w punkcie (1, 2) i do osi Ox. [Należy napisać, iż środek koła leży na normalnej do elipsy w punkcie (1, 2)]. —

8. Znaleść równanie koła, przechodzącego przez punkt (3,1) i stycznego w punkcie (1, 2) do elipsy

$$3x^2 + y^2 = 7.$$

9. Dowieść, iż powierzchnia równoległoboku, opisanego na elipsie, jest stała.

10. Znaleść równanie elipsy, której ogniskami są dwa dane punkty $(c, 0)$ i $(-c, 0)$ i która przechodzi przez punkt (x_0, y_0).
Dyskusja.

11. Normalna w dowolnym punkcie elipsy przecina osi elipsy w punktach P i Q. Wyznaczyć miejsce geometryczne punktów przecięcia równoległych do osi, poprowadzonych przez punkty P i Q.

ROZDZIAŁ XI.

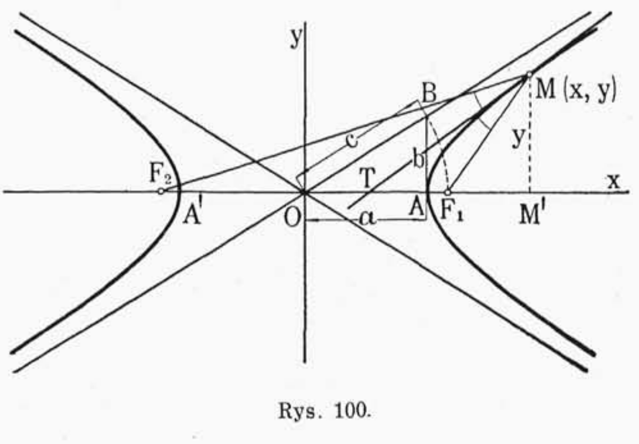
WŁASNOŚCI SZCZEGÓLNE HYPERBOLI.

57. Promienie wodzące hyperboli.

Aby otrzymać pewne własności hyperboli o równaniu

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{1}$$

zwróćmy uwagę na rachunki, które doprowadziły nas do własności elipsy i zmieńmy je, podstawiając $-b^2$ na miejsce $+b^2$.



Rys. 100.

Wiemy, iż ogniska F_1 i F_2 hyperboli (1) leżą na osi Ox, przecinającej tę hyperbolę, w odległości

(2) $$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

od środka (rys. 100). Sprawdzamy bezpośrednio, iż odległość punktu hyperboli $M(x, y)$ od punktów $F_1(c, 0)$ i $F_2(-c, 0)$ wyraża się wymiernie w zależności od x, mamy bowiem:

$$MF_1 = \sqrt{y^2 + (x-c)^2} = \sqrt{\frac{c^2}{a^2}x^2 - 2cx + a^2}$$

$$MF_2 = \sqrt{y^2 + (x+c)^2} = \sqrt{\frac{c^2}{a^2}x^2 + 2cx + a^2}$$

a stąd wypadają wyrażenia wymierne dla promieni wodzących:

(3) $$MF_1 = \left|\frac{c}{a}x - a\right| = |\varepsilon x - a|$$
$$MF_2 = \left|\frac{c}{a}x + a\right| = |\varepsilon x + a|$$

gdyż $\frac{c}{a}$ równa się mimośrodowi hyperboli ε.

Ponieważ $|\varepsilon x| > a$, więc, odejmując wyrażenia (3), otrzymamy

(4) $$|MF_2 - MF_1| = 2a$$

Hyperbola jest więc miejscem geometrycznem punktów, dla których różnica odległości od dwóch ognisk jest wielkością stałą i równą osi rzeczywistej $2a$.

58. Styczna i sieczna hyperboli.

Podstawiając we wzorach (10) i (13) artykułu 55-go na miejsce wartości $+b^2$ wartość $-b^2$, otrzymamy współczynnik kątowy m stycznej do hyperboli w punkcie (x, y)

(5) $$m = \frac{b^2 x}{a^2 y}$$

i równanie stycznej w tym punkcie

(6) $$\frac{Xx}{a^2} - \frac{Yy}{b^2} = 1$$

symbole (X, Y) oznaczają współrzędne dowolnego punktu stycznej.

