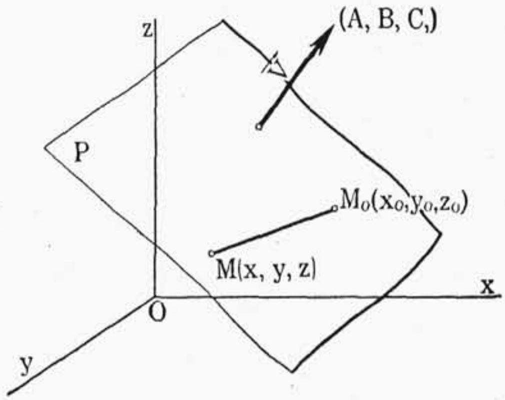
ROZDZIAŁ V.

PŁASZCZYZNA I PROSTA W PRZESTRZENI.

14. Równanie płaszczyzny.

Przez dany punkt przestrzeni $M_0(x_0, y_0, z_0)$ przechodzi określona płaszczyzna P prostopadła do danego wektora $\overrightarrow{V}$ (rys. 160). Położenie płaszczyzny względem układu prostokątnego $(Oxyz)$ będzie więc określone, jeśli dane są współrzędne (x_0, y_0, z_0) jednego punktu M_0 tej płaszczyzny i miary rzutów A, B, C na osi współrzędnych pewnego wektora $\overrightarrow{V}$, prostopadłego do niej. Dowolny punkt płaszczyzny $M(x, y, z)$ posiada tę własność, iż wektor M_0M, łączący



Rys. 160.

punkt M_0 z punktem M, jest zawsze prostopadły do wektora stałego $\overrightarrow{V}$, a więc iloczyn skalarny, t. j. suma iloczynów miar rzutów wektora M_0M i wektora $\overrightarrow{V}$ na osi winna być równa zeru w każdym punkcie płaszczyzny; ponieważ rzuty wektora M_0M mają miary

$$x - x_0, \quad y - y_0, \quad z - z_0$$

zatem punkty płaszczyzny P i tylko punkty tej płaszczyzny spełniają równanie pierwszego stopnia

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \tag{1}$$

Jest to równanie płaszczyzny, przechodzącej przez punkt (x_0, y_0, z_0) *i prostopadłej do wektora o składowych* (A, B, C).

Odwrotnie, wykazaliśmy (str. 318), iż wszelkie równanie pierwszego stopnia

$$(1') \qquad Ax + By + Cz + D = 0,$$

gdzie współczynniki A, B, C niewszystkie równają się zeru, *przedstawia płaszczyznę, prostopadłą do wektora, którego składowe mają miary równe współczynnikom A,B,C współrzędnych w równaniu danem.*

Ponieważ z założenia jeden przynajmniej ze współczynników A,B,C nie równa się zeru, a więc z równania płaszczyzny (1') można zawsze jedną współrzędną wyrazić w zależności od dwóch pozostałych, jeśli np. $C \neq 0$, to mamy

$$z = -\frac{A}{C}x - \frac{B}{C}y - \frac{D}{C}$$

Położenie płaszczyzny w przestrzeni określone jest więc przez wartości *trzech* stosunków między współczynnikami A, B, C, D; układ płaszczyzn w przestrzeni jest więc *trójparametrowy* i dlatego zagadnienia, dotyczące płaszczyzny, winny zawierać *trzy warunki* w celu uzyskania określonego rozwiązania.

Widzimy również natychmiast, iż warunkiem koniecznym i wystarczającym, aby dwa równania pierwszego stopnia

$$Ax + By + Cz + D = 0$$
$$A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0$$

przedstawiały jedną i tę samą płaszczyznę, jest proporcjonalność wszystkich współczynników w postaci

$$\frac{A}{A_1} = \frac{B}{B_1} = \frac{C}{C_1} = \frac{D}{D_1}$$

oczywiście należy tu zachować umowę o znikaniu licznika w razie znikania odpowiedniego mianownika.

