GEOMETRJA ANALITYCZNA

KOMISJA WYDAWNICZA
TOW. BRATNIEJ POMOCY STUDENTÓW POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

Dr. WITOLD POGORZELSKI
PROFESOR POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

GEOMETRJA ANALITYCZNA

Z 203 RYSUNKAMI

WARSZAWA — 1931

Zakłady Drukarskie
F. Wyszyński i S-ka
Warszawa, Warecka 15

Przedmowa.

Podręcznik niniejszy zawiera zasadnicze pojęcia Geometrji Analitycznej na płaszczyźnie i w przestrzeni w zakresie utworów drugiego stopnia. Przeznaczony jest on dla słuchaczów wyższych uczelni, jako pierwszy stopień studjów matematycznych. Ponieważ wykład Geometrji Analitycznej w szkołach wyższych odbywa się zwykle równolegle z wykładem pierwszych zasad Analizy Matematycznej, nie unikałem więc w tym podręczniku wyraźnego wprowadzania pojęcia pochodnej i założyłem, iż czytelnik zna zasady różniczkowania w zakresie elementarnym.

W końcu książki dodałem krótki zarys, poświęcony własnościom wyznacznika i równań linjowych, chcąc ułatwić czytelnikowi zapoznanie się z temi pojęciami, potrzebnemi w wykładzie Geometrji Analitycznej.

AUTOR.

Warszawa, w czerwcu 1931 r.

SPIS RZECZY.

CZĘŚĆ PIERWSZA.

GEOMETRJA ANALITYCZNA NA PŁASZCZYŹNIE.

ROZDZIAŁ I.

Współrzędne na płaszczyźnie. Wektory.

ROZDZIAŁ II.

Wiadomości ogólne o linjach krzywych i ich równaniach.

ROZDZIAŁ III.

Zagadnienia dotyczące linji prostej.

ROZDZIAŁ IV.

Własności formy kwadratowej. Równanie jednorodne.

ROZDZIAŁ V.

Styczna i normalna do krzywej.

ROZDZIAŁ VI.

Zagadnienia dotyczące koła.

ROZDZIAŁ VII.

Miejsca geometryczne.

ROZDZIAŁ VIII.

Badanie krzywych drugiego stopnia.

ROZDZIAŁ IX.

Ogniska i kierownice krzywych drugiego stopnia.

ROZDZIAŁ X.

Własności szczególne elipsy.

ROZDZIAŁ XI.

Własności szczególne hyperboli.

ROZDZIAŁ XII.

Własności szczególne paraboli.

ROZDZIAŁ XIII.

Średnice sprzężone.

ROZDZIAŁ XIV.

Ogólna postać równania stycznej do krzywej drugiego stopnia. Biegun i biegunowa.

ROZDZIAŁ XV.

O przecięciu się krzywych drugiego stopnia.

ROZDZIAŁ XVI.

Twierdzenia Pascala i Brianchona.

ROZDZIAŁ XVII.

Zagadnienia dotyczące krzywych drugiego stopnia.

ROZDZIAŁ XVIII.

Przekształcenia krzywych.

ROZDZIAŁ XIX.

Krzywe cykliczne.

CZĘŚĆ DRUGA.

GEOMETRJA ANALITYCZNA W PRZESTRZENI.

ROZDZIAŁ I.

Współrzędne w przestrzeni.

ROZDZIAŁ II.

O wektorach w przestrzeni.

ROZDZIAŁ III.

Zamiana współrzędnych prostokątnych.

ROZDZIAŁ IV.

O powierzchni i linji w przestrzeni.

ROZDZIAŁ V.

Płaszczyzna i prosta w przestrzeni.

ROZDZIAŁ VI.

Zagadnienia dotyczące płaszczyzny i prostej.

ROZDZIAŁ VII.

Zagadnienia dotyczące kuli i koła w przestrzeni.

ROZDZIAŁ VIII.

O powierzchniach utworzonych przez układy linij.

ROZDZIAŁ IX.

Powierzchnie drugiego stopnia.

ROZDZIAŁ X.

Płaszczyzna styczna do powierzchni drugiego stopnia.

DODATEK.

O wyznacznikach i równaniach linjowych.

CZĘŚĆ I.

GEOMETRJA ANALITYCZNA NA PŁASZCZYŹNIE

ROZDZIAŁ I.

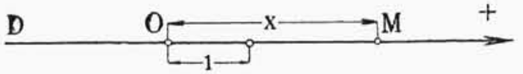
WSPÓŁRZĘDNE NA PŁASZCZYŹNIE. WEKTORY.

