

ROZDZIAŁ IV

TEORIA PRAWDOPODOBIEŃSTWA W OBLICZENIACH HYDROLOGICZNYCH

1. Krzywe częstości i sum czasów trwania

Zastosowanie teorii prawdopodobieństwa do obliczeń hydrologicznych podaliśmy w rozdziale VI części I Hydrologii. Tu podajemy przykład obliczeń.

Dla okresu 15 lat, od r. 1920 do 1934 obliczono przeciętne czasy trwania stanów na Wiśle w Warszawie, uporządkowano je podług wielkości i zestawiono w Tab. 10. W kolumnie 3 podano czas trwania każdego stanu przy czym suma czasu równa się 365,25 dni. W kolumnie 5 obliczono odpowiednie procenty czasu trwania dla każdego stanu, biorąc $15 \times 365,25$ dni równe 100% i równe liczbie obserwacji n . Nazywając przez m sumę czasu trwania stanu obserwowanego wraz z wyższymi, obliczamy procenty sum czasu trwania ze wzoru: $\frac{2m-1}{2n} \times 100$. Stan 555 trwał średnio w roku 0,04 dni, więc w ciągu 15 lat: $15 \times 0,04$ dni, a obliczony procent czasu wynosi 0,002%. W kolumnie 6 podano iloczyn stanu przez czas trwania w 1 roku: Ht . Dzieląc sumę tych iloczynów przez sumę stanów, otrzymamy stan przeciętny, w danym wypadku 158,65 cm. W kolumnie 7 podano stosunek każdego stanu do obliczonego stanu przeciętnego: $\frac{H}{H_{sr}}$; w kolumnie 8 są podane odchyłki v od średniej, tj. pozycje kolumny 7 zmniejszone o jedność. W następnych kolumnach 9 i 10 podano drugie i trzecie potęgi tych odchyłek i wreszcie potęgi mnożone przez odpowiednie czasy trwania t (kolumny 11 i 12).

Z sum algebraicznych tv^2 oraz tv^3 zostały obliczone współczynniki (cv) oraz (cs) . Z obliczenia wynika, że $(cv) = 0,45008$ zaś $(cs) = 1,248753$. Z Tab. LII (część I Hydrologii) obliczono w tabeli 11

Tabela 10.

do obliczeń krzywej prawdopodobieństwa pojawiania się stanów wody na Wiśle w Warszawie na podstawie obserwacji z 15-lecia: 1920—1934.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
L. p.	Stan H cm	Czastwa- nia t dni	Σt	% czasu	$H t$	$\frac{H}{H_{sr}}$	$\frac{H}{H_{sr}} - 1$	v^2	v^3	tv^2	tv^3
1	555	0,04	0,04	0,002	22,20	3,4983	2,4983	6,24150	15,59314	0,24966	0,62372
2	545	0,04	0,08	0,012	21,80	3,4352	2,4352	5,93020	14,44122	0,23721	0,57765
3	535	0,17	0,25	0,06	90,95	3,3722	2,3722	5,62733	13,34915	0,95665	2,26935
4	525	0,15	0,40	0,10	78,75	3,3092	2,3092	5,33240	12,31358	0,79986	1,84704
5	515	0,05	0,45	0,12	25,75	3,2461	2,2461	5,04496	11,33148	0,25225	0,56657
6	505	0,06	0,51	0,14	30,30	3,1831	2,1831	4,76792	10,40448	0,28595	0,62427
7	495	0,05	0,56	0,15	24,75	3,1201	2,1201	4,49482	9,52947	0,22474	0,47647
8	485	0,14	0,70	0,19	67,90	3,0570	2,0570	4,23125	8,70368	0,59237	1,21851
9	475	0,09	0,79	0,21	42,75	2,9940	1,9940	3,97604	7,92822	0,35784	0,71354
10	465	0,22	1,01	0,27	102,30	2,9310	1,9310	3,72876	7,20023	0,82033	1,58400
11	455	0,16	1,17	0,31	72,80	2,8679	1,8679	3,48905	6,51719	0,55825	1,04275
12	445	0,21	1,38	0,38	93,45	2,8049	1,8049	3,25766	5,87975	0,68411	1,23475
13	435	0,33	1,71	0,46	143,55	2,7419	1,7419	3,03421	5,28529	1,00129	1,74414
14	425	0,35	2,06	0,56	148,75	2,6788	1,6788	2,81837	4,73148	0,98643	1,65602
15	415	0,48	2,54	0,69	199,20	2,6158	1,6158	2,61081	4,21854	1,25319	2,02490
16	405	0,54	3,08	0,84	218,70	2,5528	1,5528	2,41119	3,74409	1,30204	2,02180
17	395	0,47	3,55	0,97	185,65	2,4898	1,4898	2,21950	3,30661	1,04316	1,55411
18	385	0,84	4,39	1,2	323,40	2,4267	1,4267	2,03547	2,90400	1,70979	2,43936
19	375	1,03	5,42	1,5	386,25	2,3637	1,3637	1,85967	2,53603	1,91546	2,61211
20	365	1,10	6,52	1,8	401,50	2,3007	1,3007	1,69182	2,20055	1,86100	2,42060
21	355	1,27	7,79	2,1	450,85	2,2376	1,2376	1,53165	1,89557	1,94519	2,40737
22	345	1,36	9,15	2,4	469,20	2,1746	1,1746	1,37968	1,62057	1,87636	2,20397
23	335	1,50	10,65	2,9	502,50	2,1116	1,1116	1,23565	1,37355	1,85347	2,06032
24	325	2,00	12,65	3,4	650,00	2,0485	1,0485	1,09935	1,15267	2,19870	2,30534
25	315	2,20	14,85	4,0	693,00	1,9855	0,9855	0,97121	0,95713	2,13666	2,10568
26	305	2,70	17,55	4,7	823,50	1,9225	0,9225	0,85100	0,78505	2,29770	2,11963

