a więc wszystkim kołom odpowiadają te same „dwa punkty w nieskończoności," określone przez równanie

$$x^2 + y^2 = 0$$

lub

$$y + xi = 0; \quad y - xi = 0;$$

kierunki tych dwóch prostych urojonych nazywamy *izotropowemi* ($m = \pm i$). „Punkty urojone w nieskończoności," określone przez równanie $x^2 + y^2 = 0$ i wspólne wszystkim kołom płaszczyzny nazywamy też *punktami kołowemi* płaszczyzny.

46. Asymptoty hyperboli.

Rozpatrzmy bliżej znaczenie geometryczne dwóch kierunków, określonych równaniem

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 = 0 \tag{50}$$

w przypadku hyperboli. Otóż wykażemy, iż dwie proste D'_1 i D'_2 poprzedniego artykułu, poprowadzone przez środek hyperboli i równoległe do prostych (50), są asymptotami hyperboli. Zaznaczymy, iż wogóle asymptotą krzywej nazywamy prostą taką, iż odległość punktu krzywej od niej dąży do zera, gdy punkt krzywej oddala się nieograniczenie po odpowiedniej gałęzi.

W celu udowodnienia wymienionej własności, wystarczy, dla uproszczenia, wziąć równanie hyperboli odniesionej do osi symetrji, a więc równanie w postaci

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{51}$$

Równania prostych D'_1 i D'_2 poprzedniego artykułu otrzymamy tu odrazu, przyrównywując do zera grupę wyrazów kwadratowych, gdyż uzyskane wtedy równanie

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0 \tag{52}$$

lub

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0; \quad \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0 \tag{52'}$$

przedstawia proste, przechodzące zarazem przez środek hyperboli o równaniu (51). Aby, w myśl wygłoszonej własności, udowodnić, iż proste (52) są asymptotami hyperboli (51), rozważmy różnicę między rzędną punktu jednej gałęzi hyperboli

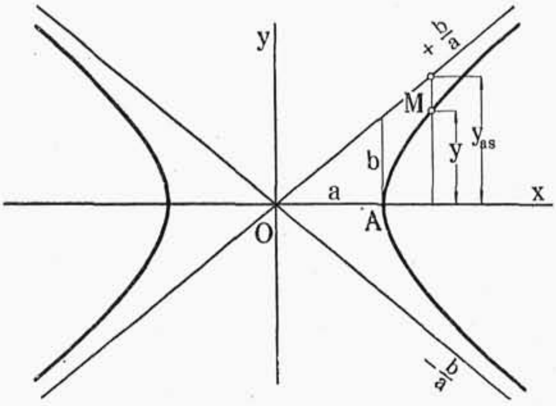
$$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$$

i rzędną punktu jednej z prostych (52):

$$y_{as} = \frac{b}{a} x,$$

odpowiadającą tej samej dodatniej wartości odciętej x; będziemy mieli

$$y_{as} - y = \frac{b}{a} (x - \sqrt{x^2 - a^2})$$



Rys. 77.

Wykażemy, iż różnica ta dąży do zera, gdy x rośnie nieskończenie.

Istotnie, mamy

$$y_{as} - y = \frac{b}{a} \frac{(x - \sqrt{x^2 - a^2})(x + \sqrt{x^2 - a^2})}{x + \sqrt{x^2 - a^2}}$$

stąd

$$y_{as} - y = \frac{ab}{x + \sqrt{x^2 + a^2}}$$

widzimy teraz wyraźnie, iż różnica ta dąży do zera, gdy x nieskończenie rośnie, prosta o równaniu $y = \frac{b}{a} x$ jest więc asymptotą hyperboli (51); druga z prostych (52′), jako symetrycznie położona, jest również asymptotą krzywej (rys. 77).

Ponieważ stosunek $\frac{b}{a}$ jest współczynnikiem kątowym asymptoty hyperboli (51), więc *odcinek b równa się rzędnej punktu asymptoty, wystawionej z wierzchołka hyperboli* (rys. 77).

Zgodnie z poprzednim artykułem, spostrzegamy odrazu, iż hyperbola i jej asymptoty nie mają punktów wspólnych, rzeczywistych lub urojonych, gdyż dwa równania (51) i (52) nie mogą mieć wspólnych rozwiązań.

