

kości unoszenia w odpowiednich przekrojach strugi.
Zapamiętać należy, że te wysokości winny być o d-
j ę t e od odpowiednich stron równania.

Wynik ostatnio otrzymany znajduje zastosowanie
przy badaniu ruchu cieczy w pompach odśrodkowych,
oraz w turbinach wodnych różnych systemów.

137. TWIERDZENIE D.BERNOULLI 'ego DLA CIECZY RZECZYWISTYCH.

Ciecz doskonała tym się zasadniczo różni od cie-
czy rzeczywistych, że nie posiada lepkości. Lepkość
będzie tym czynnikiem, który zmusza nas do wprowadze-
nia pewnych zmian w równaniu, wyrażającym twierdze-
nie D.Bernoulli ego, otrzymanym dla cieczy doskona-
łej.

Lepkość powoduje to, że poszczególne cząstki
cieczy, znajdującej się w strudze, doznają od czas-
tek cieczy, płynących w sąsiednich strugach - prze-
szkody w ruchu, w postaci tarcia.

Skutkiem tego oddziaływanie na powierzchnię bocz-
ną strugi badanej od strony tej cieczy, którą odrzu-
ciliśmy, już nie może być normalne do poszczególnych

elementów bocznej powierzchni, jak to było w cieczy doskonałej, lecz będzie odchylone od tej normali, tworząc z kierunkiem ruchu kąt rozwarty.

Jeżeli przy tych warunkach zechcemy zbadać ruch strugi elementarnej, stosując do niej twierdzenie o zmianie energii kinetycznej, jak to poprzednio czyniliśmy, należy przy obliczeniu pracy sił, działających na strugę, uwzględnić pracę owych oddziaływań ukośnych tym razem.

Badając ciecz doskonałą, mogliśmy przyjąć, że oddziaływania na boczną powierzchnię strugi badanej były do przesunięć normalne i praca ich była równa zeru. Obecnie zaś, mając do czynienia z cieczą rzeczywistą, kiedy oddziaływania powyższe normalnymi nie są, musimy pracę tych oddziaływań uwzględnić. Z uwagi na kierunek oddziaływań względem kierunku ruchu, praca ta będzie ujemna. Zatem równanie, które ma wyrażać twierdzenie o zmianie energii kinetycznej w zastosowaniu do strugi cieczy rzeczywistej, będzie następujące:

$$df_1 ds_1 \gamma \frac{v_2^2 - v_1^2}{2g} = p_1 df_1 ds_1 - p_2 df_2 ds_2 + \gamma df_1 ds_1 (H_1 - H_2) \cdot E.$$

Ostatni wyraz E ma oznaczać właśnie pracę, wykonaną, powiedzmy wprost, przez tarcie na powierzchni bocznej, podczas przesunięcia się strugi w elemencie czasu dt .

Powyższa praca E jest tym większa, im większa jest boczna powierzchnia strugi i im większa będzie lepkość cieczy. Zrozumieliśmy stąd też będzie, że E będzie tym większe, im dalej będą wzięte przekroje 1 i 2, ograniczające badaną część strugi. Ostatnie równanie możemy uprościć, dzieląc obie strony przez $df_i ds_i \gamma$, wówczas otrzymamy:

$$\frac{v_2^2}{2g} - \frac{v_1^2}{2g} = \frac{p_1}{\gamma} - \frac{p_2}{\gamma} + H_1 - H_2 - \frac{E}{\gamma df_i ds_i},$$

albo

$$H_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} = H_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} + \frac{E}{\gamma df_i ds_i}.$$

Ostatni wyraz winien być jednorodny z pozostałymi, wchodzącymi w równanie. Ponieważ wszystkie te wyrazy oznaczają wysokości, zatem i ostatni wyraz też musi być uważany jako pewna wysokość. Oznaczmy ją przez $(h_{st})^2$, gdzie znaczek "st" winien przypominać, że to jest wysokość stracona na pokonanie przede wszystkim tarcia, a jak później się

przekonamy, i na inne napotkane opory, liczby zaś 1,2 mają przypominać, że to dotyczy oporów na odległości 1 - 2.

Wówczas otrzymamy równanie, wypowiadające twierdzenie D.Bernoulli'ego, w postaci:

$$H_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} = H_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} + (h_{st})_1^2 \quad /43/$$

Zwrócić należy uwagę, że wyraz $(h_{st})_1^2$ jest dodany do tej strony równania, która dotyczy późniejszego położenia cząstki w strudze cieczy.