Przykład. Równanie płaszczyzny, przechodzącej przez punkt $(1, 2, -3)$ i prostopadłej do wektora o składowych $(2, -3, -1)$ ma postać

$$2(x-1) + (-3)(y-2) + (-1)(z+3) = 0,$$

stąd wynika

$$2x - 3y - z + 1 = 0.$$

Szczególne położenia płaszczyzny.

Jeśli równanie płaszczyzny *nie zawiera wyrazu stałego,* to znaczy ma postać

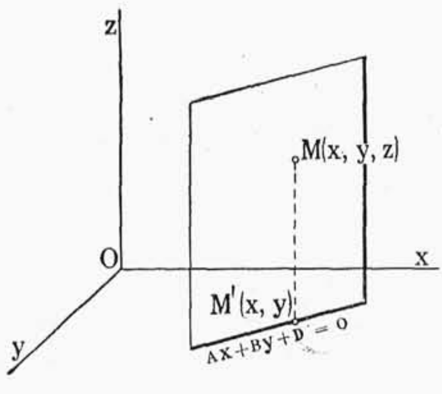
$$Ax+By+Cz=0$$

wtedy równanie spełnione jest w punkcie $(0,0,0)$, a więc *płaszczyzna przechodzi przez początek układu.*

Jeśli płaszczyzna jest *równoległa do osi* Oz, wtedy rzut wektora V na tę oś ma wartość $C=0$ i punkty płaszczyzny dla dowolnego z spełniają związek z *dwiema zmiennemi*

$$Ax+By+D=0, \tag{2}$$

oznacza to geometrycznie, iż rzuty (x,y) punktów płaszczyzny leżą na linji prostej (rys. 161). Równanie (2) przedstawia więc *ślad płaszczyzny* na płaszczyźnie (Oxy). Podobnie wykażemy, iż związek $Ax+Cz+D=0$ odpowiada *płaszczyźnie równoległej*



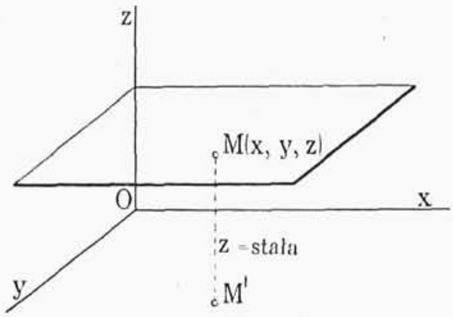
Rys. 161.

do osi Oy i związek $By+Cz+D=0$ *płaszczyźnie równoległej do osi* Ox.

Jeśli wreszcie płaszczyzna jest równoległa do jednej z płaszczyzn współrzędnych, wtedy dwa z trzech współczynników A,B,C będą równe zeru i dla dowolnej wartości dwóch współrzędnych, wartość trzeciej, jako odległość dwóch płaszczyzn równoległych, będzie stała, a mianowicie:

jeśli płaszczyzna jest równoległa do (Oxy) *to* $z=$ *stałej* (rys. 162);

jeśli płaszczyzna jest równoległa do (Oyz), *to* $x =$ *stałej;*
jeśli płaszczyzna jest równoległa do (Oxz), *to* $y =$ *stałej.*



Rys. 162.

Ślady płaszczyzny i przecięcia z osiami.

