Ćwiczenia.

1. Naszkicować metodami elementarnemi krzywe, odpowiadające funkcjom:

$$y = x^3;\quad y = x^2 - 1;\quad y = \frac{1}{x^2+1};\quad y^2 = x.$$

2. Znaleźć równanie we współrzędnych biegunowych krzywej $y = x^2$, obierając punkt $(0,0)$ jako biegun, zaś oś Ox za oś biegunową.

3. Dane jest równanie koła $x^2 + y^2 = a^2$. Znaleść równanie tego koła we współrzędnych biegunowych, obierając punkt $\left(\frac{a}{2}, 0\right)$ jako biegun, zaś oś odciętych jako oś biegunową.

4. Dane są związki

$$x = \frac{t-1}{t+1};\qquad y = \frac{2t}{t+3};$$

znaleść równanie krzywej.

5. Określić stopień krzywych algebraicznych, określonych przez związki

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1;$$
$$x^{2/3} + y^{2/3} = 1.$$

ROZDZIAŁ III.

ZAGADNIENIA DOTYCZĄCE LINJI PROSTEJ.

18. Równanie linji prostej.

Położenie dowolnej prostej D na płaszczyźnie względem układu osi Oxy jest określone w zupełności, jeśli dany jest kąt α, który tworzy jeden z dwóch zwrotów prostej z osią Ox i jeśli dane są współrzędne (x_0, y_0) jednego punktu danej prostej M_0.

Jeden zawsze z dwóch zwrotów dowolnej prostej na płaszczyźnie tworzy z osią Ox kąt zawarty w przedziale od 0 do π, a drugi zwrot — kąt w przedziale od π do 2π. Nadal, dla uproszczenia, przez kąt α, który tworzy prosta z osią Ox, będziemy rozumieli *kąt zawarty w przedziale od* 0 *do* π.

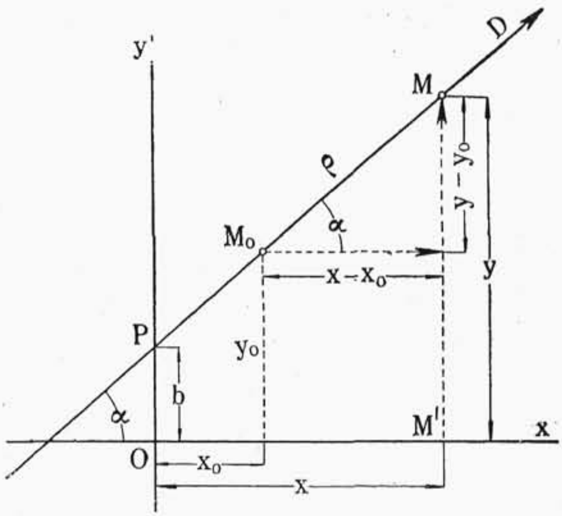
Aby otrzymać związek między rzędną y i odciętą x dowolnego punktu M danej prostej, zauważmy, iż miary rzutów na osi współrzędnych wektora M_0M, łączącego punkt stały $M_0(x_0, y_0)$ z punktem dowolnym prostej $M(x, y)$ wynoszą (rys. 44)

$$x - x_0 \quad \text{i} \quad y - y_0$$

stosunek tych miar dla dowolnego punktu M danej prostej D *i tylko dla punktów tej prostej ma daną wartość stałą*

$$\frac{y-y_0}{x-x_0}=\operatorname{tg}\alpha$$

jeśli *wykluczymy wypadek* $\alpha=\frac{\pi}{2}$.



Rys. 44.

A więc *równanie prostej, przechodzącej przez punkt* (x_0, y_0) *i tworzącej kąt* α *z osią* Ox, *będzie miało następującą zasadniczą postać*:

(1) $$y-y_0=m(x-x_0)$$

gdzie oznaczono

$$m=\operatorname{tg}\alpha,$$

z postaci (1) korzystać będziemy stale w następujących rozważaniach.

Z równania (1) wypadnie ostatecznie zależność między rzędną i odciętą punktów prostej D w postaci *funkcji linjowej*

(1') $$y=mx+b$$

oznaczono tu

$$b=y_0-m\,x_0$$

wyraz stały b przedstawia oczywiście miarę wektora OP, który dana prosta odcina na osi Oy, jeśli bowiem podstawimy w równanie (1') wartość $x=0$, to otrzymamy $y=b$.

