nanie jej $f(x, y) = 0$ nie zawiera wyrazu stałego. Równanie danej elipsy można jeszcze napisać w postaci

$$\frac{x''^2}{\left(\frac{2}{9}\right)} + \frac{y''^2}{\left(\frac{2}{3}\right)} = 1,$$

osi jej więc mają długości

$$2a = \frac{2}{3}\sqrt{2};\quad 2b = \frac{2}{3}\sqrt{6}.$$

Punkty przecięcia danej krzywej z osią Ox i Oy otrzymamy, podstawiając w równanie $f(x, y) = 0$ kolejno $y = 0$ i $x = 0$; gdy $y = 0$, wtedy $x^2 - x = 0$, stąd $x_1 = 0$, $x_2 = 1$; następnie mamy dla $x = 0$ równanie $y^2 = 0$, krzywa ma więc jeden punkt podwójny wspólny z osią Oy, jest zatem styczna do tej osi w punkcie O (rys. 71).

43. Badanie przypadku $B^2 - 4AC = 0$. Parabola.

Pozostał jeszcze do zbadania wypadek, gdy współczynniki równania krzywej

(25) $$f(x, y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

spełniają związek

(26) $$B^2 - 4AC = 0$$

lub

(27) $$\frac{2A}{B} = \frac{B}{2C}$$

Zakładamy narazie, iż $A \neq 0$, $C \neq 0$, a więc i $B \neq 0$.

W danym wypadku, dla układu równań

(28) $$\begin{aligned} 2Ax_0 + By_0 + D &= 0 \\ Bx_0 + 2Cy_0 + E &= 0 \end{aligned}$$

określających położenie środka, mogą zajść dwie alternatywy:

α) współczynniki równania krzywej spełniają warunek

$$\frac{2A}{B} = \frac{B}{2C} = \frac{D}{E}$$

lub też jednocześnie $D = 0$ i $E = 0$, wtedy układ (28) posiada *nieskończenie wiele rozwiązań,* gdyż każda para liczb (x_0, y_0), spełniająca jedno z równań (28), będzie wtedy spełniała i drugie;

β) współczynniki spełniają warunek

$$\frac{2A}{B} = \frac{B}{2C} \neq \frac{D}{E}$$

lub też D i E nie znikają jednocześnie, wtedy układ (28) *nie posiada rozwiązania.*

W razie pierwszej alternatywy, krzywa posiada nieskończenie wiele środków i wszystkie one są punktami prostej o równaniu

$$2Ax_0 + By_0 + D = 0 \tag{28'}$$

Spostrzegamy tutaj, na zasadzie proporcyj (α), iż grupa wyrazów kwadratowych w równaniu krzywej będzie pełnym kwadratem grupy, wydzielonej z wyrazów pierwszego stopnia tego równania, a mianowicie równanie krzywej daje się napisać w postaci

$$A\left(x + \frac{B}{2A}y\right)^2 + D\left(x + \frac{B}{2A}y\right) + F = 0$$

Stąd wnioskujemy, w razie dodatniej wartości wyróżnika

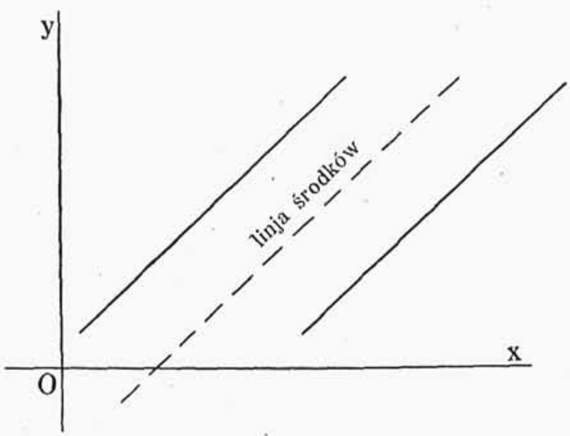
$$D^2 - 4AF > 0,$$

iż dwumian w nawiasie może przybierać tylko dwie wartości stałe

$$x + \frac{B}{2A}y = -\frac{D}{2A} \pm \frac{\sqrt{D^2 - 4AF}}{2A}$$

a więc w przypadku (α) równanie drugiego stopnia przedstawia *dwie proste równoległe,* określone przez równania

$$2Ax + By + D = \pm\sqrt{D^2 - 4AF}$$



Rys. 72.

leżące oczywiście symetrycznie po obu stronach linji środków o równaniu (28') (rys. 72). Istnienie nieskończenie wielu środków danego utworu jest więc teraz jasne z geometrycznego punktu widzenia.

