zek ten jest pierwszego stopnia i nie jest tożsamością z założenia; nadto widzimy, iż współrzędne (x, y, z), spełniające jednocześnie oba związki (19), będą spełniały też związek (20); oznacza to geometrycznie, iż wszystkie punkty prostej (19) leżą na płaszczyźnie (20). Mamy więc następującą własność.

TWIERDZENIE. Związek, będący kombinacją linjową dwóch związków, określających prostą, przedstawia płaszczyznę przesuniętą przez daną prostą.

Zmieniając wartość współczynnika λ w równaniu (20) otrzymamy *pęk płaszczyzn*, przechodzących przez prostą (19). Łatwo wykazać, iż zbiór ten zawiera wszelkie możliwe płaszczyzny, przechodzące przez prostą (19) (z wyjątkiem jednej). Twierdzenie powyższe słuszne jest również, gdy prosta określona jest przez swoje rzuty, t. j. przez dwa związki z dwiema zmiennemi. A więc równanie płaszczyzny, przesuniętej przez prostą określoną przez związki

$$x = az + p$$
$$y = bz + q$$

będzie miało postać

$$x - az - p + \lambda (y - bz - q) = 0$$

W szczególnym wypadku, równanie płaszczyzny przesuniętej przez prostą, leżącą w płaszczyźnie (Oxy), a więc określoną przez dwa równania $ax + by + c = 0$ i $z = 0$, będzie miało postać

$$ax + by + c + \lambda z = 0$$

Z dowolności współczynnika λ *w równaniu* (20) *można tak skorzystać, aby płaszczyzna* (20) *spełniała nadto jakiś drugi warunek.* Zagadnienia odpowiednie rozważymy w rozdziale następnym.

ROZDZIAŁ VI.

ZAGADNIENIA DOTYCZĄCE PŁASZCZYZNY I PROSTEJ.

19. Przecięcie się trzech płaszczyzn i płaszczyzny z prostą.

ZAGADNIENIE 1. *Wyznaczyć punkt przecięcia się trzech płaszczyzn.* Odnalezienie współrzędnych punktu przecięcia się trzech płaszczyzn określonych przez równania

$$\begin{aligned} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 &= 0 \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 &= 0 \qquad (1) \\ A_3 x + B_3 y + C_3 z + D_3 &= 0 \end{aligned}$$

sprowadza się do rozwiązania układu trzech równań linjowych z trzema niewiadomemi (x, y, z). Trzy płaszczyzny przecinają się więc *w jednym określonym punkcie* w wypadku ogólnym, gdy wyznacznik charakterystyczny układu równań (1) *nie jest zerem:*

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_1, B_1, C_1 \\ A_2, B_2, C_2 \\ A_3, B_3, C_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

Jeśli $\Delta = 0$, wtedy, jak wynika z dyskusji układu trzech równań z trzema niewiadomemi, podanej w dodatku o wyznacznikach, układ nie posiada rozwiązań, lub też posiada ich nieskończenie wiele. Ten ostatni wypadek zachodzi bądź wtedy, gdy niewszystkie podwyznaczniki wyznacznika Δ znikają i jedno z danych trzech równań (1) jest kombinacją linjową dwóch pozostałych, bądź wtedy, gdy wszystkie współczynniki równań są do siebie odpowiednio proporcjonalne; w pierwszym razie oznacza to geometrycznie, iż trzy dane płaszczyzny przechodzą przez tę samą prostą, w drugim zaś, iż trzy dane płaszczyzny są zjednoczone.

ZAGADNIENIE 2. *Wyznaczyć punkt, w którym dana prosta przebija płaszczyznę daną.*

Dana jest płaszczyzna o równaniu

(2) $$Ax + By + Cz + D = 0$$

i prosta określona przez związki

(3) $$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

Współrzędne punktu przebicia otrzymamy, rozwiązując układ równań (2) i (3) z trzema niewiadomemi (x, y, z). Rachunek staje się bardziej symetryczny w razie użycia parametru t w równaniach (3), mamy mianowicie z równań prostej

$$x = x_0 + at; \qquad y = y_0 + bt; \qquad z = z_0 + ct,$$

wstawiając te wartości w równanie płaszczyzny, otrzymamy równanie

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D + (Aa + Bb + Cc)t = 0,$$

z którego możemy wyznaczyć wartość parametru t, odpowiadającą punktowi przebicia. Widzimy, iż istnieje określone rozwiązanie, gdy

$$Aa + Bb + Cc \neq 0$$

to znaczy, gdy dana prosta nie jest równoległa do danej płaszczyzny.

20. Wyznaczanie płaszczyzn.

ZAGADNIENIE 1. *Znaleść równanie płaszczyzny, przesuniętej przez trzy dane punkty* (x_1, y_1, z_1); (x_2, y_2, z_2); (x_3, y_3, z_3).

