

byśmy p r ę d k o ś c i ś r e d n i e ,wpro-
dzone z pewną poprawką.

Równanie to będzie miało kształt:

$$Z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{\alpha_1 v_{s1}^2}{2g} = Z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{\alpha_2 v_{s2}^2}{2g} + (h_{st})^2.$$

W następstwie, dla uproszczenia pisma, będzie-
my oznaczali p r ę d k o ś c i ś r e d n i e w
przekrojach I i II strumienia wprost przez v_1 i v_2
i wówczas równanie D.Bernoulli 'ego napiszemy:

$$Z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} = Z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} + (h_{st})^2 \quad /45/$$

OGÓLNE RÓWNANIA RUCHU CIECZY.

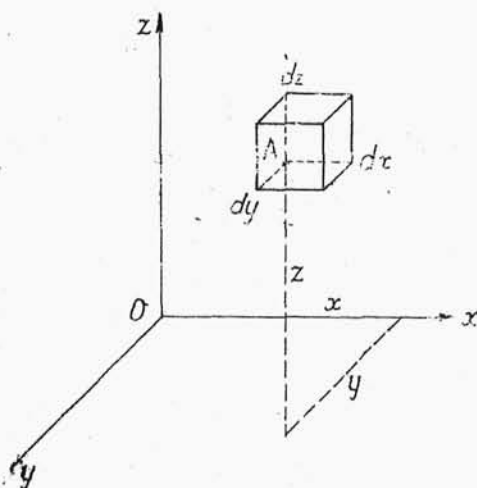
142. W poprzednich artykułach staraliśmy się
wyprowadzić w sposób dość elementarny równanie,
wypowiadające bardzo ważne dla hydrauliki twier-
dzenie D.Bernoulli 'ego. Uważamy za właściwe dowieść
tego twierdzenia, wychodząc z o g ó l n y c h
r ó w n a ń r u c h u c i e c z y . Poznamy inny spo-
sób postępowania i inne metody rozumowania, które
mogą w pewnych przypadkach dać wskazówkę przy roz-
wiązywaniu niektórych zagadnień hydraulicznych.

Przede wszystkim należy otrzymać ogólne rów-
nanie ruchu cieczy doskonałej, podane przez L.Eule-
ra /1707 - 1783/.

Niech ciecz doskonała o ciężarze właściwym γ

znajduje się w jakimkolwiek ruchu.

Obierzmy osi współrzędnych prostokątnych Ox , Oy , Oz , względem których będziemy badali ruch. Oś Z niech będzie pionowa /rys.84/. Starając się będziemy ułożyć takie równanie, aby można było dla zadanego położenia cząstki, znaleźć jej prędkość i ciśnienie w dowolnym czasie, przy działaniu pewnych sił zewnętrznych.



rys.84.

Niech w czasie t cząstka znajdzie się w punkcie A , którego współrzędne są x, y, z ; prędkość cząstki w tym punkcie znajdujacej się niech będzie v i ciśnienie hydrodynamiczne p .

Ponieważ założyliśmy, że ciecz badana jest doskonała, więc ciśnienie p jest normalne do każdej płaszczyzny przesuniętej przez punkt A i dla każdej z tych płaszczyzn jest jednakowe.

Przypuśćmy, że cząstka ma kształt nieskończe-

nie małego prostościanu o krawędziach dx, dy, dz .

Wtedy masa tej cząstki jest $dx dy dz \frac{\gamma}{g}$. Niech cząstka ta będzie pod działaniem siły zewnętrznej objętościowej, która jest w stanie nadać jednostce masy przyspieszenie α , a więc niech na cząstkę działa siła, której wartość będzie $= dx dy dz \cdot \frac{\gamma}{g} \cdot \alpha$. Jeżeli przez $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$ oznaczymy rzuty przyspieszenia α na osi x, y, z otrzymamy rzuty odpowiednie siły objętościowej:

$$\begin{aligned} dx \cdot dy \cdot dz \cdot \frac{\gamma}{g} \cdot \alpha_x, \\ dx \cdot dy \cdot dz \cdot \frac{\gamma}{g} \cdot \alpha_y, \\ dx \cdot dy \cdot dz \cdot \frac{\gamma}{g} \cdot \alpha_z. \end{aligned}$$

Poza tym na naszą cząstkę działają sąsiednie cząstki cieczy; działanie to wyraża się jako parcie na ścianki prostościanu.

