Jeśli we wzorach (17) podstawimy na miejscu λ wartość ze znakiem przeciwnym $-\lambda$, to otrzymamy współrzędne pewnego punktu N na osi danej

$$x'_0 = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}; \quad y'_0 = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}; \tag{19}$$

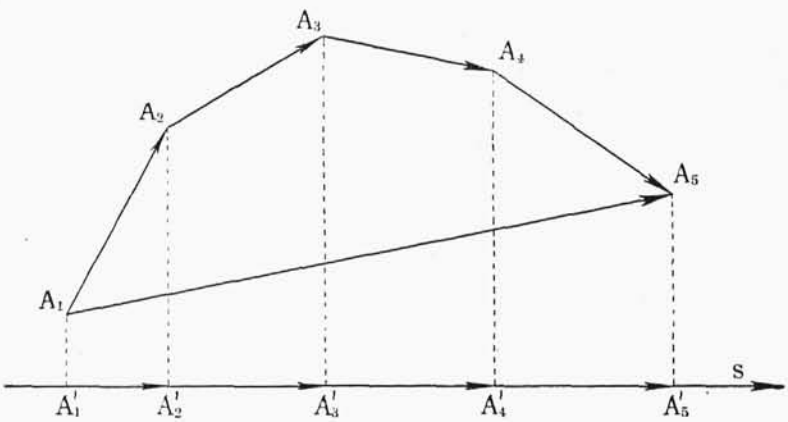
dla którego stosunek odległości od punktów A i B ma tę samą wartość bezwzględną $|\lambda|$ co i dla punktu M. Z dwóch punktów M i N jeden będzie leżał między punktami A i B, zaś drugi — zewnątrz nich. O punktach M, N mówimy wtedy, iż rozdzielają harmonicznie parę punktów A, B; spełniają one proporcję

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = -\frac{\overline{NA}}{\overline{NB}}$$

Gdy λ dąży do -1, to znaczy, gdy punkt M dąży do środka odcinka AB, wtedy punkt z nim sprzężony N, jak widać ze wzoru (19), oddala się nieograniczenie.

6. Suma geometryczna wektorów.

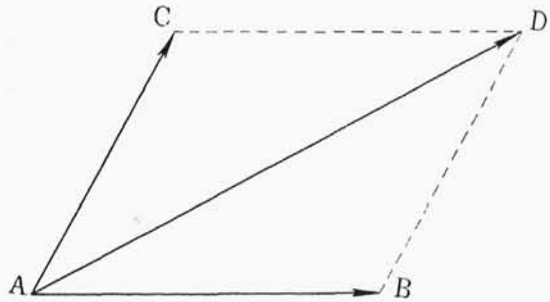
Niech będzie na płaszczyźnie dowolna grupa np. czterech wektorów. Przesuwając równolegle, ustawmy te wektory w ten sposób, aby koniec jednego schodził się z początkiem następnego; otrzymamy w ten sposób linję łamaną $A_1 A_2 A_3 A_4 A_5$ (rys. 17)



Rys. 17.

Nazywamy sumą geometryczną danych wektorów taki wektor, który łączy początek pierwszego wektora z końcem ostatniego, w naszym wypadku będzie to wektor, wychodzący z punktu A_1 i kończący się w punkcie A_5.

W przypadku dwóch wektorów, mających wspólny początek, suma geometryczna będzie dana przez przekątną równoległoboku zbudowanego na danych wektorach (rys. 18).



Rys. 18.

TWIERDZENIE O RZUCIE SUMY GEOMETRYCZNEJ. *Miara rzutu sumy geometrycznej kilku wektorów na dowolną oś równa się sumie miar rzutów poszczególnych wektorów.*

