

prostymi.

## 211. LINIA CIŚNIEŃ DLA CIECZY RZECZYWISTYCH.

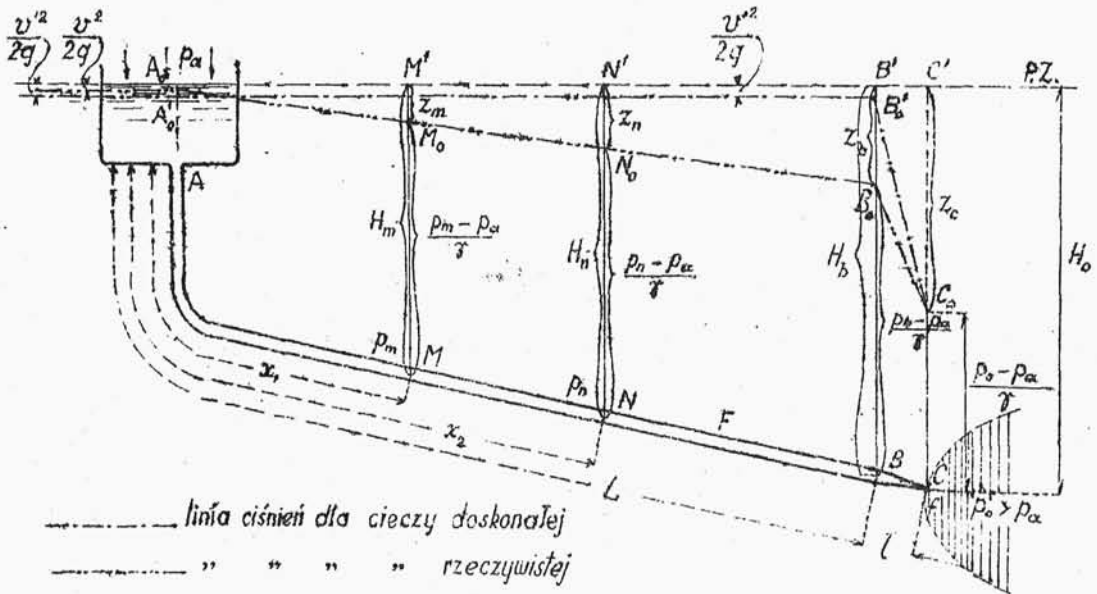
Dotychczas mówiliśmy o ruchu cieczy d o s k o -  
n a ł e j w przewodach. Co się zmieni w linii ciś-  
nień, jeśli będziemy badali ciecz rzeczywistą?

Poprzednio, w art.137 przyszliśmy do przekona-  
nia, że twierdzenie D.Bernoulli'ego w zastosowaniu  
do cieczy rzeczywistych wymaga wprowadzenia do jed-  
nej strony równania wyrazu, zależnego od strat, wy-  
wołanych oporami, napotykanymi przez ciecz podczas  
jej ruchu w przewodzie. Biorąc tę okoliczność pod  
uwagę, znajdziemy, jak ona wpłynie na ukształtowanie  
się linii ciśnień.

Niech będzie dany przewód o stałym przekroju  $F$   
na długości  $L$  i ze zwężką na końcu do przekroju  $f$   
na długości  $l$  /rys.139/. Niech wypływ cieczy odbywa  
się do przestrzeni, gdzie jest ciśnienie  $p_o$ ; niech  
przy tym  $p_o$  będzie  $> p_a$  będącego na swobodnej powierz-  
chni.

Przed wszystkim ustalmy, czy prędkość cieczy  
doskonałej będzie większa, czy też mniejsza od pręd-

kości cieczy rzeczywistej przy tych samych warunkach zewnętrznych.



rys.139.

Założmy na chwilę, że mamy ciecz doskonałą.

