

a stąd

$$C = \left(\frac{Q \cos \delta}{\mu \cdot b \cdot \sin^2 \delta} - h_0 \operatorname{ctg} \delta \right) \cdot e^{\frac{\mu b \sin \delta \cdot h_0}{Q}}.$$

Wówczas równanie nasze /e/ otrzyma kształt:

$$x = z \cdot \operatorname{ctg} \delta - \frac{Q \cos \delta}{\mu \cdot b \cdot \sin^2 \delta} + \left(\frac{Q \cos \delta}{\mu \cdot b \cdot \sin^2 \delta} - h_0 \operatorname{ctg} \delta \right) \cdot e^{\frac{\mu b \sin \delta (h_0 - z)}{Q}}$$

albo po uproszczeniu:

$$x = \operatorname{ctg} \delta \left[z - h_0 e^{\frac{\mu b \sin \delta (h_0 - z)}{Q}} \right] - \frac{Q \cos \delta}{\mu \cdot b \cdot \sin^2 \delta} \left[1 - e^{\frac{\mu b \sin \delta (h_0 - z)}{Q}} \right] \quad /179/$$

Jest to ostateczne równanie krzywej powierzchni zwierciadła wody gruntowej, otrzymanego w warunkach wyżej podanych.

319. W szczególnym wypadku, kiedy warstwa nieprzepuszczalna dla wody jest pozioma, wówczas równanie /179/ otrzyma prostszą postać, mianowicie przy:

$$\delta = 0, \quad \sin \delta = 0, \quad \cos \delta = 1, \quad \operatorname{ctg} \delta = \infty, \quad \operatorname{tg} \delta = 0.$$

Podstawiając te wartości w równanie /179/, otrzymamy:

$$\begin{aligned} x &= \infty \cdot (z - h_0) - \infty (1 - 1) = \\ &= \infty \cdot (z - h_0) - \infty \cdot 0. \end{aligned}$$

Należałoby wykryć istotną wartość wyrażenia $\infty - \infty \cdot 0$.

Przedewszystkim znajdziemy, że drugi wyraz, który daje przy $\delta = 0$ nieoznaczoność $\infty \cdot 0$, ma istotną

wartość

$$\frac{\frac{d}{d\delta} \left(1 - e^{\frac{\mu \cdot b \cdot \sin \delta}{Q} (h_0 - z)} \right)}{\frac{d}{d\delta} \left(\frac{\mu \cdot b \cdot \sin^2 \delta}{Q \cdot \cos \delta} \right)} = \frac{0 - \frac{\mu \cdot b}{Q} \cdot \cos \delta \cdot e^{\frac{\mu \cdot b \cdot \sin \delta}{Q} (h_0 - z)} \cdot (h_0 - z)}{\frac{Q \cos^2 \delta \cdot \mu \cdot b \cdot 2 \sin \delta + \mu \cdot b \cdot \sin^2 \delta \cdot Q \cdot \sin \delta}{Q^2 \cdot \cos^2 \delta}}$$

po podstawieniu $\delta = 0$, otrzymamy:

$$\frac{-1 \cdot \frac{\mu \cdot b}{Q} (h_0 - z)}{\frac{\mu \cdot b \cdot 2 \cdot \sin \delta}{Q} + \frac{\mu \cdot b \cdot \tan^2 \delta \cdot \sin \delta}{Q}} = \frac{-\frac{\mu \cdot b}{Q} (h_0 - z)}{\frac{\mu \cdot b \cdot 2 \cdot 0}{Q} + \frac{\mu \cdot b \cdot 0 \cdot 0}{Q}} = \infty$$