Szukane równanie płaszczyzny o postaci

$$Ax + By + Cz + D = 0 \tag{4}$$

winno być spełnione w trzech danych punktach, mamy więc trzy warunki

$$\begin{aligned} Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D &= 0 \\ Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D &= 0 \\ Ax_3 + By_3 + Cz_3 + D &= 0 \end{aligned} \tag{5}$$

pozwalające określić stosunki współczynników A, B, C, D. Równanie szukanej płaszczyzny będzie więc rezultatem rugowania niewiadomych A, B, C, D z układu czterech równań jednorodnych (4) i (5), a więc będzie miało postać następującą:

$$\begin{vmatrix} x, & y, & z, & 1 \\ x_1, & y_1, & z_1, & 1 \\ x_2, & y_2, & z_2, & 1 \\ x_3, & y_3, & z_3, & 1 \end{vmatrix} = 0 \tag{6}$$

Jeśli trzy dane punkty *nie leżą na linji prostej*, wtedy podwyznaczniki wyznacznika (6), odpowiadające elementom x, y, z *nie znikają jednocześnie* i wtedy równanie (6) przedstawia określoną i jedyną płaszczyznę, przechodzącą przez trzy dane punkty.

Gdy trzy dane punkty leżą na jednej prostej, to znaczy spełniają proporcje

$$\frac{x_3 - x_1}{x_1 - x_2} = \frac{y_3 - y_1}{y_1 - y_2} = \frac{z_3 - z_1}{z_1 - z_2}$$

wtedy wszystkie podwyznaczniki wyznacznika (6) znikają jednocześnie i równanie (6) nie będzie przedstawiało rozwiązania, albowiem stanie się wtedy tożsamością. W takim wypadku otrzymamy nieskończenie wiele rozwiązań, prowadząc płaszczyzny przez dwa tylko punkty dane, każda bowiem z tych płaszczyzn będzie zawierała i punkt trzeci. Żądane płaszczyzny, przechodzące przez dwa dane punkty, np. (x_1, y_1, z_1) i (x_2, y_2, z_2) winny spełniać warunki

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0$$
$$A(x_1 - x_2) + B(y_1 - y_2) + C(z_1 - z_2) = 0$$

stąd, po wyrugowaniu np. parametru C, otrzymamy, iż płaszczyzny, przechodzące przez dane punkty, będą miały równania o postaci

$$A[(x - x_1)(z_1 - z_2) - (z - z_1)(x_1 - x_2)] +$$
$$+ B[(y - y_1)(z_1 - z_2) - (z - z_1)(y_1 - y_2)] = 0$$

gdzie A i B są to stałe dowolne. Widzimy, iż równanie otrzymane jest kombinacją linjową równań dwóch rzutów na płaszczyzny Oxz i Oyz prostej, przechodzącej przez dane punkty, zgodnie z rozważaniem artykułu (18).

ZAGADNIENIE 2. *Znaleść równanie płaszczyzny, przesuniętej przez prostą daną*

$$D\begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ 3x - z = 1 \end{cases}$$

i *przez punkt* $A(2, -1, 1)$.

Według artykułu 18, równanie szukanej płaszczyzny, przesuniętej przez prostą D, będzie kombinacją linjową związków, określających prostą D, a więc będzie takie:

$$2x + y + z + \lambda(3x - z - 1) = 0$$

Z dowolności λ skorzystamy tak, aby płaszczyzna przechodziła przez punkt $(2, -1, 1)$, mamy więc warunek

$$2 . 2 - 1 + 1 + \lambda(3 . 2 - 1 - 1) = 0$$

z którego wynika wartość $\lambda = -1$, a więc równanie płaszczyzny szukanej będzie następujące:

$$2x + y + z - (3x - z - 1) = 0$$

t. j.

$$-x + y + 2z + 1 = 0$$

ZAGADNIENIE 3. *Znaleść równanie płaszczyzny przesuniętej przez prostą daną*

$$D\begin{cases} 3x - y = 1 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$$

i prostopadłej do płaszczyzny danej o równaniu

$$(P) \quad 7x - y + 2z - 5 = 0$$

Płaszczyznę, przesuniętą przez prostą D, przedstawia równanie

$$(7) \qquad 3x - y - 1 + \lambda(x + y - z) = 0$$

należy tak dobrać λ, aby ta płaszczyzna była prostopadła do płaszczyzny P; uporządkujmy więc równanie (7)

$$(3 + \lambda)x + (\lambda - 1)y - \lambda z - 1 = 0$$

i napiszmy warunek prostopadłości do płaszczyzny P:

$$(3 + \lambda)7 + (\lambda - 1)(-1) + (-\lambda)2 = 0$$

z tego równania otrzymamy $\lambda = -\frac{11}{2}$, wstawiając zaś tę wartość do równania (7) uzyskamy, po dokonaniu redukcji, równanie szukanej płaszczyzny

$$5x + 13y - 11z + 2 = 0$$

Zagadnienie rozważane ma oczywiście nieskończenie wiele rozwiązań, gdy dana prosta jest prostopadła do danej płaszczyzny.

