3. Znaleść warunek równoległości i zgodności osi symetrji dwóch krzywych stożkowych, mających wogóle odmienne kierunki asymptotyczne.

4. Dowieść, iż suma kwadratów dwóch średnic sprzężonych elipsy jest wielkością stałą.

5. Dowieść, iż asymptoty hyperboli równoosiowej są dwusiecznemi kąta, utworzonego przez dwie dowolne średnice sprzężone.

ROZDZIAŁ XIV.

OGÓLNA POSTAĆ RÓWNANIA STYCZNEJ DO KRZYWEJ DRUGIEGO STOPNIA. BIEGUN I BIEGUNOWA.

66. Styczna do krzywej drugiego stopnia.

Aby otrzymać współczynnik kątowy stycznej w punkcie (x, y) do krzywej drugiego stopnia, określonej przez równanie w postaci ogólnej

$$f(x, y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

różniczkujemy obie strony danego równania, traktując y, jako funkcję zmiennej x, wypada

$$2Ax + By + D + \frac{dy}{dx}(Bx + 2Cy + E) = 0$$

stąd otrzymamy żądany współczynnik kątowy stycznej

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2Ax + By + D}{Bx + 2Cy + E} = -\frac{f_x'(x, y)}{f_y'(x, y)}$$

jeśli $Bx + 2Cy + E \neq 0$ i równanie stycznej w punkcie (x, y):

$$Y - y = -\frac{2Ax + By + D}{Bx + 2Cy + E}(X - x) \tag{1}$$

lub ogólniej

$$(X - x)(2Ax + By + D) + (Y - y)(Bx + 2Cy + E) = 0 \tag{1'}$$

X, Y oznaczają współrzędne dowolnego punktu stycznej. Równanie (1') przedstawia styczną do krzywej drugiego stopnia w punkcie (x, y), z wyjątkiem jednego wypadku, gdy punkt (x, y) jest środkiem krzywej, na niej leżącym, wtedy bowiem znikają jednocześnie wartości $f_x'(x, y)$ i $f_y'(x, y)$.

Ze związku (1′) otrzymamy równanie

$$2AXx + B(Xy + Yx) + 2CYy + DX + EY + \\ - (2Ax^2 + 2Bxy + 2Cy^2 + Dx + Ey) = 0$$

stąd zaś, korzystając z równania krzywej $f(x, y) = 0$, otrzymamy równanie stycznej do krzywej drugiego stopnia w punkcie (x, y) w postaci następującej:

$$(2) \quad AXx + \frac{1}{2}B(Xy + Yx) + CYy + \frac{1}{2}D(X + x) + \frac{1}{2}E(Y + y) + F = 0$$

łatwej do zapamiętania, przez porównanie z równaniem danej krzywej.

ZAGADNIENIE 1. *Z punktu danego (x_0, y_0) wyprowadzić styczną do krzywej drugiego stopnia $f(x, y) = 0$.*

Aby wyznaczyć współrzędne (x, y) żądanego punktu styczności, zauważmy, iż leży on na danej krzywej, a więc spełnia związek $f(x, y) = 0$. W celu otrzymania drugiego związku, napiszmy, iż styczna (2) przechodzić winna przez punkt dany (x_0, y_0), więc

$$(3) \quad Ax_0x + \frac{1}{2}B(x_0y + y_0x) + Cy_0y + \frac{1}{2}D(x_0 + x) + \\ + \frac{1}{2}E(y_0 + y) + F = 0$$

Szukany punkt (x, y) spełnia zatem związek $f(x, y) = 0$ i związek (3); ponieważ jednak związek (3) jest pierwszego stopnia względem symbolów x i y, a zatem, traktując x i y jako symbole zmiennych, powiemy, iż szukany punkt styczności jest przecięciem prostej, określonej przez równanie (3), z krzywą daną. Do krzywej drugiego stopnia można więc wyprowadzić z danego punktu conajwyżej dwie styczne.