Rozważmy grupę n wektorów, ustawionych w sposób wyżej wymieniony, a mianowicie tworzących łamaną $A_1 A_2 A_3 \ldots A_n A_{n+1}$. Sumą geometryczną tych wektorów będzie wektor, wychodzący z początku A_1 pierwszego wektora i kończący się w końcu A_{n+1} ostatniego wektora. Niech $A'_1 A'_2 A'_3 \ldots A'_n A'_{n+1}$ oznaczają rzuty punktów $A_1 A_2 \ldots A_{n+1}$ na dowolną oś s (rys. 17). Miary rzutów poszczególnych wektorów na tę oś będą

$$\overline{A'_1 A'_2}\,;\ \overline{A'_2 A'_3}\,;\ \overline{A'_3 A'_4}\,;\ldots;\ \overline{A'_n A'_{n+1}}\,;$$

zaś miara rzutu ich sumy geometrycznej będzie

$$\overline{A'_1 A'_{n+1}}$$

Według uogólnionego twierdzenia Chasles'a, mamy jednak:

$$\overline{A'_1 A'_2} + \overline{A'_2 A'_3} + \ldots\ldots\ldots + \overline{A'_n A'_{n+1}} = \overline{A'_1 A'_{n+1}}$$

a to jest właśnie treść naszego twierdzenia.

Niech $X_1, X_2 \ldots\ldots X_n$ oznaczają miary rzutów danych wektorów na oś Ox, zaś $Y_1, Y_2 \ldots\ldots Y_n$ miary rzutów na oś Oy; według twierdzenia poprzedniego, miary rzutów wektora, przedstawiającego sumę geometryczną danych wektorów, będą więc

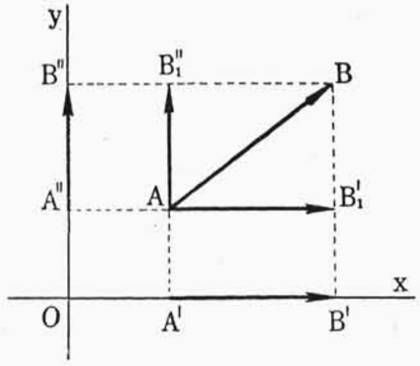
$$(20) \qquad \begin{cases} X_1 + X_2 + X_3 + \ldots\ldots + X_n \\ Y_1 + Y_2 + Y_3 + \ldots\ldots + Y_n \end{cases}$$

Powyższe dwie sumy określają wartość i kierunek sumy geometrycznej. W pojęciu sumy geometrycznej, jak również jej składników, wchodzi więc w grę tylko wartość i kierunek wektora.

Zaznaczymy, iż, według wzorów (20), suma geometryczna wektorów nie zależy od kolejności składników.

WNIOSEK. *Jeśli grupa wektorów, ustawionych w sposób wskazany w definicji sumy, tworzy łamaną zamkniętą, to suma miar rzutów tych wektorów na dowolną oś równa się zeru.*

Nadmienimy jeszcze, iż dowolny wektor AB na płaszczyźnie traktować można jako sumę geometryczną dwóch wektorów, będących jego rzutami na dwie osi współrzędnych (rys. 19). Z tego powodu też rzuty wektora na osi nazywamy jego *składowemi* wzdłuż osi współrzędnych.



Rys. 19.

Z ostatniej uwagi i z twierdzenia o rzucie sumy wynika natychmiast ważny wniosek, dotyczący miary rzutu wektora na dowolną oś Os; jeśli mianowicie X i Y oznaczają miary składowych wektora dowolnego wzdłuż osi współrzędnych, a V_s oznacza miarę jego rzutu na dowolną inną oś Os, to możemy napisać

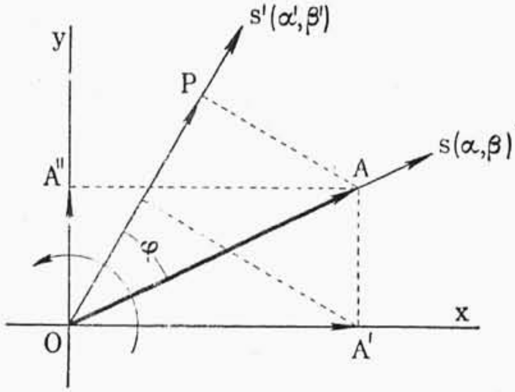
$$V_s = \underset{(\text{na } Os)}{\text{rzut } X + \text{rzut } Y};$$

a więc

$$V_s = X \operatorname{Cos}(xs) + Y \operatorname{Cos}(ys)$$

7. Cosinus kąta między osiami. Pole równoległoboku.

Na poprzednich własnościach sumy geometrycznej opiera się wyprowadzenie zasadniczego w trygonometrji wzoru na cosinus kąta między danemi osiami. Niech więc będzie oś Os, tworząca kąty (α, β) z osiami Ox i Oy i oś Os', tworząca kąty (α', β') z osiami Ox i Oy (rys. 20). Rozważmy dowolny wektor OA, leżący na osi Os i zgodnie z nią zwrócony; niech OA' i OA'' oznaczają składowe tego wektora wzdłuż osi Ox i Oy.