Niech będzie równanie płaszczyzny ogólne

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Ślady danej płaszczyzny na płaszczyznach współrzędnych otrzymamy, podstawiając w równaniu danem wartość zero na jedną ze współrzędnych, a mianowicie, podstawiając np. $z = 0$, otrzymamy ślad na płaszczyźnie Oxy:

$$Ax + By + D = 0$$

i t. p

Współrzędne punktów przecięcia płaszczyzny danej z osiami otrzymamy, podstawiając w równanie płaszczyzny na dwie współrzędne wartość zero; a więc będziemy mieli, w założeniu, iż $A \neq 0$, $B \neq 0$, $C \neq 0$,

jeśli $y = 0, z = 0$, to $Ax + D = 0$; $x = -\dfrac{D}{A}$

„ $x = 0, z = 0$, „ $By + D = 0$; $y = -\dfrac{D}{B}$

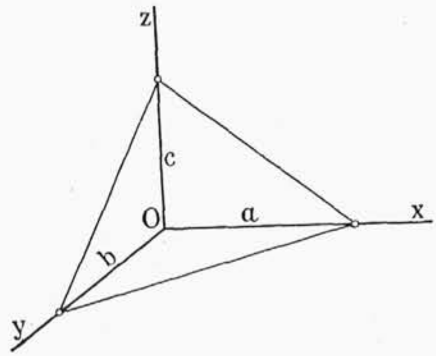
„ $x = 0, y = 0$, „ $Cz + D = 0$; $z = -\dfrac{D}{C}$

oznaczmy te współrzędne przez a, b, c i napiszmy równanie płaszczyzny w ten sposób $(D \neq 0)$:

$$\frac{A}{D}x + \frac{B}{D}y + \frac{C}{D}z + 1 = 0$$

a zatem równanie płaszczyzny, która na osiach współrzędnych odcina wektory, mające miary a, b, c (rys. 163), ma postać

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} - 1 = 0 \tag{3}$$



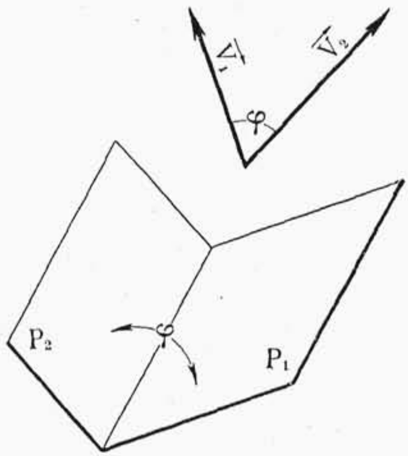
Rys. 163.

15. Kąt między płaszczyznami.

Niech będą dwie płaszczyzny P_1 i P_2 o równaniach

$$\begin{aligned} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 &= 0 \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 &= 0 \end{aligned} \tag{4}$$

Wiemy, że pierwsza płaszczyzna jest prostopadła do wektora $\overrightarrow{V_1}$ o składowych (A_1, B_1, C_1), zaś druga do wektora $\overrightarrow{V_2}$ o składowych (A_2, B_2, C_2) (rys. 164); płaszczyzny te są do siebie równoległe lub prostopadłe, zależnie od tego, czy powyższe wektory są do siebie równoległe lub prostopadłe. Otrzymamy więc natychmiast warunek równoległości dwóch płaszczyzn i warunek ich prostopadłości, na podstawie twierdzenia 2 (art. 4) i warunku (17) art. 6-go.



Rys. 164.

Warunek równoległości.

Aby dwie płaszczyzny były do siebie równoległe, trzeba i wystarcza, żeby współczynniki współrzędnych w ich równaniach były do siebie proporcjonalne:

(5) $$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$$

Warunek prostopadłości.

Aby dwie płaszczyzny były do siebie prostopadłe, trzeba i wystarcza, żeby suma iloczynów współczynników współrzędnych równała się zeru:

(6) $$A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0$$

W przypadku ogólnym kąt między płaszczyznami równa się kątowi między wektorami do tych płaszczyzn prostopadłemi, a więc, według wzoru (15) (art. 6) na kąt między wektorami, jeśli przez φ oznaczymy *kąt ostry* między płaszczyznami, to wartość jego będzie określona przez wzór

(7) $$\operatorname{Cos} \varphi = \frac{|A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\ \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

