3. Znaleść równanie koła stycznego do osi Ox w punkcie (3, 0) i do prostej $x + y = 1$ w punkcie niepodanym z góry.

4. Przez punkt (1, 3) poprowadzić koło styczne w początku współrzędnych do prostej $y = 7x$.

5. Przez punkty przecięcia się kół, określonych przez równania

$$x^2 + y^2 = 1 \quad \text{i} \quad (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 3$$

poprowadzić koło styczne do osi Ox.

6. Dowieść, iż w każdym trójkącie dziewięć punktów następujących leży na jednym kole: 1⁰) środki boków, 2⁰) spodki wysokości, 3⁰) środki odcinków, łączących wierzchołki z punktem przecięcia wysokości.

7. Znaleść koło ortogonalne do trzech kół danych.

8. Dowieść, iż koła ortogonalne do dwóch kół danych tworzą układ linjowy, którego oś pierwiastna przechodzi przez środki dwóch danych kół.

9. Znaleść równania wspólnych stycznych do dwóch kół danych:

$$x^2 + y^2 = 1,$$

$$x^2 + y^2 + 4x = 0$$

10. Przez punkt (2, 3) poprowadzić koło styczne do koła danego

$x^2 + y^2 = 5$ w punkcie (1, 2).

11. Znaleść równanie koła stycznego do koła

$$x^2 + y^2 = 5$$

w punkcie (1, 2) i do koła

$$(x - 3)^2 + y^2 = 1$$

w punkcie niepodanym z góry.

12. Wyznaczyć koło styczne do trzech kół danych (wskazać metodę analityczną rozwiązania).

13. Wyznaczyć zbiór punktów płaszczyzny, spełniających nierówność

$$(x - y)(x^2 + y^2 + x) > 0.$$

ROZDZIAŁ VII.

MIEJSCA GEOMETRYCZNE.

35. Rozważania ogólne.

Miejscem geometrycznem nazywamy zbiór wszystkich punktów, posiadających określoną własność geometryczną wspólną.

Geometrja Analityczna daje właśnie metodą ogólną, poznawania postaci linji krzywej, którą utworzą punkty określonego miejsca geometrycznego. A mianowicie, w tym celu obieramy pewien układ osi współrzędnych, i, opierając się na danej własności geometrycznej, wykazujemy, iż współrzędne punktów żądanego miejsca spełniają pewien określony związek o postaci

$$f(x, y) = 0 \tag{1}$$

Otóż zbiór wszystkich punktów płaszczyzny, których współrzędne spełniają otrzymany związek (1), utworzy pewną krzywą K, której postać i własności geometryczne poznamy z własności analitycznych związku (1).

Z wyżej wskazanego postępowania wynika, iż punkty żądanego miejsca geometrycznego leżą na krzywej K, nie wynika natomiast jeszcze, czy wszystkie punkty tej krzywej do tego miejsca należą. A zatem, w celu zupełnego określenia miejsca geometrycznego, należy wykonać jeszcze *rozumowanie odwrotne* i wskazać, które punkty otrzymanej krzywej K posiadają własność geometryczną danego miejsca, a które jej nie posiadają i zatem należy je wykluczyć.

Tego rodzaju postępowanie wyjaśnią lepiej zagadnienia odpowiednie, z któremi będziemy mieli do czynienia w rozdziałach następnych. Narazie podamy tylko kilka elementarnych przykładów.

36. Przykłady metody bezpośredniej.

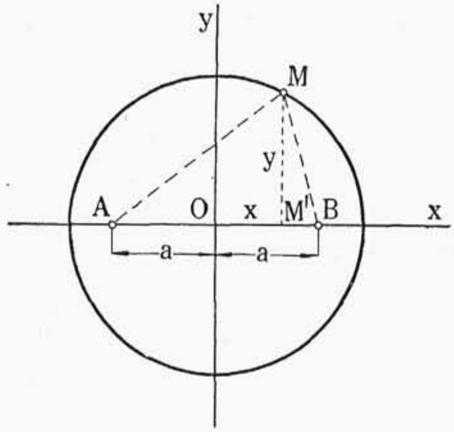
Rozważymy kilka przykładów, w których równanie miejsca geometrycznego wynika bezpośrednio przez wyrażenie analityczne danej własności geometrycznej.