Rys. 20.

Pojęcie cosinusa kąta φ, który tworzy oś s' z osią s wiąże się z pojęciem rzutu wektora OA na oś Os', a mianowicie miara tego rzutu $\overline{OP}$ równa się $\overline{OA}\cos\varphi$, ale, według własności sumy geometrycznej, miarę rzutu wektora OA można zastąpić sumą miar rzutów jego składowych OA' i OA''; napiszemy to w ten sposób:

$$\underset{(\text{na } s')}{\textit{rzut } OA} = \underset{(\text{na } s')}{\textit{rzut } OA'} + \underset{(\text{na } s')}{\textit{rzut } OA''}$$

a zatem

$$\overline{OA}.\cos\varphi = \overline{OA'}.\cos\alpha' + \overline{OA''}.\cos\beta'$$

gdyż wektory OA' i OA'' tworzą z osią Os' kąty α' i β'. Ale, z drugiej strony, wektory OA' i OA'' same są rzutami wektora OA na osi współrzędnych, więc

$$\overline{OA'} = \overline{OA}\cos\alpha;$$

$$\overline{OA''} = \overline{OA}\cos\beta;$$

wstawiając te wartości do poprzedniego związku i skracając przez $\overline{OA}$, otrzymamy żądany wzór na cosinus kąta φ między danemi osiami

$$\cos\varphi = \cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta'.$$

Korzystając teraz ze znanych związków

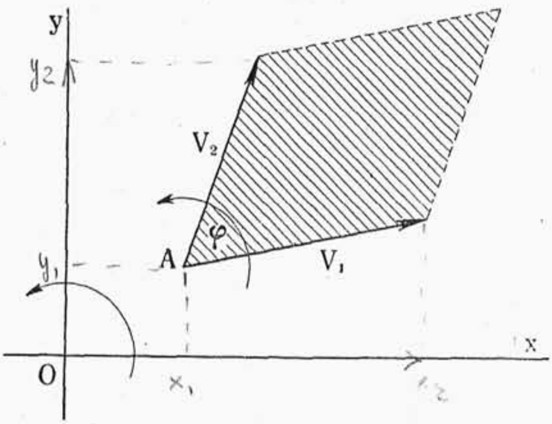
$$\varphi = \alpha' - \alpha, \quad \beta = \alpha - \frac{\pi}{2}, \quad \beta' = \alpha' - \frac{\pi}{2}$$

otrzymamy zasadniczy wzór trygonometrji

$$\cos(\alpha' - \alpha) = \cos\alpha \cos\alpha' + \sin\alpha \sin\alpha';$$

stąd zaś wynikają wzory dla sumy dwóch kątów, przez podstawienie $-\alpha$ na miejsce α i następnie dla sinusa sumy lub różnicy, przez podstawienie $\alpha' \pm \frac{\pi}{2}$ na miejsce α'.

Rozważmy równoległobok zbudowany na danych dwóch wektorach, wychodzących z punktu A (rys. 21). Niech V_1 i V_2 oznaczają wartości bezwzględne tych wektorów, zaś (X_1, Y_1) i (X_2, Y_2) miary ich rzutów na osi współrzędnych. Przyjmijmy, jak zwykle,



Rys. 21.