Niech ciśnienie w punkcie A będzie p .

Wtedy parcie na ściankę lewą o polu $dy \cdot dz$ będzie $+ p \cdot dy dz$; na ściankę prawą $-(p + \frac{\partial p}{\partial x} dx) dy dz$; stawiamy znak $-/-$, gdyż to parcie jest skierowane w stronę ujemnych x .

Wypadkowa parcia w kierunku osi x będzie

$$- \frac{\partial p}{\partial x} dx \cdot dy \cdot dz.$$

W podobny sposób znajdziemy wypadkowe parcie na ścianki przednią i tylną o polu $dx dz$ w kierunku osi y : $-\frac{\partial p}{\partial y} dy \cdot dx dz$ oraz na ścianki górną i dolną o polu $dx dy$ w kierunku osi z :

$$-\frac{\partial p}{\partial z} dz \cdot dx dy .$$

Pod działaniem tych sił /siły objętościowej i parć/ cząstka cieczy, posiadająca prędkość v /rzuty v na osi x, y, z niech będą: v_x, v_y, v_z /porusza się dalej, uzyskując przyspieszenie $\frac{dv}{dt}$ /rzuty przyspieszenia będą $\frac{dv_x}{dt}, \frac{dv_y}{dt}, \frac{dv_z}{dt}$ /.

Układamy równanie ruchu, korzystając z zasady d'Alembert'a :

Siły rzeczywiście działające na cząstkę badaną /a więc siła objętościowa i parcia na ścianki cząstki/ razem z siłą bezwładności są w równowadze.

Siłą bezwładności nazywamy iloczyn z masy cząstki przez przyspieszenie rzeczywiście uzyskane lecz z o d w r o t n y m znakiem, a więc będzie to siła: $- dx \cdot dy \cdot dz \cdot \frac{\rho}{g} \cdot \frac{dv}{dt}$; rzuty tej siły na osi x, y, z są :

$$- dx dy dz \cdot \frac{\rho}{g} \cdot \frac{dv_x}{dt} ,$$

$$- dx dy dz \cdot \frac{\gamma}{g} \cdot \frac{dv_y}{dt},$$

$$- dx dy dz \cdot \frac{\gamma}{g} \cdot \frac{dv_z}{dt}.$$

Zatem równania ruchu badanej cząstki będą:

$$dx dy dz \frac{\gamma}{g} \left(a_x - \frac{dv_x}{dt} \right) - \frac{\partial p}{\partial x} dx \cdot dy \cdot dz = 0$$

$$dx dy dz \frac{\gamma}{g} \left(a_y - \frac{dv_y}{dt} \right) - \frac{\partial p}{\partial y} dy \cdot dx \cdot dz = 0$$

$$dx dy dz \frac{\gamma}{g} \left(a_z - \frac{dv_z}{dt} \right) - \frac{\partial p}{\partial z} dz \cdot dx \cdot dy = 0.$$

Po skróceniu przez $(dx dy dz)$ otrzyma-

my:

$$\left. \begin{aligned} a_x - \frac{dv_x}{dt} &= \frac{g}{\gamma} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \\ a_y - \frac{dv_y}{dt} &= \frac{g}{\gamma} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} \\ a_z - \frac{dv_z}{dt} &= \frac{g}{\gamma} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad /46/$$

Badając o g ó l n y przypadek ruchu cieczy, musimy przyjąć, że prędkość v /a więc i rzuty jej v_x, v_y, v_z / mogą zmieniać się nie tylko ze zmianą miejsca, t.j. ze zmianą współrzędnych x, y, z , lecz może zachodzić zmiana prędkości w tych samych miejscach z biegiem czasu. Innymi słowy, prędkość v może być funkcją nie tylko współrzędnych, lecz i cza-

su, czyli $v = f(x, y, z, t)$. Ponieważ przy ruchu spółrzędne x, y, z zmieniają się, zatem spółrzędne te również są funkcjami czasu:

$$x = f_1(t); \quad y = f_2(t); \quad z = f_3(t).$$

Wobec powyższego pochodne $\frac{dv_x}{dt}, \frac{dv_y}{dt}, \frac{dv_z}{dt}$ możemy napisać w postaci rozwiniętej.