Przykład. Mamy dwie płaszczyzny o równaniach

$$2x - y + 3z + 1 = 0; \qquad x + y - 2z + 4 = 0;$$

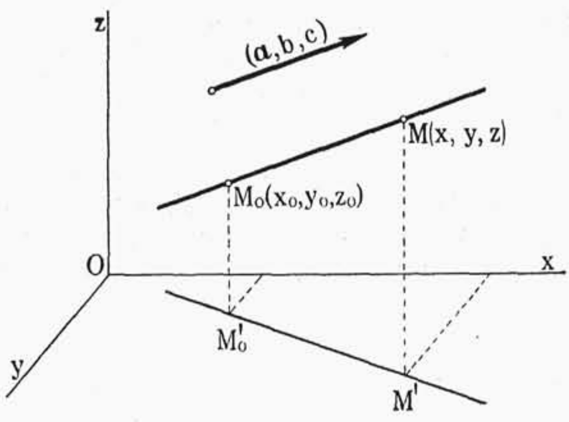
kąt ostry φ, zawarty między temi płaszczyznami, dany będzie przez wartość

$$\operatorname{Cos} \varphi = \frac{|2 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 + 3(-2)|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 3^2}\ \sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{5}{2\sqrt{21}}.$$

16. Prosta w przestrzeni.

Położenie linji prostej w przestrzeni będzie określone przez jeden punkt na niej leżący i wektor dowolny do niej równoległy. Wyznaczmy więc *równania prostej, przechodzącej przez dany punkt* $M_0(x_0, y_0, z_0)$ *i równoległej do danego wektora o składowych* (a, b, c) (rys. 165). Otóż każdy punkt prostej $M(x, y, z)$ ma tę własność, iż wektor M_0M, łączący ten punkt z punktem stałym prostej M_0, jest równoległy do wektora danego (a, b, c), a więc składowe $x - x_0$, $y - y_0$, $z - z_0$ wektora M_0M są proporcjonalne do składowych a, b, c

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c} \tag{8}$$



Rys. 165.

otrzymane związki nazywamy równaniami prostej w *postaci kierunkowej*.

Trzy liczby a, b, c, charakteryzujące kierunek prostej w przestrzeni, nazywamy *współczynnikami kierunkowemi* prostej. Otrzymane trzy związki w postaci (8) przedstawiają *równania rzutów* prostej danej na trzy płaszczyzny współrzędnych Oxy, Oyz, Oxz; *tylko dwa z tych równań są niezależne.*

Postać (8), według umowy przyjętej we wzorach (8) na str. 299, słuszna jest też w przypadku, gdy jeden lub dwa ze współczynników a, b, c równe są zeru, pod warunkiem, aby znikanie mianownika pociągało za sobą znikanie odpowiedniego licznika. A mianowicie, gdy jeden ze współczynników kierunkowych znika, np. $a = 0$, wtedy prosta jest prostopadła do osi Ox, a więc współrzędna x będzie stała i punkty spełniają dwa związki

$$x = x_0; \quad \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

Jeśli dwa ze współczynników znikają np. $a = 0$, $b = 0$, to prosta jest równoległa do osi Oz i współrzędne x i y będą miały wartości stałe

$$x = x_0; \qquad y = y_0$$

zaś współrzędna z może być dowolna.

Prostą w przestrzeni możemy też określić analitycznie, jako zbiór punktów (x, y, z), spełniających dwa związki pierwszego stopnia

$$\begin{aligned} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 &= 0 \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 &= 0 \end{aligned} \tag{9}$$

to znaczy, jako przecięcie dwóch płaszczyzn, w założeniu, iż płaszczyzny te nie są do siebie równoległe, a więc nie spełniają proporcyj (5). Rugując wtedy ze związków (9) po jednej zmiennej, otrzymamy dwa niezależne związki pierwszego stopnia z dwiema zmiennemi o postaci np.

$$x = az + p; \qquad y = bz + q \tag{10}$$

przedstawiające rzuty danej prostej na płaszczyzny (Oxz) i (Oyz).