Gdy w przypadku (α) mamy nadto związek

$$D^2 - 4AF = 0,$$

wtedy równanie drugiego stopnia przedstawia tylko *jedną prostą* o równaniu

$$2Ax + By + D = 0.$$

Wreszcie, gdy

$$D^2 - 4AF < 0,$$

wtedy równaniu danemu nie odpowiada żaden punkt rzeczywisty. Wyniki te stosują się również wtedy, gdy mamy jednocześnie

$$D = 0, \quad E = 0.$$

W razie alternatywy ogólniejszej (β), gdy $\frac{2A}{B} = \frac{B}{2C} \neq \frac{D}{E}$, układ (28) nie posiada rozwiązania i krzywa *nie ma środka;* równania (25) nie można więc wtedy doprowadzić do postaci uproszczonej (10).

Dla poznania kształtu krzywej w danym wypadku, postaramy się odszukać *oś symetrji krzywej.* W tym celu *wpierw obróćmy*, a następnie *przesuńmy równolegle* układ współrzędnych tak, aby równanie krzywej przybrało możliwie najprostszą postać.

Ponieważ w danym wypadku, gdy $B^2 - 4AC = 0$, forma $Ax^2 + Bxy + Cy^2$ jest pełnym kwadratem, a zatem równanie krzywej (25) możemy teraz zawsze napisać w postaci

$$A\left(x + \frac{B}{2A}y\right)^2 + Dx + Ey + F = 0 \tag{29}$$

Otóż obróćmy układ współrzędnych o taki kąt α, aby nowa oś Ox' zeszła się z prostą, otrzymaną *przez przyrównanie do zera grupy kwadratowej* $Ax^2 + Bxy + Cy^2$ t. j. $A\left(x + \frac{B}{2A}y\right)^2$ w równaniu krzywej, to znaczy z prostą o równaniu

$$x + \frac{B}{2A}y = 0 \tag{30}$$

zobaczymy, iż *prosta ta jest właśnie równoległa do osi symetrji krzywej.* Według równania (30), obieramy więc dla kąta obrotu α

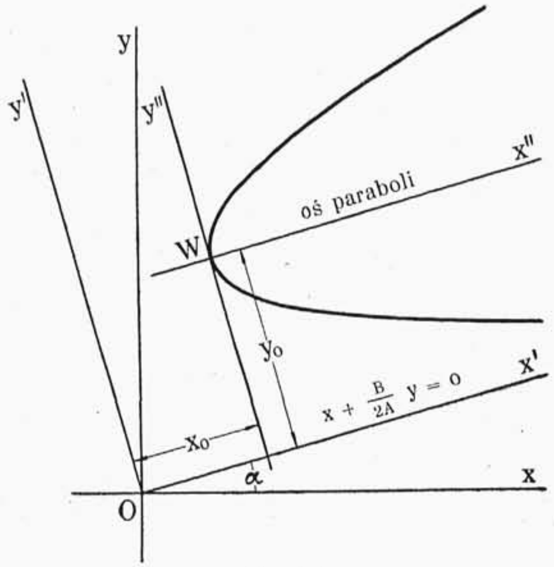
wartość, spełniającą związek

$$\cos\alpha + \frac{B}{2A}\sin\alpha = 0 \tag{31}$$

Wiemy, iż współrzędne względem nowego układu $(O x' y')$ związane są ze współrzędnemi, względem układu $(O x y)$, zależnościami

$$x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha$$

$$y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha$$



Rys. 73.

podstawiając te wyrażenia na x i y w równanie krzywej (29), otrzymamy więc

$$A\left[\left(\cos\alpha + \frac{B}{2A}\sin\alpha\right)x' + \left(-\sin\alpha + \frac{B}{2A}\cos\alpha\right)y'\right]^2 +$$

$$+ (D\cos\alpha + E\sin\alpha)\,x' + (-D\sin\alpha + E\cos\alpha)\,y' + F = 0\,.$$

Równanie to, według założenia (31), upraszcza się znacznie, gdyż zawierać będzie tylko jeden wyraz kwadratowy y'^2; ponieważ zaś w danym wypadku mamy $\frac{D}{2A} \neq \frac{E}{B}$, więc będzie $D\cos\alpha + E\sin\alpha \neq 0$, a zatem w tym nowym układzie współrzędna x' wyrazi się w postaci funkcji drugiego stopnia względem współrzędnej y', to znaczy w postaci:

$$x' = a\,y'^2 + b\,y' + c \tag{32}$$

Wydzielając w trójmianie pełny kwadrat, możemy napisać następnie

$$(33)\qquad x' - \frac{4ac - b^2}{4a} = a\left(y' + \frac{b}{2a}\right)^2$$

jeśli teraz układ $(Ox'y')$ przesuniemy równolegle, tak, aby początkiem nowego układu $(Wx''y'')$ stał się punkt W o współrzędnych