Weźmy $\frac{dv_x}{dt}$; otrzymamy:

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{\partial v_x}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt} + \frac{\partial v_x}{\partial t}.$$

$$\text{Ponieważ } \frac{dx}{dt} = v_x, \quad \frac{dy}{dt} = v_y, \quad \frac{dz}{dt} = v_z,$$

więc:

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{\partial v_x}{\partial x} \cdot v_x + \frac{\partial v_x}{\partial y} \cdot v_y + \frac{\partial v_x}{\partial z} \cdot v_z + \frac{\partial v_x}{\partial t}.$$

W taki sam sposób napiszemy dla $\frac{dv_y}{dt}$ i $\frac{dv_z}{dt}$.

Wstawmy w równania /46/ rozwinięte wartości $\frac{dv_x}{dt}$, $\frac{dv_y}{dt}$ i $\frac{dv_z}{dt}$, otrzymamy równania ruchu w innej postaci:

$$\left. \begin{aligned} a_x - \frac{\partial v_x}{\partial t} - \frac{\partial v_x}{\partial x} \cdot v_x - \frac{\partial v_x}{\partial y} \cdot v_y - \frac{\partial v_x}{\partial z} \cdot v_z &= \frac{g}{r} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \\ a_y - \frac{\partial v_y}{\partial t} - \frac{\partial v_y}{\partial x} \cdot v_x - \frac{\partial v_y}{\partial y} \cdot v_y - \frac{\partial v_y}{\partial z} \cdot v_z &= \frac{g}{r} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} \\ a_z - \frac{\partial v_z}{\partial t} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \cdot v_x - \frac{\partial v_z}{\partial y} \cdot v_y - \frac{\partial v_z}{\partial z} \cdot v_z &= \frac{g}{r} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} \end{aligned} \right\} /47/$$

143. W powyższych równaniach ruchu, czy to w postaci /46/ czy w postaci /47/ mamy cztery niewia-

domę ρ , u_x , u_y , u_z , gdyż α_x , α_y , α_z uważamy jako dane, γ też należy uważać jako dane. Zatem do określenia 4 niewiadomych otrzymane trzy równania nie są wystarczające.

Trzeba ułożyć jeszcze jedno równanie, które dla cieczy doskonałej określimy z warunku jej nieściśliwości i ciągłości, t.j., że pewna ilość cieczy nieściśliwej, która wpłynie do określonej objętości, z tej objętości wypłynie w poprzedniej ilości.

Aby ten warunek wyrazić matematycznie, wyobraźmy sobie wewnątrz cieczy przy punkcie A /rys.84/ prostościan s t a k y o bardzo małych bokach δx , δy , δz . Przez ścianki tego prostościanu wpływa i wypływa ciecz z odpowiednimi prędkościami. Niech przez lewą ściankę o polu $\delta y \cdot \delta z$ ciecz wpływa z prędkością u_x , przez przeciwległą /prawą/ ścianę ciecz wypływać będzie z prędkością różną od u_x , mianowicie równą: $u_x + \frac{\partial u_x}{\partial x} \cdot \delta x$.

Zatem wpłynęła ciecz o ciężarze: $\gamma \cdot \delta y \cdot \delta z \cdot u_x$
 a wypłynęła: $\gamma \cdot \delta y \cdot \delta z (u_x + \frac{\partial u_x}{\partial x} \cdot \delta x)$, a więc
 powinno pozostać w prostościanie :

$$\gamma \cdot \delta y \cdot \delta z (v_x + \frac{\partial v_x}{\partial x} \cdot \delta x - v_x) = -\gamma \cdot \delta y \cdot \delta z \cdot \frac{\partial v_x}{\partial x} \cdot \delta x$$

Badając w podobny sposób dopływ cieczy przez tylną ściankę o polu $\delta x \delta z$ z prędkością v_y i wypływ przez taką samą przednią z prędkością $v_y + \frac{\partial v_y}{\partial y} \cdot \delta y$ otrzymamy, że w naszym prostościanie powinna pozostać ilość wody $= -\gamma \cdot \delta x \cdot \delta z \cdot \frac{\partial v_y}{\partial y} \cdot \delta y$.