Prędkość wypływu  $v_o'$  dla cieczy doskonałej otrzymamy z równania Bernoulli ego:

$$0 + \frac{p_a}{\gamma} + 0 = -H_o + \frac{p_o}{\gamma} + \frac{v_o'^2}{2g};$$

stąd

$$v_o' = \sqrt{2g(H_o + \frac{p_a - p_o}{\gamma})} = \sqrt{2g(H_o - \frac{p_o - p_a}{\gamma})};$$

jednocześnie znajdziemy wydatek cieczy doskonałej:

$$Q' = v_o' f = f \sqrt{2g(H_o - \frac{p_o - p_a}{\gamma})}$$

Niech teraz będzie to ciecz r z e c z y w i s -  
t a . Równanie Bernoulli'ego dla cząstki na swobod-  
nej powierzchni i przy wylocie napiszemy w postaci:

$$0 + \frac{p_a}{\gamma} + 0 = -H_o + \frac{p_o}{\gamma} + \frac{v_o^2}{2g} + (h_{st})_{(L+l)}$$

gdzie przez  $(h_{st})_{(L+l)}$  oznaczamy sumę wysokości, straconych w przewodzie na długości  $(L+l)$ . Z ostatniego równania otrzymamy:

$$v_o = \sqrt{2g[H_o + \frac{p_a - p_o}{\gamma} - (h_{st})_{(L+l)}]} = \sqrt{2g[H_o - \frac{p_o - p_a}{\gamma} - (h_{st})_{(L+l)}]}.$$

Widzimy, że  $v_o < v_o'$

Również wydatek cieczy rzeczywistej:

$$Q = \mu v_o f = \mu f \sqrt{2g[H_o - \frac{p_o - p_a}{\gamma} - (h_{st})_{(L+l)}]}$$

wydatek ten będzie mniejszy, niż w przypadku cieczy doskonałej.

Ponieważ prędkość  $v_o$  cieczy rzeczywistej jest  
< od prędkości  $v_o'$  cieczy doskonałej, więc i prędkość  
 $v$  cieczy rzeczywistej w samym przewodzie będzie < od  
prędkości  $v'$  cieczy doskonałej w tym samym przewodzie.

Zaznaczywszy to, znajdziemy, jak wysokie przejdzie

linia ciśnień w dowolnym przekroju  $M$ , wziętym w odległości  $x$ , od początku przewodu.

Wiemy, że linia ciśnień dla cieczy doskonałej przejdzie w odległości  $\frac{v'^2}{2g}$  od poziomu zasadniczego do niego równolegle. A co będzie dla cieczy rzeczywistej, znajdziemy w taki sposób:

napiszemy równanie Bernoulli'ego dla cząstki obranej dla swobodnej powierzchni i następnie w przekroju  $M$ ; niech tu będzie ciśnienie hydrodynamiczne  $p_m$ :

$$\frac{p_a}{\gamma} = -H_m + \frac{p_m}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} + (h_{st})_x,$$

gdzie  $(h_{st})_x$  oznacza sumę wysokości, straconych w przewodzie na długości  $x$ , od początku przewodu.

Niech w piezometrze, wstawionym w przekroju  $M$ , ciecz zatrzyma się w punkcie  $M_o$ . Znajdźmy odległość  $M_o M'$  od P.Z., oznaczając ją przez  $Z_m$ .

Z rysunku mamy:

$$Z_m = H_m - \overline{MM_o}; \quad \text{poza tym powinno być } \overline{MM_o} = \frac{p_m - p_a}{\gamma},$$

a więc:

$$Z_m = H_m - \frac{p_m - p_a}{\gamma}.$$

Wielkość zawartą w prawej stronie otrzymamy z ostatniego równania

$$H_m - \frac{p_m - p_a}{\gamma} = \frac{v^2}{2g} + (h_{st})_x.$$

zatem:

$$Z_m = \frac{v^2}{2g} + (h_{st})_{x_1}$$

Gdybyśmy chcieli znaleźć położenie linii ciśnień dla przekroju  $N$ , wziętego w odległości  $x_2$  od początku, otrzymalibyśmy w podobny sposób:

$$Z_n = \frac{v^2}{2g} + (h_{st})_{x_2}$$

Dla przekroju w  $B$  :

$$Z_b = \frac{v^2}{2g} + (h_{st})_L$$

Przy samym początku przewodu w przekroju  $A$ , oczywiście

$$Z_a = \frac{v^2}{2g},$$

gdyż od powierzchni swobodnej zbiornika do początku przewodu z powodu bardzo nieznacznych prędkości, nie ma jeszcze dostrzegalnych strat.