$$(34)\qquad x'_0 = \frac{4ac - b^2}{4a}, \quad y'_0 = -\frac{b}{2a}$$

to równanie krzywej danej (32) przybierze postać najprostszą

$$(35)\qquad x'' = a\,y''^2$$

gdzie

$$x'' = x' - \frac{4ac - b^2}{4a}; \quad y'' = y' + \frac{b}{2a}$$

Z równania (35) widzimy, iż oś Wx'' jest osią symetrji krzywej, a więc *prosta* Ox', *mająca równanie*

$$x + \frac{B}{2A}y = 0$$

jest równoległa do osi symetrji, jak było powiedziane.

Z równania (35) poznajemy kształt krzywej, rozważanej już w art. 12 i 28 i nazwanej *parabolą*.

Przedewszystkiem jest ona *nieograniczona*, gdyż y'' wzrasta nieograniczenie wraz z x'', lecz składa się tylko z *jednej ciągłej gałęzi*, inaczej, niż hyperbola. Gałąź ta jest symetryczna względem osi Wx'' i przechodzi przez punkt W, *w którym jest styczna do osi* Wy'', według art. 28. Nadto krzywa leży po jednej tylko stronie osi Wy'', a mianowicie znak odciętej x'' jest stały i zgodny ze znakiem współczynnika a; krzywa rozciąga się więc w dodatnim kierunku osi Wx'', gdy $a > 0$ i w kierunku ujemnym, gdy $a < 0$.

Parabola posiada więc jedną oś symetrji i nie posiada środka. Punkt W, w którym oś symetrji przecina parabolę, nazywa się *wierzchołkiem paraboli*. Z równania (35) widzimy, iż kształt paraboli zależy od wartości jednego tylko współczynnika a.

Gdy jeden ze współczynników A lub C w równaniu (25) znika, wtedy mamy również $B = 0$, według związku $B^2 - 4AC = 0$, równanie ma więc odrazu postać uproszczoną, zawierającą tylko jeden wyraz kwadratowy. Mianowicie:

I) jeśli $A=0$ ($C\neq 0$, w przeciwnym bowiem wypadku równanie nie byłoby kwadratowe), wtedy równanie ma postać

$$Cy^2+Dx+Ey+F=0$$

więc, gdy $D\neq 0$, to znane przesunięcie równoległe osi pozwoli równanie sprowadzić do postaci $x'=a\,y'^2$ i przedstawia ono parabolę z osią równoległą do prostej $y=0$ t. j. do osi Ox; gdy zaś $D=0$, wtedy równanie ma postać

$$Cy^2+Ey+F=0$$

i przedstawia dwie proste równoległe do osi Ox: $y=y_1$ i $y=y_2$, różne lub zjednoczone, rzeczywiste lub urojone;

II) jeśli $C=0$ $(A\neq 0)$, wtedy równanie ma postać

$$Ax^2+Dx+Ey+F=0$$

i, gdy $E\neq 0$, sprowadza się przez przesunięcie równoległe osi do równania $y'=a\,x'^2$, a więc przedstawia parabolę z osią równoległą do prostej $x=0$; gdy zaś $E=0$, to równanie ma postać

$$Ax^2+Dx+F=0$$

a zatem przedstawia dwie proste równoległe do osi Oy: $x=x_1$ i $x=x_2$, różne lub zjednoczone, rzeczywiste lub urojone.

Nadmienimy jeszcze, iż, pisząc proporcje przypadku (α) w postaci związków

$$\begin{cases} B^2-4AC=0 \\ 2AE-BD=0 \\ BE-2CD=0 \end{cases}$$

mamy warunek, obejmujący również zbadane przed chwilą wypadki, gdy $A=0$, $D=0$, lub $C=0$, $E=0$.

Zbierając wyniki danego artykułu, możemy wygłosić twierdzenie następujące.

TWIERDZENIE. Równanie drugiego stopnia

$$f(x,y)=Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$$

w przypadku, gdy grupa wyrazów drugiego stopnia Ax^2+Bxy+ $+Cy^2$ *jest pełnym kwadratem* ($B^2-4AC=0$), *przedstawia para-*

bolę, której oś jest równoległa do prostej o równaniu

$$A x^2 + B x y + C y^2 = 0$$

otrzymanem przez przyrównanie do zera grupy kwadratowej. W szczególności zaś, gdy nadto zachodzą związki

$$(36) \qquad \begin{cases} 2AE - BD = 0 \\ BE - 2CD = 0 \end{cases}$$

równanie dane przedstawia dwie proste równoległe, różne lub zjednoczone, rzeczywiste lub urojone.