Tak samo podczas przepływu przez dolną i górną ściankę powinno pozostać cieczy w prostościanie $-\gamma \cdot \delta x \cdot \delta y \cdot \frac{\partial v_z}{\partial z} \cdot \delta z$. Zatem razem w prostościanie powinna pozostać ciecz o ciężarze

$$-\gamma \delta x \cdot \delta y \cdot \delta z \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right).$$

Ponieważ utrzymujemy, że ciecz jest nieściśliwa oraz, że ruch jest ciągły, t.j., że ile cieczy wpłynęło do prostościanu, tyle powinno wypłynąć, więc powyższa suma jest równa zeru. A że ani γ ani $\delta x \cdot \delta y \cdot \delta z$ zerami być nie mogą, więc powinien być zachowany warunek:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad /48/$$

Równanie ostatnie wyraża warunek ciągłości ruchu cieczy nieściśliwej. To jest właśnie czwarte równanie, o którym wyżej była mowa.

144. Bardzo ważny w zastosowaniach praktycznych jest **r u c h t r w a ł y**, którego określenie podaliśmy wyżej /p.art.121/.

Z tego określenia wynika, że prędkości i ciśnienia zależą tylko od współrzędnych punktu, a nie od czasu. To znaczy, że v /zatem v_x, v_y, v_z /oraz p są funkcjami tylko x, y, z , czyli, że pochodne tych wielkości względem t są zerami. Zatem

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial v_x}{\partial t} = \frac{\partial v_y}{\partial t} = \frac{\partial v_z}{\partial t} = 0 \quad \text{oraz} \quad \frac{\partial p}{\partial t} = 0 .$$

Mając to na względzie, przepisujemy równania

/47/ w taki sposób:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_x - \frac{\partial v_x}{\partial x} \cdot v_x - \frac{\partial v_x}{\partial y} \cdot v_y - \frac{\partial v_x}{\partial z} \cdot v_z &= \frac{g}{r} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \\ \alpha_y - \frac{\partial v_y}{\partial x} \cdot v_x - \frac{\partial v_y}{\partial y} \cdot v_y - \frac{\partial v_y}{\partial z} \cdot v_z &= \frac{g}{r} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} \\ \alpha_z - \frac{\partial v_z}{\partial x} \cdot v_x - \frac{\partial v_z}{\partial y} \cdot v_y - \frac{\partial v_z}{\partial z} \cdot v_z &= \frac{g}{r} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad /49/$$

Są to równania Eulera ruchu **t r w a ł e g o** cieczy doskonałej nieściśliwej. Jeśli ma być ruch ciągły, musi być spełniony dodatkowo warunek /48/.

145. Twierdzenie D.Bernoulli 'ego. Mając otrzymane powyższe wyniki, możemy dowieść twierdzenia D.Bernoulli 'ego.

Zwróćmy się do równań ruchu cieczy /46/

$$\begin{aligned} a_x - \frac{dv_x}{dt} &= \frac{g}{r} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \\ a_y - \frac{dv_y}{dt} &= \frac{g}{r} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} \\ a_z - \frac{dv_z}{dt} &= \frac{g}{r} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} \end{aligned}$$

pomnożmy te równania: pierwsze przez dx , drugie przez dy , trzecie przez dz ; niech przy tym dx , dy , dz będą rzutami przesunięcia się cząstki. Po przemnożeniu dodajmy równania stronami, wówczas otrzymamy:

$$\begin{aligned} a_x \cdot dx + a_y \cdot dy + a_z \cdot dz - \frac{dv_x}{dt} \cdot dx - \frac{dv_y}{dt} \cdot dy - \\ - \frac{dv_z}{dt} \cdot dz = \frac{g}{r} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial p}{\partial y} \cdot dy + \frac{\partial p}{\partial z} \cdot dz \right) \quad /a/ \end{aligned}$$