Odwrotnie, dla dwóch dowolnie danych stałych m i b, związkowi

$$y=mx+b$$

lub

$$y-b=mx$$

odpowiada, według postaci (1), określona linja prosta, przechodząca przez punkt $(0, b)$ i tworząca z osią Ox kąt α taki, iż

$$tg\,\alpha=m$$

Wielkość stała $m=tg\,\alpha$ nazywa się **współczynnikiem kątowym** prostej; *charakteryzuje ona kierunek prostej na płaszczyźnie*, ta sama bowiem wartość na m odpowiada wszystkim prostym *równoległym* do danej i tylko takim.

Współczynnik kątowy jest dodatni, jeśli prosta tworzy kąt ostry z osią Ox, jest zaś ujemny, jeśli prosta tworzy kąt rozwarty.

W przypadku $m=1$, prosta tworzy kąt $\frac{\pi}{4}$ z osią Ox, wreszcie w przypadku $m=0$, jest równoległa do osi Ox i wszystkie jej punkty mają tę samą rzędną

$$y=y_0$$

Jeśli $b=0$, wtedy *prosta przechodzi przez początek układu* i równanie ma postać

$$y=mx;$$

w szczególności, równania

$$y=x;\ y=-x$$

odpowiadają *dwusiecznym* kątów zawartych między osiami współrzędnych.

Jeśli prosta, przechodząca przez punkt (x_0, y_0), jest prostopadła do osi Ox, to znaczy $\alpha=\frac{\pi}{2}$, wtedy m *nie istnieje*; każdy punkt prostej czyni wtedy zadość warunkowi

$$x=x_0$$

wszystkie bowiem punkty mają wtedy tę samą odciętą.

W szczególności, *punkty osi odciętych spełniają równanie*

$$y=0$$

zaś *punkty osi rzędnych, równanie*

$$x = 0.$$

Nadając współczynnikom m i b w równaniu (1') wszelkie możliwe wartości, otrzymamy układ wszelkich prostych na płaszczyźnie, z wyjątkiem prostych równoległych do osi Oy. Wielkości m i b w równaniu prostej, wyróżniające jedną prostą od innych na płaszczyźnie, będą więc parametrami układu prostych.

Weźmy teraz pod uwagę ogólny związek pierwszego stopnia z dwiema zmiennemi

$$Ax + By + C = 0 \tag{2}$$

Jeśli współczynniki współrzędnych A i B nie są równe zeru jednocześnie, to zbiór punktów płaszczyzny, których współrzędne prostokątne (x, y) spełniają równanie (2), *tworzy linię prostą.*

Istotnie, z równania (2), w założeniu, iż $B \neq 0$, otrzymujemy

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$$

a wiadomo, iż zbiór punktów, odpowiadających tej funkcji, tworzy linię prostą o współczynniku kątowym

$$m = -\frac{A}{B}$$

która przecina oś rzędnych w punkcie, mającym rzędną

$$b = -\frac{C}{B}$$

Jeśli $B = 0$, wtedy równanie (2) daje określoną i jedyną wartość odciętej

$$x = -\frac{C}{A}$$

odpowiada więc wszystkim punktom *prostej równoległej do osi Oy.*

W przypadku, gdy $A = 0$, równanie (2) daje jedyną wartość rzędnej

$$y = -\frac{C}{B}$$

odpowiada więc punktom *prostej równoległej do osi Ox.*

Jeśli w równaniu prostej znika wyraz stały C, to znaczy równanie ma postać

$$Ax + By = 0$$

wtedy *prosta przechodzi przez początek układu.*

Gdyby w równaniu (2) współczynniki A i B znikały jednocześnie, zaś C było odmienne od zera:

$$A = 0;\ B = 0;\ C \neq 0$$

to związku takiego nie spełniałby żaden punkt płaszczyzny; gdyby zaś wszystkie współczynniki znikały

$$A = 0;\ B = 0;\ C = 0$$

to związek spełniony byłby, jako tożsamość, w każdym punkcie płaszczyzny.

Równanie pierwszego stopnia

$$(2) \qquad Ax + By + C = 0$$

w którym współczynniki A i B nie znikają jednocześnie, jest więc odpowiednikiem analitycznym pojęcia prostej na płaszczyźnie; w zagadnieniach geometrji analitycznej zdanie *„dana jest linja prosta"* oznaczać będzie zatem, iż dane jest równanie o postaci (2).