Uwaga. Ponieważ kierunek osi paraboli otrzymujemy natychmiast z równania krzywej przez przyrównanie do zera grupy kwadratowej, a więc, w celu wyznaczenia równania osi paraboli i jej wierzchołka, najprościej użyć następującej metody: prowadzimy dowolną prostopadłą do znanego kierunku osi i szukamy miejsca geometrycznego środków odcinków zawartych między punktami przecięcia tej prostopadłej z parabolą, miejsce geometryczne otrzymane będzie szukaną osią; przecięcie tej osi z parabolą będzie jej wierzchołkiem.

Przykład. Wyznaczmy równanie osi i współrzędne wierzchołka paraboli, określonej przez równanie

$$(x + y)^2 + x - 2y - 1 = 0.$$

Oś tej paraboli jest równoległa do prostej

$$x + y = 0.$$

Weźmy dowolną prostopadłą do osi, mającą równanie

$$y = x + n,$$

odcięte punktów przecięcia tej prostopadłej z parabolą spełniają związek

$$4x^2 + (4n - 1)x + (n^2 - 2n - 1) = 0;$$

odcięta x_0 środka odcinka między nimi zawartego, jako połowa sumy pierwiastków, ma wartość

$$x_0 = -\frac{4n - 1}{8}$$

ponieważ zaś rzędna tego środka spełnia równanie

$$y_0 = x_0 + n$$

rugując więc parametr zmienny n z dwóch ostatnich związków, otrzymamy szukane równanie osi

$$x_0 + y_0 = \frac{1}{4}.$$

Współrzędne (x_w, y_w) wierzchołka W spełniają równanie osi i równanie paraboli, stąd wynika, iż spełniają one równania:

$$x + y = \frac{1}{4}; \quad x - 2y = \frac{15}{16};$$

będzie więc

$$x_w = \frac{23}{48}; \quad y_w = -\frac{11}{48}.$$

44. Warunek zwyrodnienia krzywej.

Jeśli wyróżnik spełnia warunek $B^2 - 4AC \neq 0$, wtedy przypadkiem zwyrodnienia krzywej drugiego stopnia są dwie proste przecinające się, lub jeden tylko punkt, jeśli zaś $B^2 - 4AC = 0$, to dwie proste równoległe, różne lub zjednoczone, rzeczywiste lub urojone. Otóż, w przypadku, gdy $B^2 - 4AC \neq 0$, na zasadzie twierdzenia w poprzednim artykule, aby równanie drugiego stopnia

$$f(x, y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

przedstawiało dwie przecinające się proste, lub spełnione było tylko w jednym punkcie rzeczywistym, *trzeba* i *wystarcza*, żeby dwie liczby (x_0, y_0), wyznaczone ze związków

(37) $$f'_x(x_0, y_0) = 0; \qquad f'_y(x_0, y_0) = 0,$$

spełniały równanie krzywej:

(38) $$f(x_0, y_0) = 0,$$

to znaczy geometrycznie, *aby środek krzywej leżał na samej krzywej*. Napiszmy wyraźnie warunki (37) i (38) w postaci rozwiniętej:

(38') $$\begin{cases} 2Ax_0 + By_0 + D = 0 \\ Bx_0 + 2Cy_0 + E = 0 \\ Ax_0^2 + Bx_0y_0 + Cy_0^2 + Dx_0 + Ey_0 + F = 0 \end{cases}$$

Jeśli z dwóch pierwszych związków wyznaczymy x_0 i y_0 i wstawimy do trzeciego, to otrzymamy szukany warunek w postaci związku między współczynnikami A, B, C, D, E, F. Można ten rachunek uprościć, jeśli zauważymy, iż trzeci ze związków (38') da się napisać w takiej postaci:

$$\frac{1}{2}x_0(2Ax_0 + By_0 + D) + \frac{1}{2}y_0(Bx_0 + 2Cy_0 + E) +$$

$$+ \frac{1}{2}Dx_0 + \frac{1}{2}Ey_0 + F = 0$$

a zatem związki (38'), są równoważne trzem związkom linjowym

$$(38'')\qquad \begin{cases} 2Ax_0+\ \ By_0+\ \ D=0 \\ \ \ Bx_0+2Cy_0+\ \ E=0 \\ \ \ Dx_0+\ \ Ey_0+2F=0 \end{cases}$$

Rugując z tych równań wartości x_0, y_0, otrzymamy szukany warunek w postaci symetrycznej następującej:

$$(39)\qquad \Delta=\begin{vmatrix} 2A, & B, & D \\ B, & 2C, & E \\ D, & E, & 2F \end{vmatrix}=0$$