ZAGADNIENIE 4. Znaleść równanie płaszczyzny, przesuniętej przez prostą daną

$$D_1 \begin{cases} x + 3y = 3 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$$

i równoległej do prostej skośnej względem niej

$$D_2 \begin{cases} x + z = 1 \\ 3x - y + z = 0 \end{cases}$$

Równanie szukane jest kombinacją równań prostej D_1:

$$x + 3y - 3 + \lambda(x + y - z) = 0$$

t. j.

$$(8) \qquad (1 + \lambda)x + (\lambda + 3)y - \lambda z - 3 = 0$$

aby napisać warunek równoległości tej płaszczyzny do prostej D_2, trzeba uwidocznić współczynniki kierunkowe prostej D_2, piszemy więc:

$$1 - x = z; \quad 3 - y - 2z = 0$$

stąd

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z}{-1}$$

warunek równoległości szukanej płaszczyzny (8) do prostej D_2 wypadnie więc w postaci (art. 17)

$$(1+\lambda)1+(\lambda+3)2+(-\lambda)(-1)=0$$

stąd $\lambda=-\frac{7}{4}$, równanie żądanej płaszczyzny będzie więc takie:

$$3x-5y-7z+12=0$$

ZAGADNIENIE 5. *Wyznaczyć równanie płaszczyzny, przechodzącej przez daną prostą:*

$$D\begin{cases} x+y=1 \\ 2x-z=3 \end{cases}$$

która tworzyłaby kąt dany ostry φ *z daną płaszczyzną*

$$(P)\ x+3y-z+1=0$$

Płaszczyzna, przesunięta przez prostą D, ma równanie

$$x+y-1+\lambda(2x-z-3)=0$$

t. j.

$$(1+2\lambda)x+y-\lambda z-1-3\lambda=0$$

trzeba teraz tak dobrać λ, żeby płaszczyzna ta tworzyła kąt dany φ z płaszczyzną P, mamy więc warunek

$$\cos\varphi=\frac{|1\cdot(1+2\lambda)+3+(-1)\cdot(-\lambda)|}{\sqrt{1^2+3^2+1^2}\ \sqrt{(1+2\lambda)^2+1^2+\lambda^2}}$$

z którego otrzymamy równanie drugiego stopnia

$$(9)\qquad (55\cos^2\varphi-9)\lambda^2+4(11\cos^2\varphi-6)\lambda+(22\cos^2\varphi-16)=0$$

dwóm pierwiastkom λ_1 i λ_2 tego równania odpowiadają dwie płaszczyzny żądane. Przeprowadźmy dyskusję równania (9). Otóż równanie (9) posiada rozwiązanie rzeczywiste, jeśli dany zgóry kąt φ spełnia warunek

$$4(11\cos^2\varphi-6)^2-(55\cos^2\varphi-9)(22\cos^2\varphi-16)\geqslant 0$$

wypada stąd, po dokonaniu redukcji,

$$-33\cos^2\varphi+25\geqslant 0$$

Zagadnienie dane posiada więc wtedy rozwiązania rzeczywiste, jeśli

$$(10) \qquad \cos^2\varphi \leqslant \frac{25}{33}$$

to znaczy, jeśli dany kąt ostry φ jest większy lub równy kątowi ostremu φ_0, określonemu przez wartość

$$(11) \qquad \cos^2\varphi_0 = \frac{25}{33}$$

Zagadnienie ma dwa rozwiązania, jeśli $\varphi > \varphi_0$, zaś jedno rozwiązanie w przypadku $\varphi = \varphi_0$.

Z rozważań czysto geometrycznych jest widoczne, iż płaszczyzna, przesunięta przez prostą D, tworzy z płaszczyzną P kąt zawsze większy lub równy kątowi nachylenia prostej D względem płaszczyzny P. Kąt φ_0, otrzymany z dyskusji powyższej, winien być właśnie tym kątem nachylenia prostej D względem płaszczyzny P. Istotnie, pisząc równanie prostej D w postaci

$$\frac{x}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+3}{2}$$

mamy dla kąta, który ona tworzy z płaszczyzną P, wyrażenie

$$\sin^2\varphi_0 = \frac{[11 + 3(-1) + 2\cdot(-1)]^2}{66} = \frac{8}{33}$$

stąd $\cos^2\varphi_0 = \frac{25}{33}$, zgodnie z wartością (11).