Wielkości zmienne x i y, występujące w równaniu prostej, nazywamy też *współrzędnemi bieżącemi.*

Przypominamy, iż, według poprzedniego rozważania, współczynnik kątowy prostej, określonej przez równanie w postaci ogólnej (2), równy jest współczynnikowi współrzędnej x, który otrzymamy, wyznaczając z danego równania rzędną y w zależności od odciętej x.

Z równania np.

$$5x + 7y + 3 = 0$$

otrzymujemy

$$y = -\frac{5}{7}x - \frac{3}{7}$$

współczynnik kątowy danej prostej ma więc wartość

$$m = -\frac{5}{7}$$

a zatem prosta tworzy kąt rozwarty z osią Ox.

Widzieliśmy już, iż położenie linji prostej, określonej przez równanie ogólne (2), zależy tylko od stosunków między współczynnikami np. $\frac{A}{B}$ i $\frac{C}{B}$, lub $\frac{B}{A}$ i $\frac{C}{A}$, *aby więc dwa równania pierwszego stopnia*

$$A\,x + B\,y + C = 0$$
$$A'\,x + B'\,y + C' = 0$$

przedstawiały jedną i tę samą prostą, trzeba i wystarcza, aby odpowiednie współczynniki w tych równaniach były do siebie proporcjonalne:

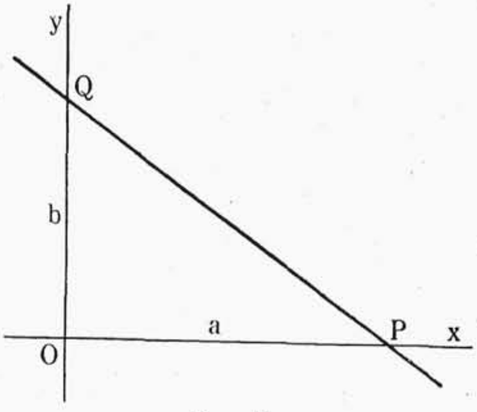
$$A' = k\,A$$
$$B' = k\,B$$
$$C' = k\,C$$

warunki te możemy też napisać w postaci symetrycznej

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}$$

umawiając się jednak, iż, w razie gdy jeden lub dwa mianowniki są równe zeru, liczniki odpowiednie są też równe zeru.

Z równania prostej nierównoległej do osi współrzędnych możemy zawsze znaleść określoną wartość jednej współrzędnej, jeśli dana jest z góry wartość drugiej. Znajdźmy więc, według tej uwagi, punkty przecięcia prostej z osiami współrzędnych.



Rys. 45.

nych. Punkt P przecięcia danej prostej z osią Ox, będzie to taki punkt na prostej, którego rzędna y równa się zeru; w celu znalezienia odpowiedniej odciętej OP, podstawmy więc w równanie (2) wartość $y=0$, wypadnie wtedy wartość odciętej

$$x = OP = -\frac{C}{A}$$

Podobnie, podstawiając $x=0$ w równanie (2), otrzymamy rzędną

$$y = OQ = -\frac{C}{B}$$

punktu przecięcia Q prostej z osią Oy. Oznaczmy przez a i b współrzędne OP i OQ:

$$a = -\frac{C}{A}\,;\; b = -\frac{C}{B},$$

wtedy równanie prostej (2) napiszemy w tej postaci:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \tag{3}$$

jest to t. zw. *postać odcinkowa* równania prostej, dogodna w niektórych zagadnieniach. Oczywiście powyższe rozumowanie wymaga założenia, iż $A \neq 0$, $B \neq 0$, $C \neq 0$.

19. Równania parametryczne prostej.

Niech będzie, jak poprzednio, prosta D, przechodząca przez punkt dany $M_0(x_0, y_0)$ i tworząca kąt dany α z osią Ox. Obie współrzędne x i y dowolnego punktu prostej M można wyrazić w prosty sposób w zależności od miary ρ wektora M_0M, łączącego punkt stały M_0 z punktem zmiennym M (rys. 44). Mamy mianowicie, według twierdzenia o rzucie wektora,

$$x - x_0 = \rho \cos \alpha$$
$$y - y_0 = \rho \sin \alpha$$

otrzymamy stąd wzory

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \rho \cos \alpha \\ y &= y_0 + \rho \sin \alpha \end{aligned} \tag{4}$$

przedstawiające współrzędne bieżące punktu prostej w zależności od zmiennego parametru ρ, to znaczy, według art. 15, *równania parametryczne prostej.*