27	295	2,90	20,45	5,5	855,50	1,8594	0,8594	0,73857	0,63473	2,14185	1,84072
28	285	3,30	23,75	6,4	940,50	1,7964	0,7964	0,63425	0,50512	2,09302	1,66689
29	275	3,60	27,35	7,5	990,00	1,7334	0,7334	0,53787	0,39447	1,93633	1,42009
30	265	4,50	31,85	8,7	1192,50	1,6703	0,6703	0,44930	0,30116	2,02185	1,35522
31	255	5,50	37,35	10,1	1402,50	1,6073	0,6073	0,36881	0,22398	2,02845	1,23189
32	245	5,90	43,25	11,8	1445,50	1,5443	0,5443	0,29626	0,16125	1,74793	0,95137
33	235	7,50	50,75	13,8	1762,50	1,4812	0,4812	0,23155	0,11142	1,73662	0,83565
34	225	10,30	61,05	16,6	2317,00	1,4182	0,4182	0,17489	0,07314	1,80137	0,75334
35	215	10,30	71,35	19,5	2214,50	1,3552	0,3552	0,12617	0,04481	1,29955	0,46154
36	205	11,50	82,85	22,6	2357,50	1,2921	0,2921	0,08532	0,02492	0,98118	0,28658
37	195	13,40	96,25	26,3	2613,00	1,2291	0,2291	0,05248	0,01202	0,70323	0,16107
38	185	14,60	110,85	30,3	2701,00	1,1661	0,1661	0,02759	0,00458	0,40281	0,06687
39	175	17,60	128,45	35,1	3080,00	1,1031	0,1031	0,01063	0,00109	0,18709	0,01918
40	165	18,40	146,85	40,1	3036,00	1,0400	0,0400	0,00160	0,00006	0,02944	0,00110
41	155	24,40	171,25	46,8	3782,00	0,9770	-0,0230	0,00053	-0,00001	0,01292	-0,00024
42	145	25,50	196,75	53,8	3697,50	0,9140	-0,0860	0,00739	-0,00063	0,18844	-0,01600
43	135	23,20	219,95	60,2	3132,00	0,8509	-0,1491	0,02223	-0,00331	0,51574	-0,07679
44	125	28,50	248,45	68,0	3562,50	0,7879	-0,2121	0,04498	-0,00954	1,28193	-0,27189
45	115	25,00	273,45	74,8	2875,00	0,7249	-0,2751	0,07568	-0,02082	1,89200	-0,52050
46	105	21,10	294,55	80,6	2215,50	0,6618	-0,3382	0,11438	-0,03868	2,41342	-0,81615
47	95	20,90	315,45	86,3	1985,50	0,5988	-0,4018	0,16096	-0,06458	3,36406	-1,34972
48	85	15,70	331,15	90,6	1334,50	0,5558	-0,4642	0,21548	-0,10002	3,38304	-1,57031
49	75	10,80	341,95	93,6	810,00	0,4727	-0,5273	0,27804	-0,14661	3,00283	-1,58339
50	65	11,50	353,45	96,8	747,50	0,4097	-0,5903	0,34845	-0,20569	4,00720	-2,36543
51	55	9,70	363,15	99,41	533,50	0,3467	-0,6533	0,42680	-0,27883	4,13996	-2,70465
52	45	2,10	365,25	99,99	94,50	0,2836	-0,7164	0,51323	-0,36768	1,07778	-0,77213