Zatem nasze wyrażenie sprowadza się do postaci:

$$\infty - \infty.$$

Wartość tego wyrażenia wykryjemy w taki sposób:

niech 1-szy wyraz będzie A , drugi B , wtedy:

$$x = A - B = \frac{\frac{1}{B} - \frac{1}{A}}{\frac{1}{AB}},$$

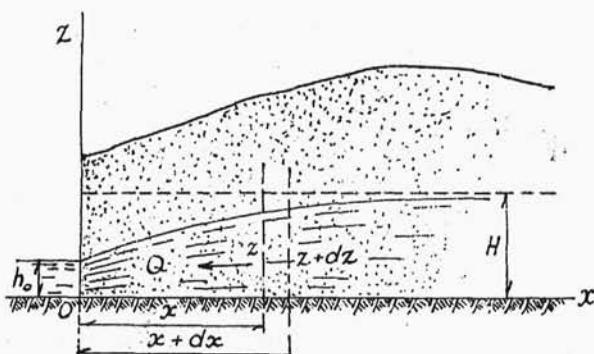
a to się sprowadza do $\frac{0}{0}$,

zatem istotna wartość znajdzie się, jeśli weźmiemy:

$$\frac{d}{d\delta} \left[\frac{1}{B} - \frac{1}{A} \right] : \frac{d}{d\delta} \left[\frac{1}{AB} \right]$$

Jak widzimy, znalezienie wartości x w naszym przypadku jest możliwe, ale związane ze znaczną stratą czasu. Lepiej będzie otrzymać szukane równanie, rozwiązując zadanie bezpośrednio.

320. Zatem treść zadania będzie taka:



rys.208.

Woda gruntowa w ilości $Q \frac{m^3}{sek}$ stale przypływa do rowu o długości b i głębokości h_0 /rys.208/. Znaleźć równanie zwierciadła wody, jeśli powierzchnia warstwy nieprzepuszczalnej jest pozioma.

Prędkość przepływu w przekroju odległym x od O niech będzie v ; $v = k \cdot \frac{dz}{dx}$. Przekrój warstwy wodonośnej $= b \cdot z$; użyteczny przekrój $= \varphi \cdot b \cdot z$; zatem wydatek wody

$$Q = \varphi \cdot b \cdot z \cdot k \cdot \frac{dz}{dx}$$

stąd:

$$Q dx = \varphi \cdot b \cdot k \cdot z dz,$$

albo, oznaczając φk , przez μ , $z dz = \frac{Q}{\mu b} \cdot dx$.

Po scałkowaniu otrzymamy:

$$\frac{z^2}{2} = \frac{Qx}{\mu \cdot b} + C ;$$

Do wyrugowania C skorzystamy z warunku, że zwierciadło wody przy samym rowie, a więc przy $x=0$ ma rzędną $= h_o$,

zatem

$$\frac{h_o^2}{2} = C ,$$

ostateczne więc równanie przybierze postać:

$$z^2 - h_o^2 = \frac{2Qx}{\mu \cdot b} \quad /180/$$

Jest to równanie paraboli.

Takie właściwie równanie powinniśmy otrzymać z równania /179/ po odpowiednich przeliczeniach.

321. Z równania /180/ możemy obliczyć, jak daleko sięga zmiana zwierciadła pierwotnego. Zwierciadło pierwotne niech będzie poziome, t.j. równoległe do osi x . Rzędne zwierciadła pierwotnego niech będą $= H$. /rys.208/. Podczas ruchu wody w gruncie zwierciadło podlega odkształceniu, t.zwanej depresji.

Największa depresja będzie tuż przy ścianie rowu; im dalej od rowu, tym depresja będzie mniejsza. Niech w odległości L od rowu depresja już ginie, czy-

li że rzędna zwierciadła odkształconego $z=H$. Wtedy otrzymamy:

$$H^2 - h_0^2 = \frac{2QL}{\mu \cdot b} \quad /181/$$

322. Możemy z tego równania skorzystać, aby znaleźć wydatek wody, spływającej do rowu przy zaobserwowanych wielkościach L i H :

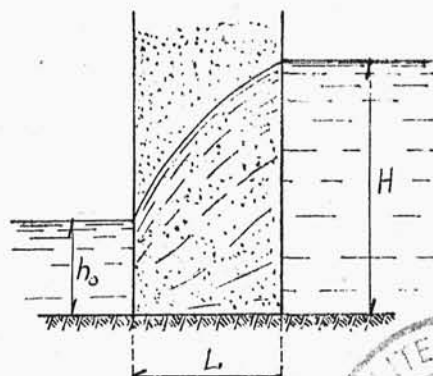
$$Q = \mu \cdot b \cdot \frac{H^2 - h_0^2}{2L} \quad /182/$$