Użycie równań parametrycznych jest często dogodniejsze od bezpośredniego wyrażenia rzędnej przez odciętą

$$y = m x + b$$

z tego powodu, iż obejmuje wszelkie położenia prostej, nie wykluczając przypadku $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

20. Kąt między dwiema prostemi.

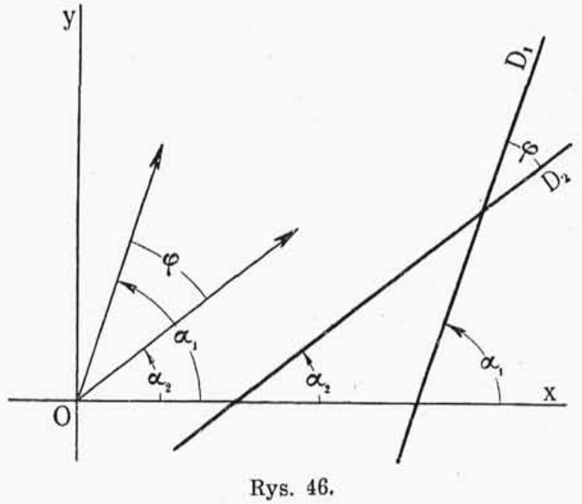
Dane są równania dwóch prostych w postaci

$$(5) \qquad \begin{aligned} y &= m_1 x + b_1 \\ y &= m_2 x + b_2 \end{aligned}$$

Proste dane tworzą z osią Ox kąty α_1 i α_2 takie, iż

$$(5') \qquad \begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha_1 &= m_1 \\ \operatorname{tg} \alpha_2 &= m_2 \end{aligned}$$

Możemy zawsze założyć, iż kąty α_1 i α_2 zawierają się w przedziale od 0 do π.



Rys. 46.

Poprowadźmy przez początek układu dwie osi równoległe do prostych danych i mające zwrot, odpowiadający kątom α_1 i α_2 z osią Ox (rys. 46); kąt φ zawarty między temi osiami będzie równy jednemu z dwóch kątów, zawartych między danemi prostemi. Mamy jednak

$$\varphi = \alpha_1 - \alpha_2$$

jeśli założymy, iż $\alpha_1 > \alpha_2$; możemy łatwo wyrazić tangens tego kąta φ w zależności od m_1 i m_2, mianowicie

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}(\alpha_1 - \alpha_2) = \frac{\operatorname{tg}\alpha_1 - \operatorname{tg}\alpha_2}{1 + \operatorname{tg}\alpha_1 \operatorname{tg}\alpha_2}$$

skąd, według (5'),

(6) $$\operatorname{tg}\varphi = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$$

Dwie proste tworzą ze sobą dwa kąty przyległe, których tangensy różnią się tylko znakiem. Jeśli więc przez φ będziemy oznaczali ten z dwóch kątów między prostemi, który jest mniejszy od π, to tangens jego będzie wogóle równy bezwzględnej wartości wyrażenia (6); napiszemy to w sposób następujący:

(6') $$\operatorname{tg}\varphi = \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \right|$$

Jeśli dwie proste są *równoległe*, wtedy $\varphi = 0$, $\operatorname{tg}\varphi = 0$, a zatem *współczynniki kątowe winny być sobie równe:*

(7) $$m_1 = m_2$$

Jeśli dwie proste są do siebie *prostopadłe*, wtedy $\varphi = \frac{\pi}{2}$, więc

$$\operatorname{Cotg}\varphi = \frac{1 + m_1 m_2}{m_1 - m_2} = 0$$

stąd wypada $1 + m_1 m_2 = 0$, lub też związki

(8) $$m_1 m_2 = -1\,; \quad m_1 = -\frac{1}{m_2}$$

Aby więc dwie proste były do siebie prostopadłe, trzeba i wystarcza, żeby iloczyn ich współczynników kątowych równał się jedności ze znakiem ujemnym.

Współczynniki kątowe dwóch prostych prostopadłych mają zatem przeciwne znaki.

Przykład 1. Proste określone przez równania

$$y = 7x\,; \quad y = 7x - 3\,; \quad y = 7x + 2\,;$$

są do siebie równoległe.