Odciętą punktu przecięcia dowolnej prostej, określonej przez równanie $y = mx + n$, z hyperbolą o równaniu uproszczonem (51), określa równanie

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{(mx+n)^2}{b^2} = 1$$

lub

$$(b^2 - a^2 m^2)\,x^2 - 2\,a^2 m n x - a^2 (n^2 + b^2) = 0$$

Sprawdzamy tu, iż dowolna prosta równoległa do asymptot przecina hyperbolę w jednym punkcie, mamy bowiem, dla $m = \pm \frac{b}{a}$ i $n \neq 0$, jedyny pierwiastek pojedyńczy x. Prosta, wychodząca ze środka hyperboli ($n = 0$) przecina ją w dwóch punktach rzeczywistych o odciętych

$$x = \pm a \sqrt{\frac{n^2 + b^2}{b^2 - a^2 m^2}}$$

gdy $|m| < \frac{b}{a}$, zaś w dwóch punktach urojonych, gdy $|m| > \frac{b}{a}$.

Nadmienimy, że dwa równania

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1$$

przedstawiają dwie hyperbole, mające wspólne asymptoty, osi symetrji i posiadające tę własność, iż oś rzeczywista jednej hyperboli jest osią urojoną dla drugiej; dwie takie hyperbole nazywamy *sprzężonemi.*

W celu wyznaczenia asymptot hyperboli, określonej przez równanie w postaci ogólnej

$$f = A x^2 + B x y + C y^2 + D x + E y + F = 0$$

należy przez środek tej krzywej poprowadzić proste równoległe do dwóch prostych, określonych przez równanie

$$A x^2 + B x y + C y^2 = 0$$

Osi symetrji będą dwusiecznemi kątów, utworzonych przez asymptoty.

Przykład. Wyznaczmy równania asymptot hyperboli o równaniu

$$f(x, y) = 3x^2 + xy - y^2 + x - y + 1 = 0;$$

współrzędne środka (x_0, y_0) określimy z równań

$$f_x' = 6x_0 + y_0 + 1 = 0$$

$$f_y' = x_0 - 2y_0 - 1 = 0$$

Stąd

$$x_0 = -\frac{1}{13}; \quad y_0 = -\frac{7}{13}$$

współczynniki kątowe asymptot spełniają związek

$$A + Bm + Cm^2 = 0$$

to jest

$$3 + m - m^2 = 0$$

wypada stąd

$$m_1 = \frac{1 + \sqrt{13}}{2}; \quad m_2 = \frac{1 - \sqrt{13}}{2}$$

równania szukanych asymptot będą więc następujące:

$$y + \frac{7}{13} = \frac{1 + \sqrt{13}}{2}\left(x + \frac{1}{13}\right)$$

$$y + \frac{7}{13} = \frac{1 - \sqrt{13}}{2}\left(x + \frac{1}{13}\right)$$

Równania asymptot hyperboli można otrzymać zręczniej, nie rozwiązując równań

$$(53) \qquad \begin{cases} f'_x(x, y) = 2Ax + By + D = 0 \\ f'_y(x, y) = Bx + 2Cy + E = 0 \end{cases}$$

określających położenie środka, wystarczy w tym celu zauważyć, iż równanie asymptoty, jako prostej, przechodzącej przez środek hyperboli, musi być kombinacją linjową równań (53), a więc winno mieć postać

$$(54) \qquad 2Ax + By + D + \lambda(Bx + 2Cy + E) = 0$$

dobierając teraz stałą λ tak, aby współczynnik kątowy prostej miał wartości określone przez związek ($C \neq 0$)

$$A + Bm + Cm^2 = 0,$$

otrzymamy żądane asymptoty; okazuje się, iż wartości na λ winny być właśnie równe pierwiastkom tego samego równania $\lambda_1 = m_1$ i $\lambda_2 = m_2$, co zgadza się z rozważaniami poprzedniego artykułu (str. 154).