Ustalając więc w równaniu stycznej (2) współrzędne (X, Y), zaś traktując symbole x i y jako zmienne, otrzymujemy równanie (3) cięciwy, łączącej punkty styczności prostych stycznych, wyprowadzonych z punktu (x_0, y_0) do krzywej $f(x, y) = 0$. Dyskusję szczegółową równania prostej (3) podamy w artykule następnym.

ZAGADNIENIE 2. *Wyznaczyć równanie stycznej do krzywej*

$$(4) \quad f(x, y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dy + Ey + F = 0$$

która byłaby równoległa do prostej danej $y = mx$.

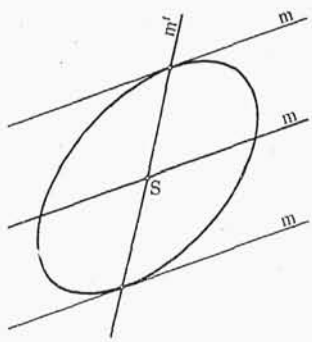
Przyrównując współczynnik kątowy stycznej

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f_x'(x, y)}{f_y'(x, y)}$$

w punkcie (x, y) do wartości m, otrzymamy równanie

$$f_x'(x, y) + m f_y'(x, y) = 0 \tag{5}$$

Niewiadome współrzędne punktu styczności (x, y) określone są więc przez dwa równania (4) i (5); traktując w tych związkach x i y, jako symbole wielkości zmiennych, możemy powiedzieć, iż szukane punkty styczności leżą na przecięciu prostej (5) z krzywą (4). Prosta (5) jest oczywiście średnicą sprzężoną z kierunkiem m, a więc *styczna w punkcie przecięcia dowolnej średnicy z krzywą drugiego stopnia jest równoległa do średnicy z nią sprzężonej* (rys. 112). Własność ta oczywista jest z uwagi na geometryczną definicję średnic sprzężonych.



Rys. 112.

67. Określenie biegunowej.

Niech będzie krzywa drugiego stopnia:

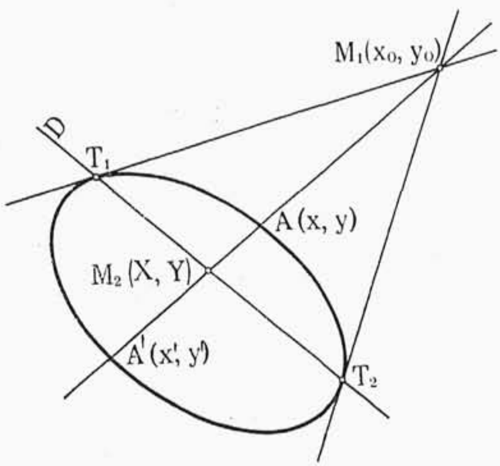
$$f(x, y) = A x^2 + B x y + C y^2 + D x + E y + F = 0 \tag{6}$$

i dowolne dwa punkty $M_1(x_0, y_0)$ i $M_2(X, Y)$ (rys. 113). Poprowadźmy przez punkty M_1 i M_2 prostą i załóżmy, iż przetnie ona krzywą daną w dwóch punktach A i A' o współrzędnych (x, y) i (x', y'). Znajdźmy warunek, który powinny spełniać dwa dane punkty M_1 i M_2, aby punkty przecięcia A i A' rozdzielały *harmonicznie* punkty M_1 i M_2. Jeśli oznaczymy przez λ stosunek, w jakim punkt A dzieli odcinek $M_1 M_2$, to będziemy mieli, z twierdzenia o rzucie wektora,

$$\frac{\overline{M_1 A}}{\overline{M_2 A}} = \lambda = \frac{x - x_0}{x - X} = \frac{y - y_0}{y - Y}$$

stąd

$$x = \frac{\lambda X - x_0}{\lambda - 1}; \qquad y = \frac{\lambda Y - y_0}{\lambda - 1}; \qquad (\lambda \neq 1) \tag{7}$$



Rys. 113.