1. Uwaga wstępna.

Pojęciom geometrycznym, jak np. punktom i linjom, można podporządkować pewne pojęcia analityczne, mianowicie liczby i równania. Konstrukcjom geometrycznym i badaniom utworów geometrycznych odpowiadać wtedy będą pewne działania analityczne i rozumowania nad liczbami i równaniami. Przedmiotem Geometrji Analitycznej jest właśnie rozwiązywanie zagadnień geometrycznych przy pomocy rozważań nad elementami analitycznemi.

2. Współrzędne punktu.

Niech będzie dowolna prosta D i punkt na niej leżący O (rys. 1). Jeśli przyjmiemy pewien odcinek za jednostkowy, wtedy każdemu

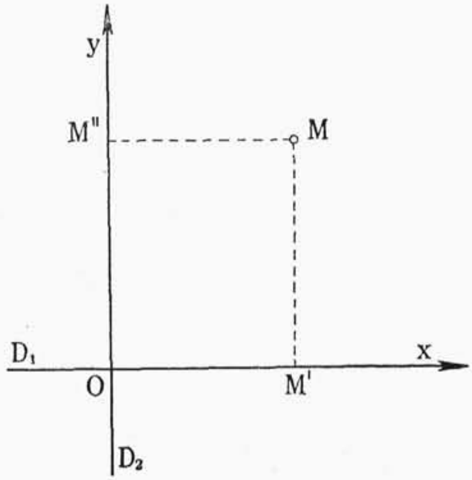


Rys. 1.

punktowi M prostej będziemy mogli podporządkować określoną liczbę x wymierną lub niewymierną, wyrażającą długość odcinka OM. Umówmy się, iż liczbę tę będziemy uważali za dodatnią, jeśli punkt M znajduje się po określonej stronie punktu O, np. na prawo, zaś w przeciwnym wypadku za ujemną. Liczba x w zupełności określa położenie punktu M na prostej D, liczbę tę nazywamy **współrzędną** punktu M—jest to odpowiednik analityczny pojęcia punktu na prostej.

Prostą, na której, w związku ze znakiem współrzędnej, przyjęto pewien zwrot za dodatni, nazywać będziemy **osią**.

Rozważmy teraz położenie punktu na płaszczyźnie. Niech będą na płaszczyźnie dwie osi prostopadłe D_1 i D_2 (rys. 2), prze-

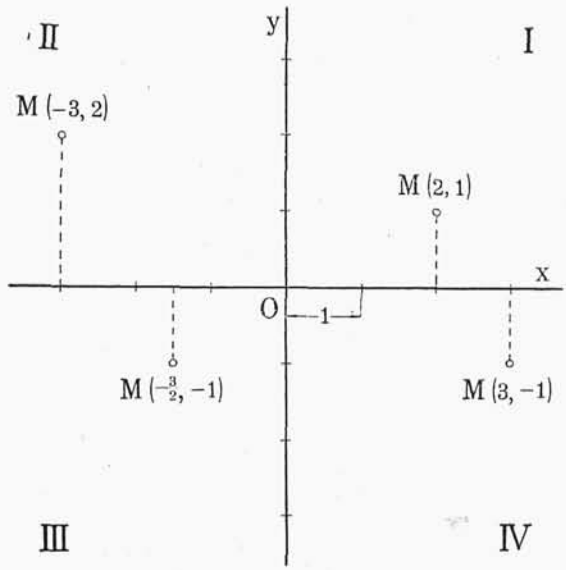


Rys. 2.

cinające się w punkcie O. Weźmy dowolny punkt płaszczyzny M i wyprowadźmy z niego prostopadłe MM' i MM'' do obydwóch osi, M' i M'' niech będą spodkami tych prostopadłych. Położenia punktów M' i M'' na osiach D_1 i D_2 będą określone przez współrzędne dodatnie lub ujemne