obrót od Ox do Oy za dodatni i, uwzględniając kolejność wektorów, rozważmy liczbę względną

pole równoległoboku $$S = V_1 V_2 \sin(V_1 V_2)$$

gdzie $(V_1 V_2)$ oznacza kąt, który tworzy wektor *drugi* z wektorem *pierwszym*; liczba S równa się polu równoległoboku rozważonego ze znakiem dodatnim, gdy kąt $(V_1 V_2)$ zawiera się między 0 i π, równa się zaś polu równoległoboku ze znakiem ujemnym, gdy kąt $(V_1 V_2)$ zawiera się między π i 2π. Mamy jednak dla kąta między wektorami wartość

$$(V_1 V_2) = \alpha_2 - \alpha_1$$

gdzie α_1 i α_2 oznaczają kąty, które tworzy wektor pierwszy i drugi z osią Ox, będziemy więc mieli

$$S = V_1 V_2 \sin(\alpha_2 - \alpha_1) = V_1 V_2 (\sin\alpha_2 \cos\alpha_1 - \cos\alpha_2 \sin\alpha_1);$$

ale, według rozważań poprzednich, możemy napisać oczywiście

$$V_1 \cos\alpha_1 = X_1 \qquad V_1 \sin\alpha_1 = Y_1$$

$$V_2 \cos\alpha_2 = X_2 \qquad V_2 \sin\alpha_2 = Y_2$$

a więc szukana wartość S wyraża się w zależności od miar rzutów wektorów danych w ten sposób:

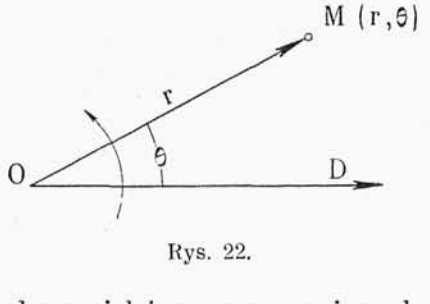
$$S = X_1 Y_2 - X_2 Y_1$$

WNIOSEK. Pole trójkąta, którego jeden wierzchołek znajduje się w początku układu, zaś dwa pozostałe mają współrzędne (x_1, y_1) i (x_2, y_2), równa się połowie wartości bezwzględnej wyrażenia

$$x_1 y_2 - x_2 y_1$$

8. Współrzędne biegunowe.

Współrzędnemi punktu na płaszczyźnie nazywamy wogóle wszelką parę liczb, która określa położenie danego punktu. Oprócz współrzędnych prostokątnych, używamy często t. zw. współrzędnych biegunowych, które określamy w sposób następujący. Niech będzie stały punkt O zwany biegunem i oś OD zwana osią biegunową (rys. 22). Położenie punktu M na płaszczyźnie będzie określone w zupełności przez odległość OM tego punktu od bieguna i przez kąt DOM, który tworzy wektor (OM) z osią OD; dla kąta tego trzeba przyjąć określony obrót za dodatni. Oznaczmy



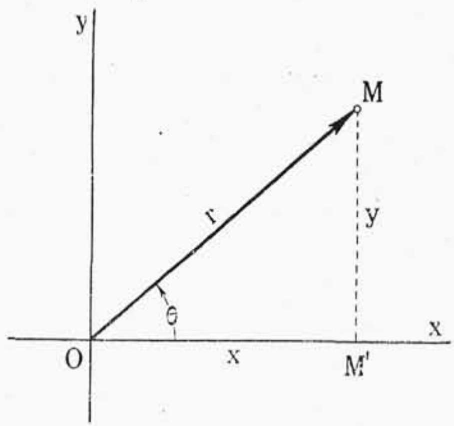
Rys. 22.

$$OM = r \qquad \measuredangle DOM = \theta$$

liczby (r, θ) nazywamy współrzędnemi biegunowemi punktu M. Odległość r nazywamy promieniem wodzącym, zaś kąt θ amplitudą. Kąt θ będzie dla różnych punktów płaszczyzny przybierał wartości od 0 do 2π. Wartość θ możemy zwiększyć lub zmniejszyć o dowolną wielokrotność kąta 2π t. j. 360^0. Punkty, mające ten sam promień wodzący r, leżą na kole o promieniu r, zaś punkty o tej samej amplitudzie θ na promieniu wychodzącym z punktu O.