$H_{sr} = 158,65 \text{ cm}$

$$(cv) = \sqrt{\frac{\sum t v^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{73,78971}{364,25}} = \sqrt{0,202579821} = 0,45008$$

+ 73,78971 + 41,47268

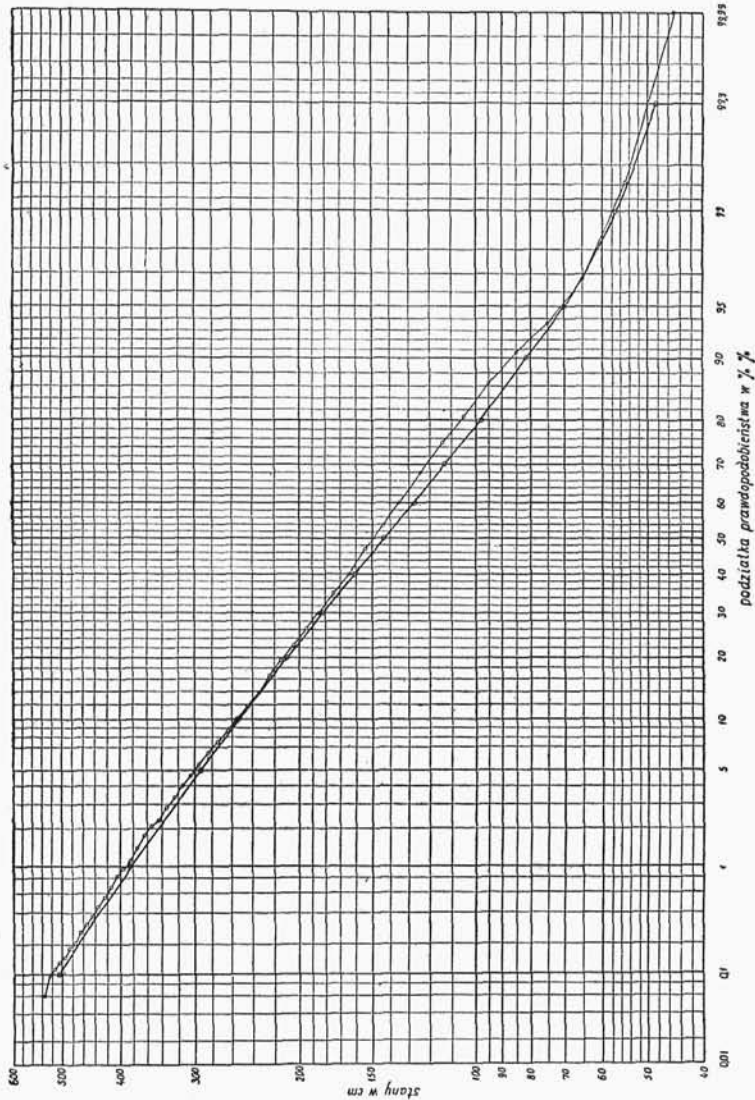
$$(cs) = \frac{\sum t v^3}{(n-1)(cv)^2} = \frac{41,47268}{364,25 \cdot 0,45008^2} = \frac{41,47268}{33,21126} = 1,248753$$

Tabela 11.
Obliczenie współrzędnych krzywej sum czasów trwania stanów (Wista—Warszawa).