W przypadku, gdy $B^2-4AC=0$, równanie drugiego stopnia przedstawia krzywą zwyrodniałą, jeśli zachodzą nadto związki

$$(40)\qquad \begin{cases} 2AE-\ \ BD=0 \\ \ \ BE-2CD=0 \end{cases}$$

Wtedy para liczb (x_0, y_0), spełniających dwa pierwsze ze związków (38'), *nie będzie wogóle spełniała* trzeciego z tych związków (linja środków leży poza krzywą zwyrodniałą), pomimo to jednak, wyznacznik (39) będzie również znikał, gdyż rozwinięcie jego, według elementów ostatniej kolumny, ma postać

$$(41)\qquad \Delta=D(BE-2CD)-E(2AE-BD)-2F(B^2-4AC);$$

zauważmy następnie, iż w przypadku

$$B^2-4AC=0$$

zachodzą związki

$$BE-2CD=\frac{B}{2A}(2AE-BD);\quad \text{jeśli } A\neq 0$$

$$2AE-BD=\frac{B}{2C}(BE-2CD);\quad \text{jeśli } C\neq 0$$

a więc możemy napisać wtedy

$$\Delta=-\frac{1}{2A}(2AE-BD)^2;\quad \text{gdy } A\neq 0$$

$$\Delta=-\frac{1}{2C}(BE-2CD)^2;\quad \text{gdy } C\neq 0$$

stąd wynika, iż, *odwrotnie, znikanie wyznacznika* Δ, *w przypadku* $B^2 - 4AC = 0$, *pociąga za sobą warunki* (40), *a więc prowadzi do krzywej zwyrodniałej.*

Jeśli nadto, oprócz warunków (40), będzie zachodził związek

$$D^2 - 4AF = 0 \quad \text{lub} \quad E^2 - 4FC = 0$$

to znaczy, gdy wszystkie podwyznaczniki wyznacznika (39) będą znikały, wtedy, jak wiemy, równanie drugiego stopnia, będzie przedstawiało *tylko jedną prostą.* Otrzymane wyniki przedstawimy w następującem twierdzeniu.

TWIERDZENIE. Aby równanie drugiego stopnia przedstawiało krzywą zwyrodniałą, trzeba i wystarcza, żeby współczynniki tego równania spełniały warunek następujący:

$$\begin{vmatrix} 2A, & B, & D \\ B, & 2C, & E \\ D, & E, & 2F \end{vmatrix} = 0;$$

jeśli $B^2 - 4AC > 0$, *wtedy równanie przedstawia dwie proste przecinające się;*

jeśli $B^2 - 4AC < 0$, *wtedy równanie spełnione jest tylko w jednym punkcie rzeczywistym;*

jeśli $B^2 - 4AC = 0$, *wtedy równanie przedstawia dwie proste równoległe, rzeczywiste lub urojone, lub jedną tylko prostą, jeśli nadto znikają wszystkie podwyznaczniki wyznacznika* (39).

Powyższy warunek można też otrzymać zręcznie na drodze rozważań wyłącznie algebraicznych. Uporządkujmy mianowicie równanie krzywej według potęg zmiennej y:

$$f(x, y) = Cy^2 + (Bx + E)y + (Ax^2 + Dx + F) = 0$$

i określmy stąd y w zależności od zmiennej x, jak z równania kwadratowego, w założeniu, iż $C \neq 0$, otrzymamy

$$y = -\frac{B}{2C}x - \frac{E}{2C} +$$

$$\pm \frac{1}{2C}\sqrt{(B^2 - 4AC)x^2 + 2(BE - 2CD)x + (E^2 - 4FC)}$$

Aby równanie drugiego stopnia przedstawiało dwie proste (rzeczywiste lub urojone), trzeba i wystarcza, żeby otrzymane wyżej wyrażenie na y było funkcją *wymierną* zmiennej x, a więc, aby wyrażenie podpierwiastkowe było *pełnym kwadratem*; przyrównywując zatem do zera wyróżnik funkcji kwadratowej pod pierwiastkiem, otrzymamy szukany warunek w postaci

$$(BE-2CD)^2-(B^2-4AC)(E^2-4FC)=0$$

który, jak łatwo sprawdzić, jest identyczny z warunkiem (39). Zbadanie przypadku $C=0$ pozostawimy czytelnikowi.