Mając wartości współrzędnych biegunowych (r, θ) danego punktu M, można obliczyć jego współrzędne prostokątne, odniesione do jakiegoś określonego układu osi. Obierzmy np. oś biegunową OD za oś odciętych Ox, zaś prostopadłą do niej w punkcie O za oś rzędnych Oy. Jako dodatni zwrot osi Ox obierzmy zwrot osi OD, zaś zwrot dodatni Oy obierzmy tak, aby obrót od Ox do Oy o kąt 90^0 odbywał się zgodnie z przyjętym obrotem dodatnim dla kąta θ. Mamy wtedy (rys. 23), według twierdzenia o rzucie wektora, następujące wzory na przejście od współrzędnych biegunowych do prostokątnych

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \tag{21}$$



Rys. 23

Wzory te stosują się do dowolnego punktu płaszczyzny; znaki współrzędnych x i y w różnych ćwiartkach płaszczyzny zgodne będą ze znakami $\cos\theta$ względnie $\sin\theta$. Odwrotnie, ze związków (21) można obliczyć współrzędne (r, θ), znając (x, y), mamy mianowicie

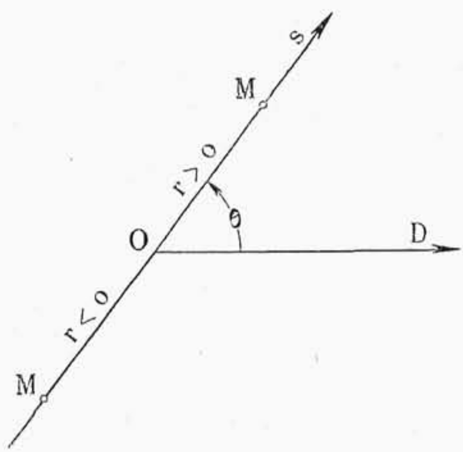
$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{22}$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} \qquad \sin\theta = \frac{y}{r}$$

W powyższej definicji promień wodzący r ma zawsze wartość dodatnią. Otóż można nieco zmienić określenie współrzędnych biegunowych, wskutek czego wprowadzone będą w grę również ujemne wartości na r. A mianowicie, niech amplituda θ oznacza kąt, który tworzy z osią początkową oś Os, przechodząca przez biegun O i przez dany punkt płaszczyzny M, nie zaś sam wektor OM, jak w poprzedniej definicji; promieniem wodzącym r nazwiemy natomiast miarę wektora OM na osi Os:

$$r = \overline{OM}$$

W razie przyjęcia takiej umowy, promień wodzący r będzie dodatni, jeśli wektor OM jest zwrócony zgodnie z osią Os, będzie zaś ujemny, jeśli wektor OM jest zwrócony przeciwnie (rys. 24).



Rys. 24.

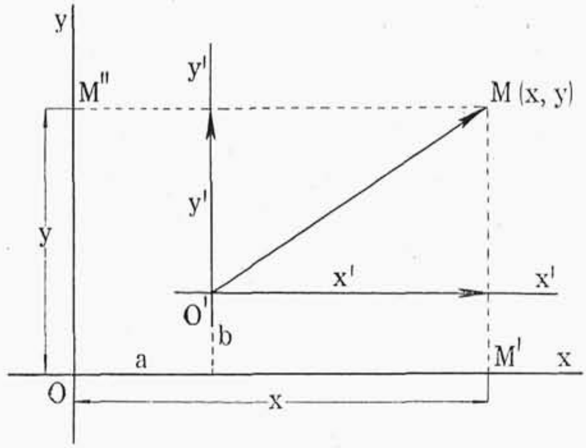
Dla osi, przechodzącej przez punkty O i M, możemy przyjąć jeden lub drugi zwrot za dodatni; ponieważ zaś zmiana zwrotu osi na przeciwny zmniejsza lub powiększa amplitudę θ o kąt π, stąd wynika, że gdy położenie punktu M określa para liczb (r, θ), to ten sam punkt będzie określała też para liczb $(-r, \theta \pm \pi)$.

Nadmienimy jeszcze, iż ostatnia ogólniejsza definicja współrzędnych biegunowych nie zmienia postaci wzorów (21) na zamianę współrzędnych biegunowych na prostokątne, według twierdzenia o rzucie wektora z osi na oś.