Słuszne i całkiem naturalne będzie założenie, że im dłuższy będzie przewód, tym większe będą straty, poniesione przez ciecz podczas ruchu w tym przewodzie, zatem:

$$(h_{st})_{x_1} < (h_{st})_{x_2} < (h_{st})_L$$

Z powyższego wywnioskujemy: dla cieczy d o s -  
k o n a ł e j linia ciśnień przebiegnie na całej  
długości przewodu r ó w n o l e g ł e do  $PZ$  w  
odległości  $\frac{v'^2}{2g}$  od  $PZ$  /rys.139/, a na końcowym zwęż-  
ającym się odcinku przejdzie od  $B'_0$  do punktu  $C_0$  ( $CC_0 =$   
 $= \frac{v_0'^2}{2g}$ ), dla cieczy zaś r z e c z y w i s t e j linia  
ciśnień r ó w n o l e g ł ą do  $PZ$  n i e b ę -  
d z i e . Będzie to, jak później zobaczymy, w danym  
przypadku linia prosta, pochylona do poziomu, która  
rozpoczyna się na początku przewodu poniżej swobod-  
nej powierzchni w odległości  $\frac{v^2}{2g}$  . Zakończenie linii  
ciśnień dla odcinka zwężającego się znajdziemy w od-  
ległości

$$CC_0 = H_0 - \frac{p_0 - p_a}{\gamma} .$$

Ponieważ z równania Bernoulli 'ego mamy:

$$H_0 - \frac{p_0 - p_a}{\gamma} = \frac{v_0^2}{2g} + (h_{st})_{(L+1)} ,$$

więc

$$CC_0 = Z_c = \frac{v_0^2}{2g} + (h_{st})_{(L+1)} .$$

212. W poprzednich dwóch artykułach ... kanała  
została droga do wyznaczenia linii ciśnień dla cie-  
czy rzeczywistej. Widzieliśmy, że do tego trzeba

umieć obliczać straty w przewodach  
Do tego też przedmiotu obecnie przejdziemy.

Przed wszystkim zauważmy, że podczas ruchu cieczy rzeczywistej w przewodach dopatrujemy się strat energii tej cieczy dwóch rodzajów: a/ mogą to być takie straty, które powstają we wszystkich miejscach przewodu od początku do końca oraz b/ takie straty, które mają swe źródło wyraźnie miejscowe, związane ze specjnymi warunkami danego przekroju, albo najbliższego odcinka.

Pierwszy rodzaj strat przypisujemy istnieniu tarcia cząsteczek cieczy o ścianki przewodu i tarcia cząsteczek między sobą.

Drugi rodzaj strat przypisujemy zaburzeniom w ruchu cieczy, spowodowanym mniej lub więcej raptowną zmianą przekroju mniejszego na większy lub odwrotnie; zmianą raptowaną lub stopniową kierunku ruchu o mniejszy lub większy kąt; wreszcie ruch cieczy w przewodzie spotykać może przeszkody w postaci zaworów, zasuw, klap itp.

213. Zajmiemy się stratami, spowodowanymi tarciami.

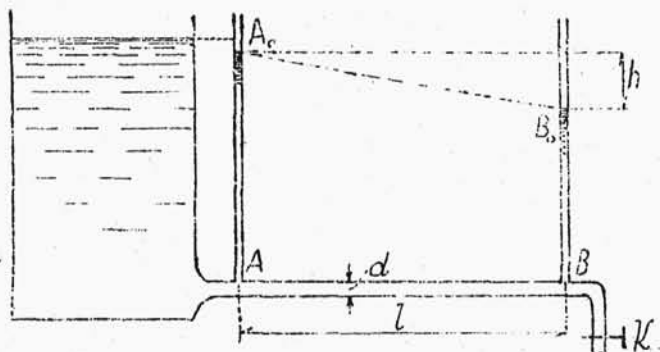
Doświadczenie wskazuje, że straty tego rodzaju

są zależne w bardzo znacznym stopniu od średniej prędkości, z którą ciecz płynie w przewodzie. Mówimy tu o średniej prędkości, gdyż cząstki cieczy, płynące tuż przy ścianie przewodu, wstrzymywane tarciem o ścianki, doznają znacznego zwolnienia prędkości ruchu. Cząsteczki, dalej od ścianek przewodu położone, dzięki lepkości wewnętrznej, doznają zwolnienia, ale mniejszego: im cząstki dalej znajdują się od ścianki przewodu, tym mniej będą odczuwały wpływ ścianek przewodu. Największą prędkość winny posiadać cząstki płynące po osi przewodu. Mówiąc zatem o zależności strat na tarcie od prędkości, rozumieć będziemy prędkości średnie.