21. Zagadnienia dotyczące prostych.

ZAGADNIENIE 1. *Napisać warunek, aby dwie dane proste w przestrzeni:*

$$D_1 \begin{cases} x = a_1 z + p_1 \\ y = b_1 z + q_1 \end{cases} \qquad D_2 \begin{cases} x = a_2 z + p_2 \\ y = b_2 z + q_2 \end{cases}$$

leżały w jednej płaszczyźnie.

Dwie proste w przestrzeni leżą w jednej płaszczyźnie, gdy się przecinają, lub gdy są do siebie równoległe. Wypadek pierwszy zachodzi wtedy, gdy układ czterech równań prostych D_1 i D_2 ma wspólne rozwiązanie (x, y, z); w tym celu trzeba i wystarcza, żeby istniała wartość na z, spełniająca dwa związki

$$\begin{cases} a_1 z + p_1 = a_2 z + p_2 \\ b_1 z + q_1 = b_2 z + q_2 \end{cases}$$

lub

$$\begin{cases} (a_1 - a_2) z + (p_1 - p_2) = 0 \\ (b_1 - b_2) z + (q_1 - q_2) = 0 \end{cases}$$

Jeśli różnice $a_1 - a_2$ i $b_1 - b_2$ nie znikają jednocześnie, to odpowiedni warunek ma więc postać związku

(12) $$(a_1 - a_2)(q_1 - q_2) - (b_1 - b_2)(p_1 - p_2) = 0;$$

jeśli zaś różnice $a_1 - a_2$ i $b_1 - b_2$ znikają obie, wtedy równania nie mają wspólnego rozwiązania, ale proste są wtedy *równoległe*, a zatem związek (12) w każdym wypadku jest warunkiem koniecznym i wystarczającym, aby dwie dane proste D_1 i D_2 leżały w jednej płaszczyźnie.

ZAGADNIENIE 2. *Z danego punktu przestrzeni $A(1, 2, -3)$ wyprowadzić prostopadłą do prostej D danej przez związki*

$$D \begin{cases} x + 2y = 1 \\ 2x - y + 3z = 1 \end{cases}$$

Szukaną prostopadłą można uważać, jako przecięcie się płaszczyzny P_1, przesuniętej przez prostą D i punkt A, z płaszczyzną P_2, poprowadzoną przez punkt A, prostopadle do prostej D (rys. 168). Równanie płaszczyzny P_1 ma postać kombinacji równań prostej D

$$x + 2y - 1 + \lambda(2x - y + 3z - 1) = 0$$

λ dobieramy tak, aby płaszczyzna przechodziła przez punkt A, mamy więc

$$1 + 2 \cdot 2 - 1 + \lambda(2 \cdot 1 - 2 + 3(-3) - 1) = 0$$

stąd $\lambda = +\frac{2}{5}$ i równanie płaszczyzny P_1 będzie takie:

(13) $$9x + 8y + 6z - 7 = 0 \quad (P_1)$$

Aby odnaleść równanie płaszczyzny P_2, wyznaczmy wpierw współczynniki kierunkowe prostej D, piszemy więc jej równania w postaci

$$(14)\qquad \frac{x}{6}=\frac{y-\frac{1}{2}}{-3}=\frac{z-\frac{1}{2}}{-5}$$

równanie płaszczyzny P_2, przechodzącej przez punkt $(1, 2, -3)$ i prostopadłej do prostej D, będzie więc takie:

$$6(x-1)-3(y-2)-5(z+3)=0$$

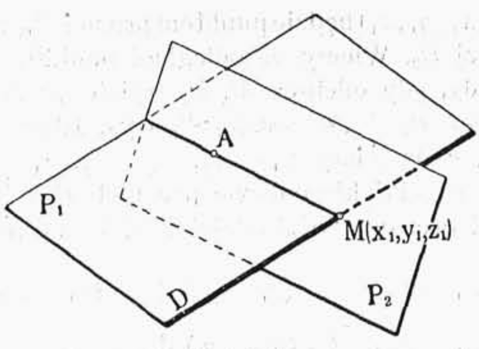
t. j.

$$(15)\qquad \underline{6x-3y-5z-15=0}$$

Równania (13) i (15) określają szukaną prostopadłą. Jej rzuty można otrzymać, rugując jedną zmienną ze związków (13) i (15).