Gdy równanie hyperboli ma postać szczególną ($C=0$)

$$Ax^2+Bxy+Dx+Ey+F=0,$$

to asymptoty hyperboli są równoległe do prostych

$$x=0; \qquad Ax+By=0,$$

a więc *jedna z asymptot jest równoległa do osi* Oy i, na podstawie związków (53), spełnia równanie

$$Bx+E=0;$$

gdy zaś równanie hyperboli ma postać szczególną ($A=0$)

$$Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0,$$

to asymptoty są równoległe do prostych

$$y=0; \qquad Bx+Cy=0,$$

a więc *jedna z asymptot jest równoległa do osi* Ox i spełnia zatem, na podstawie związków (53), równanie

$$By+D=0$$

47. Hyperbola równoosiowa.

Hyperbola, określona przez równanie

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$$

nazywa się *równoosiową*, jeśli jej osi a i b są równe; równanie hyperboli równoosiowej, odniesionej do osi symetrji, będzie więc miało postać

$$x^2-y^2=a^2, \tag{55}$$

zaś równanie jej asymptot będzie

$$x^2-y^2=0$$

to znaczy

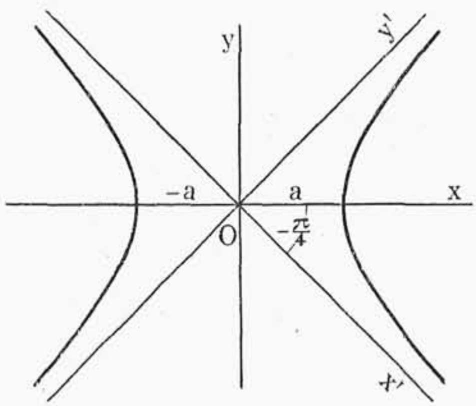
$$x-y=0; \qquad x+y=0 \tag{56}$$

asymptoty hyperboli równoosiowej są zatem dwusiecznemi kątów między osiami, a więc względem siebie są prostopadłe (rys. 77).

Obracając układ osi współrzędnych o kąt $\alpha = -\frac{\pi}{4}$, uzyskamy równanie hyperboli równoosiowej, odniesionej do asymptot; otóż mamy między nowemi współrzędnemi (x', y') i dawnemi (x, y) związki

$$x = x' \cos\alpha - y' \sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y')$$

$$y = x' \sin\alpha + y' \cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}(-x' + y')$$



Rys. 78.

wstawiając te wyrażenia do równania (55), otrzymamy więc *równanie hyperboli równoosiowej odniesionej do asymptot w postaci*

$$x' y' = \frac{a^2}{2}; \tag{57}$$

hyperbola równoosiowa jest więc wtedy miejscem geometrycznem punktów, dla których iloczyn odległości od osi współrzędnych jest wielkością stałą.

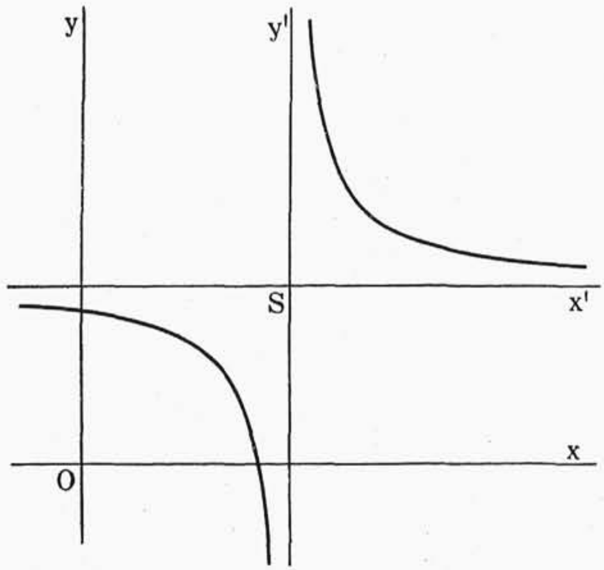
Jeśli równanie krzywej ma postać

$$B\,x\,y + D\,x + E\,y + F = 0\,, \tag{58}$$

to asymptoty jej są równoległe do prostych (patrz art. poprzedni)

$$x\,y = 0\,,$$

a więc do osi współrzędnych, równanie (58) przedstawia zatem



Rys. 79.

hyperbolę równoosiową z asymptotami równoległemi względem osi współrzędnych (rys. 79).