Niech będzie naczynie, z którego wyprowadzony jest przewód o  $\phi$   $d$ ; na przewodzie tym obieramy odcinek  $AB$  o długości  $l$  /rys.140/ zaopatrzony na końcach piezometrami  $AA_0$  i  $BB_0$ . Na wylocie przewód ma kurek  $K$ . Otwierając odpowiednio kurek, możemy wywołać ruch wody w przewodzie z mniejszą lub większą prędkością. Śledząc za stanem wody w piezometrach, przy stałym poziomie wody w naczyniu, odczytywać będziemy różnicę  $h$  poziomów  $A_0$  i  $B_0$ ; różnica ta wska-



że nam wielkość straty ciśnienia, mierzonej wysokością słupa cieczy.



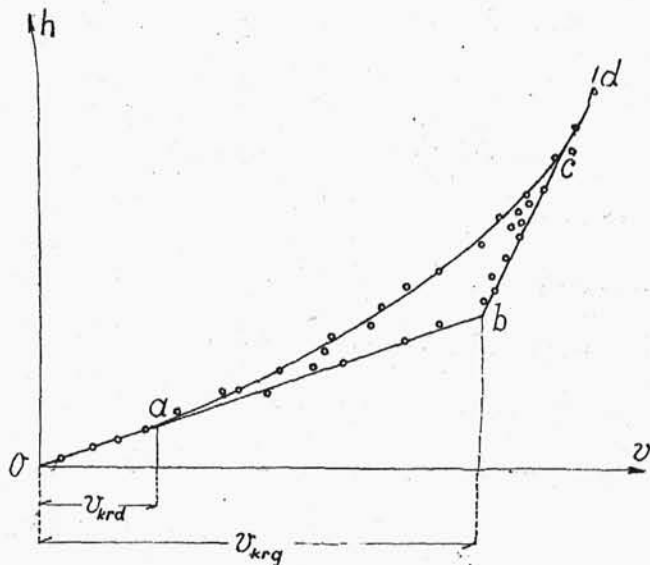
rys.140.

Doświadczenia dokonane przez Reynoldsa i Poiseuille'a dają, że przy zwiększaniu prędkości w przewodzie  $AB$ , straty  $h$  rosną. Zmiany te najlepiej przedstawić wykreślnie.

Niech będą osi  $Or$  i  $Oh$  /rys.141/.

Zwiększajmy prędkości  $v$  od zera i oznaczajmy w naszych osiach punkty, odpowiadające prędkości i otrzymanej stracie. Zauważymy wtedy, że punkty te znajdują się na prostej  $Oab$ ; punkty otrzymywane w bliskości  $b$  wymagają ostrożnego bez wstrząśnienia prowadzenia doświadczenia.

Od punktu  $b$  przy dalszym zwiększaniu prędkości otrzymamy punkty dość chaotycznie rozrzucone, ograniczone linią  $bc$ ; począwszy od  $C$  punkty układają się według krzywej  $cd$ , podnoszącej się dość szybko ku górze. Jeżeli teraz doświadczenie wykonamy w odwrotnym kierunku tj. zaczniemy od większych prędkości, zmniejszając je, przekonamy się, że teraz punkty oznaczające związek między  $v$  i  $h$  będą się układały wzdłuż krzywej  $dca$  i dopiero przy dalszym zmniejszaniu prędkości punkty ułożą się wzdłuż poprzedniej prostej  $aO$ .