Z warunku, że dx jest rzutem na oś x przesunięcia cząstki, płynącej z prędkością rzutu v_x , więc możemy napisać, że $dx = v_x \cdot dt$. W taki sam sposób napiszemy $dy = v_y \cdot dt$ oraz $dz = v_z \cdot dt$. Wówczas lewa strona równania /a/ może być przepisana:

$$\begin{aligned} a_x \cdot dx + a_y \cdot dy + a_z \cdot dz - \frac{dv_x}{dt} \cdot v_x \cdot dt - \frac{dv_y}{dt} \cdot v_y \cdot dt - \\ - \frac{dv_z}{dt} \cdot v_z \cdot dt ; \end{aligned}$$

po skróceniu dt w 3 ostatnich wyrazach i z uwagi, że $dv_x \cdot v_x = d\left(\frac{v_x^2}{2}\right)$, $dv_y \cdot v_y = d\left(\frac{v_y^2}{2}\right)$ oraz $dv_z \cdot v_z = d\left(\frac{v_z^2}{2}\right)$

lewa strona równania otrzyma postać:

$$\alpha_x dx + \alpha_y dy + \alpha_z dz - \left[d\left(\frac{v_x^2}{2}\right) + d\left(\frac{v_y^2}{2}\right) + d\left(\frac{v_z^2}{2}\right) \right]$$

albo jeszcze inaczej:

$$\alpha_x dx + \alpha_y dy + \alpha_z dz - d\left(\frac{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}{2}\right).$$

Ponieważ $v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = v^2$, więc lewa strona będzie:

$$\alpha_x dx + \alpha_y dy + \alpha_z dz - d\left(\frac{v^2}{2}\right).$$

Prawą stronę równania /a/ z uwagi, że mówimy o ruchu t r w a ł y m, że zatem ciśnienie p jest funkcją tylko x, y, z , możemy traktować jako różniczkę zupełną dp zmiennych x, y, z ; zatem prawa strona równania /a/ jest $= \frac{g}{\gamma} \cdot dp$.

Nowa więc postać równania /a/ będzie taka:

$$\alpha_x dx + \alpha_y dy + \alpha_z dz - d\left(\frac{v^2}{2}\right) = \frac{g}{\gamma} \cdot dp. \quad /b/$$

Niech ciecz, którą badamy, będzie cieczą c i ę - ż k ą, t.j., że siła objętościowa, działająca na badaną cząstkę jest siłą ciężkości, a więc siłą pionową, nadającą przyspieszenie g , wówczas $\alpha_x = 0$, $\alpha_y = 0$, $\alpha_z = -g$ a równanie /b/ zmieni się na:

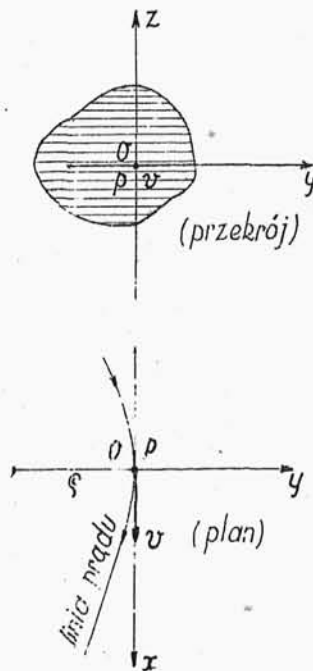
$$-g dz - d\left(\frac{v^2}{2}\right) - \frac{g}{\gamma} \cdot dp = 0 \quad ; \text{ po podzieleniu przez } (-g) \text{ i po scałkowaniu, otrzymamy:}$$

$$z + \frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\gamma} = \text{const.} \quad /c/$$

Jest to znana nam już postać równania, wyrażająca twierdzenie D.Bernoulli'ego.

146. Korzystając z otrzymanych ogólnych równań ruchu cieczy, poznamy t w i e r d z e n i a B r e s s e ' a , dotyczące rozkładu ciśnień w strudze, płynącej szerokim przekrojem. Niech będzie struga cieczy d o s k o n a-

ł e j; przekrój strugi niech będzie znacznych rozmiarów. Przez dowolny punkt O poprowadźmy linię prądu, która na pewnym odcinku jest krzywą. W celu rozpatrzenia ciśnień, panujących w obranym przekroju /rys.85/, poprowadźmy osie prostokątne w taki sposób: oś x poprowadźmy s t y c z-



rys.85.