$$OM' = x \qquad OM'' = y$$

Parze liczb (x, y) odpowiada, odwrotnie, tylko jeden punkt płaszczyzny M, para ta określa więc w zupełności położenie punktu M na płaszczyźnie względem osi D_1 i D_2. Liczby x, y nazywamy **współrzędnemi prostokątnemi** punktu M na płaszczyźnie; jedną z nich np. x nazwiemy **odciętą**, zaś drugą y nazwiemy **rzędną**. Oś D_1, wzdłuż której odmierzamy odcięte x, nazwiemy **osią odciętych**, zaś oś D_2 **osią rzędnych**. W celu zaznaczenia zwrotu dodatniego tych osi, stawiamy przy końcu osi, odpowiadającemu dodatniemu zwrotowi, literę x względnie y, lub inne litery, zależnie od symbolów przyjętych dla współrzędnych. Punkt przecięcia O osi nazwiemy **początkiem współrzędnych**, odpowiada on parze liczb (0,0). Danej dowolnie parze współrzędnych (x, y) odpowiada zawsze określony punkt płaszczyzny; dowolna para liczb (x, y) jest więc odpowiednikiem analitycznym pojęcia punktu na płaszczyźnie. W zagadnieniach Geometrji Analitycznej zdanie „dany jest punkt na płaszczyźnie" oznaczać będzie „dana jest para liczb". Dla zaznaczenia, iż liczby x i y są współrzędnemi punktu M, będziemy pisali w sposób następujący: $M(x, y)$. Osi współrzędnych Ox i Oy dzielą płaszczyznę na cztery części, które będziemy rozpatrywali w porządku, odpowiadającym obrotowi od Ox do Oy (rys. 3). Punkty, któ-



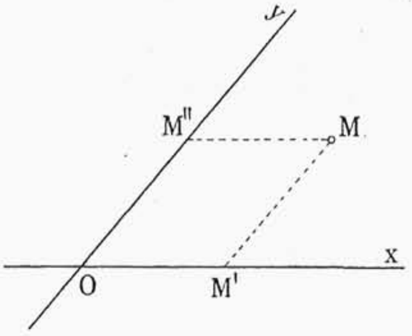
Rys. 3.

rych obydwie współrzędne są dodatnie, leżą w pierwszej ćwiartce np. punkt M (2,1); punkty, których odcięta jest ujemna, zaś rzędna dodatnia, znajdują się w drugiej ćwiartce, np. punkt M (— 3,2); punkty, których obydwie współrzędne są ujemne, znajdują się w ćwiartce trzeciej, np. punkt $M(-\frac{3}{2}, -1)$; punkty wreszcie, których odcięta jest dodatnia, zaś rzędna ujemna, leżą w ćwiartce czwartej, np. punkt M (3, — 1). Punkty, których rzędna jest zerem ($y = 0$) leżą na osi odciętych, zaś punkty, których odcięta jest zerem ($x = 0$), leżą na osi rzędnych.

Powyżej określone współrzędne prostokątne są szczególnym przypadkiem t. zw. współrzędnych prostolinjowych lub kartezjańskich, które określimy, biorąc pod uwagę dwie osi

Ox i Oy wogóle nieprostopadłe względem siebie i prowadząc przez dany punkt płaszczyzny M dwie proste równoległe do tych osi (rys. 2a); w przecięciu z osiami Ox i Oy otrzymamy wtedy punkty M' i M'', których współrzędne

$$OM' = x \qquad OM'' = y$$



Rys 2a.

określają również położenie punktu M na płaszczyźnie — będą to właśnie współrzędne prostolinjowe punktu M. W przypadku prostopadłości osi Ox i Oy, nazywamy te współrzędne prostokątnemi, zaś w razie pochyłości osi—współrzędnemi ukośnokątnemi.

3. Położenie wektora na osi.

Wektorem nazywamy odcinek, mający określoną długość, położenie i zwrot w przestrzeni. Odpowiednio do zwrotu wektora, rozróżniamy jego początek i koniec. Pojęcie wektora odgrywa rolę zasadniczą w Geometrji Analitycznej, rozpatrzymy więc szczegółowiej jego własności elementarne.

Zajmiemy się wpierw rozpatrzeniem wektorów, leżących na osi, to znaczy prostej, na której wybrano pewien zwrot za dodatni. Niech będzie dowolna oś Ox i wektor na niej leżący, posiadający początek w punkcie A, zaś koniec w punkcie B (rys. 4).

Rys. 4.