Stąd widzimy, że przy małych prędkościach nie przekraczających pewnej prędkości  $v_{krd}$ , straty są proporcjonalne do prędkości. Przy pewnych warunkach ta proporcjonalność może zachodzić do prędkości  $v_{krg}$ ; powyżej tej prędkości straty szybko rosną i zmieniają się proporcjonalnie do prędkości w pewnej potęgze.

Napiszemy, że straty te  $h = kv^n$ , gdzie  $n$  zależy od rodzaju cieczy i od materiału przewodu.

Prędkość równą  $v_{krd}$  nazywamy prędkością krytyczną dolną;  $v_{krg}$  - prędkością krytyczną górną. Doświadczenia wskazują, że  $v_{krd}$  jest dla danych warunków stałą, natomiast prędkość  $v_{krg}$  zależna jest od wielu przyczyn przypadkowych /wstrząśnienia przewodu, wahnięcia się naczyń lub przewodu/; nie można zatem tej prędkości uważać za określoną i stałą.

Na rys.141 prócz prędkości krytycznej dolnej  $/v_{krd}/$  wskazana jest prędkość krytyczna górna  $/v_{krg}/$ , powyżej której strata ciśnienia na tarcie wzrasta znacznie prędzej, niż prędkość. Doświadczenia Brabée go wskazują, że stosunek  $\frac{v_{krg}}{v_{krd}}$  dochodzić może do

6...6,5.

Z doświadczeń Reynoldsa wynika:

1/. prędkość krytyczną dolną dla wszystkich rodzajów cieczy obliczyć można z równania:

$$v_{krd} = \frac{2000}{d} \psi \quad /108/$$

W tym równaniu 2000 jest tzw. liczbą Reynoldsa jest to liczba oderwana;  $d$  - średnica przewodu w cm /lub w m/;  $\psi$  jest t. zw. współczynnikiem kinetycznym lepkości badanej cieczy, wyrażony w  $\text{cm}^2/\text{sek}$  /lub w  $\text{m}^2/\text{sek}$ /. Prędkość  $v_{krd}$  będzie wtedy wyrażona w  $\text{cm}/\text{sek}$  /lub w  $\text{m}/\text{sek}$ /. Wartość współczynnika  $\psi$  dla wody przy temperaturze  $0^\circ\text{C}$  jest  $\psi_0 = 0,0181 \text{ cm}^2/\text{sek}$ .

Wówczas 
$$v_{krd} = \frac{2000 \cdot 0,0181}{d} = \frac{36,2}{d} \frac{\text{cm}}{\text{sek}},$$
 przy czym  $d$  wyrażone jest w cm.

Wartość współczynnika  $\psi$  dla powietrza o temperaturze  $0^\circ\text{C}$  jest  $\psi_0 = 0,133 \text{ cm}^2/\text{sek}$  i wtedy

$$v_{krd} = \frac{2000 \cdot 0,133}{d} = \frac{266}{d} \frac{\text{cm}}{\text{sek}}.$$

2/. Prędkość krytyczna dolna  $v_{krd}$  zależy od temperatury cieczy. Według Poiseuille'a współczynnik  $\psi$  przy temperaturze  $t^\circ\text{C}$ , oznaczmy go  $\psi_t$ , zależy od współczynnika  $\psi_0$  /przy  $0^\circ\text{C}$ / w taki sposób:

$$\psi_t = \psi_0 \frac{1}{1 + 0,0337t + 0,00022t^2} \quad /109/$$

Naprz. dla wody o temperaturze  $t$

$t =$	$0^\circ$	$5^\circ$	$10^\circ$	$15^\circ$	$20^\circ$	$30^\circ C$
$\psi =$	0,0181	0,0155	0,0133	0,0117	0,0103	0,0082 $\frac{cm^2}{sek}$
$v_{krd} =$	$\frac{36,2}{d}$	$\frac{31,0}{d}$	$\frac{26,6}{d}$	$\frac{23,2}{d}$	$\frac{20,6}{d}$	$\frac{16,4}{d} \frac{cm}{sek}$

Zobaczmy, jakie to będą prędkości krytyczne dla wody o temperaturze naprz.  $10^\circ C$  podczas przepływu w przewodach o średnicach:

$d =$	1 cm	10 cm	20 cm	50 cm	100 cm
$v_{krd} =$	26,6	2,66	1,32	0,53	0,27 $\frac{cm}{sek}$
albo	0,270	0,027	0,013	0,005	0,003 $\frac{m}{sek}$

Te wartości  $v_{krd}$  otrzymaliśmy z wzoru:

$$v_{krd} = \frac{26,6}{d}.$$

Jak widzimy z ostatniego zestawienia, w przewodach o małej średnicy, prędkości krytyczne osiągają dość znaczne wartości. Im średnica większa, tym prędkość krytyczna jest mniejsza.