Z równania hyperboli wynika, iż

$$x^2=\frac{a^2}{b^2}y^2+a^2;\quad \frac{x^2}{y^2}=\frac{a^2}{b^2}+\frac{a^2}{y^2};$$

a więc dla każdego punktu hyperboli, wartość bezwzględna stosunku $\frac{x}{y}$ jest większa od $\frac{a}{b}$:

$$\left|\frac{x}{y}\right|>\frac{a}{b}$$

Na podstawie tej własności, wnioskujemy, iż wartość bezwzględna współczynnika kątowego m stycznej do hyperboli, danego przez wzór (5), jest zawsze większa od $\frac{b}{a}$, t. j. od współczynnika kątowego asymptoty (rys. 100):

$$|m|>\frac{b}{a} \tag{7}$$

Poznamy teraz jeszcze pewną grupę własności stycznej do hyperboli, wynikających z jej równania (6).

WŁASNOŚĆ 1. *Styczna do hyperboli jest dwusieczną kąta, zawartego między promieniami wodzącemi punktu styczności.* Wystarczy wykazać, podobnie jak dla elipsy, iż styczna w punkcie $M(x,y)$ dzieli odcinek F_2F_1, łączący ogniska, na dwa odcinki $\overline{F_2T}$ i $\overline{TF_1}$, proporcjonalne do promieni wodzących F_2M i F_1M. Wyznaczmy więc odciętą $\overline{OT}$ punktu przecięcia się T stycznej w punkcie M z osią Ox; wstawiając $Y=0$ w równanie stycznej (6), mamy

$$X=\overline{OT}=\frac{a^2}{x}$$

stąd

$$\overline{F_2T}=c+\overline{OT}=c+\frac{a^2}{x}$$

$$\overline{TF_1}=c-\overline{OT}=c-\frac{a^2}{x}$$

więc, według wzorów (3),

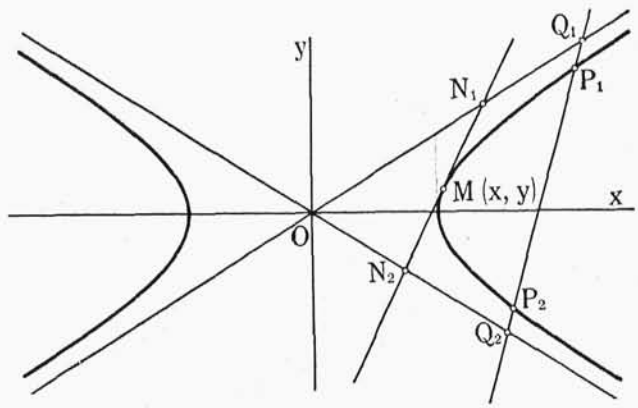
$$\frac{\overline{F_2T}}{\overline{TF_1}}=\frac{c+\frac{a^2}{x}}{c-\frac{a^2}{x}}=\left|\frac{cx+a^2}{cx-a^2}\right|=\frac{MF_2}{MF_1};$$

prosta MT jest więc dwusieczną kąta przy M w trójkącie F_2MF_1 (rys. 100).

WŁASNOŚĆ 2. Punkt styczności jest środkiem odcinka stycznej do hyperboli, zawartego między asymptotami.

Niech N_1 i N_2 oznaczają punkty przecięcia się z asymptotami stycznej w punkcie $M(x, y)$ do hyperboli (rys. 101). Zamiast szukać punktów przecięcia się z każdą asymptotą oddzielnie, praktyczniej jest wziąć pod uwagę równanie zespołu asymptot

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 0 \tag{8}$$



Rys. 101.

i wyznaczyć liczby (X, Y), spełniające jednocześnie to równanie i równanie stycznej

$$\frac{Xx}{a^2} - \frac{Yy}{b^2} = 1$$

w punkcie $M(x, y)$. Wyznaczając Y z równania stycznej i wstawiając otrzymane wyrażenie w równanie zespołu asymptot, otrzymamy równanie drugiego stopnia

$$X^2 - 2xX + a^2 = 0 \tag{9}$$

którego pierwiastkami X_1 i X_2 są odcięte punktów przecięcia N_1 i N_2 danej stycznej z asymptotami. Z równania (9) mamy dla połowy sumy jego pierwiastków wartość

$$\frac{1}{2}(X_1 + X_2) = x$$

a to oznacza, że środkiem odcinka $N_1 N_2$ jest punkt hyperboli M, o współrzędnych (x, y) c. b. d. d.