Aby wyznaczyć współczynniki kierunkowe prostej, określonej przez związki (9), *należy te związki, przez rugowanie zmiennych, doprowadzić do postaci* (8), *to znaczy takiej, aby współczynniki zmiennych x, y, z były równe jedności, wtedy mianowniki wyrażeń przedstawiać będą współczynniki kierunkowe prostej.*

Współczynniki kierunkowe prostej są proporcjonalne do cosinusów kątów $\operatorname{Cos}\alpha$, $\operatorname{Cos}\beta$, $\operatorname{Cos}\gamma$, które jeden lub drugi zwrot prostej tworzy z osiami współrzędnych:

$$\frac{\operatorname{Cos}\alpha}{a}=\frac{\operatorname{Cos}\beta}{b}=\frac{\operatorname{Cos}\gamma}{c}$$

Aby wyznaczyć te cosinusy, zauważmy iż cosinusy kierunkowe wektora otrzymujemy, dzieląc miary jego rzutów przez dodatnią wartość wektora, t. j. przez pierwiastek z sumy kwadratów miar rzutów, a więc cosinusy kierunkowe jednego ze zwrotów prostej (8) otrzymamy, dzieląc każdy z jej współczynników kierunkowych a, b, c przez pierwiastek z sumy ich kwadratów. Ponieważ zaś cosinusy kierunkowe dwóch przeciwnych zwrotów prostej mają znaki przeciwne, a więc cosinusy kierunkowe dwóch zwrotów prostej, mającej współczynniki kierunkowe a, b, c, zawarte są we wzorach

$$\operatorname{Cos}\alpha=\pm\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$(11)\qquad \operatorname{Cos}\beta=\pm\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$\operatorname{Cos}\gamma=\pm\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

Przykład. Wyznaczyć cosinusy kierunkowe prostej, określonej przez równania

$$x+y+z=1;$$

$$3x-2y+5z=2.$$

Rugując raz zmienną z, a drugi raz zmienną y, otrzymamy równania rzutów

$$2x+7y=3;$$

$$5x+7z=\cancel{5};\ 4$$

aby doprowadzić te związki do postaci kierunkowej (8), stosujemy następujące przekształcenia:

$$2x=3-7y=\frac{2}{5}(-7z+5)$$

$$\frac{x}{\left(\frac{1}{2}\right)}=\frac{y-\frac{3}{7}}{\left(-\frac{1}{7}\right)}=\frac{z-\frac{5}{7}}{\left(-\frac{5}{14}\right)};$$

wreszcie, aby znieść ułamki, mnożymy mianowniki przez 14:

$$\frac{x}{7} = \frac{y - \frac{3}{7}}{-2} = \frac{z - \frac{5}{7}}{-5}$$

współczynniki kierunkowe prostej są więc 7, —2, —5, a zatem cosinusy kierunkowe dwóch zwrotów prostej będą takie:

$$\operatorname{Cos} \alpha = \pm \frac{7}{\sqrt{78}}; \quad \operatorname{Cos} \beta = \mp \frac{2}{\sqrt{78}}; \quad \operatorname{Cos} \gamma = \mp \frac{5}{\sqrt{78}}.$$

Znaki górne dotyczą jednego zwrotu, znaki dolne — przeciwnego.

RÓWNANIA PARAMETRYCZNE.

Ze związków (8) można łatwo otrzymać równania parametryczne prostej; oznaczmy mianowicie wspólną wartość stosunków (8) przez t:

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c} = t$$

stąd wszystkie współrzędne punktu prostej wyrażą się linjowo w zależności od zmiennej t:

$$(12) \qquad \begin{cases} x = x_0 + a\,t \\ y = y_0 + b\,t \\ z = z_0 + c\,t \end{cases}$$

zmienna t jest proporcjonalna do miary wektora, łączącego punkt stały (x_0, y_0, z_0) z punktem zmiennym (x, y, z). Związki (12) słuszne są oczywiście również w przypadku, gdy jeden lub dwa ze współczynników a, b, c znikają.