PRZYKŁAD 1. *Znaleść miejsce geometryczne punktów, dla których suma kwadratów odległości od dwóch punktów stałych jest wielkością stałą.*

Dane są dwa punkty A i B w odległości $AB = 2a$, należy znaleść miejsce geometryczne punktów M, spełniających związek

$$\overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 = k^2$$

k^2 jest daną stałą. Niech prosta, przechodząca przez punkty A i B, będzie osią odciętych, zaś prostopadła do niej w środku O odcinka AB — osią rzędnych (rys. 55). Oznaczmy przez x i y współrzędne



Rys. 55.

punktu M i znajdźmy wyrażenia na MA i MB w zależności od x i y; mamy z trójkątów prostokątnych

$$\overline{MA}^2 = (a+x)^2 + y^2;$$

$$\overline{MB}^2 = (a-x)^2 + y^2;$$

a zatem własności danej odpowiada taki związek miedzy x i y:

$$(a+x)^2 + y^2 + (a-x)^2 + y^2 = k^2$$

stąd zaś

$$x^2 + y^2 = \frac{k^2}{2} - a^2;$$

jest to *równanie koła* o promieniu

$$\sqrt{\frac{k^2}{2} - a^2}$$

którego środek znajduje się w początku układu. Punkty, spełniające daną własność, leżą więc na okręgu koła. Zagadnienie ma określone rozwiązanie, jeśli $k^2 \geqslant 2a^2$.

Widzimy odrazu, iż odwrotnie, punkt $M(x, y)$, który spełnia równanie koła, posiada też daną własność geometryczną:

$$\overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 = k^2$$

A więc wszystkie punkty otrzymanego koła należą do danego miejsca geometrycznego.

PRZYKŁAD 2. *Wyznaczyć miejsce geometryczne punktów jednakowo odległych od dwóch danych punktów* $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$. Jeśli (x, y) oznaczają współrzędne dowolnego punktu M szukanego miejsca, to odległości tego punktu od punktów stałych A i B wyrażają się, jak wiadomo, w ten sposób:

$$MA = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2}$$

$$MB = \sqrt{(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2}$$

a więc współrzędne punktów szukanego miejsca geometrycznego spełniają związek

$$\sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2} = \sqrt{(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2}$$

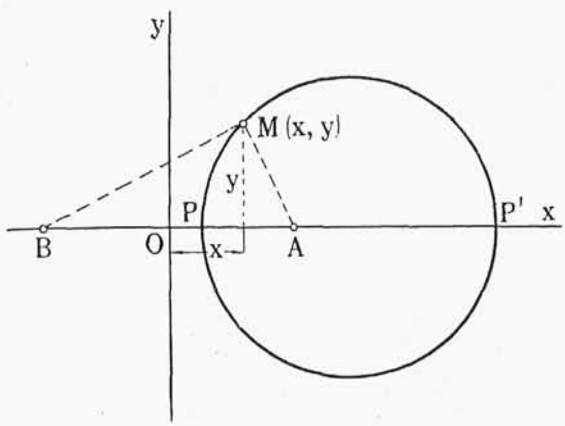
skąd, po podniesieniu do kwadratu i dokonaniu redukcji, wypadnie związek pierwszego stopnia

$$2(x_1 - x_2)x + 2(y_1 - y_2)y + (x_1^2 + y_1^2 - x_2^2 - y_2^2) = 0$$

przedstawiający *linję prostą*. Wszystkie punkty tej prostej należą oczywiście do danego miejsca geometrycznego.

