CZĘŚĆ II.

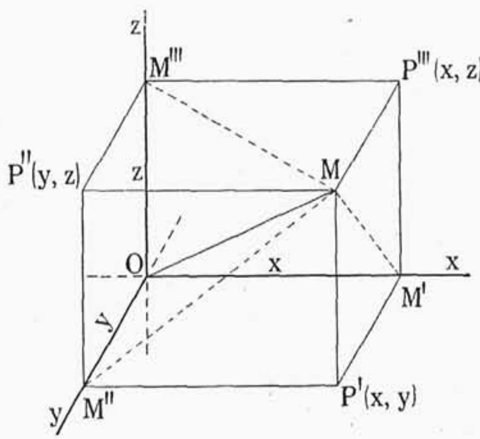
GEOMETRJA ANALITYCZNA W PRZESTRZENI.

ROZDZIAŁ I.

WSPÓŁRZĘDNE W PRZESTRZENI.

1. Współrzędne prostokątne.

Niech będą w przestrzeni trzy proste do siebie prostopadłe, przechodzące przez punkt O. Na każdej z tych prostych obierzmy określony zwrot za dodatni i zaznaczmy to przy pomocy odpowiednich



Rys. 135.

liter x, y, z (rys. 135). Aby określić położenie dowolnego punktu przestrzeni M względem układu osi Ox, Oy, Oz, rozważmy rzuty prostokątne punktu M na powyższe osi. W tym celu poprowadźmy przez punkt M trzy płaszczyzny prostopadłe do danych osi Ox,

Oy, Oz; płaszczyzny te przetną się z osiami Ox, Oy, Oz w punktach M', M'', M''', które będą właśnie rzutami na nie punktu M (rys. 135).

Trzy płaszczyzny, przechodzące przez M i trzy płaszczyzny, przechodzące przez pary osi Ox, Oy, Oz, ograniczają pewien prostopadłościan, którego krawędziami są OM', OM'', OM'''. Obierzmy pewien odcinek jako jednostkowy i oznaczmy przez x, y, z współrzędne punktów M', M'', M''' na osiach Ox, Oy, Oz:

$$\overline{OM'} = x; \ \overline{OM''} = y; \ \overline{OM'''} = z$$

trzy liczby względne x, y, z w zupełności określają położenie punktu M w przestrzeni, gdyż odwrotnie, płaszczyzny wystawione w punktach M', M'', M''' prostopadle do osi Ox, Oy, Oz przecinają się w jednym tylko punkcie przestrzeni M. Trzy liczby (x, y, z) nazywamy *współrzędnemi prostokątnemi* punktu M w przestrzeni i piszemy $M(x, y, z)$. Osi Ox, Oy, Oz, wzdłuż których odmierzamy te współrzędne, nazywamy *osiami współrzędnych*, zaś ich punkt przecięcia O — *początkiem układu współrzędnych*. Trzy płaszczyzny do siebie prostopadłe, przesunięte przez pary osi (Ox, Oy), (Oy, Oz) i (Ox, Oz) nazywamy *płaszczyznami współrzędnych*; tworzą one t. zw. *trójścian prostokątny* $Oxyz$. Z rys. 135 widzimy, iż trzy płaszczyzny, poprowadzone przez M prostopadle do osi, przecinają się wzdłuż krawędzi prostopadłościanu MP', MP'', MP'''. Punkty P', P'', P''' będą więc rzutami punktu M na płaszczyzny współrzędnych (Oxy); (Oyz); (Ozx). Widzimy natychmiast, że rzuty P', P'', P''' punktu P na płaszczyzny współrzędnych mają współrzędne równe odpowiednim dwóm współrzędnym punktu M, a więc rzut P' punktu M na płaszczyznę (Oxy) ma współrzędne x i y, rzut P'' na płaszczyznę (Oyz) ma współrzędne y i z i rzut P''' na płaszczyznę (Oxz) ma współrzędne x i z. Widzimy następnie, iż

$$\overline{P'M} = z; \ \overline{P''M} = x; \ \overline{P'''M} = y$$

Określone poprzednio współrzędne (x, y, z) dowolnego punktu przestrzeni przybierają wszelkie możliwe wartości dodatnie i ujemne, to znaczy, iż dowolnej trójce liczb, wymienionych w pewnej kolejności (x, y, z), odpowiada zawsze określony punkt przestrzeni, jako przecięcie trzech płaszczyzn prostopadłych do osi w punktach M', M'', M''', odpowiadających wartościom x, y i z.