Gdyby dopływ był dwustronny, wówczas wydatek Q byłby podwojony. Właściwie mówiąc, moglibyśmy wyznaczyć Q niekoniecznie przy znajomości H i L ; można by otrzymać Q , gdybyśmy zmierzili z dla dowolnego x ; wówczas z równanie /180/ mielibyśmy:

$$Q = \mu b \cdot \frac{z^2 - h_0^2}{2x}$$

323. Przykład XXXV.

Niech będzie grodzia /rys.209/ utworzona z dwóch ścian /przepuszczalnych/, między które zasypany jest drobny piasek. Grodza ma szerokość L i długość b . Ile wody będzie przesączać się przez grodzę,



rys.209.



jeśli zwierciadła wody przed i za grodzą są H i h_0 ponad powierzchnią nieprzepuszczalną i jeżeli wartość współczynnika $\mu (= \varphi k_1)$ jest znana.

Odpowiedź damy, korzystając wprost z równania/182/:

$$Q = \mu \cdot b \frac{H^2 - h_0^2}{2L}.$$

Wzór ten możemy przepisać w taki sposób:

$$Q = \frac{\mu b}{L} \cdot \frac{(H - h_0)(H + h_0)}{2}$$

i powiedzieć, że ilość wody przepływającej przez grodzę jest wprost proporcjonalna do różnicy poziomów wody po obydwóch stronach grodzy, wprost proporcjonalna do średniego zwierciadła wody $(\frac{H + h_0}{2})$, odwrotnie proporcjonalna do szerokości grodzy i wprost proporcjonalna do długości grodzy. Q zależy też od współczynnika μ , który jest tym mniejszy, im piasek jest drobniejszy.

324. Równolegle z rozwiązaniem zagadnienia ruchu wody gruntowej do rowu, przytoczonym w art.320, gdzie przyjęto wzór Darcy-Dupuit, przytoczymy wynik, oparty na przyjęciu wzoru Nourtier'a i Smrekera /178/ rys.208.

$$v = k_2 \sqrt{J}.$$

Wydatek

$$Q = \varphi \cdot b z \cdot k_2 \sqrt{J};$$

ponieważ $J = \frac{dz}{dx},$

więc

$$Q = \varphi b z k_2 \sqrt{\frac{dz}{dx}} ;$$

oznaczymy φk_2 przez μ ; po podniesieniu obu stron równania do kwadratu i po rozdzieleniu zmiennych, otrzymamy:

$$Q^2 dx = \mu^2 b^2 z^2 dz .$$

Po scałkowaniu:

$$Q^2 x = \mu^2 b^2 \frac{z^3}{3} + C$$

Jeśli wziąć pod uwagę, że przy $x=0$, $z=h_0$, otrzymamy równanie krzywej powierzchni:

$$x = \frac{\mu^2 b^2}{3 Q^2} (z^3 - h_0^3)$$

albo

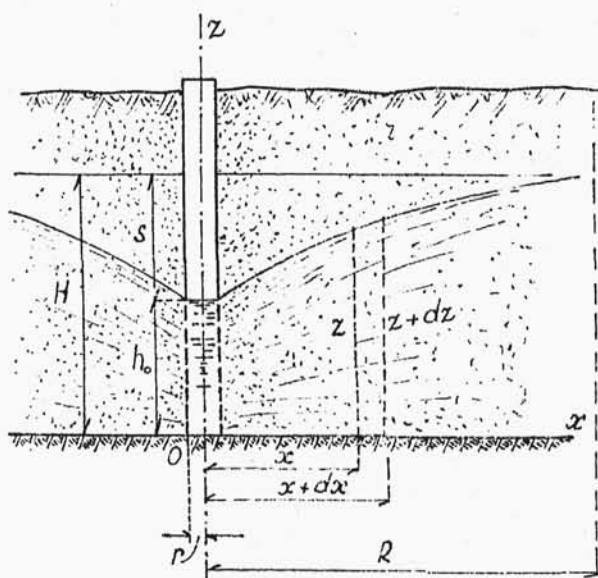
$$z^3 = \frac{3 Q^2}{\mu^2 b^2} x + h_0^3 \quad /183/$$

325. Rozpatrzmy teraz zagadnienie, jak się przedstawia ruch wody gruntowej do studni pionowej okrągłej, w której podtrzymujemy pewien poziom, odbierając ze studni $Q \frac{m^3}{sek}$ wody.