PRZYKŁAD 3. *Znaleść miejsce geometryczne punktów M, dla których stosunek odległości od dwóch danych punktów A i B jest wielkością stałą k.*

Obierzmy jako oś Ox prostą, przechodzącą przez dane punkty A i B, zaś jako oś Oy weźmy prostopadłą, wystawioną ze środka



Rys. 56.

odcinka AB (rys. 56); niech $(a, 0)$ będą współrzędnemi punktu A, zaś $(-a, 0)$ punktu B. Oznaczmy przez (x, y) współrzędne dowolnego punktu M szukanego miejsca, odległości tego punktu od A i B wyrażą się w ten sposób:

$$MA = \sqrt{(x-a)^2 + y^2}$$
$$MB = \sqrt{(x+a)^2 + y^2}.$$

Punkty szukanego miejsca geometrycznego winny spełniać warunek

$$\frac{\sqrt{(x-a)^2 + y^2}}{\sqrt{(x+a)^2 + y^2}} = k,$$

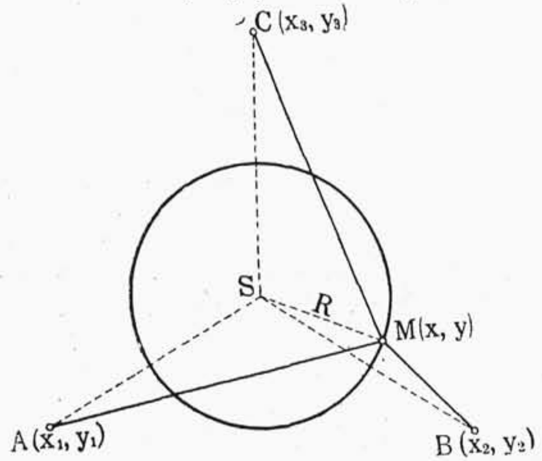
stąd otrzymamy związek

$$(x^2 + y^2)(1 - k^2) + 2a(1 + k^2)x + a^2(1 - k^2) = 0$$

mający postać równania koła, którego środek leży na osi Ox; odwrotnie, każdy punkt, spełniający otrzymane równanie, spełnia też daną własność

$$\frac{MA}{MB} = k$$

Jeśli więc $k \neq 1$, to szukanem miejscem geometrycznem jest okrąg koła (koło Apolonjusza). Jeśli $k = 1$, to miejscem geometrycznem jest oczywiście linja prosta $x = 0$. Nadmienimy, iż koło Apolonjusza przecina oś Ox w dwóch punktach P, P', rozdzielających harmonicznie parę punktów A, B.



Rys. 57.

PRZYKŁAD 4. Znaleść miejsce geometryczne punktów M, dla których suma kwadratów odległości od trzech danych punktów A, B, C ma daną wartość stałą k^2 (rys. 57).

Oznaczmy przez (x_1, y_1); (x_2, y_2); (x_3, y_3) współrzędne trzech danych punktów A, B, C. Punkt $M(x, y)$, należący do szukanego miejsca geometrycznego, winien spełniać warunek

$$\overline{MA}^2+\overline{MB}^2+\overline{MC}^2=k^2 \tag{2}$$

to znaczy

$$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(x-x_2)^2+(y-y_2)^2+$$
$$+(x-x_3)^2+(y-y_3)^2=k^2$$

Wynika stąd, po dokonaniu redukcji, *równanie koła*

$$x^2+y^2-2\frac{x_1+x_2+x_3}{3}x-2\frac{y_1+y_2+y_3}{3}y+ \tag{3}$$
$$+\frac{1}{3}\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2+y_1^2+y_2^2+y_3^2\right)=\frac{1}{3}k^2$$

środkiem tego koła jest punkt $S(x_0, y_0)$, niezależny od wartości stałej k^2, o współrzędnych równych średnim arytmetycznym współrzędnych punktów A, B, C

$$x_0=\frac{x_1+x_2+x_3}{3};\ y_0=\frac{y_1+y_2+y_3}{3}$$

punkt taki jest *środkiem ciężkości* trójkąta ABC. Prosty rachunek wykazuje nadto, iż promień R koła (3) posiada wartość daną przez wzór