Wprowadzenie do rozważań ujemnych wartości promienia wodzącego jest dogodne przy badaniu krzywych, jak zobaczymy później.

9. Zamiana współrzędnych prostokątnych.

Niech będą dwa układy prostokątne osi (Oxy) i $(O'x'y')$ równoległych i zgodnie zwróconych (rys. 25). Położenie układu $(O'x'y',)$ względem układu (Oxy) będzie określone, jeśli dane są współrzędne (a, b) początku układu O' względem osi (Oxy). Oznaczmy przez (x, y) współrzędne dowolnego punktu M względem osi (Oxy), zaś przez (x', y') współrzędne tego punktu w układzie $(O'x'y')$. Współrzędne x' i y' są oczywiście miarami rzutów wektora



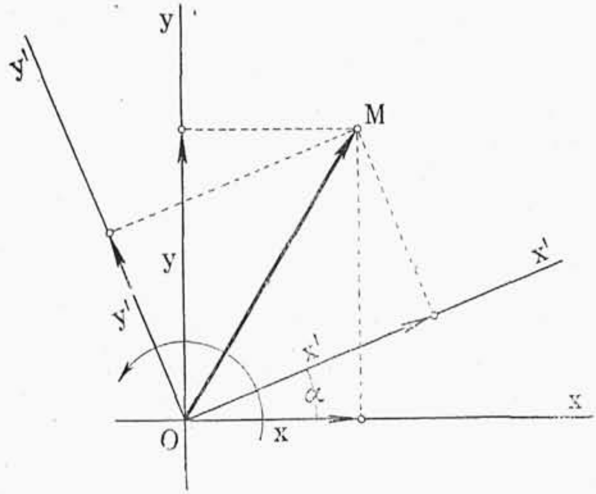
Rys 25.

$O'M$ na osi współrzędnych, a zatem równają się różnicy współrzędnych końca M i początku O' tego wektora względem osi (Oxy). Współrzędne punktu M w układzie $(O'x'y')$ związane są więc ze współrzędnemi tego punktu w układzie (Oxy) wzorami

$$(23) \qquad \begin{cases} x' = x - a \\ y' = y - b \end{cases} \qquad \begin{cases} x = x' + a \\ y = y' + b \end{cases}$$

Przypuśćmy teraz, iż mamy dwa układy osi współrzędnych (Oxy) i $(Ox'y')$, mające wspólny początek O (rys. 26). Położenie układu $(Ox'y')$ względem (Oxy) będzie określone, jeśli podamy kąt α, który tworzy oś Ox' z osią Ox; przyjmiemy, jak zwykle, za dodatni kierunek obrotu taki, który sprowadza oś Ox do Oy po obrocie o kąt $\frac{\pi}{2}$. Zakładamy, iż kierunki obrotów, sprowadzających oś Ox' do Oy' i Ox do Oy są zgodne.

Aby otrzymać związki między współrzędnemi dowolnego punktu M w układzie (Oxy) i w układzie $(Ox'y')$, weźmy pod uwagę wektor OM i jego składowe wektory o miarach x' i y'. Współrzędna x



Rys. 26.

jest rzutem wektora OM na oś Ox, ponieważ zaś, według twierdzenia o rzutach, miara rzutu wektora równa jest sumie miar rzutów jego składowych, więc możemy napisać

$$x = \underset{(\text{na } Ox)}{rzut}\, OM = \underset{(\text{na } Ox)}{rzut}\, x' + \underset{(\text{na } Ox)}{rzut}\, y'$$

podobnie mamy

$$y = \underset{(\text{na } Oy)}{rzut}\, OM = \underset{(\text{na } Oy)}{rzut}\, x' + \underset{(\text{na } Oy)}{rzut}\, y$$

wiemy jednak, iż miara rzutu wektora równa się iloczynowi miary samego wektora przez cosinus kąta nachylenia odpowiedniej osi, a zatem, oznaczając przez (xx') i (xy') kąty, które tworzą osi Ox' i Oy' z osią Ox i podobnie przez (yx') i (yy') kąty osi Ox' i Oy' z osią Oy, otrzymamy wzory na zamianę współrzędnych

$$(24) \qquad \begin{aligned} x &= x' \cos(xx') + y' \cos(xy') \\ y &= x' \cos(yx') + y' \cos(yy') \end{aligned}$$