Jeżeli para AA' dzieli harmonicznie parę $M_1 M_2$, wtedy $|\lambda| \neq 1$ i, wstawiając we wzorach (7) na λ wartość $-\lambda$, winniśmy otrzymać współrzędne drugiego punktu przecięcia A'. Punkty (x_0, y_0) i (X, Y) będą więc harmonicznie sprzężone z punktami przecięcia A i A', jeśli wyrażenia (7) spełniają równanie krzywej (1) dla wartości $+\lambda$ i $-\lambda$. Otóż wstawmy te wyrażenia w równanie (6), sprowadźmy rezultat do wspólnego mianownika i uporządkujmy według potęg λ, otrzymamy wtedy równanie

$$\begin{aligned} \lambda^2 f(X, Y) - 2\lambda \Big[& A X x_0 + \tfrac{1}{2} B (X y_0 + Y x_0) + C Y y_0 + \\ & + \tfrac{1}{2} D (X + x_0) + \tfrac{1}{2} E (Y + y_0) + F \Big] + f(x_0, y_0) = 0 \end{aligned} \tag{8}$$

Aby równanie to było spełnione, zarówno dla $+\lambda$, jak i dla $-\lambda$, trzeba i wystarcza, żeby zniknął współczynnik przy λ w pierwszej potędze:

$$\begin{aligned} & A X x_0 + \tfrac{1}{2} B (X y_0 + x_0 Y) + C Y y_0 + \tfrac{1}{2} D (X + x_0) + \\ & \qquad + \tfrac{1}{2} E (Y + y_0) + F = 0 \end{aligned} \tag{9}$$

Jest to właśnie szukany warunek, aby punkty (x_0, y_0) i (X, Y) były harmonicznie sprzężone z punktami przecięcia z krzywą $f(x, y) = 0$ siecznej, przechodzącej przez dane dwa punkty. Jeśli ustalimy punkt (x_0, y_0), zaś na (X, Y) będziemy nadawali wszelkie możliwe wartości, spełniające równania (6), to otrzymamy zbiór punktów, tworzących *linję prostą,* albowiem związek (6) jest *pierwszego* stopnia względem symbolów X i Y. Prosta taka (D) (rys. 113) nazywa się *biegunową* punktu stałego (x_0, y_0) względem stożkowej danej $f(x, y) = 0$, zaś punkt (x_0, y_0) nazywa się *biegunem* tej prostej.

Biegunową punktu (x_0, y_0) względem stożkowej danej nazywamy więc miejsce geometryczne punktów, harmonicznie dzielących z punktem (x_0, y_0) parę punktów przecięcia ze stożkową daną siecznych, wyprowadzonych z punktu (x_0, y_0).

Grupując wyrazy w równaniu (9) według współrzędnych bieżących, możemy równanie biegunowej napisać w postaci

$$(2Ax_0 + By_0 + D)X + (Bx_0 + 2Cy_0 + E)Y + (Dx_0 + Ey_0 + 2F) = 0$$

t. j. krótko

$$9') \qquad f'_x(x_0, y_0)\, X + f'_y(x_0, y_0)\, Y + (Dx_0 + Ey_0 + 2F) = 0$$

Położenie biegunowej jest więc jednoznacznie określone przez położenie bieguna (x_0, y_0), jeśli wartości

$$f'_x(x_0, y_0); \quad f'_y(x_0, y_0)$$

nie znikają jednocześnie, to znaczy, jeśli biegun (x_0, y_0) *nie leży w środku krzywej.*