Odcinek, łączący początek układu O z dowolnym punktem przestrzeni M, jest przekątną prostopadłościanu, którego krawędzie mają długości równe bezwzględnym wartościom współrzędnych x, y, z punktu M. Otrzymamy stąd ważny wzór na odległość $OM = r$ punktu M od początku układu:

(1) $$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Płaszczyzny współrzędnych dzielą przestrzeń na osiem części; w każdej części znaki poszczególnych współrzędnych są stałe. W przypadku, podanym na rys. 135, wszystkie trzy współrzędne są dodatnie. Punkty, których jedna współrzędna jest równa zeru, leżą na jednej z trzech płaszczyzn współrzędnych, a mianowicie:

jeśli $x = 0$, to punkt leży na płaszczyźnie (Oyz);
„ $y = 0$, „ „ „ „ „ (Oxz);
„ $z = 0$, „ „ „ „ „ (Oxy);

Gdy dwie współrzędne są równe zeru, to punkt leży na jednej z osi współrzędnych, mianowicie:

jeśli $x = 0$; $y = 0$, to punkt leży na osi Oz;
„ $y = 0$; $z = 0$, „ „ „ „ „ Ox;
„ $z = 0$; $x = 0$, „ „ „ „ „ Oy;

Jeśli wszystkie trzy współrzędne równe są zeru, to punkt znajduje się w początku układu O.

2. Współrzędne biegunowe.

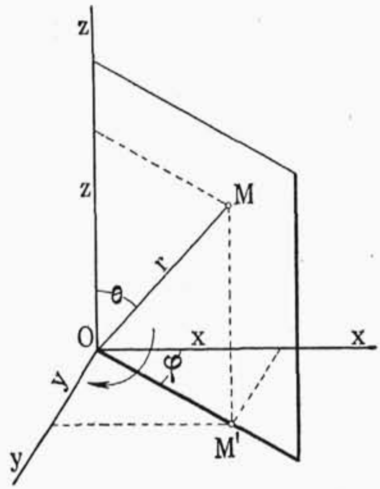
Innym przykładem trójki liczb, określających położenie punktu w przestrzeni, są *współrzędne biegunowe*.

Położenie punktu M będzie mianowicie określone przez jego odległość r (promień wodzący) od początku układu O, przez kąt θ (odległość biegunowa), który tworzy promień wodzący OM z osią Oz i kąt φ (azymut), który tworzy płaszczyzna, przesunięta przez OM i Oz, z płaszczyzną Oxz. Kąt θ może przybierać wartości od 0 do π, zaś kąt φ od 0 do 2π, ten ostatni mierzymy w kierunku, sprowadzającym Ox do Oy po obrocie o kąt $\frac{\pi}{2}$. Trzy liczby (r, θ, φ) nazywamy *współrzędnemi biegunowemi* punktu M. Jeśli M' jest rzutem punktu M na płaszczyznę Oxy, zaś x, y, z są współrzędnemi prostokątnemi punktu M, to mamy (rys. 136):

$$OM' = r \operatorname{Sin} \theta; \quad x = OM' \operatorname{Cos} \varphi; \quad y = OM' \operatorname{Sin} \varphi,$$

stąd otrzymamy następujące związki między współrzędnemi prostokątnemi i biegunowemi punktu M:

$$
\begin{aligned}
x &= r \operatorname{Sin} \theta \operatorname{Cos} \varphi \\
y &= r \operatorname{Sin} \theta \operatorname{Sin} \varphi \\
z &= r \operatorname{Cos} \theta
\end{aligned}
\tag{2}
$$



Rys. 136.

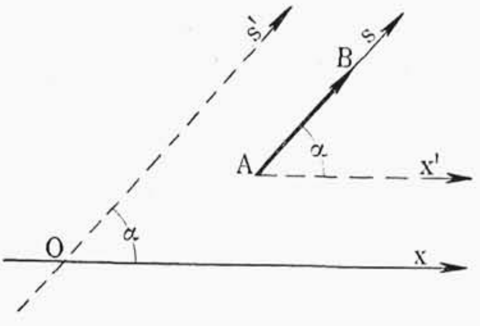
ROZDZIAŁ II.

O WEKTORACH W PRZESTRZENI.