ZAGADNIENIE. Wyznaczyć równania prostej, przechodzącej przez dwa dane punkty

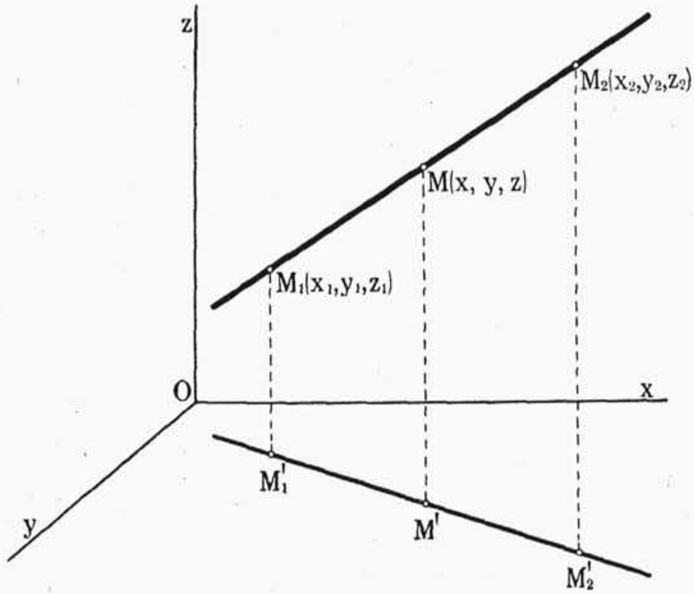
$$M_1\,(x_1, y_1, z_1) \text{ i } M_2\,(x_2, y_2, z_2)$$

Rzuty na osi wektora stałego, łączącego punkty M_1 i M_2, mają miary

$$x_1 - x_2, \quad y_1 - y_2, \quad z_1 - z_2$$

zaś rzuty wektora, łączącego np. punkt M_1 z punktem zmiennym $M(x, y, z)$, mają miary

$$x - x_1, \quad y - y_1, \quad z - z_1$$



Rys. 166.

a więc, oczywiście, pisząc proporcjonalność powyższych miar rzutów, otrzymujemy żądane równania prostej, przechodzącej przez dwa dane punkty w przestrzeni:

$$(13) \qquad \frac{x - x_1}{x_1 - x_2} = \frac{y - y_1}{y_1 - y_2} = \frac{z - z_1}{z_1 - z_2}$$

różnice $x_1 - x_2$, $y_1 - y_2$, $z_1 - z_2$ przedstawiają więc współczynniki kierunkowe prostej. W szczególnym wypadku, równania prostej, *przechodzącej przez początek układu* i przez punkt (x_0, y_0, z_0), będą miały postać

$$(13') \qquad \frac{x}{x_0} = \frac{y}{y_0} = \frac{z}{z_0}$$

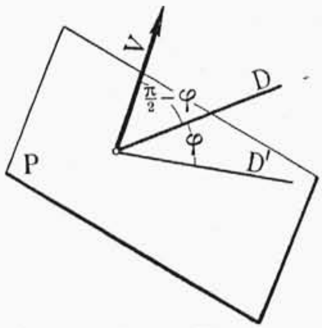
17. Położenie prostej względem płaszczyzny.

Niech będzie dana płaszczyzna P o równaniu

$$(14) \qquad Ax + By + Cz + D = 0$$

i prosta D określona przez równania

$$(15) \qquad \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$



Rys. 167.