$$R^2=\frac{k^2-(\overline{SA}^2+\overline{SB}^2+\overline{SC}^2)}{3} \tag{4}$$

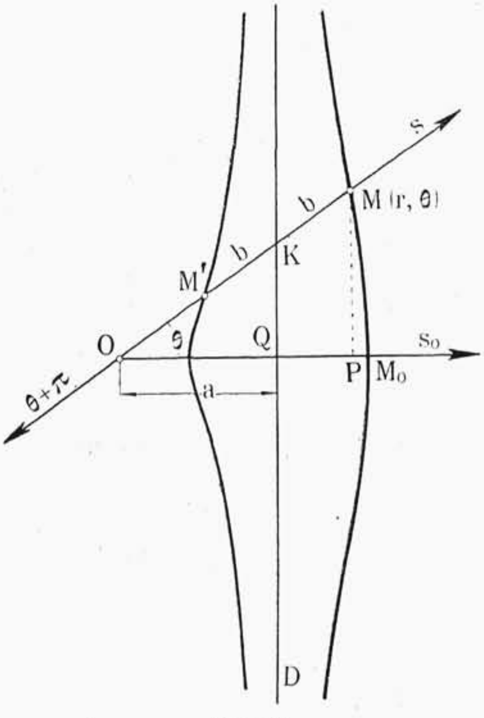
rzeczywistość koła wymaga więc, aby dana stała k^2 spełniała warunek

$$k^2\geqslant\overline{SA}^2+\overline{SB}^2+\overline{SC}^2 \tag{5}$$

Każdy punkt koła (3) posiada własność (2), a więc miejscem geometrycznem punktów, dla których suma kwadratów odległości od trzech danych punktów A, B, C ma wartość stałą k^2, spełniającą warunek (5), jest okrąg koła, którego środek S leży w środku ciężkości trójkąta ABC.

Warunek (5) wyraża ciekawą własność, iż środek S jest punktem płaszczyzny, dla którego suma kwadratów odległości od trzech danych punktów A, B, C osiąga *wartość najmniejszą*.

PRZYKŁAD 5. Dana jest prosta D i punkt stały O w odległości a od tej prostej. Przez punkt O prowadzimy pęk promieni Os i odkładamy na nich w obydwóch kierunkach, od punktu przecięcia K z prostą D, odcinek stały $\overline{M'K} = \overline{KM} = b$ (rys. 58). Miejsce geometryczne punktów M i M' będzie krzywą zwaną



Rys. 58.

konchoidą. Krzywą tę określimy analitycznie przy pomocy równania we współrzędnych biegunowych. Obierzmy punkt O jako biegun, zaś prostopadłą Os_0, wyprowadzoną z punktu O do prostej D, jako oś początkową.

Mamy wtedy, oczywiście, między promieniem wodzącym r punktu M lub M' i amplitudą θ taką zależność:

$$r = \frac{a}{\cos\theta} \pm b$$

lub też tylko

$$r = \frac{a}{\cos\theta} + b$$

gdyż, według umowy dla ujemnej wartości na r, punkt M' otrzymamy również z drugiego wyrażenia, podstawiając $\theta + \pi$ na miejsce θ. Krzywa jest symetryczna względem osi początkowej i obie jej gałęzie zbliżają się asymptotycznie do prostej D, gdyż odcinek

$$\overline{QP} = b \cos\theta$$

dąży do zera, gdy θ dąży do $\frac{\pi}{2}$.

36. Metoda rugowania parametru.

Zagadnienia na miejsca geometryczne uzależniają zwykle położenie poszczególnych punktów takiego miejsca od wartości pewnego parametru C (pewnego odcinka lub kąta), którego zmiana *ciągła* daje właśnie żądany zbiór punktów; a mianowicie, wyrażenie analityczne danej własności geometrycznej dowolnego punktu o współrzędnych (x, y) szukanego miejsca geometrycznego, prowadzi do dwóch związków między temi współrzędnemi i parametrem C o postaci

$$(10) \qquad \begin{cases} f(x, y, C) = 0 \\ \varphi(x, y, C) = 0 \end{cases}$$

Zmieniając teraz w sposób *ciągły* parametr C, to znaczy nadając na C wszelkie możliwe wartości w pewnych granicach, otrzymamy z układu dwóch równań (10) zbiór punktów, tworzących żądane miejsce geometryczne.

Ponieważ, dla danej wartości stałej C, każdemu z równań (10) odpowiada pewna krzywa, a więc powyższe zagadnienie oznaczać będzie poszukiwanie miejsca geometrycznego punktów przecięcia ze sobą wszelkich dwóch krzywych, które otrzymamy, podstawiając w równania (10) na C wszystkie możliwe wartości w pewnym przedziale. Inaczej wyrażając się, możemy powiedzieć też, iż poszukujemy linji krzywej, po której „poruszać“ się będzie punkt przecięcia dwóch krzywych *zmiennych* (10), gdy będziemy zmieniali w sposób ciągły wartość parametru C.