WŁASNOŚĆ 3. *Styczna do hyperboli i asymptoty ograniczają trójkąt ON_1N_2, którego pole jest stałe.*

Własność ta wynika natychmiast z uwagi, iż iloczyn pierwiastków równania (9) jest stały:

$$X_1 X_2 = a^2 \tag{10}$$

Istotnie, według wzoru na str. 25, pole trójkąta ON_1N_2 ma wartość

$$S = \frac{1}{2}\left| X_1 Y_2 - X_2 Y_1 \right|$$

ale rzędne Y_1 i Y_2 punktów N_1 i N_2, na zasadzie równań asymptot

$$Y = \pm \frac{b}{a} X,$$

wyrażają się w ten sposób:

$$Y_1 = \frac{b}{a} X_1; \qquad Y_2 = -\frac{b}{a} X_2$$

stąd

$$S = \frac{b}{a} X_1 X_2$$

a więc, według wartości (10),

$$S = ab$$

WŁASNOŚĆ 4. *Jeśli punkt hyperboli oddala się nieskończenie, to styczna w tym punkcie dąży do asymptoty odpowiedniej gałęzi.*

Napiszmy równanie stycznej do hyperboli w punkcie (x, y) w takiej postaci:

$$Y = \frac{b^2 x}{a^2 y} X - \frac{b^2}{y}$$

Jeśli punkt (x, y) oddala się nieskończenie po hyperboli, wtedy mamy, według równania tej krzywej,

$$\lim \frac{y}{x} = \lim \left[\pm \frac{b}{a} \sqrt{\frac{a^2}{x^2} - 1} \right] = \pm \frac{b}{a}$$

$$\lim \frac{b}{y^2} = 0$$

a więc rzędna stycznej Y, odpowiadająca odciętej X, dąży do wartości

$$Y = \pm \frac{b}{a} X$$

to znaczy do rzędnej odpowiedniej asymptoty c. b. d. d. Na podstawie powyższej własności, mówimy też, iż „asymptota jest styczną do hyperboli w punkcie w nieskończoności".

WŁASNOŚCI SIECZNEJ. Zbadajmy przecięcie się prostej

$$y = mx + n$$

z hyperbolą

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Odcięte punktów przecięcia winny spełniać równanie

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{(mx+n)^2}{b^2} = 1$$

lub, po uporządkowaniu,

$$(b^2 - a^2 m^2) x^2 - 2 m n a^2 x - (n^2 + b^2) a^2 = 0 \tag{10}$$

Powtarzając dobrze znaną dyskusję, widzimy, iż, w razie, gdy $b^2 - a^2 m^2 \neq 0$, prosta dana przecina hyperbolę w dwóch punktach rzeczywistych, lub urojonych, albo jest do niej styczna, zależnie od tego, czy wyróżnik równania (10)

$$n^2 + b^2 - a^2 m^2$$

jest dodatni, ujemny lub równy zeru.

Jeśli zaś

$$b^2 - a^2 m^2 = 0,$$

lub

$$m = \pm \frac{b}{a}$$

prosta jest równoległa do jednej z asymptot danej hyperboli i wtedy, według równania (10), przecina hyperbolę tylko w jednym punkcie pojedyńczym, gdy $n \neq 0$, lub wcale, gdy $n = 0$ — własność tę znamy już z art. 45.