3. Kąty wektora z osiami i jego rzuty.

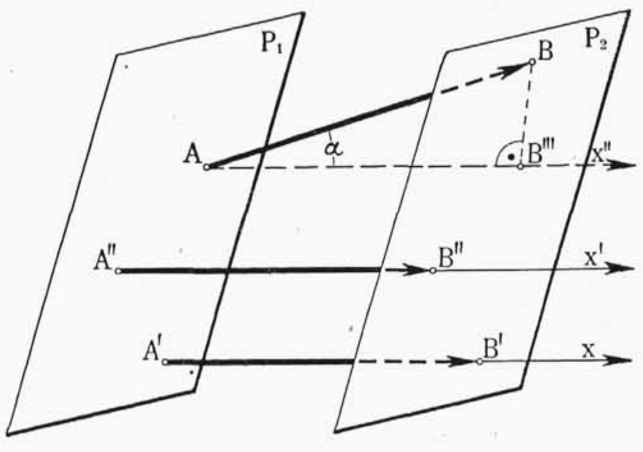
Pojęcie wektora w przestrzeni i jego własności będą analogiczne do własności w geometrji na płaszczyźnie. Niech więc będzie wektor (AB) w przestrzeni, mający początek A, koniec B i dowolna oś Ox, *nieleżąca wogóle w jednej płaszczyźnie* z osią s, na której położony jest wektor (AB) (rys. 137). Wyprowadźmy z dowolnego punktu O osi Ox oś Os', równoległą i zgodnie zwróconą z wektorem AB. Nazwiemy kątem, który tworzy wektor AB (lub oś s zgodnie z nim zwrócona) z osią Ox, kąt α, który tworzy oś Os' z osią Ox.

Inaczej niż w geometrji na płaszczyźnie, kątowi α *nie przypisujemy określonego zwrotu* i dla różnych kierunków wektora



Rys. 137.

lub osi w przestrzeni będziemy mu nadawali wartości w przedziale od 0 do π. Kąt α będzie miał oczywiście tę samą wartość dla wszystkich wektorów w przestrzeni, równoległych i zgodnie zwróconych z danym wektorem AB. Kąt α, który tworzy wektor AB z osią Ox, równa się kątowi, który ten wektor tworzy z osią Ax', równoległą i zgodnie zwróconą z osią Ox. Jeśli dwa wektory są równoległe, lecz przeciwnie zwrócone, to tworzą kąty z daną osią względem siebie *spełniające* α i $\pi - \alpha$.



Rys. 138.

Utwórzmy pojęcie rzutu wektora AB na dowolną oś w przestrzeni x. W tym celu poprowadźmy przez początek A i koniec B danego wektora płaszczyzny P_1 i P_2 prostopadłe do osi x, które przetną tę oś w punktach A' i B', będących rzutami punktów A i B. Otóż wektor $A'B'$ nazywamy *rzutem wektora* AB na oś x.

TWIERDZENIE. Miary rzutów $\overline{A'B'}$ *i* $\overline{A''B''}$ *wektora danego na dwie osi* x *i* x', *równoległe i zgodnie zwrócone w przestrzeni, są sobie równe.*

Istotnie, rzuty na te osi tego samego wektora będą zgodnie zwrócone, zaś ich wartości będą równe, jako odcinki równoległe zawarte między dwiema równoległemi płaszczyznami.

WNIOSEK 1. Miara rzutu $\overline{A'B'}$ wektora AB na oś x równa się też mierze rzutu $\overline{AB'''}$ tego wektora na oś Ax'' (rys. 138), przechodzącą przez początek wektora i zgodnie zwróconą z osią x, wiemy jednak, na podstawie definicji cosinusa, w geometrji płaszczyzny, iż

$$\overline{AB'''} = |AB| \cos\alpha$$

gdzie α jest kątem, który tworzy wektor AB z osią x, a zatem widzimy, iż, tak samo jak w geometrji na płaszczyźnie, *miara rzutu wektora w przestrzeni na dowolną oś* x *równa się iloczynowi wartości bezwzględnej wektora przez cosinus kąta, który ten wektor tworzy z osią* x:

$$(1) \qquad \overline{A'B'} = |AB| \cos\alpha$$

Miara rzutu wektora ma więc znak zgodny z cosinusem kąta nachylenia α i jest dodatnia lub ujemna, zależnie od tego, czy wektor tworzy kąt ostry, czy też rozwarty.