Wykażemy, że, *gdy krzywa nie jest zwyrodniała,* to odwrotnie, dowolnej prostej danej o równaniu

$$(10) \qquad uX + vY + w = 0$$

nieprzechodzącej przez środek krzywej, odpowiada określony biegun (x_0, y_0), względem którego ona jest biegunową. Istotnie, aby prosta (10) była biegunową jakiegoś punktu (x_0, y_0) trzeba i wystarcza, żeby współczynniki dane u, v, w były proporcjonalne do współczynników w równaniu biegunowej (9'):

$$(11) \quad \frac{2Ax_0 + By_0 + D}{u} = \frac{Bx_0 + 2Cy_0 + E}{v} = \frac{Dx_0 + Ey_0 + 2F}{w} = k$$

gdzie k winno być *nierówne zeru*; z układu równań (11) wogóle otrzymamy określone rozwiązanie (x_0, y_0) i wartość k odmienną od zera, jeśli

$$(12) \qquad \begin{vmatrix} 2A, & B, & u \\ B, & 2C, & v \\ D, & E, & w \end{vmatrix} \neq 0;$$

warunek ten oznacza geometrycznie, iż prosta o równaniu $uX + vY + w = 0$ nie przechodzi przez środek danej krzywej t. j. przez punkt, spełniający związki $f'_x(x, y) = 0$; $f'_y(x, y) = 0$.

W przypadku, gdy krzywa jest parabolą i nie ma środka, warunek (12) wyraża, iż taka prosta $uX + vY + w = 0$ winna być *nierównoległa do osi paraboli*.

Porównywując równanie biegunowej (9) z równaniem stycznej (2) do krzywej $f(x, y) = 0$ w punkcie (x, y), widzimy natychmiast, że, *gdy biegun (x_0, y_0) dąży do dowolnego punktu (x, y) danej stożkowej, to jego biegunowa dąży do stycznej w tym punkcie.*

Następnie, z uwagi na zagadnienie w poprzednim artykule, powiemy, że *biegunowa punktu (x_0, y_0) przechodzi przez punkty styczności prostych stycznych, wyprowadzonych z punktu (x_0, y_0) do danej stożkowej* (rys. 113).

Własność ta wynika również wprost z definicji geometrycznej biegunowej.

TWIERDZENIE. Jeśli punkt (X_0, Y_0), znajduje się na biegunowej punktu (x_0, y_0), to odwrotnie, biegunowa punktu (X_0, Y_0) przechodzi przez punkt (x_0, y_0).

Własność ta wynika natychmiast z symetrji równania (9) biegunowej względem symbolów (X, Y) i (x_0, y_0); istotnie, jeśli punkt (X_0, Y_0) znajduje się na biegunowej punktu (x_0, y_0), to zachodzi związek

$$A X_0 x_0 + \frac{1}{2} B (X_0 y_0 + Y_0 x_0) + C Y_0 y_0 + \frac{1}{2} D (X_0 + x_0) +$$

$$+ \frac{1}{2} E (Y_0 + y_0) + F = 0$$

ale związek ten pozostanie słuszny, jeśli przestawimy symbole (x_0, y_0) z symbolami (X_0, Y_0), oznacza to geometrycznie właśnie, że również biegunowa punktu (X_0, Y_0) przechodzi przez punkt (x_0, y_0) c. b. d. d.

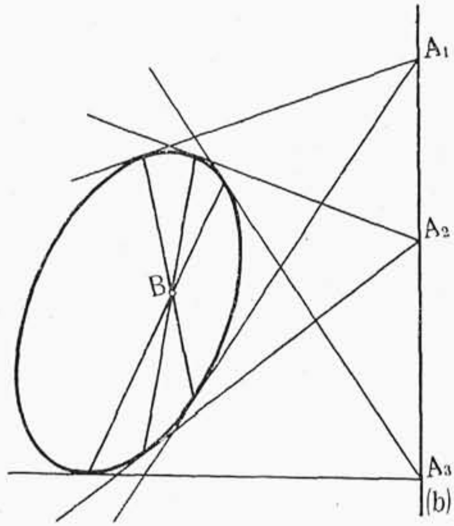
Stąd wynika natychmiast, że gdy punkty A_1, A_2, A_3 . . . leżą na tej samej prostej (b), nieprzechodzącej przez środek krzywej, to ich biegunowe przechodzą przez jeden i ten sam punkt B, który jest biegunem prostej (b) (rys. 114).

