11. Elipsa i hyperbola, mające wspólne ogniska, przecinają się pod kątem prostym.

12. Dany jest układ krzywych

$$\frac{x^2}{\lambda^2} + \frac{y^2}{\lambda^2 - c^2} = 1.$$

gdzie λ jest parametrem zmiennym.

1) Dowieść, iż równanie to przedstawia układ elips i hyperbol współogniskowych.
2) Wykazać, iż przez dowolny punkt płaszczyzny (x_0, y_0) przechodzi jedna elipsa i jedna hyperbola powyższego układu.

13. Prosta zmienna tworzy z dwiema prostemi stałemi trójkąt o stałem polu k^2. Znaleść miejsce geom. środków odcinków tej prostej, zawartych między prostemi stałemi.

14. Znaleść ogniska hyperboli $xy = k^2$.

15. Znaleść równanie koła stycznego do hyperboli i do jej asymptot.

16. Dowieść, iż przez dowolny punkt hyperboli M przechodzą dwa koła styczne do jej asymptot, których odległość środków ma wartość stałą, niezależną od położenia punktu M na hyberboli.

ROZDZIAŁ XII.

WŁASNOŚCI SZCZEGÓLNE PARABOLI.

60. Własności stycznej do paraboli.

Niech będzie równanie paraboli

$$y^2 = 2px$$

której wierzchołkiem jest początek O, zaś osią symetrji oś odciętych Ox.

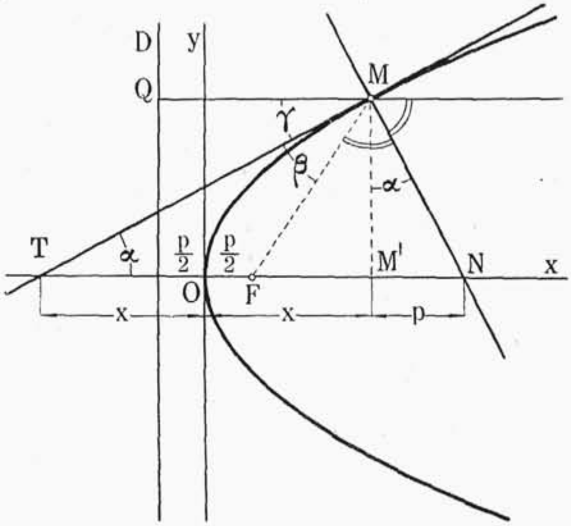
Wiemy, iż ognisko F tej paraboli znajduje się na dodatniej części osi Ox w odległości $\frac{p}{2}$ od wierzchołka O, zaś po przeciwnej stronie, w tej samej odległości $\frac{p}{2}$, znajduje się kierownica D. Jak wiadomo, dla dowolnego punktu paraboli zachodzi własność

$$MF = MQ \tag{2}$$

gdzie Q jest spodkiem prostopadłej, spuszczonej z punktu M na kierownicę.

W celu znalezienia stycznej do paraboli, zróżniczkujmy obie strony równania paraboli, wypadnie

$$2y\frac{dy}{dx}=2p$$



Rys. 105.

stąd otrzymujemy dla współczynnika kątowego stycznej do paraboli w punkcie $M(x, y)$ wartość

(3) $$\frac{dy}{dx}=\frac{p}{y};$$

styczna do paraboli w punkcie (x, y) będzie więc miała równanie

$$Y-y=\frac{p}{y}(X-x)$$

Równanie to, po uproszczeniu, wypadnie w postaci

(4) $$Yy=p(X+x)$$

zaznaczamy, iż (X, Y) oznaczają współrzędne dowolnego punktu stycznej, zaś (x, y) stałe współrzędne punktu styczności, które winny spełniać związek $y^2=2px$.

Podamy teraz pewne własności stycznej i normalnej do paraboli.

WŁASNOŚĆ 1. *Styczna do paraboli przecina oś paraboli w punkcie T, którego odległość od wierzchołka paraboli równa się odciętej punktu styczności.*

Istotnie, wstawiając w równanie stycznej (4) wartość $Y=0$, mamy

$$X=OT=-x \qquad \text{c. b. d. d.}$$

WŁASNOŚĆ 2. *Styczna do paraboli jest dwusieczną kąta, zawartego między promieniem wodzącym MF i prostopadłą MQ, wyprowadzoną z punktu styczności do kierownicy.*

Istotnie, z własności pierwszej wynika, iż

$$|TF|=|TO|+|OF|=|OM'|+\frac{p}{2}=MQ$$

a więc, według równości (2), $TF=MF$, to znaczy trójkąt TMF jest równoramienny, a w takim razie (patrz rys. 105) kąty α i β są sobie równe; lecz $\alpha=\gamma$, jako kąty naprzemianległe wewnętrzne, więc $\beta=\gamma$ c. b. d. d.