Nadmienimy jeszcze, iż, z punktu widzenia algebraicznego, warunek zwyrodnienia krzywej, oznacza, aby lewa strona równania krzywej była iloczynem dwóch funkcyj linjowych w postaci

$$f(x,y)=(ax+by+c)(a'x+b'y+c').$$

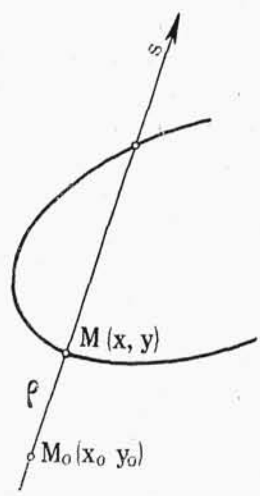
45. O przecięciu się prostej z krzywą drugiego stopnia.

Niech będzie krzywa drugiego stopnia, określona przez równanie w postaci ogólnej

$$(42)\qquad f(x,y)=Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$$

W celu zbadania przecięcia się dowolnej prostej z krzywą drugiego stopnia, dogodniej jest użyć równań parametrycznych prostej, obejmują one bowiem wszelkie kierunki prostej. Jeśli prosta przechodzi przez pewien punkt $M_0(x_0, y_0)$ i tworzy kąt α z osią Ox, wtedy współrzędne (x, y) punktu bieżącego M tej prostej wyrażają się, jak wiadomo, w zależności od miary wektora $\rho=\overline{M_0M}$ w następujący sposób:

$$(43)\qquad \begin{cases} x=x_0+\rho\cos\alpha \\ y=y_0+\rho\sin\alpha \end{cases}$$



Rys. 74.

Aby określić położenie punktu przecięcia prostej danej z krzywą (42), podstawmy wartości (43) na x i y w równanie (42) i uporządkujmy według potęg ρ; otrzymamy wtedy następujące równanie kwadratowe, określające wartość na ρ, odpowiadającą punktowi przecięcia M:

$$(44)\qquad (A\cos^2\alpha+B\cos\alpha\sin\alpha+C\sin^2\alpha)\rho^2+$$

$$+[f_x'(x_0,y_0)\cos\alpha+f_y'(x_0,y_0)\sin\alpha]\rho+f(x_0,y_0)=0$$

oznaczono, jak zwykle

$$f_x'(x_0, y_0) = 2Ax_0 + By_0 + D$$

$$f_y'(x_0, y_0) = Bx_0 + 2Cy_0 + E$$

Jeśli dany kąt nachylenia α prostej spełnia warunek

$$A\cos^2\alpha + B\cos\alpha\sin\alpha + C\sin^2\alpha \neq 0 \tag{45}$$

wtedy równanie (44) jest kwadratowe i posiada dwa pierwiastki ρ_1 i ρ_2 rzeczywiste lub zespolone, różne lub zjednoczone, a więc prosta przecina wtedy krzywą w dwóch punktach rzeczywistych lub urojonych, albo w jednym podwójnym (przypadek styczności).

W przypadku, gdy kąt nachylenia prostej α ma wartość szczególną α_0, spełniającą związek

$$A\cos^2\alpha_0 + B\cos\alpha_0\sin\alpha_0 + C\sin^2\alpha_0 = 0, \tag{46}$$

zaś współczynnik przy ρ w równaniu (44) jest odmienny od zera:

$$f_x'(x_0, y_0)\cos\alpha_0 + f_y'(x_0, y_0)\sin\alpha_0 \neq 0, \tag{47}$$

wtedy równanie (44) jest pierwszego stopnia i ma jeden tylko pierwiastek pojedyńczy, a zatem *prosta przecina wtedy krzywą drugiego stopnia tylko w jednym punkcie, nie będąc do niej styczną* (nie można bowiem tego wypadku rozpatrywać jako wypadek graniczny zejścia się dwóch pierwiastków).

Równanie (46) określa, jak wiemy, kąty nachylenia względem osi Ox dwóch prostych D_1 i D_2, przedstawionych przez równanie jednorodne

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 = 0, \tag{46'}$$

przechodzących przez początek układu (rys. 75); jeśli $C \neq 0$, to współczynniki kątowe tych prostych spełniają równanie