Wprowadzając, zamiast wartości bezwzględnej wektora $|AB|$, miarę $\overline{AB}$ wektora względem osi s, na której on jest położony, możemy też napisać

$$(2) \qquad \overline{A'B'} = \overline{AB} \, . \cos(x\,s)$$

gdzie $(x\,s)$ oznacza kąt między osiami x i s, zamiast kąta α wektora z osią s.

WNIOSEK 2. *Jeżeli dwa wektory w przestrzeni są równe, równoległe i zgodnie zwrócone, to miary rzutów tych wektorów na dowolną oś są sobie równe.*

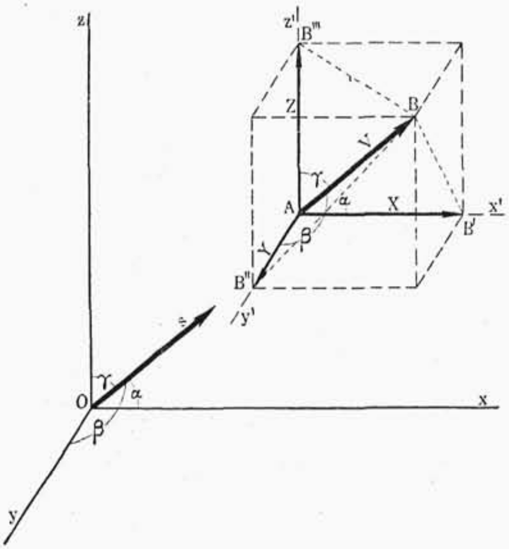
WNIOSEK 3. *Jeżeli dwa wektory w przestrzeni są do siebie równoległe, to stosunek miar tych wektorów na tę samą oś równa się stosunkowi ich wartości bezwzględnych ze znakiem dodatnim lub ujemnym, zależnie od zgodności lub niezgodności zwrotów wektorów.*

4. Położenie wektora względem osi współrzędnych.

Zbadajmy teraz położenie wektora AB względem układu osi prostokątnych $Oxyz$. Miary rzutów wektora AB na osi Ox, Oy, Oz równają się miarom

$$\overline{AB'}, \overline{AB''}, \overline{AB'''}$$

jego rzutów na osi Ax', Ay', Az', wyprowadzone z początku wektora A, równoległe i zgodnie zwrócone z osiami współrzędnych (rys. 139).



Rys. 139.

Oznaczmy trzy miary rzutów wektora AB na osi współrzędnych w ten sposób:

(3) $$\overline{AB'} = X; \quad \overline{AB''} = Y; \quad \overline{AB'''} = Z$$

Widzimy natychmiast z konstrukcji, dającej rzuty B', B'', B''' punktu B na osi $Ax'y'z'$, iż *wektor AB jest przekątną prostopadłościanu, którego krawędziami są rzuty wektora AB', AB'', AB''' na osi współrzędnych.*

Stąd wynika zasadniczy wniosek, iż *wartość bezwzględna wektora,* którą oznaczymy przez V, *równa się pierwiastkowi z sumy kwadratów miar jego rzutów na trzy osi współrzędnych prostokątnych:*

(4) $$|AB| = V = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$$

Jeśli wektor jest prostopadły do jednej z osi współrzędnych, wtedy jedna z trzech liczb (X, Y, Z) równa się zeru i odwrotnie; jeśli zaś wektor jest prostopadły do dwóch osi współrzędnych, a więc do trzeciej jest równoległy, wtedy dwie z liczb (X, Y, Z) równają się zeru i odwrotnie; jeśli wszystkie trzy rzuty (X, Y, Z) znikają, oznacza to, iż początek wektora schodzi się z jego końcem. Wzór (4) oczywiście zachowuje swoją moc we wszystkich wypadkach.

Oznaczmy przez α, β, γ kąty, które wektor AB tworzy z osiami Ox, Oy, Oz lub Ox', Oy', Oz' (rys. 139). Kąty te mają te same wartości dla wszystkich wektorów równoległych, zgodnie zwróconych z danym wektorem i zawierają się w przedziale od 0 do π.

Według wzoru (1) dla miary rzutu wektora, mamy natychmiast

$$\left\{\begin{aligned} X &= V\cos\alpha \\ Y &= V\cos\beta \\ Z &= V\cos\gamma \end{aligned}\right. \tag{5}$$

Trzy wielkości $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ nazywamy *cosinusami kierunkowemi* danego wektora AB lub osi Os, zgodnie z nim zwróconej (rys. 139).