Przykład 2. Proste określone przez równania

$$y = 3x - 5\,; \quad y = -\frac{1}{3}x + 1\,;$$

są do siebie prostopadłe.

Przykład 3. Znaleźć kąt zawarty między prostemi:

$$2x + 3y = 5; \quad 7x - 4y = 1.$$

Wiemy, iż kąt między prostemi zależy tylko od współczynników kątowych tych prostych. Aby współczynniki te otrzymać, należy z każdego ze związków danych wyznaczyć y w zależności od x:

$$y = -\frac{2}{3}x + \frac{5}{3}; \quad y = \frac{7}{4}x - \frac{1}{4};$$

Współczynniki zmiennej x, które w ten sposób otrzymamy, będą właśnie współczynnikami kątowemi

$$m_1 = -\frac{2}{3}; \quad m_2 = \frac{7}{4},$$

a więc, na zasadzie wzoru (6'), będziemy mieli wartość

$$tg\,\varphi = \left| \frac{-\frac{2}{3} - \frac{7}{4}}{1 + \left(-\frac{2}{3}\right)\frac{7}{4}} \right| = \frac{29}{2}$$

określającą kąt φ.

20. Prosta, przechodząca przez punkty dane.

Zagadnienie, dotyczące wyznaczenia analitycznego prostej, spełniającej dane z góry warunki, sprowadza się do wyznaczenia wartości dwóch *parametrów* m i b, tkwiących w równaniu prostej. Z tego powodu warunków niezależnych w zagadnieniu nie powinno być więcej niż *dwa*.

ZAGADNIENIE 1. *Znaleść równanie prostej, która przechodzi przez dany punkt* $A(x_0, y_0)$ *i jest równoległa lub prostopadła do danej prostej o równaniu*

$$y = mx + k$$

Prosta równoległa do danej prostej ma ten sam współczynnik kątowy, zaś prosta do danej prostopadła ma współczynnik kątowy

$$-\frac{1}{m}$$

stąd, na zasadzie równania (1), widzimy, iż prosta, przechodząca przez dany punkt (x_0, y_0) i równoległa do danej prostej, ma równanie

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

zaś prostopadła, wyprowadzona z punktu (x_0, y_0) do danej prostej, ma równanie

$$y - y_0 = -\frac{1}{m}(x - x_0).$$

Przykład. *Wyznaczyć równanie prostej, która przechodzi przez punkt* $(1, -3)$ *i jest prostopadła do prostej* $y = 3x - 7$.

Według związku (1), równanie szukanej prostej winno mieć postać

$$y - (-3) = m(x - 1);$$

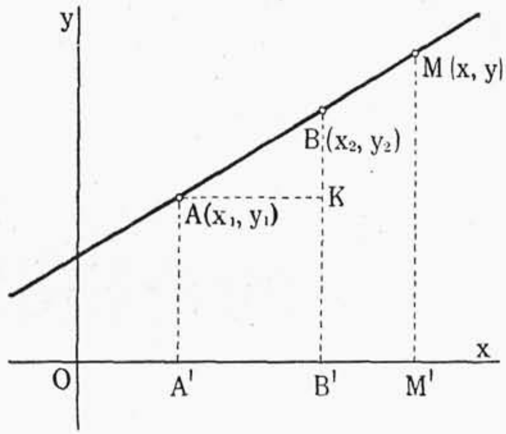
aby znaleść m zauważmy, iż prosta szukana ma być prostopadłą do prostej $y = 3x - 7$, więc m winno być równe odwrotności z przeciwnym znakiem współczynnika kątowego tej prostej t. j. $m = -\frac{1}{3}$, będzie więc

$$y + 3 = -\frac{1}{3}(x - 1);$$

a po uporządkowaniu

$$x + 3y + 10 = 0.$$

ZAGADNIENIE 2. Znaleść równanie prostej, przechodzącej przez dwa dane punkty $A(x_1, y_1)$ i $B(x_2, y_2)$.



Rys. 47.