Postać miejsca geometrycznego określimy analitycznie, wyznaczając z układu dwóch równań (10) współrzędne punktu przecięcia w zależności od parametru C

$$x = f_1(C)$$

$$y = f_2(C)$$

i zmieniając w sposób ciągły wartość tego parametru C.

Równanie szukanego miejsca geometrycznego możemy jednak otrzymać już bezpośrednio z równań (10) *przez wyrugowanie z nich parametru C*. A mianowicie, *rezultatem wyrugowania* parametru C z dwóch równań (10) jest pewien związek między współrzędnemi x, y, niezawierający parametru C,

$$F(x, y) = 0 \tag{11}$$

spełniony przez każdą parę liczb x, y, czyniącą zadość obydwum związkom (10) jednocześnie. Związek (11) spełniają zatem punkty rozważanego miejsca geometrycznego.

W zastosowaniach rezultat rugowania (11) otrzymujemy zwykle, wyznaczając parametr C w zależności od x i y z jednego równania (10) i wstawiając to wyrażenie do drugiego z tych równań.

Szczegółowe rozważenie zagadnienia rugowania parametru C z dwóch równań (10), a więc stwierdzenie np. czy odwrotnie, punkty, spełniające rezultat rugowania (11), będą spełniały związki dane (10), jest możliwe tylko w razie posiadania bliższych danych co do właściwości związków (10). Szczególne przypadki rugowania rozpatrzymy w artykule następnym.

Przykład 1. *Wyznaczyć miejsce geometryczne punktów przecięcia dwóch parabol* (rys. 59)

$$\begin{cases} y = Cx^2 \\ y^2 = Cx \end{cases} \tag{12}$$

które otrzymamy, nadając stałej C wszelkie możliwe wartości.

Dla danej wartości parametru C, odmiennej od zera, dwie parabole (12), oprócz punktu O, przecinają się w określonym punkcie M, którego współrzędne otrzymamy odrazu z układu (12) w postaci

$$x = \frac{1}{\sqrt[3]{C}}; \quad y = \sqrt[3]{C}$$

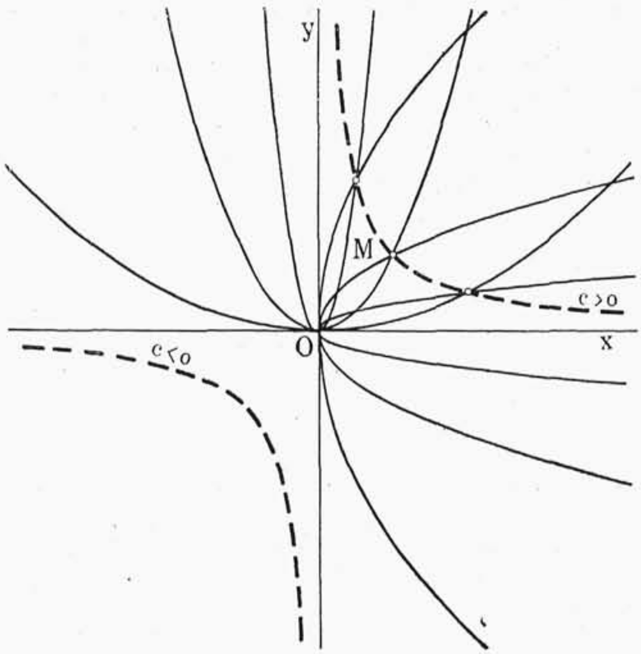
Rugujemy tu odrazu C i otrzymujemy równanie szukanego miejsca geometrycznego (poza punktem O) w postaci

$$xy = 1;$$

równaniu temu odpowiada hyperbola, której asymptotami są osi współrzędnych (art. 11). Łatwo sprawdzić, iż, odwrotnie, wszystkie punkty tej hyperboli należą do danego miejsca geometrycznego, a mianowicie, gałąź w pierwszej ćwiartce odpowiada dodatnim wartościom na C, zaś gałąź w ćwiartce przeciwległej — wartościom ujemnym.