Aby wyznaczyć spodek tej prostopadłej $M(x_1, y_1, z_1)$, wyraźmy z równań (14) prostej D dwie współrzędne np. x_1 i y_1 w zależności od trzeciej z_1:

$$\begin{cases} x_1=-\frac{6}{5}z_1+\frac{3}{5} \\ y_1=\frac{3}{5}z_1+\frac{1}{5} \end{cases}$$



Rys. 168.

i podstawmy te wyrażenia w równanie (15) płaszczyzny P_2, wypadnie wtedy takie równanie z jedną niewiadomą:

$$6\left(-\frac{6}{5}z_1+\frac{3}{5}\right)-3\left(\frac{3}{5}z_1+\frac{1}{5}\right)-5z_1-15=0$$

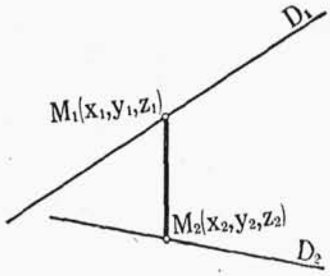
stąd

$$z_1 = -\frac{6}{7}; \quad x_1 = +\frac{57}{35}; \quad y_1 = -\frac{11}{35}.$$

Są to współrzędne spodka prostopadłej, spuszczonej z punktu A na prostą D, można stąd znaleść odległość punktu A od prostej D.

ZAGADNIENIE 3. Znaleść najkrótszą odległość punktów dwóch prostych skośnych w przestrzeni D_1 i D_2 określonych przez równania

$$(16) \qquad \begin{aligned} &(D_1)\ \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z}{1} \\ &(D_2)\ \frac{x+1}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z}{1} \end{aligned}$$



Rys. 169.

Niech $M_1(x_1, y_1, z_1)$ będzie punktem prostej D_1, zaś $M_2(x_2, y_2, z_2)$ punktem prostej D_2. Wiemy, że odległość punktów M_1 i M_2 będzie najkrótsza wtedy, gdy odcinek $M_1 M_2$ będzie *jednocześnie prostopadły do prostej D_1 i do prostej D_2* (rys. 169); ponieważ rzuty wektora $M_2 M_1$ mają miary $x_1 - x_2$, $y_1 - y_2$, $z_1 - z_2$, ze względu więc na współczynniki kierunkowe prostych D_1 i D_2, mamy następujące warunki prostopadłości odcinka $M_1 M_2$ do prostych D_1 i D_2:

$$(17) \qquad \begin{aligned} &1 \cdot (x_1 - x_2) - 1 \cdot (y_1 - y_2) + 1 \cdot (z_1 - z_2) = 0 \\ &2 \cdot (x_1 - x_2) - 3 \cdot (y_1 - y_2) + 1 \cdot (z_1 - z_2) = 0, \end{aligned}$$

które pozwolą określić położenie końców M_1 i M_2 odcinka o najkrótszej długości. Z równań prostych D_1 i D_2 możemy wyrazić dwie współrzędne jako funkcje trzeciej, mianowicie:

$$\begin{cases} x_1 = z_1 + 1 \\ y_1 = -z_1 - 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = 2z_2 - 1 \\ y_2 = -3z_2 \end{cases}$$

wstawiając te wyrażenia w związki (17), otrzymamy dwa równania z dwiema niewiadomemi z_1 i z_2

$$3z_1 - 6z_2 + 4 = 0$$

$$3z_1 - 7z_2 + 5 = 0$$

stąd $z_1 = \frac{2}{3}$; $z_2 = 1$, współrzędne końców odcinka, prostopadłego do obydwóch prostych, będą więc takie:

$$x_1 = \frac{5}{3}; \quad y_1 = -\frac{8}{3}; \quad z_1 = \frac{2}{3};$$

$$x_2 = 1; \quad y_2 = -3; \quad z_2 = 1$$

zaś szukana najkrótsza odległość

$$\delta = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

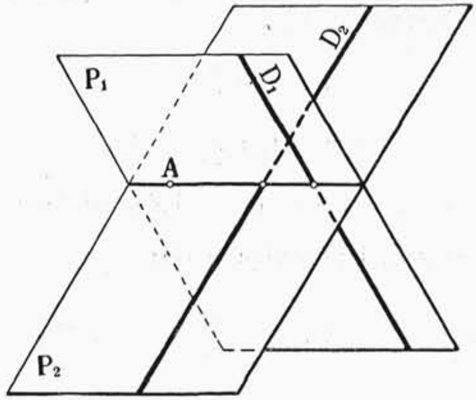
ZAGADNIENIE 4. *Z punktu danego* $A(1, 2, 3)$ *wyprowadzić prostą, która przecinałaby jednocześnie dwie proste dane skośne:*

$$D_1 \begin{cases} x - y = 1 \\ 2x + z = 1 \end{cases} \qquad D_2 \begin{cases} x + 2y = 3 \\ x - z = 1 \end{cases}$$