Każdemu z kątów α, β, γ odpowiada określona wartość cosinusa w przedziale od -1 do $+1$ i odwrotnie, każdej wartości cosinusa w przedziale od -1 do $+1$ odpowiada jedna tylko wartość kąta w przedziale od 0 do π. Cosinusy kierunkowe określają więc w zupełności kąty, które tworzy wektor z osiami współrzędnych.

Sumując trzy kwadraty wartości (5), otrzymamy

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = V^2\cos^2\alpha + V^2\cos^2\beta + V^2\cos^2\gamma$$

stąd, według wzoru (4), mamy zasadniczą własność następującą.

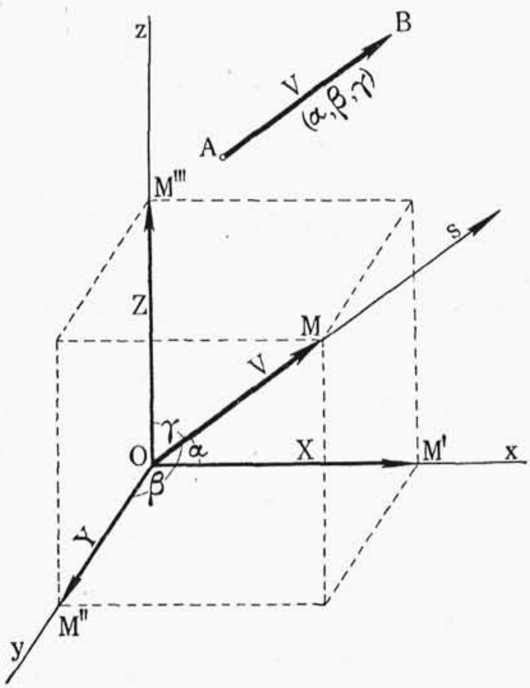
WNIOSEK. Suma kwadratów trzech cosinusów kierunkowych dowolnej osi lub wektora w przestrzeni równa się jedności:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \tag{6}$$

Jeśli wektor jest do jednej osi współrzędnych prostopadły, to odpowiednia wartość cosinusa kierunkowego *równa się zeru*, jeśli zaś wektor jest do jednej z osi współrzędnych równoległy, to odpowiedni cosinus kierunkowy równa się $+1$ lub -1, zależnie od zgodności lub niezgodności zwrotów wektora i danej osi.

Gdy dwa wektory, lub dwie osi w przestrzeni, są do siebie równoległe, lecz przeciwnie zwrócone, to wtedy ich odpowiednie kąty z osiami współrzędnych są spełniające i cosinusy kierunkowe jednej osi mają znaki przeciwne względem cosinusów kierunkowych drugiej osi. Nadmienimy jeszcze, iż cosinusy kierunkowe osi można uważać jako miary rzutów na osi współrzędnych wektora o długości jednostkowej, zwróconego zgodnie z daną osią.

Wyprowadźmy z początku układu wektor OM równy, równoległy i zgodnie wrócony z wektorem danym AB (rys. 140).



Rys. 140.

Miary rzutów tego wektora na osi współrzędnych, według wniosku 2-go na str. 294. równają się miarom rzutów wektora AB, a więc:

$$\overline{OM'} = X; \quad \overline{OM''} = Y; \quad \overline{OM'''} = Z;$$

Wektor OM jest jednakowy dla wszystkich wektorów równych, równoległych i zgodnie zwróconych w przestrzeni, a więc *charakteryzuje ich wartość i kierunek w przestrzeni.*

Ale miary X, Y, Z są jednocześnie współrzędnemi prostokątnemi punktu M, więc danej dowolnie trójce liczb X, Y, Z, nieznikających jednocześnie, odpowiada jeden określony punkt M w przestrzeni, a zatem określony co do wielkości i kierunku wektor OM. Mamy stąd następującą zasadniczą własność.