Stąd wynika też, iż *normalna do paraboli jest dwusieczną kąta, zawartego między promieniem wodzącym i równoległą do osi.* Wniosek ten znajduje zastosowanie w konstrukcji zwierciadła wklęsłego o przekroju parabolicznym, mającego tę własność, iż pęk promieni świetlnych, wychodzących z ogniska, po odbiciu od zwierciadła zamieni się na wiązkę promieni, biegnących równolegle do osi*).

WŁASNOŚĆ 3. *Rzut na oś paraboli odcinka normalnej do paraboli, zawartego między punktem paraboli i osią, jest wielkością stałą, równą parametrowi p.* Niech N oznacza punkt przecięcia się normalnej w punkcie $M(x,y)$ z osią paraboli. W trójkącie $M'MN$ kąt przy wierzchołku M równy jest kątowi α, który tworzy styczna do paraboli z osią Ox, ale, według wzoru (3), mamy

$$y'=tg\,\alpha=\frac{p}{y}$$

stąd wynika natychmiast, iż

$$M'N=M'M\,tg\,\alpha=p \qquad \text{c. b. d. d.}$$

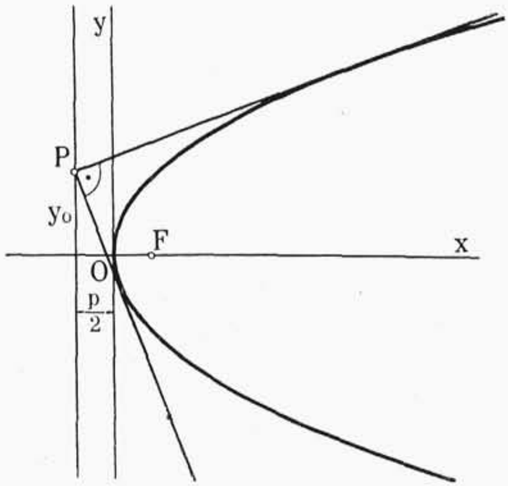
WŁASNOŚĆ 4. *Dwie styczne, wyprowadzone z dowolnego punktu kierownicy do paraboli, są do siebie prostopadłe.*

---

*) Własność ta dla zwierciadła kulistego jest tylko przybliżona, dla parabolicznego natomiast zupełnie ścisła.

Niech $(-\frac{p}{2}, y_0)$ będą współrzędnemi dowolnego punktu P kierownicy; równanie prostej, przechodzącej przez ten punkt, ma postać

$$y - y_0 = m\left(x + \frac{p}{2}\right)$$



Rys. 106.

prosta ta przecina parabolę o równaniu $y^2 = 2px$ w punktach, których rzędne są pierwiastkami równania

$$my^2 - 2py + (pm + 2y_0)p = 0$$

Prosta, wyprowadzona z danego punktu kierownicy, będzie więc styczna do paraboli, jeśli jej współczynnik kątowy m będzie spełniał warunek

$$m^2 + \frac{2y_0}{p}m - 1 = 0$$

Istnieją więc dwie styczne do paraboli, wyprowadzone z punktu kierownicy, współczynniki kątowe m_1 i m_2 tych stycznych spełniają warunek

$$m_1 m_2 = -1$$

a zatem *styczne te są do siebie prostopadłe* c. b. d. d.

Kierownica paraboli ma więc tę własność, co koło Monge'a dla elipsy i hyperboli.