Proste, wyprowadzone z punktu A i przecinające prostą D_1, leżą wszystkie na płaszczyźnie P_1, przesuniętej przez punkt A i prostą D_1, podobnie proste, wyprowadzone z A i przecinające prostą D_2, leżą w płaszczyźnie P_2, przesuniętej przez A i D_2. Przecięciem tych dwóch płaszczyzn P_1 i P_2 jest właśnie żądana prosta L wyprowadzona z punktu A i przecinająca proste D_1 i D_2 (rys. 170). Z dowolnego punktu przestrzeni można więc wyprowadzić określoną prostą, przecinające dwie proste dane. Wyjątek stanowi wypadek, gdy punkt A znajduje się na płaszczyźnie, przechodzącej przez jedną prostą i równoległej do drugiej prostej, istnieją dwie takie płaszczyzny. Zastosujmy nasze rozważania do danego wypadku liczbowego. Równania płaszczyzn P_1 i P_2, przesuniętych przez punkt A i przez proste D_1 i D_2, mają postać

$$x - y - 1 + \lambda_1 (2x + z - 1) = 0$$

$$x + 2y - 3 + \lambda_2 (x - z - 1) = 0$$



Rys. 170.

λ_1 i λ_2 wyznaczmy z warunku, iż te płaszczyzny zawierają punkt A (1, 2, 3), mamy więc

$$1-2-1+\lambda_1(2\cdot 1+3-1)=0;\quad \lambda_1=\frac{1}{2}$$

$$1+2\cdot 2-3+\lambda_2(1-3-1)=0;\quad \lambda_2=\frac{2}{3}$$

stąd otrzymamy równania płaszczyzn P_1 i P_2, których przecięciem jest szukana linja prosta L:

$$L\left\{\begin{array}{l} 4x-2y+z-3=0 \\ 5x+6y-2z-11=0 \end{array}\right.$$

ZAGADNIENIE 5. *Z punktu danego* A $(1, 2, -1)$ *wyprowadzić prostą, przecinającą prostą daną*

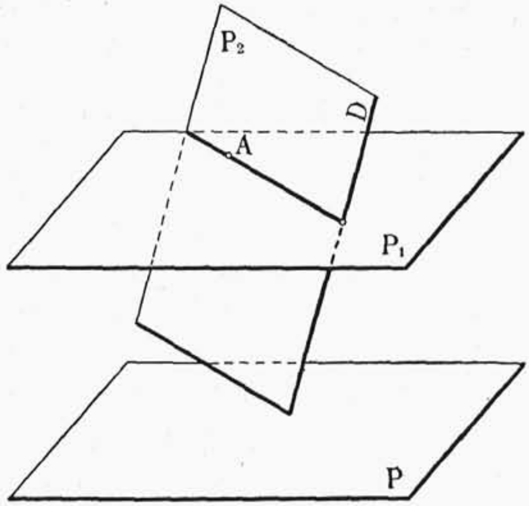
$$D\left\{\begin{array}{r} 2x+y=1 \\ y-z=5 \end{array}\right.$$

i równoległą do płaszczyzny danej:

$$(P)\ 2x-3y-z+5=0$$

Szukana prosta będzie przecięciem się płaszczyzny P_1, przesuniętej przez punkt A równolegle do płaszczyzny P, z płaszczyzną P_2, przesuniętą przez punkt A i przez prostą D (rys. 171). Równanie płaszczyzny P_1 będzie

$$2(x-1)-3(y-2)-1\cdot(z+1)=0$$



Rys. 171.

lub

$$2x - 3y - z + 3 = 0 \quad (P_1)$$

Równanie płaszczyzny P_2 ma postać

$$2x + y - 1 + \lambda(y - z - 5) = 0$$

pisząc, iż ona zawiera punkt $A(1, 2, -1)$, otrzymamy $\lambda = \frac{3}{2}$ i równanie płaszczyzny P_2

$$4x + 5y - 3z - 17 = 0 \quad (P_2)$$

równania P_1 i P_2 określają żądaną prostą.

ZAGADNIENIE 6. *Znaleść miejsce geometryczne środków odcinków, łączących dowolne dwa punkty dwóch danych prostych*

$$D_1 \begin{cases} x = az \\ y = bz \end{cases} \qquad D_2 \begin{cases} x = a'z + p \\ y = b'z + q \end{cases}$$

Współrzędne środka M_0 odcinka, łączącego punkty $M_1(x_1, y_1, z_1)$ i $M_2(x_2, y_2, z_2)$ dwóch danych prostych, mają wartości

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}; \quad y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2}; \quad z_0 = \frac{z_1 + z_2}{2};$$

Wyrażając, na podstawie równań danych prostych, wszystkie współrzędne w zależności od współrzędnych z_1 i z_2, otrzymamy współrzędne punktu szukanego miejsca geometrycznego w postaci następujących funkcyj dwóch zmiennych niezależnych z_1 i z_2:

$$\begin{cases} x_0 = \dfrac{a z_1 + a' z_2 + p}{2}; \qquad y_0 = \dfrac{b z_1 + b' z_2 + q}{2} \\ z_0 = \dfrac{z_1 + z_2}{2} \end{cases}$$