Wiadomo, iż kąt nachylenia prostej względem płaszczyzny jest to kąt ostry, który tworzy prosta ze swoim rzutem na płaszczyznę; ale kąt ten φ jest dopełniającym do $\frac{\pi}{2}$ (rys. 167) względem kąta, który prosta dana tworzy z wektorem $\overrightarrow{V}$ o składowych A, B, C, prostopadłym do płaszczyzny danej. Ponieważ liczby a, b, c przedstawiają miary rzutów wektora równoległego do danej prostej, a więc dla kąta ostrego φ, t. j. kąta nachylenia prostej (15) względem płaszczyzny (14), otrzymamy wzór następujący:

$$\text{Sin}\,\varphi = \frac{|Aa + Bb + Cc|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\,\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \tag{16}$$

Prosta D jest do płaszczyzny P *równoległa*, jeśli odwrotnie, wektory (A, B, C) i (a, b, c) są do siebie *prostopadłe*. Prosta zaś jest do płaszczyzny *prostopadła*, jeśli wektory (A, B, C) i (a, b, c) są do siebie *równoległe*.

Mamy więc taki *warunek równoległości* prostej (15) do płaszczyzny (14):

$$Aa + Bb + Cc = 0 \quad (\|) \tag{17}$$

i następujący *warunek prostopadłości* prostej do płaszczyzny:

$$\frac{A}{a} = \frac{B}{b} = \frac{C}{c} \quad (\perp) \tag{18}$$

18. Płaszczyzna przesunięta przez daną prostą.

Niech będzie prosta, określona przez dwa związki

$$\begin{aligned} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 &= 0 \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 &= 0 \end{aligned} \tag{19}$$

Rozważmy związek, będący kombinacją linjową związków powyższych

$$A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 + \lambda (A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2) = 0 \tag{20}$$

λ jest dowolnym stałym współczynnikiem. Zbiór punktów, spełniających równanie (20), tworzy pewną płaszczyznę, gdyż związek ten jest pierwszego stopnia i nie jest tożsamością z założenia; nadto widzimy, iż współrzędne (x, y, z), spełniające jednocześnie oba związki (19), będą spełniały też związek (20); oznacza to geometrycznie, iż wszystkie punkty prostej (19) leżą na płaszczyźnie (20). Mamy więc następującą własność.

TWIERDZENIE. Związek, będący kombinacją linjową dwóch związków, określających prostą, przedstawia płaszczyznę przesuniętą przez daną prostą.

Zmieniając wartość współczynnika λ w równaniu (20) otrzymamy *pęk płaszczyzn*, przechodzących przez prostą (19). Łatwo wykazać, iż zbiór ten zawiera wszelkie możliwe płaszczyzny, przechodzące przez prostą (19) (z wyjątkiem jednej). Twierdzenie powyższe słuszne jest również, gdy prosta określona jest przez swoje rzuty, t. j. przez dwa związki z dwiema zmiennemi. A więc równanie płaszczyzny, przesuniętej przez prostą określoną przez związki

$$x = az + p$$
$$y = bz + q$$

będzie miało postać

$$x - az - p + \lambda(y - bz - q) = 0$$

W szczególnym wypadku, równanie płaszczyzny przesuniętej przez prostą, leżącą w płaszczyźnie (Oxy), a więc określoną przez dwa równania $ax + by + c = 0$ i $z = 0$, będzie miało postać

$$ax + by + c + \lambda z = 0$$

Z dowolności współczynnika λ *w równaniu* (20) *można tak skorzystać, aby płaszczyzna* (20) *spełniała nadto jakiś drugi warunek.* Zagadnienia odpowiednie rozważymy w rozdziale następnym.

ROZDZIAŁ VI.

ZAGADNIENIA DOTYCZĄCE PŁASZCZYZNY I PROSTEJ.

19. Przecięcie się trzech płaszczyzn i płaszczyzny z prostą.

ZAGADNIENIE 1. *Wyznaczyć punkt przecięcia się trzech płaszczyzn.* Odnalezienie współrzędnych punktu przecięcia się trzech płaszczyzn określonych przez równania

$$(1) \qquad \begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 &= 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 &= 0 \\ A_3x + B_3y + C_3z + D_3 &= 0 \end{aligned}$$