Dla przykładu weźmy elipsę, odniesioną do osi symetrji,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Według związku (9), równanie biegunowej dowolnego punktu (x_0, y_0) będzie miało teraz postać prostą

$$\frac{X x_0}{a^2} + \frac{Y y_0}{b^2} = 1 \tag{13}$$



Rys. 114.

Jeśli punkt (x_0, y_0), leży zewnątrz elipsy, to jego biegunowa przecina elipsę, jeśli zaś punkt ten leży wewnątrz elipsy, to biegunowa jego leży wtedy zewnątrz elipsy.

Jeśli punkt (x_0, y_0) leży na elipsie, to związek (13) przedstawia równanie stycznej do elipsy.

Z równania (13) mamy

$$\frac{X}{a^2} + \frac{Y}{b^2}\frac{y_0}{x_0} = \frac{1}{x_0}$$

stąd widzimy, że gdy biegun (x_0, y_0) oddala się nieskończenie po prostej o współczynniku kątowym m, to $\frac{y_0}{x_0}$ dąży do m i biegunowa jego dąży do prostej o równaniu

$$\frac{X}{a^2} + m\frac{Y}{b^2} = 0 \text{ lub } Y = -\frac{b^2}{a^2 m} X$$

to jest do średnicy sprzężonej ze średnicą $Y = mX$.

Własność ta jest ogólna i wynika wprost z uwagi, że gdy biegun (x_0, y_0) oddala się nieskończenie po prostej o współczynniku kątowym m, to pęk prostych, przez ten biegun przechodzących, dąży do układu prostych równoległych o współczynniku kątowym m, zaś punkty biegunowej, jako harmonicznie sprzężone z biegunem, dążą do środków odcinków tych równoległych, zawartych między punktami przecięcia ze stożkową daną. *Biegunowa dąży więc do średnicy sprzężonej z kierunkiem* (m), *gdy jej biegun oddala się nieskończenie po prostej o współczynniku* m (to znaczy, gdy $\frac{y_0}{x_0}$ dąży do m).

Dzieląc zatem równanie biegunowej przez x_0:

$$A X + \frac{1}{2} B \left(X \frac{y_0}{x_0} + Y \right) + C Y \frac{y_0}{x_0} + \frac{1}{2} D \left(\frac{X}{x_0} + 1 \right) +$$
$$+ \frac{1}{2} E \left(\frac{Y}{x_0} + \frac{y_0}{x_0} \right) + \frac{F}{x_0} = 0$$

i zakładając, że $x_0 \rightarrow \infty$ i $\frac{y_0}{x_0} \rightarrow m$, otrzymamy równanie średnicy, sprzężonej z kierunkiem (m), krzywej drugiego stopnia $f(x\,y) = 0$ w postaci ogólnej

$$2 A X + B Y + D + m (B X + 2 C Y + E) = 0$$

to znaczy krótko

$$f'_x(X, Y) + m f'_y(X, Y) = 0$$

TWIERDZENIE. Kierownica krzywej drugiego stopnia jest biegunową odpowiedniego ogniska. Wiemy, na podstawie definicji ogniska i kierownicy, podanej w rozdziale IX, że, jeśli ognisko F ma współrzędne (x_0, y_0), zaś równaniem kierownicy jest związek

(14) $$\alpha x + \beta y + \gamma = 0,$$

to równanie krzywej drugiego stopnia ma postać

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \varepsilon^2 \left(\frac{\alpha x + \beta y + \gamma}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \right)^2$$

gdzie ε jest mimośrodem; napiszemy to równanie krócej w ten sposób:

(15) $$f(x, y) = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + \lambda (\alpha x + \beta y + \gamma)^2 = 0$$

Znajdźmy teraz równanie biegunowej ogniska (x_0, y_0), opierając się na postaci równania biegunowej (9'); otóż, porównywując równanie dane (15) z równaniem krzywej w postaci (6), mamy

$$(16)\quad \begin{cases} f'_x(x, y) = 2(x - x_0) + 2\lambda\alpha(\alpha x + \beta y + \gamma) \\ f'_y(x, y) = 2(y - y_0) + 2\lambda\beta(\alpha x + \beta y + \gamma) \\ D = -2x_0 + 2\lambda\alpha\gamma \\ E = -2y_0 + 2\lambda\beta\gamma \\ F = x_0^2 + y_0^2 + \lambda\gamma^2 \end{cases}$$