Czas w %	0,1	1,0	5	10	20	30	40	50
Wartość z tabeli dla (<i>cv</i>) = 1; (<i>cs</i>) = 1,24875	4,891	3,182	1,907	1,348	0,733	0,343	0,043	— 0,197
Wartość dla (<i>cv</i>) = 0,45008	2,2012	1,4320	0,8583	0,6065	0,3299	0,1544	0,0193	— 0,0887
Stosunek stanu do średniego	3,2012	2,4320	1,8583	1,6065	1,3299	1,1544	1,0193	0,9113
Stan	507,9	385,8	294,8	254,9	211,0	183,1	161,7	144,6

60	70	80	90	95	99	99,9	Uwagi
— 0,425	— 0,622	— 0,848	— 1,073	— 1,233	— 1,418	— 1,544	Wartości interpolowane
— 0,1913	— 0,2801	— 0,3815	— 0,4829	— 0,5549	— 0,6382	— 0,6949	Wartość poprzednia mnożona przez 0,45008
0,8087	0,7199	0,6185	0,5171	0,4451	0,3618	0,3051	Wartość poprzednia + 1
128,3	114,2	98,1	82,0	70,6	57,4	48,4	Wartość poprzednia mnożona przez 158,65

dla krzywej typu III Pearsona rzędne krzywej prawdopodobieństwa i wniesiono je wraz z punktami pochodzącymi z obserwacji w normalną podziałkę prawdopodobieństwa. Ponieważ współczynnik asy-

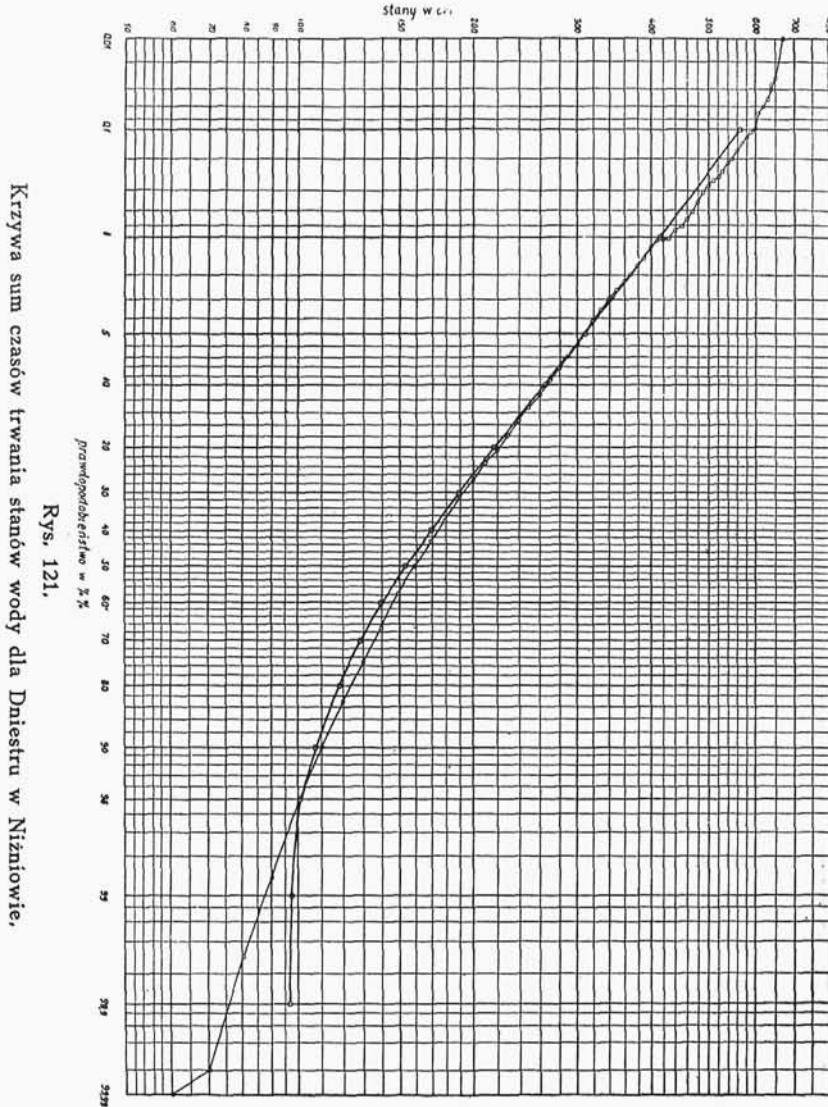


Rys. 120.