Aby w przypadku równania w postaci ogólnej

$$(59) \qquad Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

przekonać się, czy ono przedstawia hyperbolę równoosiową, *wystarczy stwierdzić, że jej asymptoty są do siebie prostopadłe.* Otóż wiemy, iż asymptoty są równoległe do pary prostych, przedstawionych przez równanie

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 = 0,$$

warunkiem zaś prostopadłości tych prostych, jest związek (patrz art. 27)

$$A + C = 0,$$

możemy więc wygłosić następujące twierdzenie.

TWIERDZENIE. Równanie drugiego stopnia

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

przedstawia hyperbolę równoosiową, gdy suma współczynników przy kwadratach współrzędnych równa się zeru:

$$A + C = 0$$

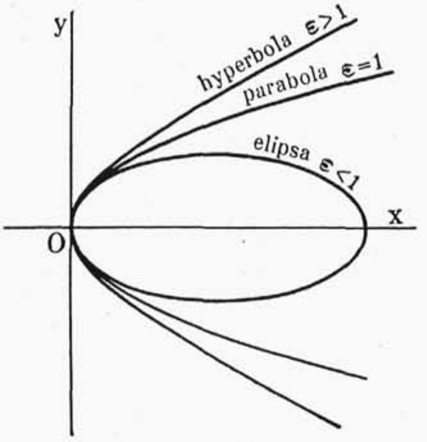
Nadmienimy jeszcze, iż, w razie zwyrodnienia krzywej w tym wypadku, równanie będzie przedstawiało dwie proste prostopadłe.

48. Parabola jako graniczne położenie punktów elipsy i hyperboli.

Niech będą równania krzywych drugiego stopnia, które poznaliśmy poprzednio, w postaci najprostszej:

$$\text{(60)} \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{(elipsa)} \qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{(hyperbola)}$$

Postaramy się teraz tak przesunąć elipsę i hyperbolę, określone przez związki (60), aby wierzchołki tych krzywych znalazły się w początku układu O, zaś środek elipsy na dodatniej części



Rys. 80.

osi Ox, a środek hyperboli na ujemnej części Ox. Elipsę trzeba więc przesunąć o wielkość a w dodatnim kierunku osi Ox, zaś hyperbolę o wielkość a w stronę przeciwną; w nowem położeniu równanie elipsy będzie

$$\frac{(x-a)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

a hyperboli

$$\frac{(x+a)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1\,;$$

po uporządkowaniu, wypadnie równanie

$$(61) \qquad y^2 = 2\frac{b^2}{a}x \mp \frac{b^2}{a^2}x^2$$

znak górny odnosi się do elipsy, zaś dolny do hyperboli.

Oznaczmy

$$(62) \qquad p = \frac{b^2}{a}$$

odcinek p nazywamy *parametrem* elipsy lub hyperboli, równanie (61) napiszemy więc w postaci

$$(63) \qquad y^2 = 2px \mp \frac{p}{a}x^2$$

Z równania tego widzimy w sposób bardzo przejrzysty, że jeśli wierzchołek elipsy A oddala się nieograniczenie, lecz osi a i b rosną w ten sposób, że stosunek $p = \frac{b^2}{a}$ pozostaje stały, to wyraz $\frac{p}{a}x^2$ dąży do zera i *punkty elipsy lub hyperboli dążą do punktów krzywej o równaniu*

$$(64) \qquad y^2 = 2px$$

a więc do paraboli z wierzchołkiem w punkcie O, stycznej do osi Oy; stała p nazywa się *parametrem paraboli.*

49. Dowód, iż krzywa drugiego stopnia jest jednobieżna.

Krzywą nazywamy *jednobieżną*, jeśli współrzędne wszystkich jej punktów dają się wyrazić jako funkcje *wymierne* pewnego parametru zmiennego:

$$x = f(t)\,; \qquad y = \varphi(t)\,;$$

to znaczy, iż wyrażają się przy pomocy działań algebraicznych nad zmienną t, z wyłączeniem pierwiastkowania.

Udowodnimy, iż *każda krzywa drugiego stopnia niezwyrodniała jest jednobieżna.* W tym celu trzeba wykazać, iż dwie zmienne x i y, związane równaniem

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0\,,$$

można wyrazić wymiernie w zależności od pewnego parametru zmiennego t.