Kąty we wzorach (24) można wyrazić przez jeden kąt α, mamy mianowicie

$$(xx') = \alpha; \quad (xy') = \frac{\pi}{2} + \alpha; \quad (yx') = \alpha - \frac{\pi}{2}; \quad (yy') = \alpha$$

Związki między współrzędnemi (x, y) i (x', y') wypadną teraz w takiej postaci:

$$
(25) \qquad \begin{aligned} x &= x' \cos\alpha - y' \sin\alpha \\ y &= x' \sin\alpha + y' \cos\alpha \end{aligned}
$$

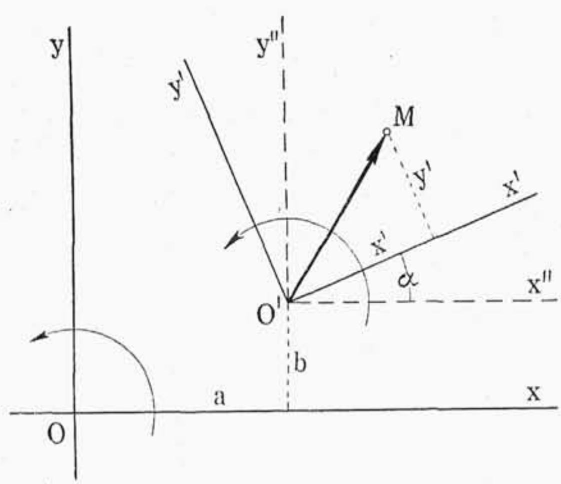
Ze względu na prawidłowość budowy, wzory w postaci (24) nadają się jednak lepiej do zapamiętania.

Podstawiając $-\alpha$ na miejsce α, otrzymamy wzory odwrotne na przejście od współrzędnych x, y do współrzędnych x', y'.

Sumując kwadraty wyrażeń (25), mamy

$$x^2 + y^2 = x'^2 + y'^2$$

Suma kwadratów współrzędnych jest więc niezmiennikiem, co jest oczywiste, gdyż suma ta przedstawia zawsze kwadrat tego samego wektora *OM*.



Rys. 27.

Weźmy teraz wypadek ogólny dwóch dowolnie położonych układów prostokątnych (Oxy) i $(O' x' y')$. Założymy również zgodność obrotów (xy) i $(x' y')$. Położenie układu $(O' x' y')$ względem układu (Oxy) będzie w zupełności określone, jeśli dane są współrzędne (a, b) początku O' względem osi (Oxy) i kąt α, który tworzy oś Ox' z osią Ox (rys. 27). Poprowadźmy przez punkt O' osi $O' x''$ i $O' y''$ równoległe do osi Ox i Oy. Przejście od układu (Oxy) do $(O' x' y')$ składa się więc z jednego przesunięcia równoległego do punktu (a, b) i z obrotu o kąt α. Niech (x'', y'') będą współrzędnemi punktu

$M(x, y)$ w układzie $(O' x'' y'')$. Ze względu na wzory (23) dla osi przesuniętych równolegle, otrzymujemy

$$x = a + x''$$

$$y = b + y''$$

Przejście od współrzędnych x'', y'' do x', y' odbywa się według wzorów (25) dla osi obróconych o kąt α, mamy więc ostatecznie następujące związki między współrzędnemi względem osi $(O x y)$ i $(O' x' y')$:

$$\begin{aligned} x &= a + x' \cos\alpha - y' \sin\alpha \\ y &= b + x' \sin\alpha + y' \cos\alpha \end{aligned} \tag{26}$$

Ćwiczenia.

1. Dane są cztery dowolne punkty M, A, B, C na osi, udowodnić, iż:

$$\overline{MA}^2 \,.\, \overline{BC} + \overline{MB}^2 \,.\, \overline{CA} + \overline{MC}^2 \,.\, \overline{AB} + \overline{BC} \,.\, \overline{CA} \,.\, \overline{AB} = 0.$$

2. Dowieść, iż współrzędne środka ciężkości trójkąta, to znaczy punktu przecięcia się środkowych, równe są średnim arytmetycznym współrzędnych jego wierzchołków.