TWIERDZENIE 1. *Miary rzutów X, Y, Z wektora na trzy osi współrzędnych określają w zupełności wartość bezwzględną wektora i jego kierunek w przestrzeni.*

Aby własność tę wyrazić analitycznie, przedstawmy wartość bezwzględną wektora V i jego cosinusów kierunkowych w zależności od danych miar rzutów X, Y, Z, zakładając, iż jedna przynajmniej z tej trójki liczb nie równa się zeru. Otóż mamy

$$V = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$$

następnie zaś, według twierdzenia o mierze rzutu, otrzymamy cosinusy kierunkowe, dzieląc każdą z danych miar rzutów przez znalezioną wartość bezwzględną wektora:

$$(7) \qquad \left\{ \begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{X}{V} = \frac{X}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}} \\ \cos\beta &= \frac{Y}{V} = \frac{Y}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}} \\ \cos\gamma &= \frac{Z}{V} = \frac{Z}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}} \end{aligned} \right.$$

Według powyższej konstrukcji wektora OM, trzy cosinusy kierunkowe charakteryzują w zupełności kierunek osi lub wektora w przestrzeni, ta sama bowiem trójka cosinusów nie może odpowiadać dwóm różnym kierunkom danego wektora V.

Trzy cosinusy kierunkowe nie mogą być jednak dowolnie podane, z racji istnienia między niemi związku (6), dlatego też w zagadnieniach, w celu określenia kierunku pewnej osi w przestrzeni, podawać będziemy trzy liczby względne (X, Y, Z) *proporcjonalne do cosinusów kierunkowych* i będące miarami rzutów pewnego wektora, leżącego na tej osi, zgodnie z nią zwróconego. Takie trzy liczby (X, Y, Z) nazywamy *współczynnikami kierunkowemi* osi w przestrzeni; liczby te nie są skrępowane żadnym związkiem i jeżeli niewszystkie równają się zeru, to, według wzorów (7), *dzieląc każdą z nich przez pierwiastek z sumy ich kwadratów, otrzymamy cosinusy kierunkowe rozważanej osi.*

Przykład. Znaleść cosinusy kierunkowe wektora, którego miary rzutów są $(-3, 5, -1)$. Mamy

$$V = \sqrt{3^2 + 5^2 + 1^2} = \sqrt{35};$$

$$\cos\alpha = -\frac{3}{\sqrt{35}}; \quad \cos\beta = \frac{5}{\sqrt{35}}; \quad \cos\gamma = -\frac{1}{\sqrt{35}}.$$

TWIERDZENIE 2. Jeśli dwa wektory są do siebie równoległe, to miary ich rzutów są do siebie proporcjonalne i mają znaki zgodne lub przeciwne, zależnie od zgodności lub niezgodności ich zwrotów; własność ta jest odwracalna.

Niech więc będą (X_1, Y_1, Z_1) miary rzutów jednego wektora, zaś (X_2, Y_2, Z_2) miary rzutów drugiego. Oznaczmy przez V_1 i V_2 wartości tych wektorów. Jeśli te wektory są równoległe i zgodnie zwrócone, to znaki miar ich rzutów są zgodne, jeśli zaś zwroty mają przeciwne, to i znaki miar rzutów będą przeciwne, a więc stosunek miar rzutów wektorów równy będzie stosunkowi wartości samych wektorów ze znakiem dodatnim lub ujemnym, zależnie od zwrotów; mamy zatem

$$\frac{X_1}{X_2} = \pm\frac{V_1}{V_2}; \quad \frac{Y_1}{Y_2} = \pm\frac{V_1}{V_2}; \quad \frac{Z_1}{Z_2} = \pm\frac{V_1}{V_2};$$

stąd wypadnie żądana proporcjonalność w postaci związków

$$\frac{X_1}{X_2} = \frac{Y_1}{Y_2} = \frac{Z_1}{Z_2} \tag{8}$$

słusznych również w przypadku znikania jednego lub dwóch rzutów, jeśli przyjmiemy umowę, aby w razie znikania mianownika i licznik odpowiedni był zerem.

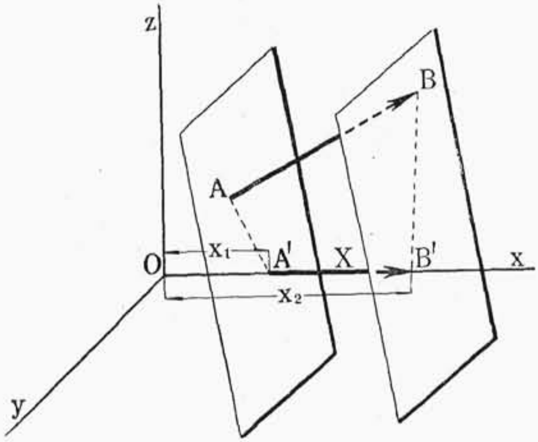
Własność (8) jest oczywiście odwracalna, na mocy związków (7).