Przedewszystkiem umieśćmy początek układu w dowolnym punkcie krzywej, wskutek czego równanie przybierze postać, niezawierającą wyrazu stałego:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey = 0.$$

Poprowadźmy teraz przez początek układu, a więc przez jeden z punktów krzywej, dowolną sieczną o współczynniku kątowym t, *nierównoległą* do *asymptot,* a więc mającą równanie

$$y = tx.$$

Sieczna ta, poza punktem O, przetnie krzywą daną już tylko w jednym punkcie M, którego odciętą otrzymamy, podstawiając wartość $y = tx$ w równanie krzywej:

$$(A + Bt + Ct^2)x^2 + (D + Et)x = 0;$$

drugi pierwiastek tego równania, poza $x = 0$, daje nam *wymierne* wyrażenie odciętej punktu krzywej M

$$x = -\frac{D + Et}{A + Bt + Ct^2},$$

a więc i jego rzędnej

$$y = tx = -\frac{(D + Et)t}{A + Bt + Ct^2}$$

Ponieważ krzywa nie jest zwyrodniała z założenia, podstawiając więc na współczynnik kątowy t wszelkie możliwe wartości, z wyjątkiem dwóch wartości, spełniających równanie

$$A + Bt + Ct^2 = 0$$

i odpowiadających kierunkom asymptot, otrzymamy z wyrażeń powyższych na x i y wszelkie punkty krzywej, z wyjątkiem jej dwóch punktów przecięcia z osią Oy. Krzywa drugiego stopnia jest więc istotnie *jednobieżna.*

Przykłady i ćwiczenia.

1. Wyznaczyć środek i osi symetrji krzywych

$$x^2 + xy + y^2 + x + y = 0;$$

$$5x^2 + 26xy + 5y^2 - 16x + 16y - 88 = 0.$$

2. Dla jakiej wartości parametru m równanie

$$x^2 + xy - y^2 + mx + y + 1 = 0$$

przedstawia dwie przecinające się proste?

3. Współrzędne punktu, poruszającego się na płaszczyźnie, są następującemi funkcjami czasu t:

$$x = a \operatorname{Sin} \omega t; \quad y = a \operatorname{Sin}(\omega t - \varphi).$$

Znaleść postać krzywej, po której porusza się dany punkt; a, ω, φ są to wielkości stałe.

4. Zbadać, dla jakich wartości parametru λ następujące równania przedstawiają elipsę, parabolę, hyperbolę, lub krzywą zwyrodniałą.

$$x^2 + \lambda xy + (1 + \lambda) y^2 + \lambda = 0;$$

$$2x^2 - 4xy + y^2 - 4x + 6y + \lambda = 0;$$

$$x^2 - 2\lambda xy + 4y^2 + 2x - \lambda y = 0;$$

$$(\lambda + 1) x^2 - 2\lambda xy + (\lambda - 1) y^2 - 3x + y - 1 = 0.$$

5. Wyznaczyć λ i μ tak, aby równanie

$$x^2 + 2\mu xy + \lambda y^2 + \mu^2 x + \lambda\mu y + 1 = 0$$

przedstawiało tylko jedną prostą.

6. Zbadać postać krzywych

$$y = \frac{x^2 - x + 2}{x + 1}; \qquad y = \pm \sqrt{x^2 + x + 1}$$

7. Zbadać rodzaj krzywych, określonych przez równania parametryczne:

$$\begin{cases} x = at^2 + bt + c \\ y = a_1 t^2 + b_1 t + c_1 \end{cases}$$

$$x = \frac{at + b}{a_1 t + b_1}; \qquad y = \frac{ct + d}{c_1 t + d_1}.$$

8. Dana jest krzywa drugiego stopnia:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0;$$

wyznaczyć przedziały zmiennej x, której odpowiadają rzeczywiste wartości na y i odwrotnie, przedziały zmiennej y, której odpowiadają rzeczywiste wartości na x.

9. Znaleść równanie osi i wierzchołek paraboli o równaniu

$$(x - 2y)^2 + 3x - y = 0.$$

10. Wyznaczyć równania asymptot hyperbol o równaniach

$$x^2 + xy - y^2 + x - y = 0;$$

$$x^2 - xy + 2x + y - 1 = 0;$$

$$xy + x - y = 0.$$

11. Napisać równanie zespołu asymptot krzywej

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

wiedząc, iż równanie takiego zespołu może się różnić tylko wyrazem stałym od równania krzywej.