Krzywa sum czasów trwania stanów wody dla Wisły w Warszawie.

metrii jest różny od jedności, w normalnej podziałce prawdopodobieństwa połączone punkty leżą nie na prostej lecz na krzywej, o małej zresztą krzywiznie. Krzywa teoretyczna (rys. 120) na ogół dobrze zgadza się z krzywą uzyskaną z obserwacji.

Krzywa [teoretyczna obliczona dla Dniestru w Nizniowie (rys. 121) z okresu czasu 32 lat: od 1893 do 1930 r. (przerwa 4 lat wojennych) odbiega od krzywej rzeczywistej bardzo znacznie przy



stanach niskich. Doświadczenie dowodzi, że krzywe czasów trwania stanów w jednym roku, choćby przeciętnym z dłuższego okresu, trudno jest ująć w krzywą typu Pearsona. Chcąc ekstrapolować wyniki obserwacji, najprościej jest krzywą uzyskaną z obserwacji i naniesioną w podziałce prawdopodobieństwa wygładzić od-

ręcznie, lub też do wyznaczenia krzywej użyć poniżej podanej metody Grassbergera.⁵⁹⁾ ⁶⁰⁾

Grassberger zauważył, że normalne równanie teorii prawdopodobieństwa da się zastosować do krzywych asymetrycznych, jeżeli za podstawę weźmiemy nie samą zmienną obserwowaną ale jej logarytm. Założenie to ułatwia całkowanie funkcji, lecz jest teoretycznie nieuzasadnione. Zamiast więc funkcji:

$$\varphi(x) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2(x-a)^2} \quad (34)$$

Grassberger wprowadził funkcję logarytmu

$$\varphi(\log x) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \left(\log \frac{x}{x_0}\right)^2}$$

a stąd

$$\varphi(x) = \frac{h \cdot \log e}{x \sqrt{\pi}} e^{-h^2 \left(\log \frac{x}{x_0}\right)^2} \quad (35)$$

gdzie $\log x_0$ jest wartością średnią dla różnych $\log x$, więc dla przepływów jest to przepływ 182,5-dniowy.

Równanie krzywej całkowej

$$S(x) = \frac{h \log e}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \frac{1}{x} e^{-h^2 \left(\log \frac{x}{x_0}\right)^2} \quad (36)$$

Wprowadzając $k \log \frac{x}{x_0} = \xi$ i przy użyciu oznaczenia stosowanego w rachunku prawdopodobieństwa:

$$\Phi(\gamma) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\gamma e^{-t^2} dt$$

otrzymamy

$$S(x) = \frac{1}{2} [1 + \Phi(\xi)] \quad (37)$$

Równanie to rozwinął Bruns w szereg bardzo szybko zmniejszający się

$$S(x) = \frac{1}{2} \left[1 - \Phi(\xi) - D_3 \frac{1}{4} \Phi_3(\xi) - D_4 \frac{1}{8} \Phi_4(\xi) \dots \right] \quad (38)$$

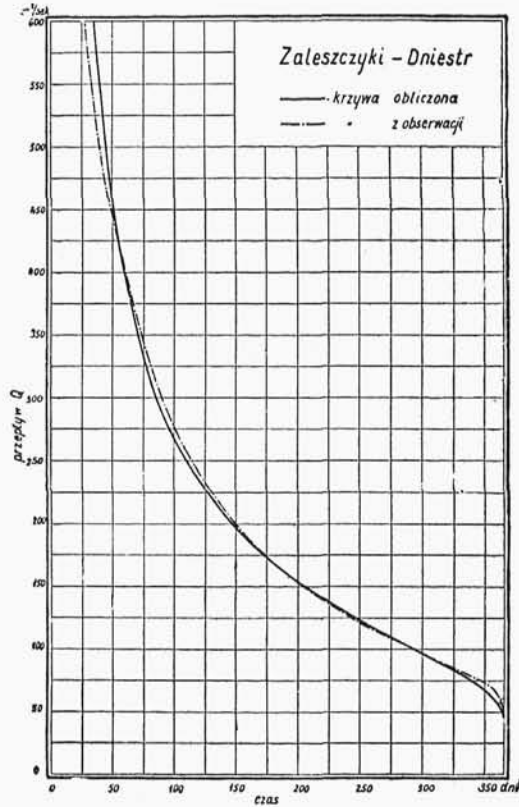
⁵⁹⁾ K. Wóycicki. Krzywe czasów trwania przepływów, Warszawa, 1932.