$$A + Bm + Cm^2 = 0 \tag{46''}$$

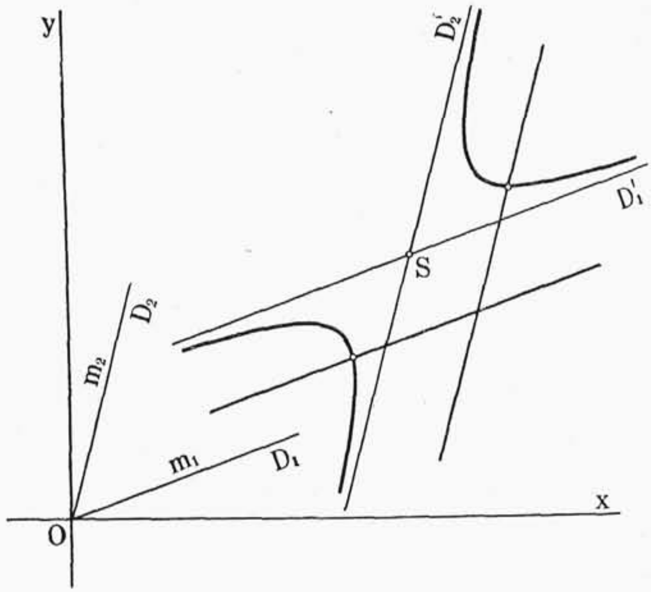
W przypadku *hyperboli* $(B^2 - 4AC > 0)$, równanie (46') przedstawia dwie proste D_1 i D_2 rzeczywiste; nadto, łatwo zauważyć, na podstawie równań (43) i (46), iż dwa dowolne punkty

(x, y) i (x_0, y_0) siecznej, równoległej do jednej z prostych D_1 i D_2, spełniają związek

$$f'_x(x, y)\cos\alpha_0 + f'_y(x, y)\sin\alpha_0 = \tag{48}$$
$$= f'_x(x_0, y_0)\cos\alpha_0 + f'_y(x_0, y_0)\sin\alpha_0$$

nierówność (47)

$$f'_x(x_0, y_0)\cos\alpha_0 + f'_y(x_0, y_0)\sin\alpha_0 \neq 0$$



Rys. 75.

jest więc warunkiem wystarczającym i koniecznym, aby sieczna rozważana *nie przechodziła przez środek S hyperboli.*

A zatem *proste, nieprzechodzące przez środek hyperboli i równoległe do prostych D_1 i D_2, otrzymanych przez przyrównanie do zera grupy kwadratowej*

$$A x^2 + B x y + C y^2 = 0$$

w równaniu hyperboli, przecinają tę krzywą w jednym punkcie pojedyńczym (rys. 75).

W szczególnym bardziej wypadku, gdy punkt (x_0, y_0) prostej siecznej jest *środkiem S* hyperboli, wtedy, jak wiemy

$$f'_x(x_0, y_0) = 0; \qquad f'_y(x_0, y_0) = 0$$

$$f(x_0, y_0) \neq 0;$$

widzimy stąd, iż *dwie proste D'_1 i D'_2, przechodzące przez środek hyperboli i równoległe do prostych* (46'), *nie przecinają krzywej w żadnym punkcie rzeczywistym lub urojonym*, wtedy bowiem równanie (44) będzie miało postać

$$0 \cdot \rho^2 + 0 \cdot \rho + f(x_0, y_0) = 0$$

i nie może być spełnione dla żadnej wartości na ρ (rys. 75).

Ze związku (48) widzimy natychmiast, iż takie dwie proste D'_1 i D'_2 określone są przez dwa równania, każde o postaci

$$f'_x(x, y) \cos \alpha_0 + f'_y(x, y) \sin \alpha_0 = 0 \tag{49}$$

lub

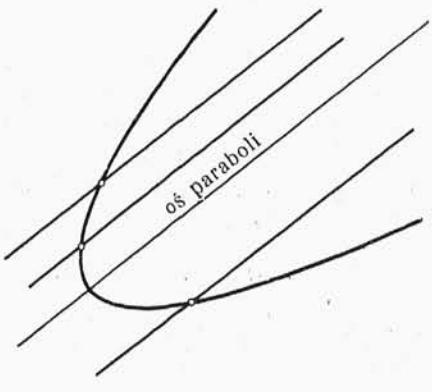
$$f'_x(x, y) + f'_y(x, y)\, m = 0 \tag{49'}$$

gdzie na m należy podstawić wartości pierwiastków równania

$$A + B m + C m^2 = 0$$

w założeniu, iż $C \neq 0$.

Jeżeli wreszcie również $f(x_0, y_0) = 0$, co oznacza, iż dana krzywa jest parą prostych, przecinających się w punkcie (x_0, y_0), wtedy powyższe proste D'_1 i D'_2 przylegają do danej krzywej wszystkiemi punktami, gdyż odpowiednie równanie (44) ma wtedy postać $0 \cdot \rho^2 + 0 \cdot \rho + 0 = 0$ i jest spełnione dla każdej wartości ρ.



Rys. 76.

Dla *elipsy* $(B^2 - 4AC < 0)$ nie istnieją kierunki rzeczywiste, spełniające równanie (46'), prosta o dowolnym kierunku przecina więc zawsze elipsę w dwóch punktach rzeczywistych lub urojonych, różnych lub zjednoczonych. W szczególności każda prosta, wychodząca ze środka elipsy, przecina ją w dwóch punktach rzeczywistych, symetrycznie położonych względem środka.