Mamy w rzeczywistości dwa przypadki tego zagadnienia:

a/ Kiedy woda gruntowa znajduje się w warstwie wodonośnej bez ciśnienia, kiedy zatem zwierciadło wody w gruncie tworzy się zupełnie swobodnie i

b/ kiedy warstwa wodonośna z wodą gruntową, znajdując się między dwiema warstwami nieprzepuszczalnymi, może być pod pewnym mniejszym lub większym ciśnieniem skutkiem komunikacji z wodą gruntową wyżej położoną. W tym drugim przypadku mówimy, że mamy do czynienia z wodą artetyczną.



rys.210.

326. Rozważmy przypadek pierwszy. Niech warstwa nieprzepuszczalna będzie pozioma. Pierwotne zwierciadło wody - również poziome - niech będzie na wysokości H ponad warstwę nieprzepuszczalną /rys.210/. Oś x obieramy poziomo, zaś oś Z wzdłuż osi studni, której promień niech będzie r . Wydatek wody niech będzie $Q \frac{m^3}{sek}$.

Obierzmy dowolny przekrój cylindryczny o promieniu x i wysokości z ; przez ten przekrój woda płynie ku studni ze wszystkich stron z prędkością $v = k_1 \cdot \frac{dz}{dx}$ /według Darcy-Dupuit/. Przekrój użyteczny przepływu

$$= \varphi \cdot z \cdot 2\pi \cdot x.$$

Zatem wyatek

$$Q = \varphi \cdot z \cdot 2\pi \cdot x \cdot k_1 \frac{dz}{dx},$$

albo, oznaczamy φk_1 przez μ i rozdzieliwszy zmienne, otrzymamy:

$$\frac{Q \cdot dx}{x} = 2\pi \mu z dz,$$

albo jeszcze inaczej:

$$z dz = \frac{Q}{2\pi \mu} \cdot \frac{dx}{x}.$$

Scalkujmy to równanie:

$$z^2 = \frac{Q}{\pi \mu} \cdot \lg_n x + C \quad /a/$$

Przypuśćmy, że opór siatki, tworzącej ściankę studni, jest nieznaczący i dlatego przyjąć możemy, że zwierciadło wody w gruncie przy siatce jest takie samo, jak w studni. Ten warunek pozwoli wyznaczyć stałą

C : mianowicie, przy $x = r$, $z = h_0$.

Zatem

$$h_0^2 = \frac{Q}{\pi \mu} \cdot \lg_n r + C;$$

stąd

$$C = h_o^2 - \frac{Q}{\pi \mu} \lg_n r$$

i

$$\frac{z^2}{2} = \frac{Q}{2\pi \mu} (\lg_n x - \lg_n r) + \frac{h_o^2}{2},$$

albo

$$z^2 - h_o^2 = \frac{Q}{\pi \mu} \lg_n \frac{x}{r} \quad /184/$$

Ostatnie równanie daje nam krzywą, którą otrzymamy przy przecięciu powierzchni leja depresyjnego z płaszczyzną rysunku. Krzywa ta jest linią logarytmiczną.