Jeżeli porównamy otrzymane tu prędkości krytyczne z tymi prędkościami, jakie zwykle w przewodach rurowych w praktyce spotykać będziemy /  $v = 0,5$  -

$1 \sim 1,5 \frac{m}{sek}$  / przyjdziemy do wniosku, że zazwyczaj mieć będziemy do czynienia z ruchami, których prędkości znacznie przekraczają prędkości krytyczne.

3/ Jeśli średnia prędkość cieczy podczas przepływu w przewodzie jest *n i ż s z a* od krytycznej prędkości  $/v_{krd}/$ , wówczas ani prędkość, ani wydatek, ani też straty ciśnienia na tarcie *n i e z a l e* żą od chropowatości ścianek przewodu, lecz jedynie od lepkości cieczy. Objaśniamy sobie w ten sposób, że przy dowolnym ruchu, cząstki cieczy, płynące tuż przy ściankach przewodu, mają prędkość = 0, a dopiero sąsiednie cząstki są zwalniane dzięki lepkości.

Sprawa inaczej się ma, kiedy średnia prędkość cieczy jest *w i ę k s z a* od krytycznej.

4. W przewodach *s t o ż k o w y c h* kąt zbieżności ma duże znaczenie dla prędkości krytycznej. Wpływ ten widoczny jest z tabelki poniższej, otrzymanej dla wody o temperaturze  $14^{\circ}C$  dla przewodu zwięzającego się od  $7,6 \text{ cm } \phi$  do  $3,8 \text{ cm}$ , po środku przewodu stożkowego  $\phi$  była  $5,7 \text{ cm}$ .

Kąt zbieżności	0°	5°	7½°	10°	15°
	1	2	3	4	5
Prędkość krytyczna d o l n a $v_{krd}$ w $\frac{m}{sek}$					
w przewodzie o przekro- ju największym/ $\phi$ 7,6cm/	0,03	0,46	0,59	0,74	0,99
w przewodzie o przekro- ju najmniejszym/ $\phi$ 3,8cm/	0,06	1,83	2,36	2,98	<u>3,93</u>
w przewodzie o przekro- ju pośrednim/ $\phi$ 5,7cm/	0,04	0,82	1,05	1,32	1,75
Prędkość krytyczna g ó r n a $v_{krg}$ w $\frac{m}{sek}$					
w przewodzie o $\phi$ 7,6 cm	0,20	—	—	—	—
" " " " $\phi$ 3,8 "	0,39	11,9	15,4	19,4	<u>25,5</u>
" " " " $\phi$ 5,7 "	0,26	—	—	—	—

Należy tu dodać, że w kolumnie 1 pod kątem zbieżności = 0 należy rozumieć przewód o s t a ł e j średnicy.

Z tabelki widzimy, że strumień może posiadać ruch regularny nawet przy b a r d z o z n a c z - n y c h prędkościach, jeśli wypływa ze zwężającego się otworu - naprz. z dyszy wylotowej na koło Peltona, lub z wylotu prądownicy węża pożarowego. Prędkość może dochodzić / przy wylocie 3,8 cm $\phi$  / do 3,93 m/sek, a przy sprzyjających okolicznościach do

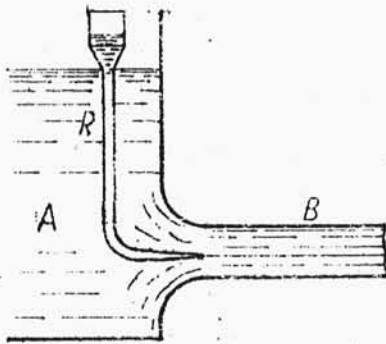
25,5 m/sek /prędkość krytyczna górna/.