Podstawiając w tych wzorach x_0, y_0 na miejsce x i y, otrzymamy, według postaci (9'), równanie biegunowej ogniska (x_0, y_0) takie:

$$2\lambda\alpha(\alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma)\mathrm{X} + 2\lambda\beta(\alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma)Y +$$
$$+ 2\lambda\gamma(\alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma) = 0$$

lecz, jeśli krzywa nie jest zwyrodniała, to ognisko leży poza kierownicą, więc

$$\alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma \neq 0$$

i równanie biegunowej ogniska (x_0, y_0) otrzymamy ostatecznie w postaci

$$\alpha X + \beta Y + \gamma = 0$$

jest to zatem, według związku (14), kierownica krzywej c. b. d. d.

Ćwiczenia.

1. Jaka jest interpretacja geometryczna związków

$$f'_x(x, y) = 0 \quad \text{i} \quad f'_y(x, y) = 0,$$

określających środek krzywej o równaniu $f(x, y) = 0$.

2. Wyprowadzić z punktu $(-1, -3)$ styczne do paraboli

$$y = x^2 + x + 1;$$

3. Napisać związek, który winny spełniać współczynniki u, v, w równania prostej

$$ux + vy + w = 0,$$

aby ona była styczna do stożkowej danej $f(x, y) = 0$ (wielkości u, v, w nazywają się współrzędnemi stycznościowemi danego punktu styczności, zaś związek między niemi—równaniem krzywej we współrzędnych stycznościowych; związek ten dla stożkowych będzie też 2-go stopnia).

4. Dowieść, że gdy prosta oddala się nieskończenie od środka krzywej, to jej biegun dąży do środka krzywej.

5. Przez dowolny punkt M prowadzimy dwie sieczne. Dowieść, iż proste, łączące punkty przecięcia tych siecznych ze stożkową, przecinają się na biegunowej punktu M.

6. Dowieść, iż biegunowa punktu, leżącego na kierownicy, jest prostopadła do prostej, łączącej ten punkt z ogniskiem.

7. Wyznaczyć współrzędne punktu, który jest biegunem normalnej do elipsy

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

w punkcie (x, y).

8. Wyznaczyć biegun prostej $2x + y = 1$ względem hyperboli $xy = 1$.

9. Jeśli biegun porusza się po średnicy krzywej, to jego biegunowa przesuwa się równolegle.

ROZDZIAŁ XV.

O PRZECIĘCIU SIĘ KRZYWYCH DRUGIEGO STOPNIA.

68. Rozważania ogólne.

Poszukiwaniu punktów przecięcia dwóch krzywych drugiego stopnia, mających równania

$$(1) \quad \begin{aligned} f_1(x, y) &= A_1 x^2 + B_1 x y + C_1 y^2 + D_1 x + E_1 y + F_1 = 0 \\ f_2(x, y) &= A_2 x^2 + B_2 x y + C_2 y^2 + D_2 x + E_2 y + F_2 = 0 \end{aligned}$$

odpowiada zagadnienie algebraiczne rozwiązania układu dwóch równań (1) drugiego stopnia z dwiema niewiadomemi.

Rozważmy następującą kombinację linjową równań (1):

$$(2) \quad f_1(x, y) + \lambda f_2(x, y) = 0$$

to znaczy równanie w postaci

$$\begin{aligned} &(A_1 + \lambda A_2) x^2 + (B_1 + \lambda B_2) x y + (C_1 + \lambda C_2) y^2 + \\ &+ (D_1 + \lambda D_2) x + (E_1 + \lambda E_2) y + (F_1 + \lambda F_2) = 0 \end{aligned}$$

gdzie λ jest dowolnym stałym parametrem.