⁶⁰⁾ H. Grassberger, Die Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf die Wasserführung der Gewässer, Wien, 1934.

We wzorze tym $\Phi_3(\xi)$, $\Phi_4(\xi)$,..... są trzecimi czwartymi itd. różniczkami funkcji $\Phi(\gamma=x)$ względem ξ , zaś D_3 , D_4 ... są stałymi współczynnikami.

Możemy poprzestać na trzeciej pochodnej, zatem dla roku wyrażonego w dniach otrzymamy

$$T = 182,5 \left[1 - \Phi(\xi) - D_3 \frac{\Phi_3(\xi)}{4} \right] \quad (39)$$



Rys. 122.

Krzywa sum czasów trwania przepływów dla Dniestru w Zaleszczykach.

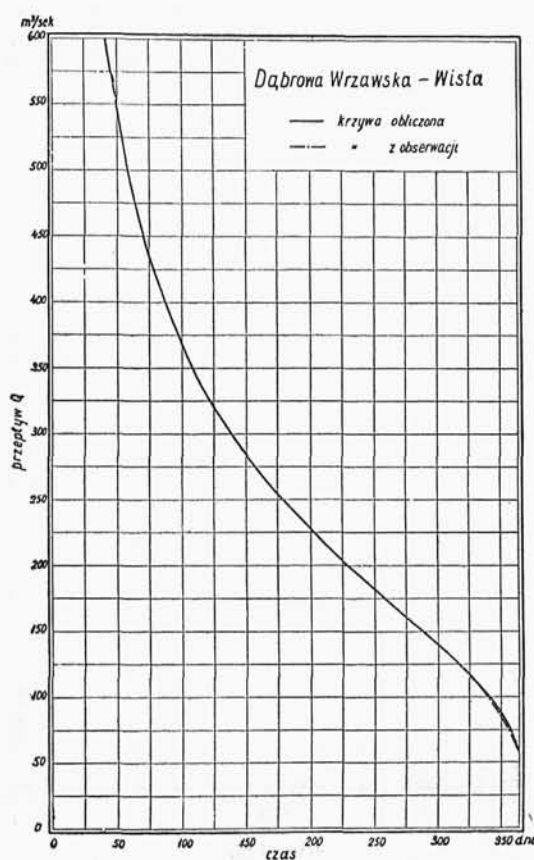
Stałe k , x_0 i D_3 otrzymamy z 3 punktów krzywej sum czasu trwania; $\Phi_3(\xi) = 0$ przy $\xi = +\frac{1}{\sqrt{2}}$ oraz $\xi = -\frac{1}{\sqrt{2}}$;

Podstawiając te wartości w równanie na T otrzymamy

$$T = 182,5 [1 - \Phi(\pm 0,7071)], \quad (40)$$

czyli $T = 58$ dni i 307 dni. Wartość funkcji $\Phi(\xi)$ i jej trzeciej pochodnej $\Phi_3(\xi)$ podane są w tabelach Brunsa⁶¹⁾ i w skróceniu u Wóycickiego. Z uwagi na to, że $\xi = k \log \frac{Q}{x_0}$, wypada $k \log \frac{Q_{58}}{x_0} = + \frac{1}{\sqrt{2}}$ oraz $k \log \frac{Q_{307}}{x_0} = - \frac{1}{\sqrt{2}}$ skąd przez redukcję otrzymuje się

$$k = \frac{\sqrt{2}}{\log Q_{58} - \log Q_{307}} \quad \text{oraz} \quad x_0 = \sqrt{Q_{58} Q_{307}} \quad (41)$$



Rys. 123.

Krzywa sum czasów trwania przepływów dla Wisły w Dąbrowie Wrzawskiej.