Przypuśćmy, iż prosta dana przecina hyperbolę i zbadajmy położenie tych punktów przecięcia względem punktów przecięcia danej prostej z asymptotami. Otóż, odcięte punktów przecięcia P_1 i P_2 (rys. 101) prostej $y = mx + n$ z hyperbolą są pierwiastkami równania

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{(mx+n)^2}{b^2} = 1 \tag{11}$$

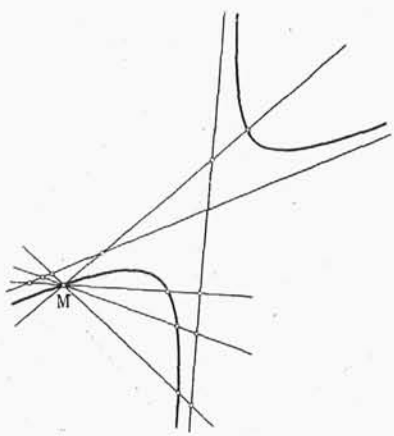
zaś, ze względu na równanie (8) zespołu asymptot, odcięte punktów przecięcia Q_1 i Q_2 tej samej prostej $y = mx + n$ z asymptotami są pierwiastkami równania

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{(mx+n)^2}{b^2} = 0 \tag{12}$$

Ale równania drugiego stopnia (11) i (12) *różnią się tylko wyrazem, niezawierającym niewiadomej* x, a więc *suma pierwiastków równania* (11) *równa się sumie pierwiastków równania* (12), to zaś oznacza geometrycznie, że *środek odcinka* $P_1 P_2$ *jest jednocześnie środkiem odcinka* $Q_1 Q_2$, (rys. 101), stąd wynika własność następująca.

TWIERDZENIE. Odcinki $P_1 Q_1$ *i* $P_2 Q_2$, *zawarte między punktami przecięcia się dowolnej prostej z hyperbolą i jej asymptotami są sobie równe.*

Zakładając, iż odcinek $P_1 P_2$ dąży do zera, otrzymamy z tego twierdzenia, udowodnioną już poprzednio w sposób bezpośredni, własność stycznej, a mianowicie, iż punkt styczności jest środkiem odcinka stycznej do hyperboli, zawartego między asymptotami.



Rys. 102.

Z powyższej własności siecznej wynika prosty sposób konstrukcji dowolnej liczby punktów hyperboli, gdy dane są jej asymptoty i jeden jej punkt. Jeśli mianowicie przez dany punkt M poprowadzimy sieczne, przecinające asymptoty w punktach Q_1 i Q_2, to, odmierzając na każdej siecznej od punktu dalszego Q_2 w odpowiednim kierunku odcinek $Q_2 M_1$ równy odcinkowi $Q_1 M$, otrzymamy nowe punkty hyperboli M_1 (rys. 102). Stąd też wynika konstrukcja stycznej w punkcie M: należy przez punkt M poprowadzić taką prostą, aby ten punkt stał się środkiem odcinka $Q_1 Q_2$, zawartego między asymptotami.

59. Zagadnienia.

ZAGADNIENIE 1. *Znaleść równanie stycznej do hyperboli*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

równoległej do danej prostej $y = mx$. Równanie szukanej stycznej winno mieć postać

$$y = mx + n$$

Aby wyznaczyć stałą n, wystarczy zastosować otrzymany w poprzednim artykule warunek styczności

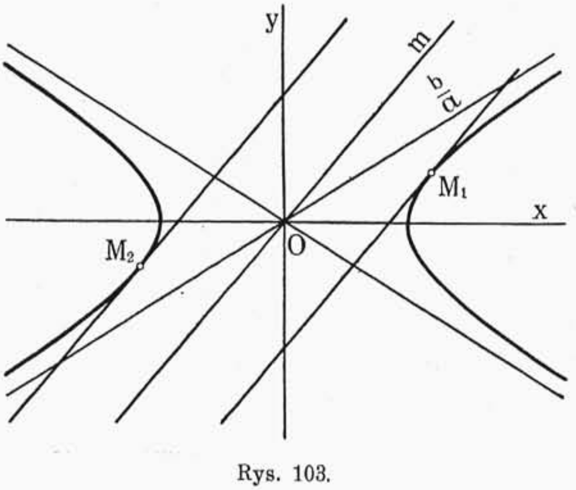
$$n^2 + b^2 - a^2 m^2 = 0$$

stąd mamy

$$n = \pm \sqrt{a^2 m^2 - b^2}$$

i równania dwóch żądanych stycznych

$$y = mx \pm \sqrt{a^2 m^2 - b^2}$$



Rys. 103.