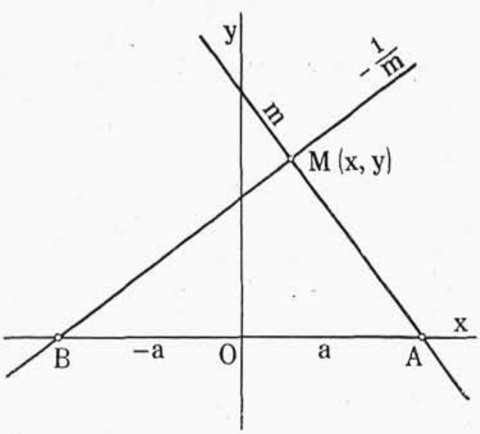
Według uwagi poprzedniej, równanie szukanego miejsca geometrycznego można też otrzymać, rugując parametr C bezpośrednio z równań (12), mamy mianowicie odrazu z tych równań związek

$$y = y^2 x,$$



Rys. 59.

który przedstawia hyperbolę $xy = 1$ i nadto prostą $y = 0$; widzimy, iż do tej prostej sprowadzają się obie krzywe (12) dla $C = 0$, ponieważ zaś w tym wypadku schodzą się one *wszystkiemi* punktami, a więc, jeśli nie wykluczamy w równaniach (12) wartości $C = 0$, to rozwiązanie $y = 0$ daje też punkty żądanego miejsca geometrycznego — nazywamy je *rozwiązaniem osobliwem.*



Rys. 60.

Przykład 2. *Znaleść miejsce geometryczne punktów przecięcia M dwóch prostych prostopadłych, wychodzących z dwóch stałych punktów A i B.*

Zagadnienie to, oczywiste bezpośrednio, rozważamy dla ilustracji podanej wyżej metody.

Obierzmy prostą, przechodzącą przez dane punkty A i B, jako oś Ox, zaś prostopadłą do niej, wystawioną ze środka odcinka AB, jako oś Oy. Niech $(a, 0)$ będą współrzędnemi punktu A, zaś $(-a, 0)$ — punktu B; jako parametr zmienny obierzemy współczynnik kątowy m dowolnej prostej, wychodzącej z punktu A. Punkt M żądanego miejsca jest więc przecięciem dwóch prostych o równaniach

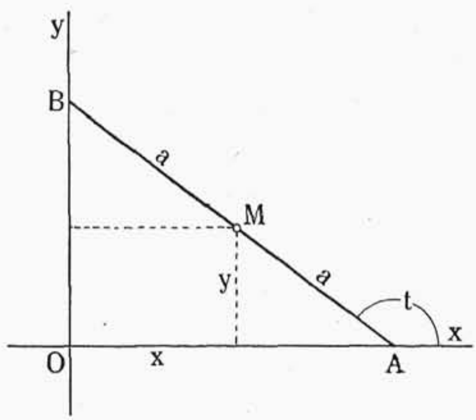
$$\begin{cases} y = m(x - a); \\ y = -\dfrac{1}{m}(x + a) \end{cases}$$

Rugujemy tu odrazu parametr zmienny m, mnożąc odpowiednie strony i otrzymujemy w ten sposób równanie miejsca geometrycznego punktów przecięcia M w postaci

$$x^2 + y^2 = a^2,$$

t. j. oczywiście okrąg koła, opisanego na odcinku AB, jako na średnicy.

Przykład 3. *Końce odcinka AB o stałej długości $2a$ ślizgają się po osiach współrzędnych. Znaleść krzywą, którą opisze środek M tego odcinka.*



Rys. 61.

Oznaczmy przez t kąt nachylenia odcinka AB względem osi Ox — jest to parametr, którego zmiana oznacza właśnie rozważany ruch odcinka AB. Krzywa, opisana przez punkt M, będzie określona, jeśli wyrazimy współrzędne (x,y) tego punktu w zależności od parametru zmiennego t. Otóż mamy odrazu (rys. 61)

$$x = -a \cos t; \quad y = a \sin t,$$

rugując stąd parametr t, przez sumowanie kwadratów, otrzymamy związek

$$x^2 + y^2 = a^2,$$

punkt M opisuje więc okrąg koła o promieniu a ze środkiem w początku współrzędnych.