327. Odległość, na której depresja zwierciadła już nie da się odczytać, znajdziemy z warunku, że, kiedy $z = H$, wówczas $x = R$, gdzie R jest właśnie odległością szukaną:

$$H^2 - h_o^2 = \frac{Q}{\pi \mu} \lg_n \frac{R}{r};$$

stąd znajdziemy R :

$$(H^2 - h_o^2) \frac{\pi \mu}{Q} = \lg_n \frac{R}{r} \quad \text{a dalej} \quad \frac{R}{r} = e^{\frac{\pi \mu}{Q} (H^2 - h_o^2)}$$

wreszcie

$$R = r \cdot e^{\frac{\pi \mu}{Q} (H^2 - h_o^2)}$$

328. Również znaleźć możemy wydatek wody Q , jeśli założymy, że R jest znane:

$$Q = \pi \mu \frac{H^2 - h_o^2}{\lg_n \frac{R}{r}} \quad \text{/185/}$$

Z równania /185/ możemy znaleźć zależność między Q i depresją, t.ż. spadkiem S zwierciadła w studni/rys. 210/. przy pozostałych jednakowych warunkach.

Z rysunku widzimy, że

$$h_o + s = H$$

zatem

$$h_o = H - s$$

wówczas

$$Q = \pi \mu \frac{H^2 - (H-s)^2}{\lg_n \frac{R}{r}} = \pi \mu \frac{2Hs - s^2}{\lg_n \frac{R}{r}},$$

zatem możemy napisać w skróceniu, że

$$Q = Z (2Hs - s^2),$$

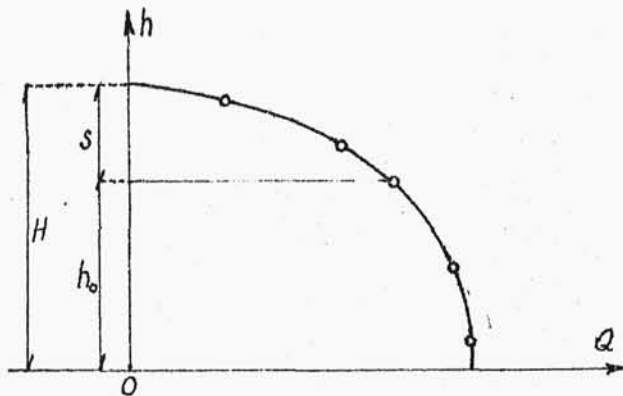
gdzie Z jest dla danego przykładu wielkością prawie stałą.

Właściwie $\lg_n \frac{R}{r}$, wchodzący w wyraz Z , zmieniać się będzie jednakowo ze zmianą depresji, gdyż ze zmianą h_o zmienia się R , jednak zmiana wartości $\lg_n R$ postępuje znacznie powolniej, niż zmiana wartości R . Dlatego też, jako dostateczne dla praktyki przybliżenie, możemy uważać, że $\lg_n \frac{R}{r}$ jest prawie stały. Wówczas zależność między Q i S - wyrazi się linią paraboliczną z

wynosi:

$$Q = z(2Hs - s^2)$$

Wygląd takiej linii jest pokazany obok /rys.211/.

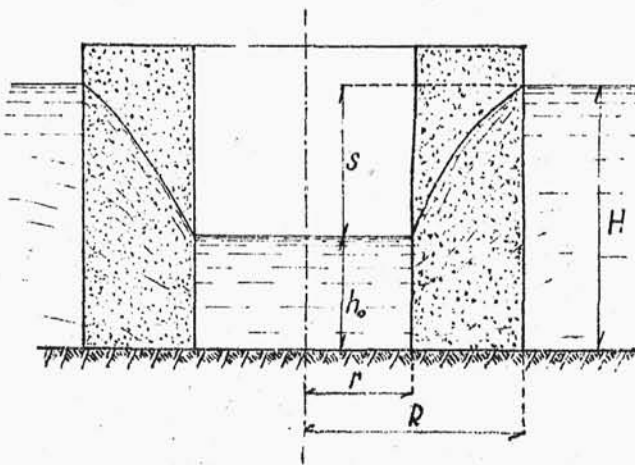


rys.211.

Doświadczenia wskazują, że w wielu wypadkach zależność, jaką otrzymujemy drogą teoretyczną, pokrywa się z obserwowanymi wynikami.