Związki (8) wyrażają więc *warunek równoległości dwóch wektorów w przestrzeni.*

Jeśli zmienimy położenie wektora w przestrzeni, zachowując jego wartość i kierunek, to taką zmianę nazywać będziemy *przesunięciem równoległem wektora.* Według badań poprzednich, przesunięcie równoległe wektora nie zmienia miar jego rzutów na osi współrzędnych.

Wektor (AB) jest pod każdym względem określony, jeśli dane są współrzędne (x_1, y_1, z_1) jego początku A i współrzędne (x_2, y_2, z_2) jego końca B.

Rozumując w ten sam sposób, jak w artykule 5 (część I), otrzymamy następujące twierdzenie zasadnicze (rys. 141).



Rys. 141.

TWIERDZENIE 3. Różnice między współrzędnemi końca wektora i jego początku przedstawiają miary rzutów wektora na osi współrzędnych:

$$X = x_2 - x_1$$
$$(9) \qquad Y = y_2 - y_1$$
$$Z = z_2 - z_1$$

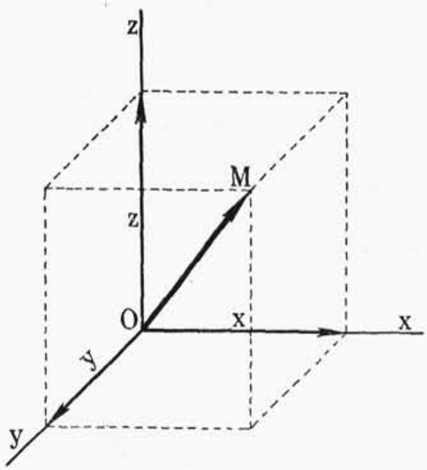
Podkreślamy jeszcze raz w tych wzorach kolejność odejmowania.

Ponieważ odcinek AB jest przekątną prostopadłościanu, którego krawędziami są wartości (9), otrzymamy więc natychmiast wartość wektora AB, t. j. *wzór na odległość dwóch punktów* $A(x_1, y_1, z_1)$ i $B(x_2, y_2, z_2)$ *w przestrzeni:*

$$(10) \qquad AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

wzór ten jest ogólny, niezależnie od znaku współrzędnych. Porządek odejmowania w tym wzorze roli nie odgrywa.

Zaznaczymy jeszcze, iż *współrzędne prostokątne* (x, y, z) *dowolnego punktu przestrzeni M są miarami rzutów na osi współrzędnych wektora OM, wychodzącego z początku układu O i kończącego się w punkcie M* (rys. 142).



Rys. 142.

5. Suma geometryczna wektorów.

Sumę geometryczną wektorów w przestrzeni określimy w ten sam sposób, co i na płaszczyźnie. Rozważmy mianowicie pewną grupę wektorów w przestrzeni i przesuńmy je równolegle, ustawiając w ten sposób, aby koniec jednego schodził się z początkiem następnego, otrzymamy wtedy linję łamaną wogóle *niepłaską* $A_1 A_2 A_3 \ldots\ldots A_n$. Otóż nazywamy *sumą geometryczną* powyższych wektorów, wektor $(A_1 A_n)$, wychodzący z początku pierwszego wektora i kończący się w punkcie końcowym ostatniego. W pojęciu sumy geometrycznej wchodzi więc w grę tylko wartość i kierunek wektora.

W sposób, identyczny z podanym w artykule 6 części I-ej, udowodnić można następujące twierdzenie.

TWIERDZENIE O RZUCIE SUMY GEOMETRYCZNEJ.

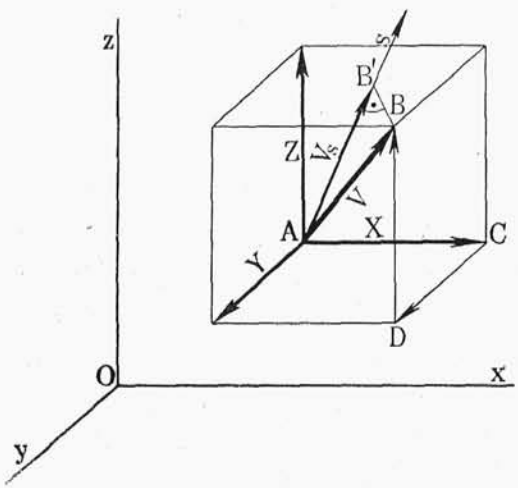
Miara rzutu sumy geometrycznej kilku wektorów na dowolną oś równa się sumie miar rzutów poszczególnych wektorów.