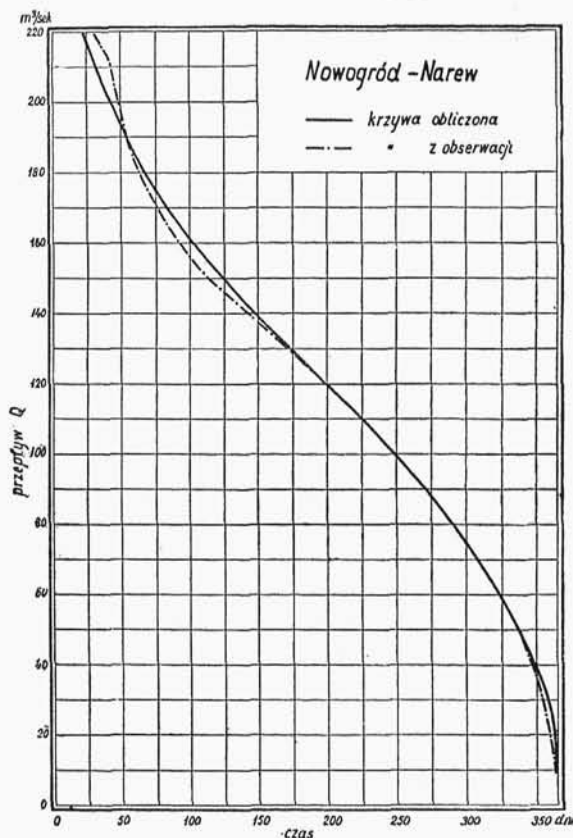
Q_{58} i Q_{307} oznaczają przepływ odpowiadający wskazanej liczbie dni. Wartość D , obliczymy z odchyłki między przepływem średnim a sześciomiesięcznym, którą da się określić równaniem:

⁶¹⁾ H. Bruns, Wahrscheinlichkeitsrechnung und Kollektivmasslehre.

$$k \log \frac{x_0}{Q_{182,5}} = k \log \frac{\sqrt{Q_{58} Q_{307}}}{Q_{182,5}} \quad (42)$$

zatem wartość stałej D_3 z równania (39) dla 182,5 dni

$$D_3 = \frac{4 \Phi \left(k \log \frac{\sqrt{Q_{58} Q_{307}}}{Q_{182,5}} \right)}{\Phi_3 \left(k \log \frac{\sqrt{Q_{58} Q_{307}}}{Q_{182,5}} \right)} \quad (43)$$



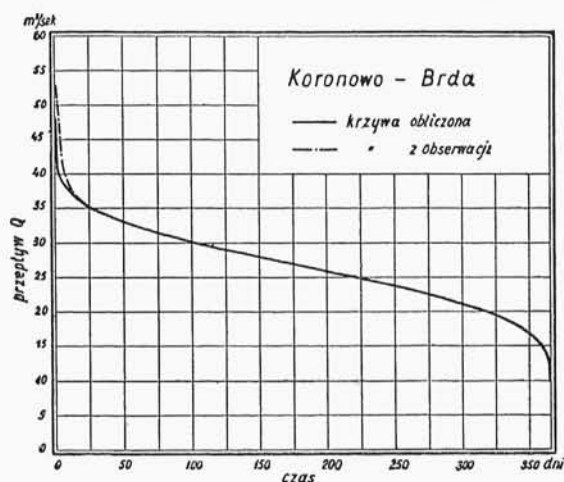
Rys. 124.

Krzywa sum czasów trwania przepływów dla Narwi w Nowogrodzie.

Oznaczenie więc krzywej całkowitej opiera się na znajomości 3 przepływów odpowiadających w ciągu roku 58, 182½ i 307 dniom. Wartości dla innych czasów obliczamy dla różnych x , a zatem przy użyciu tablic Brunsza.

Rys. 122 do 125 przedstawiają kilka przykładów krzywych obliczonych tą drogą i porównanie ich z rzeczywistym przebiegiem

sum czasów trwania przepływów: rys. 122 dla Dniestru w Zaleszczykach, rys. 123 dla Wisły w Dąbrowie Wrzawskiej, rys. 124 dla Narwi w Nowogrodzie, rys. 125 dla Brdy w Koronowie.