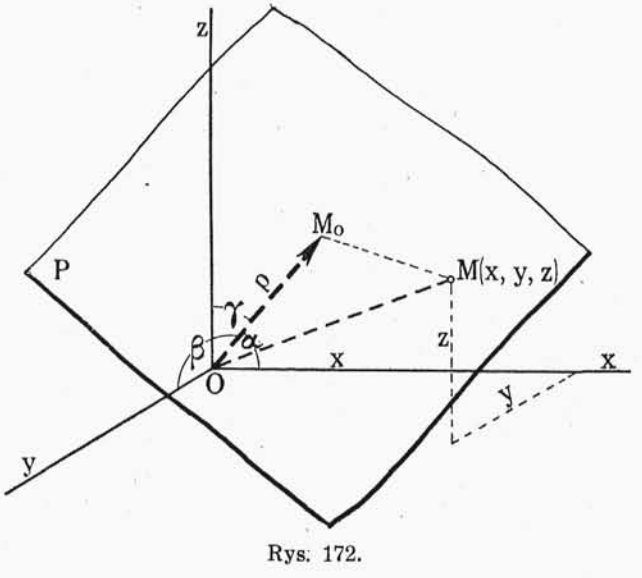
Zbiór tych środków utworzy więc pewną powierzchnię, której równanie otrzymamy, rugując parametry z_1 i z_2, wypadnie równanie płaszczyzny

$$(b - b')\,x_0 + (a' - a)\,y_0 + (a b' - a' b)\,z_0 + \frac{1}{2}(p b' - p b + q a - q a') = 0$$

łatwo wykazać, iż płaszczyzna ta jest równoległa do każdej z danych prostych.

22. Równanie płaszczyzny w postaci normalnej.

Wyprowadźmy z początku układu prostopadłą $O M_0$ do płaszczyzny danej P; M_0 oznacza spodek tej prostopadłej (rys. 172). Położenie płaszczyzny P będzie określone, jeśli dane są kąty α, β, γ, które tworzy wektor $O M_0$ z osiami i długość prostopadłej $p = O M_0$. Dowolny punkt $M(x, y, z)$ płaszczyzny P ma tę własność, iż rzut wektora $O M$ na wektor $O M_0$ jest stały i ma wartość równą zawsze p, gdyż $M M_0 \perp O M_0$. Ale składowe wektora



Rys. 172.

OM mają miary równe współrzędnym x, y, z punktu M, a zatem, według twierdzenia o rzucie sumy geometrycznej, mamy

$$\underset{(\text{na } OM_0)}{\text{rzut } OM} = \text{rzut } x + \underset{(\text{na } OM_0)}{\text{rzut } y} + \text{rzut } z = p$$

ponieważ zaś wektor stały OM_0 tworzy dane kąty α, β, γ z osiami współrzędnych, więc otrzymamy taki związek pierwszego stopnia:

$$x \operatorname{Cos} \alpha + y \operatorname{Cos} \beta + z \operatorname{Cos} \gamma - p = 0, \tag{17}$$

który nazywa się równaniem płaszczyzny *w postaci normalnej*.

Jeśli równanie płaszczyzny ma postać ogólną

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

to, dzieląc współczynniki przez $\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$, otrzymamy postać normalną równania

$$\frac{Ax + By + Cz + D}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 0$$

wtedy bowiem współczynniki będą cosinusami kierunkowemi wektora prostopadłego do płaszczyzny; znak w mianowniku należy wziąć odwrotny do znaku wyrazu D, gdyż $p > 0$. Postać normalna, podobnie jak w geometrji na płaszczyźnie, pozwala odnajdywać odległość płaszczyzn równoległych i odległość punktu od płaszczyzny. Postępując analogicznie, jak w art. 23 części pierwszej, wykazać można, iż odległość δ punktu $M(a, b, c)$ od płaszczyzny (17) równa się bezwzględnej wartości, którą przybiera lewa strona równania w postaci normalnej, jeśli na miejsce współrzędnych bieżących x, y, z wstawimy współrzędne danego punktu a, b, c:

$$\delta = |a \operatorname{Cos} \alpha + b \operatorname{Cos} \beta + c \operatorname{Cos} \gamma - p| \tag{18}$$

Ćwiczenia.