61. Zagadnienia.

Z dowiedzionej ostatniej własności wynika zręczny sposób wyznaczenia równania kierownicy w przypadku, gdy równanie paraboli jest dane w postaci ogólnej; należy mianowicie, w podobny sposób jak dla koła Monge'a, *odszukać miejsce geometryczne punktów, z których parabola jest widziana pod kątem prostym.*

Przykład. Wyznaczmy równanie kierownicy paraboli, określonej przez związek

(5) $$(x+y)^2+2x-y=0.$$

W tym celu znajdźmy wpierw warunek, aby prosta

$$y=mx+n$$

była do danej paraboli styczna. Podstawiając wartość $mx+n$ na y w równaniu paraboli, otrzymamy związek, określający odcięte punktów przecięcia:

$$[(m+1)x+n]^2+(2-m)x-n=0$$

to jest

$$(m+1)^2x^2+[2(m+1)n+2-m]x+n^2-n=0,$$

warunek styczności wypada stąd w postaci

$$[2(m+1)n+2-m]^2-4(m+1)^2n(n-1)=0,$$

po redukcji zaś

(6) $$m^2+12mn-4m+12n+4=0.$$

Prosta, wyprowadzona z punktu (x_0, y_0), ma równanie

$$y-y_0=m(x-x_0)$$

to jest

$$y=mx+(y_0-mx_0),$$

prosta ta będzie styczna do paraboli, jeśli współczynnik kątowy m spełnia związek, który otrzymamy, podstawiając w równaniu (6) wartość

$$n=y_0-mx_0,$$

a więc

$$m^2+12m(y_0-mx_0)-4m+12(y_0-mx_0)+4=0,$$

po uporządkowaniu według potęg współczynnika kątowego m, osiągniemy związek, który określa współczynniki kątowe stycznych, wyprowadzonych z punktu (x_0, y_0):

(7) $$(1-12x_0)m^2+(12y_0-12x_0-4)m+12y_0+4=0.$$

Aby styczne, wyprowadzone z punktu (x_0, y_0), były do siebie prostopadłe, trzeba i wystarcza, aby pierwiastki równania (7) spełniały warunek

$$m_1 m_2=-1$$

mamy jednak z równania (7)

$$m_1 m_2 = \frac{12 y_0 + 4}{-12 x_0 + 1};$$

więc

$$\frac{12 y_0 + 4}{-12 x_0 + 1} = -1;$$

otrzymujemy stąd równanie szukanego miejsca geometrycznego

$$12(x_0 - y_0) - 5 = 0, \tag{8}$$

to znaczy kierownicę paraboli (5). Dla sprawdzenia stwierdzamy, iż prosta (8) jest prostopadła do kierunku osi paraboli danej $(x + y = 0)$.

ZAGADNIENIE. *Wyznaczyć miejsce geometryczne punktów, z których styczne, wyprowadzone do paraboli $y^2 = 2px$, tworzą kąt stały α.*

Stosujemy tu metodę poprzednią. W znany sposób wyprowadzimy wpierw warunek, aby prosta

$$y = mx + n$$

była do paraboli styczna; wypadnie związek

$$-2mn + p = 0. \tag{9}$$

Następnie prowadzimy z punktu (x_0, y_0) prostą o równaniu

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

lub

$$y = mx + (y_0 - mx_0).$$

Według związku (9), prosta taka będzie styczna do paraboli, jeżeli współczynnik kątowy m spełnia równanie

$$-2m(y_0 - mx_0) + p = 0$$

to jest

$$2x_0 m^2 - 2y_0 m + p = 0. \tag{10}$$

Według założenia, dwie styczne, wyprowadzone z punktu (x_0, y_0) szukanego miejsca geometrycznego, tworzą ze sobą kąt stały α, zatem pierwiastki m_1, m_2 równania (10) winny spełniać warunek

$$|\operatorname{tg}\alpha| = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right|$$

z równania (10) mamy jednak

$$m_1 m_2 = \frac{p}{2x_0};$$

$$m_1 - m_2 = \frac{\sqrt{y_0^2 - 2px_0}}{x_0};$$

a więc między współrzędnemi (x_0, y_0) zachodzić winien związek

$$\operatorname{tg}^2\alpha = \frac{4(y_0^2 - 2px_0)}{(2x_0 + p)^2};$$

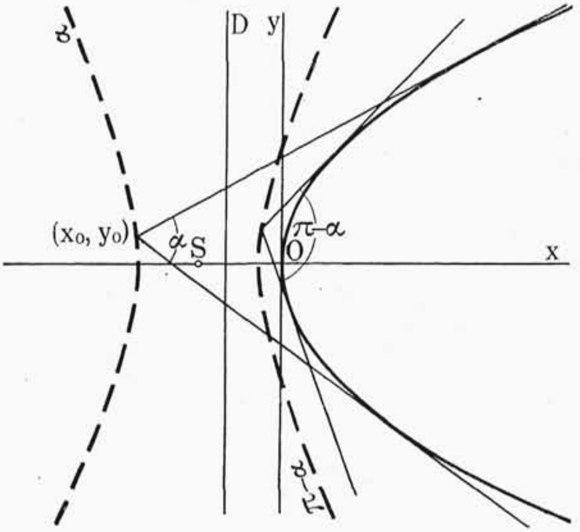
stąd otrzymamy równanie szukanego miejsca geometrycznego

$$4\operatorname{tg}^2\alpha\, x_0^2 - 4y_0^2 + 4p(\operatorname{tg}^2\alpha + 2)x_0 + p^2\operatorname{tg}^2\alpha = 0. \tag{11}$$