Rys. 125.

Krzywa sum czasów trwania przepływów dla Brdy w Koronowie.

Tabela 12.

Wartości 3 przepływów i współczynników k i D_3

	Rzeka	Wodowskaz	Dorzecze km ²	Q_{58}	$Q_{182,5}$	Q_{307}	k	D_3	$Q_{\bar{s}r}$	Q_2 (według ozn. Iszk.)
1	San	Postołów	1640	78	34	12	1,740	+0,163	47,4	12,7
2	"	Radomyśl	16847	232	112	44	1,959	+0,181	142,7	50,6
3	Soła	Porąbka	1089	41,5	16,3	8,8	2,100	-0,304	25,8	10,5
4	Dniestr	Zaleszczyki	24601	404	168	93	2,217	-0,291	253,3	113,5
5	Wiśła	Popędzyna	10637	254	108	60	2,257	-0,274		
6	"	Dąbrowa Wrz.	33358	503	246	134	2,462	-0,117	323,1	167,6
7	Horyń	Horyń	26757	191	83	51	2,466	-0,125		
8	Dunajec	Rożnów	4871	101	58	30	2,682	+0,123	67,4	38,8
9	Wiśła	Warszawa	85176	884	494	276	2,797	0,000		
10	"	Włocławek	171250	1700	1050	584	3,048	+0,140		
11	Prypeć	Nyrcza	67266	342	202	103	2,713	+0,177	224,7	131
12	Wieprz	Kośmin	10153	62,2	34,1	22	3,133	-0,229	42,3	28,2
13	Narew	Nowogród	15398	192	130	74	3,415	+0,266	133,5	95,0
14	Brda	Koronowo	4101	32,4	26,5	20,6	7,190	+0,161	26,5	24,5

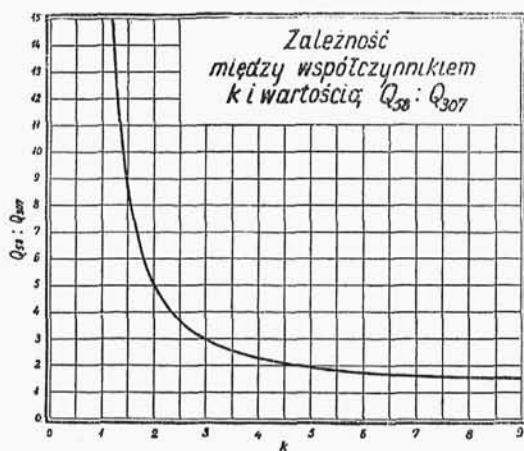
W Tab. 12 podano wartości przepływów i współczynników k i D_3 dla 14 stacji wodowskazowych w Polsce, dla których można

było obliczyć przeciętne przepływy z dłuższego okresu czasu bez obawy popełnienia błędów z powodu zmiany kształtu koryta.

Z podanych cyfr wynika, że im więcej przepływy są wyrównane, tym współczynnik k jest większy. Im bardziej krzywa jest wygięta, to (przy tym samym k) D_s jest mniejsze (—), im krzywizna mniejsza, tym D_s większe (+).

Dla tej samej rzeki oba współczynniki rosną wraz ze wzrostem dorzecza. Regularność tę psuje zmiana charakteru rzeki.

Jeżeli dla scharakteryzowania rzeki za miarę zmienności przepływu przyjmiemy stosunek $Q_{58} : Q_{307}$, to związek między tym stosunkiem a współczynnikiem k przedstawia wykres na rys. 126. Dla $Q_{58} = Q_{307}$ będzie $k = \infty$.



Rys. 126.

Związek między współczynnikiem k a wartością $Q_{58} : Q_{307}$.

Z przedstawionych wyżej równań Grassberger wyprowadza jeszcze wzór na Q_{sr} (przepływ średni) i na przepływ najdłużej trwający — nazwany przez Iszkowskiego Q_2 .

$$Q_{sr} = x_0 \cdot 10^{\frac{0,57565}{k^2}}$$

$$Q_2 = x_0 \cdot 10^{\frac{1,15130}{k^2}}$$

Wartości te dla kilkunastu charakterystycznych rzek Polski podane są w Tab. 12.