1. Znaleść równanie płaszczyzny, przesuniętej przez trzy punkty:

$$(0, 0, 0); \quad (1, 2, 3); \quad (0, 1, -1)$$

2. Znaleść równanie płaszczyzny, przechodzącej przez punkt $(0, 0, 0)$ i przez środki kul o równaniach:

$$x^2 + y^2 + z^2 + x + y = 0;$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + x + z = 0.$$

3. Znaleść równanie płaszczyzny, przechodzącej przez punkt (1, 2, 3) i przez prostą o równaniach

$$2x+y+z=1;$$

$$3x-y+5z=2;$$

znaleść kąty tej płaszczyzny z osiami.

4. Znaleść równanie płaszczyzny, przechodzącej przez punkt (1, 2, —1) i równoległej do dwóch prostych, danych przez równania:

$$\begin{cases} x+y=1; \\ 2y-z=1; \end{cases} \qquad \begin{cases} x-y=3; \\ 2x+z=-1. \end{cases}$$

5. Znaleść równania dwóch płaszczyzn równoległych do siebie i przesuniętych przez proste dane:

$$\begin{cases} x-y=1; \\ x+y+z=0; \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x+y=1; \\ x-y+z=2; \end{cases}$$

wyznaczyć odległość tych płaszczyzn.

6. Znaleść miejsce geometryczne punktów, jednakowo odległych od dwóch punktów danych

$$A(x_1, y_1, z_1); \qquad B(x_2, y_2, z_2).$$

7. Znaleść miejsce geometryczne punktów, jednakowo odległych od trzech punktów danych

$$A(x_1, y_1, z_1); \qquad B(x_2, y_2, z_2); \qquad C(x_3, y_3, z_3).$$

8. Przez prostą, daną przez równania

$$x-y=1; \qquad 2x+3z=2$$

przesunąć płaszczyznę, która tworzyłaby z płaszczyzną $x+y-z=0$ kąt ostry, możliwie najmniejszy.

9. Dla jakich wartości na m dwie proste dane przez równania

$$\begin{cases} x=2z+m; \\ y=z-1; \end{cases} \qquad \begin{cases} x=z+2; \\ y=mz+3 \end{cases}$$

przecinają się ze sobą.

10. Znaleść odległość punktu (1, 2, 3) od prostej, danej przez równania

$$2x-y=1; \qquad x+y+z=0.$$

11. Przez prostą o równaniach

$$x+y=1; \qquad 2y-z=0$$

przesunąć płaszczyznę, która tworzyłaby dany kąt ostry φ z prostą, określoną przez równania

$$x-y+2z=0; \qquad 2z-x=1.$$

Dyskusja istnienia rozwiązania.

12. Z początku układu wyprowadzić prostą, przecinającą prostą daną

$$3x + y = 1; \quad 4y - z = 1$$

i równoległą do płaszczyzny $5x - y + 3z = 1$.

13. Znaleść równania prostej, przecinającej dwie proste dane:

$$D_1 \begin{cases} x = 2z + 1 \\ y = z + 2 \end{cases} \qquad D_2 \begin{cases} x = z - 1 \\ y = 3z + 1 \end{cases}$$

i równoległej do prostej trzeciej

$$\frac{x}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}.$$

14. Znaleść równania prostej, przecinającej trzy proste dane

$$D_1 \begin{cases} x = z; \\ y = 3z - 1; \end{cases} \qquad D_2 \begin{cases} x = 2z + 1; \\ y = -z; \end{cases} \qquad D_3 \begin{cases} x = z + 3; \\ y = 2z - 1; \end{cases}$$

i równoległej do płaszczyzny o równaniu:

$$x - y + mz + 1 = 0.$$

Dyskusja istnienia rozwiązania ze względu na m.

15. Dany jest kąt trójścienny, ograniczony trzema płaszczyznami o równaniach:

$$x + y + z = 0;$$

$$x - y - z = 0;$$

$$z = 0;$$

wyznaczyć przecięcie się płaszczyzn dwusiecznych kątów dwuściennych danego kąta trójściennego.

16. Z punktu $(0, 0, a)$ wyprowadzić prostą, przecinającą dwie proste:

$$\begin{cases} x = 1; \\ z = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 3z + 1; \\ y = z - 1. \end{cases}$$

Dla jakich wartości na a nie istnieje rozwiązanie?

17. Jaką wartość winien posiadać parametr m, żeby dwie proste

$$\begin{cases} x = mz + 1; \\ y = z + m; \end{cases} \qquad \begin{cases} x = z - m; \\ y = 2mz + 1, \end{cases}$$

przecinały się. Wyznaczyć wtedy równanie płaszczyzny przez nie przesuniętej.

18. Znaleść miejsce geometryczne punktów jednakowo oddalonych od trzech danych prostych:

$$\mathrm{I} \begin{cases} y = 0; \\ z = 0; \end{cases} \qquad \mathrm{II} \begin{cases} x = 0; \\ y = 0; \end{cases} \qquad \mathrm{III} \begin{cases} x = y; \\ x = z. \end{cases}$$