W przypadku *paraboli* $(B^2 - 4AC = 0)$ równanie (46′) przedstawia, jak wiemy, jedną prostą równoległą do osi symetrji, zgodnie więc z oczywistym wnioskiem, wynikającym bezpośrednio z równania uproszczonego paraboli $y^2 = 2px$, *równoległe do osi paraboli przecinają ją w jednym punkcie* (rys. 76).

Gdy dowolna sieczna, przecinająca krzywą daną w dwóch punktach, dąży do położenia prostej, nieprzechodzącej przez środek krzywej i równoległej do jednej z dwóch prostych (46′), wtedy współczynnik przy ρ^2 w równaniu (44) dąży do zera i wobec tego, jak wiadomo z algebry, jeden z pierwiastków ρ rośnie nieskończenie*), oznacza to, iż *jeden z punktów przecięcia prostej z krzywą oddala się nieskończenie.* Na podstawie tej własności mówimy też, iż proste, równoległe do prostych

$$(46') \qquad Ax^2 + Cxy + Cy^2 = 0,$$

mają z daną krzywą (42) wspólny *„punkt w nieskończoności"*.

Pojęciom punktów w nieskończoności krzywej drugiego stopnia odpowiadają kierunki prostych (46′).

Z równań powyższych wynika jasno, iż prosta dana będzie miała z krzywą drugiego stopnia więcej niż dwa punkty wspólne tylko wtedy, gdy ta krzywa jest parą prostych i dana prosta do jednej z nich przylega wszystkiemi punktami.

P r z y k ł a d 1. Równanie $xy = 1$ przedstawia hyperbolę, której środek leży w początku układu (rys. 33); w tym przypadku osi współrzędnych $xy = 0$ są właśnie parą prostych D_1' D_2', które nie mają z hyperbolą punktów wspólnych rzeczywistych lub urojonych; równoległe do tych osi przecinają oczywiście hyperbolę w jednym punkcie.

P r z y k ł a d 2. Wszystkie koła na płaszczyźnie określone są przez równanie

$$x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0,$$

---

*) Pisząc wyrażenia pierwiastków równania kwadratowego

$$a\rho^2 + b\rho + c = 0$$

w postaciach:

$$\rho_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a};$$

$$\rho_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = -\frac{2c}{b + \sqrt{b^2 - 4ac}},$$

widzimy, w założeniu $b > 0$, iż istotnie wartość bezwzględna jednego z pierwiastków ρ *rośnie nieskończenie*, zaś wartość drugiego dąży do $-\frac{c}{b}$, gdy a dąży do zera.

a więc wszystkim kołom odpowiadają te same „dwa punkty w nieskończoności,“ określone przez równanie

$$x^2 + y^2 = 0$$

lub

$$y + xi = 0; \quad y - xi = 0;$$

kierunki tych dwóch prostych urojonych nazywamy *izotropowemi* ($m = \pm i$). „Punkty urojone w nieskończoności,“ określone przez równanie $x^2 + y^2 = 0$ i wspólne wszystkim kołom płaszczyzny nazywamy też *punktami kołowemi* płaszczyzny.

46. Asymptoty hyperboli.

Rozpatrzmy bliżej znaczenie geometryczne dwóch kierunków, określonych równaniem

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 = 0 \tag{50}$$

w przypadku hyperboli. Otóż wykażemy, iż dwie proste D'_1 i D'_2 poprzedniego artykułu, poprowadzone przez środek hyperboli i równoległe do prostych (50), są asymptotami hyperboli. Zaznaczymy, iż wogóle asymptotą krzywej nazywamy prostą taką, iż odległość punktu krzywej od niej dąży do zera, gdy punkt krzywej oddala się nieograniczenie po odpowiedniej gałęzi.

W celu udowodnienia wymienionej własności, wystarczy, dla uproszczenia, wziąć równanie hyperboli odniesionej do osi symetrji, a więc równanie w postaci

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{51}$$

Równania prostych D'_1 i D'_2 poprzedniego artykułu otrzymamy tu odrazu, przyrównywując do zera grupę wyrazów kwadratowych, gdyż uzyskane wtedy równanie

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0 \tag{52}$$

lub

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0; \quad \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0 \tag{52'}$$

przedstawia proste, przechodzące zarazem przez środek hyperboli o równaniu (51). Aby, w myśl wygłoszonej własności, udowodnić, iż proste (52) są asymptotami hyperboli (51), rozważmy różnicę między rzędną punktu jednej gałęzi hyperboli

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$$