right) \varphi \end{aligned}$$

Jest to przedstawienie hypocykloidy w *postaci parametrycznej*. Wystarczy w tych wzorach podstawić $-r$ na miejsce r, by otrzymać wzory dla *epicykloidy*.

Rozważmy wypadek szczególny, gdy promień koła toczącego się r, jest cztery razy mniejszy od promienia koła stałego R. Wstawiając we wzory (6) wartość $\frac{R}{r} = 4$, otrzymamy

$$x = \frac{R}{4} (3 \operatorname{Cos} \varphi + \operatorname{Cos} 3\varphi);$$

$$y = \frac{R}{4} (3 \operatorname{Sin} \varphi - \operatorname{Sin} 3\varphi);$$

według wzorów na $\operatorname{Cos} 3\varphi$ i $\operatorname{Sin} 3\varphi$, wypadnie stąd

$$x = R \operatorname{Cos}^3 \varphi; \qquad y = R \operatorname{Sin}^3 \varphi$$

rugując teraz kąt φ, otrzymamy równanie

$$(7) \qquad x^{2/3} + y^{2/3} = R^{2/3}$$

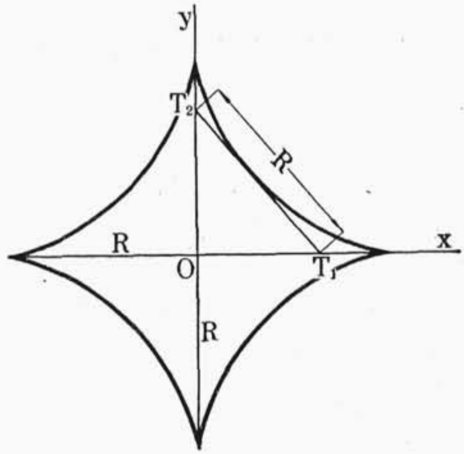
Krzywa składa się z czterech łuków, stycznych do osi współrzędnych (rys. 134) i nazywa się *asteroidą*.

Otrzymana krzywa posiada tę osobliwą własność, iż *długość odcinka stycznej, zawartego między osiami współrzędnych, jest stała* w każdym punkcie i równa R. Aby tego dowieść, wyznaczmy wpierw współczynnik kątowy stycznej $\frac{dy}{dx}$ z równania (7); różniczkując obie strony równania (7), mamy

$$\frac{2}{3} x^{-1/3} + \frac{2}{3} y^{-1/3} \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

stąd

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y^{1/3}}{x^{1/3}}$$



Rys. 134.

równanie stycznej będzie:

$$Y - y = -\frac{y^{1/3}}{x^{1/3}}(X - x),$$

stąd

$$Yx^{1/3} + Xy^{1/3} = x^{1/3}y^{1/3}R^{2/3},$$

a zatem współrzędne punktów przecięcia tej stycznej z osiami T_1 i T_2 będą takie:

$$\text{dla } X = 0; \quad Y = \overline{OT_1} = y^{1/3}\ R^{2/3};$$

$$\text{dla } Y = 0; \quad X = \overline{OT_2} = x^{1/3}\ R^{2/3};$$

długość odcinka $T_1 T_2$ stycznej wynosi więc:

$$T_1 T_2 = \sqrt{OT_1^2 + OT_2^2} = \sqrt{R^{4/3}(x^{2/3} + y^{2/3})} = R.$$

c. b. d. d.