3. Dowieść, iż pole trójkąta, którego wierzchołki mają współrzędne $(x_1 y_1)$, $(x_2 y_2)$, $(x_3 y_3)$, równa się połowie wartości bezwzględnej wyznacznika:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

4. Dane są cztery punkty $ABCD$ na tej samej prostej. Dowieść:

a) gdy te punkty są harmonicznie sprzężone, to ich współrzędne $x_1\, x_2\, x_3\, x_4$ spełniają związek:

$$x_1 x_2 - \frac{1}{2}(x_1 + x_2)(x_3 + x_4) + x_3 x_4 = 0.$$

b) znaleźć warunek, który wtedy winny spełniać liczby (a, b, c) i (a', b', c') jeśli x_1 i x_2 są pierwiastkami równania $ax^2 + bx + c = 0$, zaś x_3 i x_4 pierwiastkami równania $a'x^2 + b'x + c' = 0$.

5. Wyznaczyć odległość punktu (1,3) od środka odcinka, łączącego punkty (4,7) i $(-2, -3)$.

6. Współrzędne biegunowe punktu M są (r, ϱ); znaleść jego współrzędne prostokątne względem układu (Oxy), jeśli wiemy, iż biegun znajduje się w punkcie o współrzędnych (a, b) w tym układzie, zaś oś biegunowa tworzy kąt α z osią Ox.

7. Znaleść wzory na zamianę miar rzutów wektora na osi współrzędnych w razie przejścia od jednego do drugiego układu prostokątnego.

8. Jeśli (X_1, Y_1) i (X_2, Y_2) są miarami rzutów dwóch wektorów w jednym układzie prostokątnym, zaś (X'_1, Y'_1) i (X'_2, Y'_2) miarami rzutów tych wektorów na osi innego układu prostokątnego, to mamy:

$$X_1X_2 + Y_1Y_2 = X'_1X'_2 + Y'_1Y'_2.$$

9. Dane są współrzędne wierzchołków trójkąta:

$$A(1,1);\quad B(2,3);\quad C(3,-1);$$

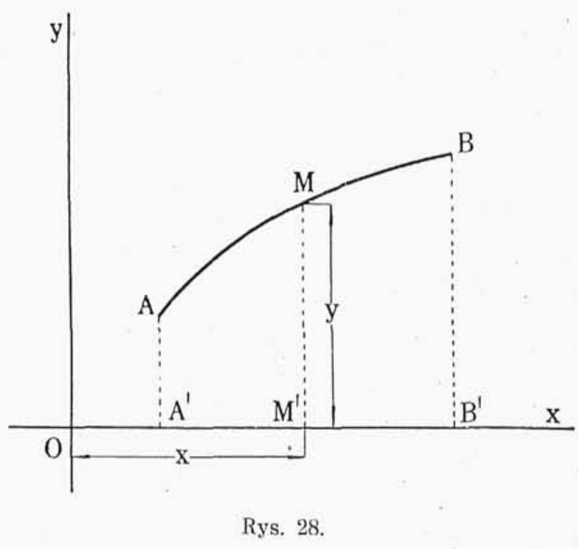
wyznaczyć cosinusy kątów tego trójkąta, opierając się na wzorze na cosinus kąta między osiami.

ROZDZIAŁ II.

WIADOMOŚCI OGÓLNE O LINJACH KRZYWYCH I ICH RÓWNANIACH.

10. Krzywa i pojęcie funkcji.

Rozważmy zbiór wszystkich punktów, leżących na osi Ox między punktami A' i B'. Niech x oznacza odciętą dowolnego punktu M' tego zbioru. Jeśli dla każdej liczby x dobierzemy pewną liczbę y i odmierzymy ją jako rzędną na prostopadłej w punkcie M',



Rys. 28.

to otrzymamy zbiór punktów M, tworzących łuk krzywej AB (rys. 28). Położenie i kształt tego łuku będzie określony, jeśli podamy **sposób**, według którego dla każdej liczby x danego zbioru na-