Miarą wektora na osi nazywać będziemy liczbę względną, równą długości danego wektora (w pewnych jednostkach) *opatrzonej znakiem dodatnim lub ujemnym, zależnie od tego, czy zwrot wektora na osi jest zgodny ze zwrotem tej osi, czy też jest przeciwny.*

Miarę wektora na osi, mającego początek A i koniec B, oznaczymy symbolem

$$\overline{AB}$$

Z umowy powyższej wynika, iż

$$\overline{BA} = -\overline{AB}$$

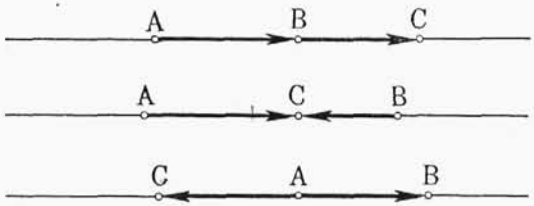
TWIERDZENIE CHASLES'A. Jeśli A, B, C oznaczają trzy dowolnie położone punkty na osi, to miary trzech wektorów

$$\overline{AB},\ \overline{BC},\ \overline{AC}$$

spełniają zawsze związek

$$\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{AC}$$

Słuszność tego związku spostrzegamy natychmiast, pamiętając o przyjętej umowie dla znaku miary wektora i biorąc pod uwagę trzy możliwe przypadki przedstawione na rys. 5: gdy punkt C leży na prawo od punktów A i B, gdy leży między niemi i gdy leży na lewo od nich, oraz trzy przypadki przez odwrócenie kolejności tych położeń.



Rys. 5.

Z twierdzenia Chasles'a wynika następujący zasadniczy w Geometrji Analitycznej wniosek, dotyczący związku między miarą wektora na osi i współrzędnemi jego początku i końca.

WNIOSEK. Aby otrzymać miarę wektora na osi, należy od współrzędnej końca wektora odjąć współrzędną początku wektora.

Istotnie, jeśli O oznacza początek współrzędnych, A — początek wektora, zaś B jego koniec na osi Ox, to, według umowy dla znaku współrzędnych, współrzędna początku A wektora równa się mierze wektora $\overline{OA}$, zaś współrzędna końca B równa jest mierze $\overline{OB}$; według twierdzenia Chasles'a dla trzech punktów osi O, A, B, niezależnie od tego, jakie położenie zajmuje początek współrzędnych O względem punktów A i B, będziemy mieli zawsze

$$\overline{OA}+\overline{AB}=\overline{OB}$$

stąd

(2) $$\overline{AB}=\overline{OB}-\overline{OA}$$

c.b.d.d. Zaznaczymy jeszcze raz, że *wzór otrzymany stosuje się w każdym wypadku, pod warunkiem, aby liczbę* $\overline{AB}$ *i współrzędne* $\overline{OA}$ i $\overline{OB}$ *traktować jako wielkości opatrzone odpowiednim znakiem.*

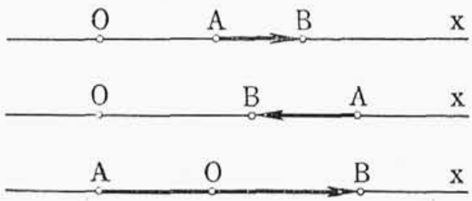
P r z y k ł a d 1. Współrzędne początku i końca wektora wynoszą

$$\overline{OA} = 3; \quad \overline{OB} = 5;$$

wtedy miara wektora będzie

$$\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA} = 5 - 3 = 2.$$

Zwrot wektora jest więc zgodny ze zwrotem osi (rys. 6).



Rys. 6.

P r z y k ł a d 2.

$$\overline{OA} = 7; \quad \overline{OB} = 4;$$

wtedy

$$\overline{AB} = 4 - 7 = -3;$$

wektor ma więc zwrot przeciwny względem zwrotu osi Ox.

P r z y k ł a d 3.

$$\overline{OA} = -3; \quad \overline{OB} = 4;$$

wtedy

$$\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA} = 4 - (-3) = 7.$$

UOGÓLNIENIE TWIERDZENIA CHASLES'A. Niech będzie n dowolnie położonych punktów na osi

$$A_1, A_2, A_3, \ldots\ldots\ldots A_{n-1}, A_n.$$

Jeśli O jest początkiem współrzędnych, to mamy, według wzoru (2)

$$\overline{A_1 A_2} = \overline{O A_2} - \overline{O A_1}$$

$$\overline{A_2 A_3} = \overline{O A_3} - \overline{O A_2}$$

$$\overline{A_3 A_4} = \overline{O A_4} - \overline{O A_3}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\overline{A_{n-1} A_n} = \overline{O A_n} - \overline{O A_{n-1}}$$

stąd, po dodaniu, wypada uogólnienie twierdzenia C h a s l e s'a:

$$\overline{A_1 A_2} + \overline{A_2 A_3} + \overline{A_3 A_4} + \ldots + \overline{A_{n-1} A_n} = \overline{O A_n} - \overline{O A_1} = \overline{A_1 A_n} \tag{3}$$