Jeśli więc (X_1, Y_1, Z_1); (X_2, Y_2, Z_2); (X_3, Y_3, Z_3);..... (X_n, Y_n, Z_n) są miarami rzutów na osi współrzędnych n danych wektorów, to rzuty ich sumy geometrycznej mają miary

$$(11) \qquad \begin{cases} X_1 + X_2 + X_3 + \ldots + X_n \\ Y_1 + Y_2 + Y_3 + \ldots + Y_n \\ Z_1 + Z_2 + Z_3 + \ldots + Z_n \end{cases}$$

trzy sumy powyższe określają w zupełności wartość i kierunek sumy geometrycznej w przestrzeni.

Jeśli wektory, ustawione w sposób wskazany w definicji sumy geometrycznej, tworzą *łamaną zamkniętą*, oznacza to, iż ich *suma geometryczna równa się zeru*. Oczywiście *warunkiem koniecznym i wystarczającym znikania sumy geometrycznej jest znikanie trzech sum miar rzutów wektorów składowych na każdą z osi współrzędnych.*



Rys. 143

Jeśli dla dowolnego wektora AB zbudujemy prostopadłościan (rys. 143), którego krawędzie X, Y, Z są rzutami wektora na osi współrzędnych, to widzimy, iż łamana $ACDB$, utworzona z trzech przesunięć do siebie prostopadłych $\overline{AC} = X$, $\overline{CD} = Y$ i $\overline{DB} = Z$, łączy punkty A i B, a zatem *każdy wektor można uważać jako sumę geometryczną jego rzutów na osi współrzędnych.*

Rzuty wektora na osi współrzędnych nazywają się też dlatego *składowemi* wektora wzdłuż tych osi.

Z uwagi ostatniej i z twierdzenia o rzucie sumy geometrycznej wynika następujący ważny wniosek.

WNIOSEK. Miara rzutu wektora na dowolną oś w przestrzeni równa się sumie miar rzutów na tę oś trzech składowych wektora wzdłuż osi współrzędnych.

Niech (xs), (ys), (zs) oznaczają kąty, które dowolna oś s tworzy z osiami współrzędnych, zaś V_s niech oznacza miarę rzutu na oś s danego wektora AB (rys. 143), wtedy wniosek nasz napiszemy w tej postaci:

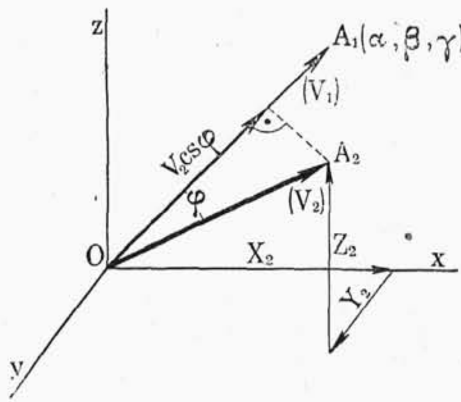
$$V_s = \underset{(\text{na } s)}{\text{rzut } X + \text{rzut } Y + \text{rzut } Z}$$

a więc

$$V_s = X \cos(x\,s) + Y \cos(y\,s) + Z \cos(z\,s) \tag{12}$$

6. Iloczyn skalarny dwóch wektorów i kąt między wektorami.

Kątem między dowolnemi dwoma wektorami w przestrzeni nazywamy kąt, zawarty między 0 i π, który one ze sobą będą tworzyły, jeśli je przesuniemy równolegle w ten sposób, aby miały wspólny początek. Kąt ten zależy tylko od kierunku danych wektorów.



Rys. 144.

O k r e ś l e n i e. Nazywamy iloczynem skalarnym dwóch wektorów iloczyn ich wartości bezwzględnych przez cosinus kąta między niemi zawartego; inaczej mówiąc jest to iloczyn wartości jednego wektora przez miarę rzutu drugiego na oś zwróconą zgodnie z pierwszym wektorem.

Jeśli dwa dowolne wektory, po przesunięciu równoległem do wspólnego początku, zajęły położenia OA_1 i OA_2 (rys. 144) i tworzą ze sobą kąt φ, to iloczyn skalarny danych wektorów będzie równy wyrażeniu

$$V_1\, V_2 \operatorname{Cos} \varphi \tag{13}$$

gdzie V_1 i V_2 oznaczają wartości bezwzględne danych wektorów.