Krzywa ta jest hyperbolą, dla której oś Ox jest osią symetrji i której środek ma odciętą

$$x_0 = -\frac{p}{2}\left(1 + \frac{2}{\mathrm{tg}^2\alpha}\right)$$

Łatwo sprawdzimy, iż dwie gałęzie tej hyperboli (rys. 107) leżą po obu stronach kierownicy D. Ponieważ w równaniu (11) występuje $\mathrm{tg}^2\alpha$, a więc krzywa (11) odpowiada dwóm kątom spełniającym, mianowicie, gałąź, leżąca po lewej stronie kierownicy, odpowiada kątowi ostremu np. α, zaś gałąź z prawej strony — kątowi rozwartemu, spełniającemu $\pi - \alpha$. Gdy α dąży do kąta prostego, wtedy obie gałęzie hyperboli powyższej dążą do kierownicy.



Rys. 107.

Ćwiczenia.

1. Dowieść, iż spodek prostopadłej, spuszczonej z ogniska paraboli na dowolną styczną, leży na stycznej w wierzchołku paraboli.

2. Znaleść współrzędne ogniska paraboli

$$y = x^2 + x + 1.$$

3. Z punktu (x_0, y_0) poprowadzić styczną do paraboli $y^2 = 2px$. Dyskusja.

4. Znaleść równanie koła, którego środek leży na osi Ox i które jest styczne do paraboli $y^2 = 2px$. Dyskusja.

5. Z punktu (0, 1) wyprowadzić normalną do paraboli $y^2 = x$.

6. Z punktu (—1, 1) wyprowadzono pęk siecznych względem paraboli $y^2 = x$. Wyznaczyć miejsce geometryczne środków odcinków, zawartych między punktami przecięcia tych siecznych z parabolą.

7. Wyznaczyć miejsce geometryczne środków odcinków stycznych do paraboli $y^2 = 2px$, zawartych między punktami przecięcia z osiami Ox i Oy.

8. Z danego punktu (x_0, y_0), leżącego na paraboli $y^2 = 2px$, wyprowadzić prostą normalną do paraboli w drugim punkcie przecięcia. Dyskusja.

9. Znaleść równanie paraboli, której kierownicą jest oś Ox i która jest styczna do prostej $y = 2x$ w punkcie (1, 2).

10. Znaleść równanie kierownicy i współrzędne ogniska paraboli o równaniu

$$(x - y)^2 + x = 0.$$

ROZDZIAŁ XIII.

ŚREDNICE SPRZĘŻONE.

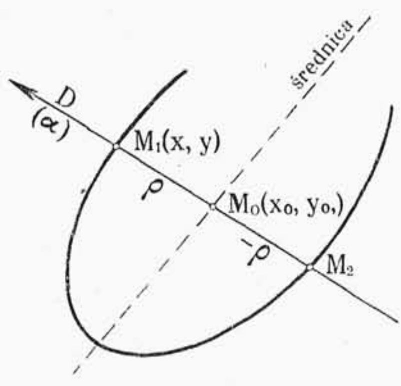
62. Średnica krzywej drugiego stopnia.

Niech będzie krzywa drugiego stopnia, określona przez równanie

$$f(x, y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \tag{1}$$

Rozważmy układ prostych (D) równoległych, tworzących z osią Ox stały kąt α i wyznaczmy równanie miejsca geometrycznego *środków* odcinków, zawartych między punktami przecięcia danych prostych z krzywą (1). Zakładamy, iż proste D nie są równoległe do asymptot krzywej, to znaczy, iż dany kąt α spełnia warunek

$$A\cos^2\alpha + B\cos\alpha\sin\alpha + C\sin^2\alpha \neq 0 \tag{2}$$



Rys. 108.

Oznaczmy przez M_1 i M_2 punkty przecięcia jednej z prostych (D) z krzywą (1), zaś przez M_0 środek odcinka $M_1 M_2$. Jeśli (x, y)