214. Z poprzedniego artykułu dowiedzieliśmy się, że jeśli prędkość ruchu cieczy w przewodzie jest mniejsza, niż prędkość krytyczna, wtedy straty wzrastają proporcjonalnie do prędkości; jeśli zaś prędkość ruchu będzie większa niż prędkość krytyczna, wówczas straty rosną znacznie szybciej, gdyż są prawie proporcjonalne do kwadratów prędkości. Skąd pochodzi ta różnica? Wykazał to O. Reynolds na takim doświadczeniu /rys. 142 i 143/:

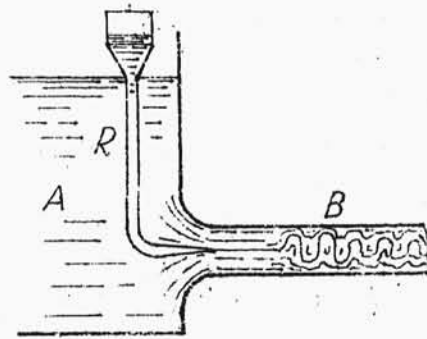
Z naczynia *A* wychodzi przewód *B*. Do tego przewodu na samym jego początku wprowadzona jest rurka zagięta pod kątem prostym i zakończona wąskim otworkiem. Do rurki *R* przy pomocy lejka wprowadzamy do wypływającej cieczy jakikolwiek barwnik w roztworze. Jeśli ciecz wypływa powoli z niewielką prędkością, - wówczas sam strumień cieczy jest przezroczysty, - barwnik zaś płynie w postaci równej prostej nici. Jeżeli prędkość przepływu powiększymy, wówczas na pewnej odległości od początku przewodu strumień traci przejrzystość, robi się jak gdyby mętnym i wydaje się, że barwnik rozlewa się w całym strumieniu,



płynącym przewodem  $B$ . Jeżeli będziemy strumień taki obserwować tylko chwilę, - oświetlając go iskrą elektryczną, zauważymy, że nić barwnika wykonywa bardzo nieregularne i zawiłe ruchy, wskazując na to, że ruch cząsteczek cieczy jest wtedy bardzo złożony i nieprawidłowy.



rys. 142



rys. 143

Zmiana wyglądu strumienia zachodzi właśnie w chwili, kiedy prędkość przepływu, zwiększając się od bardzo małej wartości, osiągnie wartości prędkości krytycznej.

Ruch cieczy z prędkością poniżej krytycznej, nazywać będziemy *r u c h e m r e g u l a r n y m* /albo warstwowym, inaczej laminarnym/, ruch zaś z prędkością powyżej prędkości krytycznej, nazwiemy

r u c h e m b u r z l i w y m /albo turbulentnym/.

Zawiłe i nieprawidłowe ruchy cieczy podczas tzw. ruchu burzliwego, powodują zjawiska dźwiękowe /szmer płynącej cieczy/, zjawiska mechaniczne /drganie przewodu/ i w pewnej, jakkolwiek bardzo nieznacznej mierze, podniesienie się temperatury płynącej cieczy i samego przewodu. Tym też trzeba objaśnić straty energii cieczy znacznie większe podczas ruchu burzliwego, niż w przypadku ruchu regularnego.

#### 215. STRATY CIŚNIENIA NA TARCIE W RUCHU

##### REGULARNYM.

Z poprzedniego widzieliśmy, że w ruchu regularnym cieczy, kiedy prędkość jest mniejsza niż krytyczna, otrzymujemy straty ciśnienia, wzrastające proporcjonalnie do prędkości. Ponieważ zazwyczaj będziemy mieli do czynienia, jak to zresztą widzieliśmy w równaniu Bernoulli'ego, z wysokościami mierzącymi ciśnienie, zatem, mówiąc o stratach ciśnienia, będziemy obliczali straty odpowiednich wysokości.

Jeżeli oznaczymy przez  $h$  wysokość, straconą w przewodzie na pewnej długości  $L$ , możemy, zgodnie z doświadczeniem, napisać, że  $h = \beta \cdot v$ , gdzie  $\beta$  jest