329. Przykład XXXVI.

Niech będzie /rys.212/ filtr cylindryczny, utwo-



rys.212.

rzony z dwóch ścianek cylindrycznych, wykonanych z siatki. Między ścianki nasypany jest piasek. Wysokość wody, przeznaczonej do filtrowania jest H , zaś wody przefiltrowanej - wewnątrz cylindra niech będzie h_o . Znaleźć od czego zależy wydatek tak utworzonego filtra.

Odpowiedź na to znajdziemy z wzoru /185/, pisząc

$$Q = \pi \mu \frac{H^2 - h_o^2}{\lg_n \frac{R}{r}}$$

Jeśli przepisujemy ostatni wzór w taki sposób:

$$Q = \pi \mu \frac{2}{\lg_n \frac{R}{r}} (H - h_o) \frac{(H + h_o)}{2},$$

powiemy, że wydatek zależy od różnicy poziomów, czyli od t.zw. depresji S oraz od średniego poziomu wody. Powiększenie wymiarów R i r filtra w j e d - n a k o w y m stosunku nie wpłynie na powiększenie Q . Zwiększenie średnicy zewnętrznej przy pozostawieniu bez zmiany średnicy wewnętrznej - wpłynie, aczkolwiek nieznacznie /gdyż R jest pod znakiem \lg_n / na z m n i e j s z e n i e wydatku filtra. Zwiększenie średnicy wewnętrznej przy pozostawieniu bez zmiany średnicy zewnętrznej wpłynie na nieznaczne tylko zwiększenie wydatku filtra. Innymi słowy: zwiększe-

nie wydatku filtra zależy przede wszystkim od depresji $H - h_0 = s$ i od wysokości wody H i h_0 .

330. Rozpatrzmy teraz ruch wody gruntowej-bez ciśnienia - t.j. o swobodnym zwierciadle do studni w założeniu Nourtier'a i Smrekera /178//rys.210/

$$v = k_2 \sqrt{J}.$$

Wydatek

$$Q = 2\pi x z \varphi k_2 \sqrt{J};$$

ponieważ

$$J = \frac{dz}{dx},$$

więc

$$Q = 2\pi x \cdot z \varphi k_2 \sqrt{\frac{dz}{dx}}.$$

Oznaczmy φk_2 przez μ , podnieśmy obie strony ostatniego równania do kwadratu i rozdzielimy zmienne; otrzymamy:

$$\frac{Q^2 dx}{x^2} = 4\pi^2 \mu^2 z^2 dz;$$

po scałkowaniu znajdziemy:

$$-\frac{Q^2}{x} = 4\pi^2 \mu^2 \frac{z^3}{3} + C$$

Jeśli uwzględnimy, że przy $x = r$, $z = h_0$ otrzymamy równanie krzywej, otrzymanej po przecięciu leża depresyjnego płaszczyzną xOz :

$$\frac{3Q^2}{4\pi^2\mu^2}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{x}\right) = Z^3 - h_o^3,$$

albo

$$Z^3 = \frac{3Q^2}{4\pi^2\mu^2}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{x}\right) + h_o^3, \quad /186/$$

wreszcie stąd możemy też otrzymać:

$$Q = 2\pi\mu \sqrt{\frac{Z^3 - h_o^3}{3} \cdot \frac{rx}{x-r}} \quad /187/$$

Jeżeli porównamy otrzymany wzór /187/ na wydatek wody według Nourtier'a z wzorem /185/ obliczonym według Darcy - Dupuit, znajdziemy, że wydatek Q rośnie w miarę zwiększania promienia otworu, lecz według Darcy rośnie bardzo powoli, według zaś Nourtier'a - szybciej.

331. Rozpatrzmy teraz przypadek, kiedy woda w warstwie wodonośnej znajduje się pod ciśnieniem.

Niech będzie, jak na rysunku 213 warstwa wodonośna o miąższości α , zawarta między dwiema powierzchniami nieprzepuszczalnymi. Niech woda gruntuwa, będąc w spoczynku, znajduje się pod ciśnieniem, mogącym podnieść słup wody na wysokość H ponad warstwę nieprzepuszczalną. Na tej też wysokości stanie