rozwiązania te istnieją, jeśli dany współczynnik kątowy m spełnia warunek

$$|m| > \frac{b}{a}$$

to znaczy, jeśli jego wartość bezwzględna przewyższa współczynnik kątowy asymptoty $\frac{b}{a}$ (rys. 103).

ZAGADNIENIE 2. Z punktu danego $P(x_0, y_0)$ wyprowadzic styczną do hyperboli

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

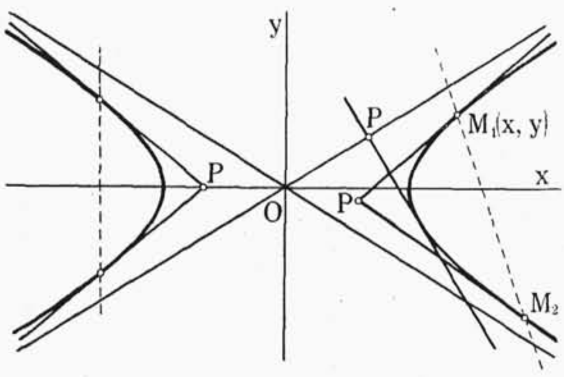
Podobnie, jak dla elipsy, zagadnienie można rozwiązać dwiema metodami: 1°) poszukując współrzędnych punktu styczności, 2°) poszukując współczynnika kątowego stycznej. Rozwiążemy zagadnienie pierwszą metodą; otóż, pisząc, iż styczna do hyperboli w nieznanym punkcie $M(x, y)$ winna z założenia przechodzić przez dany punkt $P(x_0, y_0)$, mamy związek następujący:

$$\frac{x x_0}{a^2} - \frac{y y_0}{b^2} = 1 \tag{13}$$

który, łącznie z równaniem danej hyperboli

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{14}$$

tworzy układ dwóch równań, dla określenia dwóch niewiadomych (x, y).



Rys. 104.

Zbiór wszystkich punktów (x, y), spełniających tylko równanie (13), tworzy linję prostą, która zależy od położenia danego punktu $P(x_0, y_0)$ i zwie się jego *biegunową*.

Szukane punkty styczności $M_1 M_2$ są więc przecięciem biegunowej (13) z hyperbolą (14).

Załóżmy wpierw, iż $y_0 \neq 0$, wtedy z równania (13) mamy

$$y = \frac{b^2 x_0}{a^2 y_0} x - \frac{b^2}{y_0};$$

podstawiając tę wartość w równanie (14), otrzymamy, dla wyznaczenia odciętej punktu styczności, równanie kwadratowe

$$x^2 \left(\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2}\right) - 2 x_0 x + \left(1 + \frac{y_0^2}{b^2}\right) a^2 = 0 \tag{15}$$

którego wyróżnik ma wartość

$$\Delta = -\frac{4 a^2 y_0^2}{b^2} \left(\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} - 1\right) \tag{15'}$$

Jeśli więc punkt $P(x_0, y_0)$ spełnia nierówność

$$\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} - 1 < 0 \tag{16}$$

to znaczy, gdy leży w części płaszczyzny, zawartej *między gałęziami* hyperboli, wtedy z punktu tego można wyprowadzić dwie styczne do hyperboli, z wyjątkiem wypadku, gdy punkt P leży na jednej z asymptot (rys. 104), wtedy bowiem

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$$

i równanie (15) wskazuje na istnienie *jednej tylko stycznej*; *biegunowa* (13) *jest wtedy równoległa do asymptoty odpowiedniej*.