Jeśli prosta przechodzi przez punkt $A(x_1, y_1)$, to, według związku (1), jej równanie winno mieć postać

$$y - y_1 = m(x - x_1) \tag{10}$$

wartość współczynnika m wyznaczymy z drugiego warunku, według którego równanie winno być spełnione w punkcie $B(x_2, y_2)$:

$$y_2 - y_1 = m(x_2 - x_1)$$

stąd

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Rezultat ten jest oczywisty geometrycznie, gdyż $x_2 - x_1$ i $y_2 - y_1$ są to miary rzutów wektora AB na osi współrzędnych, ich stosunek zatem przedstawia tangens kąta nachylenia prostej szukanej. Wstawiając wartość na m w równanie (10'), otrzymamy szukane *równanie prostej, przechodzącej przez dwa dane punkty:*

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \tag{11}$$

oczywiście wykluczamy tu wypadek $x_1 = x_2$.

W przypadku szczególnym, równanie prostej, przechodzącej przez początek układu i przez punkt dany (x_1, y_1), będzie miało postać

$$\frac{y}{y_1} = \frac{x}{x_1}$$

ZAGADNIENIE 3. *Znaleść warunek, który winny spełniać współrzędne trzech punktów* $A_1(x_1, y_1)$; $A_2(x_2, y_2)$; $A(x_3, y_3)$ *aby te trzy punkty leżały na tej samej prostej.*

Własność geometryczna znajdowania się trzech danych punktów na jednej prostej wyraża się analitycznie, iż istnieje takie równanie pierwszego stopnia

$$Ax + By + C = 0$$

które jest spełnione w trzech danych punktach, to znaczy, iż zachodzą trzy związki

$$\begin{aligned} A x_1 + B y_1 + C &= 0 \\ A x_2 + B y_2 + C &= 0 \\ A x_3 + B y_3 + C &= 0 \end{aligned} \tag{12}$$

Otóż wiadomo (patrz art. 8 dodatku o wyznacznikach i równaniach linjowych), że warunkiem *koniecznym i dostatecznym* spełnienia trzech związków jednorodnych (12) przez trzy liczby A, B, C *niewszystkie równe zeru* jest znikanie wyznacznika utworzonego ze współczynników przy liczbach A, B, C:

$$\begin{vmatrix} x_1, y_1, 1 \\ x_2, y_2, 1 \\ x_3, y_3, 1 \end{vmatrix} = 0 \tag{13}$$

Jest to właśnie warunek szukany. Rozwijając wyznacznik (13) według wyrazów pierwszej kolumny, otrzymamy szukany związek w tej postaci:

$$(13') \qquad x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2) = 0$$

Warunek powyższy wynika też z równania (11). Istotnie, aby trzy dane punkty A_1, A_2, A_3 leżały na jednej prostej, trzeba i wystarcza, żeby równanie prostej, przechodzącej przez punkty A_1 i A_2, o postaci

$$(x_2 - x_1)(y - y_1) = (y_2 - y_1)(x - x_1)$$

spełniały współrzędne punktu A_3, stąd wynika

$$(y_3 - y_1)(x_2 - x_1) = (y_2 - y_1)(x_3 - x_1)$$

związek zaś ten sprowadza się do związku (13).

21. O przecięciu się dwóch prostych.

Dane są dwie proste, określone przez równania

$$(14) \qquad \begin{aligned} A_1 x + B_1 y + C_1 &= 0 \\ A_2 x + B_2 y + C_2 &= 0 \end{aligned}$$

Współrzędne punktu przecięcia tych dwóch prostych. są to liczby (x_0, y_0), które spełniają jednocześnie obydwa związki (14). *Poszukiwanie punktu przecięcia dwóch prostych sprowadza się więc do rozwiązania układu dwóch równań* (14) *z dwiema niewiadomemi pierwszego stopnia.* Wiemy (patrz dodatek o wyznacznikach), iż układ (14) posiada określone rozwiązanie (x_0, y_0), to znaczy istnieje określony punkt przecięcia danych prostych, jeśli współczynniki niewiadomych w równaniach (14) spełniają warunek

$$(15) \qquad A_1 B_2 - A_2 B_1 \neq 0 \text{ lub } \frac{A_1}{B_1} \neq \frac{A_2}{B_2}$$

Warunek ten ma prosty sens geometryczny; wyznaczmy mianowicie y w zależności od x z równań (14), w założeniu, iż $B_1 \neq 0$ i $B_2 \neq 0$, aby uwidocznić współczynniki kątowe prostych; otrzymamy

$$(16) \qquad \begin{aligned} y &= -\frac{A_1}{B_1} x - \frac{C_1}{B_1} \\ y &= -\frac{A_2}{B_2} x - \frac{C_2}{B_2} \end{aligned}$$