Jeśli punkt P leży na osi Ox ($y_0 = 0$), wtedy równanie (13) daje odrazu wartość odciętej punktu styczności

$$x = \frac{a^2}{x_0}$$

i, jeśli $|x_0| < a$, to wtedy z równania hyperboli otrzymamy odpowiednie *dwie* wartości rzędnej

$$y = \pm b \sqrt{\frac{a^2}{x^2} - 1}$$

a więc istnieją też dwie styczne do hyperboli, wychodzące z punktu $(x_0, 0)$; wyjątek stanowi środek hyperboli $(0, 0)$, z którego stycznych rzeczywistych ani urojonych wyprowadzić *nie można*.

Nadmienimy wreszcie, iż z punktów pozostałego obszaru płaszczyzny, określonego przez nierówność

$$\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} - 1 > 0,$$

stycznych rzeczywistych do hyperboli nie można wyprowadzić.

Ćwiczenia.

1. Znaleść równanie hyperboli, której asymptotami są proste $y = \pm 2x$ i która przechodzi przez punkt (2, 3). Wyznaczyć długość jej osi i mimośród.

2. Z punktu (1, 2) wyprowadzić styczną do hyperboli

$$2x^2 - 3y^2 = 1.$$

3. Znaleść równanie stycznej do hyperboli

$$xy = k$$

w punkcie (x, y).

4. Z punktu (— 1, 2) wyprowadzić styczną do hyperboli $xy = 1$.

5. Dany jest układ elips, o równaniu w postaci

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

stycznych do prostej $x + y = 1$. Wyznaczyć miejsce geometryczne punktów przecięcia się stycznych w wierzchołkach tych elips.

6. Znaleść równanie koła, którego środkiem jest punkt (0, 1) i które jest styczne do hyperboli

$$2x^2 - y^2 = 1.$$

7. Znaleść równanie koła, które przechodzi przez początek układu stycznie do osi Ox i które jest styczne do hyperboli

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

8. Znaleść miejsce geometryczne punktów, z których styczne, wyprowadzone do hyperboli, są względem siebie prostopadłe. Dyskusja.

9. Znaleść miejsce geometryczne środków kół stycznych do dwóch kół danych (Odp.: hyperbola).

10. Z punktu $(x_0, 0)$ wyprowadzić normalną do hyperboli

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Dyskusja.

11. Elipsa i hyperbola, mające wspólne ogniska, przecinają się pod kątem prostym.

12. Dany jest układ krzywych

$$\frac{x^2}{\lambda^2} + \frac{y^2}{\lambda^2 - c^2} = 1.$$

gdzie λ jest parametrem zmiennym.

1) Dowieść, iż równanie to przedstawia układ elips i hyperbol współogniskowych.
2) Wykazać, iż przez dowolny punkt płaszczyzny (x_0, y_0) przechodzi jedna elipsa i jedna hyperbola powyższego układu.

13. Prosta zmienna tworzy z dwiema prostemi stałemi trójkąt o stałem polu k^2. Znaleść miejsce geom. środków odcinków tej prostej, zawartych między prostemi stałemi.

14. Znaleść ogniska hyperboli $xy = k^2$.

15. Znaleść równanie koła stycznego do hyperboli i do jej asymptot.

16. Dowieść, iż przez dowolny punkt hyperboli M przechodzą dwa koła styczne do jej asymptot, których odległość środków ma wartość stałą, niezależną od położenia punktu M na hyberboli.

ROZDZIAŁ XII.

WŁASNOŚCI SZCZEGÓLNE PARABOLI.

60. Własności stycznej do paraboli.

Niech będzie równanie paraboli

$$y^2 = 2px$$

której wierzchołkiem jest początek O, zaś osią symetrji oś odciętych Ox.

Wiemy, iż ognisko F tej paraboli znajduje się na dodatniej części osi Ox w odległości $\frac{p}{2}$ od wierzchołka O, zaś po przeciwnej stronie, w tej samej odległości $\frac{p}{2}$, znajduje się kierownica D. Jak wiadomo, dla dowolnego punktu paraboli zachodzi własność

$$MF = MQ \tag{2}$$

gdzie Q jest spodkiem prostopadłej, spuszczonej z punktu M na kierownicę.