Jeżelibyśmy badali część strugi cieczy rzeczywistej między przekrojami 1 i 3, moglibyśmy napisać równanie powyższe w postaci:

$$H_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} = H_3 + \frac{p_3}{\gamma} + \frac{v_3^2}{2g} + (h_{st})_1^3.$$

Badając część strugi między przekrojami 2-3, zastosujemy równanie:

$$H_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} = H_3 + \frac{p_3}{\gamma} + \frac{v_3^2}{2g} + (h_{st})_2^3 \quad \text{i tak dalej.}$$

Jeśliby ciecz poruszała się w strudze w kierunku przeciwnym, naprz. od przekroju 3 do przekroju 2, wtedy należałoby ułożyć równanie w taki sposób:

$$H_3 + \frac{p_3}{\gamma} + \frac{v_3^2}{2g} = H_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} + (h_{st})_3^2.$$

Jedną z trudniejszych spraw w zastosowaniach praktycznych jest dokładne obliczenie wysokości h_{st} , gdyż ta zależy od wielu przy tym nieuchwytnych rachunkowo własności cieczy rzeczywistej.

Zazwyczaj wysokość h_{st} będziemy wyrażali jako funkcję prędkości U i najczęściej w postaci:

$$k \cdot \frac{v^2}{2g}.$$

138. Poprzednio wskazana została droga, którą należy postępować, jeśli w trakcie rozwiązywania zadania mamy uwzględnić warunek, że ciecz jest rzeczywista. Niekiedy postępować będziemy odmiennie: zadanie pewne, dotyczące cieczy rzeczywistej, rozwiążemy dla cieczy doskonałej, co często sprawę bardzo upraszcza. Otrzymany wynik teoretyczny, który, oczywiście, zastosowania wprost nie będzie mógł znaleźć, poprawiamy, wprowadzając odpowiednie współczynniki praktyczne, które znajdujemy porównując wynik teoretyczny z rezultatami doświadczenia.

139. Otrzymane w art.137 równanie D.Bernoulli ego /43/ jest ważne dla b a r d z o c i e n k i e j strugi cieczy rzeczywistej, gdyż tylko w b a r d z o c i e n k i e j strudze możemy przyjąć, że prędkości

cząstek znajdujących się w pewnym przekroju takiej strugi, nie różnią się znacznie między sobą, są, powiedzmy, praktycznie jednakowe.

Jeśli natomiast badać będziemy ciecz rzeczywistą, płynącą s z e r o k ą strugą /naprz. w kanale, w rzece .../, prędkości cząstek, wziętych w tym samym przekroju, różnić się będą znacznie między sobą. Ten wzgląd właśnie wymaga wprowadzenia pewnej poprawki w równ. /43/, jeśli mamy strugę o znaczniejszym przekroju poprzecznym.

Ciecz rzeczywista, płynąc jakimkolwiek przewodem, doznaje przeszkód w ruchu skutkiem tarcia o ścianki przewodu. Najwięcej odczuwają działanie ścianek cząstki strumienia, płynące tuż przy ściankach; cząstki te, dzięki lepkości cieczy, oddziałują na sąsiednie cząstki, te na następne i t.d.; im cząstka będzie dalej od ścianki, tym mniej będzie odczuwany przez cząstkę wpływ ścianek. Wynik stąd będzie ten, że cząstki w danym przekroju strumienia płyną z różnymi prędkościami: najmniejszymi przy ściankach przewodu i stopniowo większymi w miarę coraz większej odległości od ścianek przewodu.

140. W wielu zagadnieniach hydraulicznych nie ma potrzeby liczenia się z rozmaitymi wartościami prędkości w różnych punktach danego przekroju; wystarczy nieraz przyjąć, że wszystkie cząstki w danym przekroju strumienia płyną z jednakową prędkością, którą nazywamy *prędkością średnią*. Prędkość ta winna czynić zadość następującemu warunkowi: ilość cieczy, która przez dany przekrój strumienia rzeczywiście przepływa, posiadając prędkości różne w różnych miejscach przekroju, powinna być taka sama, jak gdyby ciecz płynęła przez dany przekrój z tą właśnie prędkością średnią, jednakową we wszystkich punktach przekroju.

Matematycznie ujmijemy ten warunek w taki sposób: niech dF będzie dowolnym elementem pola przekroju F szerokiego strumienia; w elemencie tym niech będzie prędkość cieczy v ; wówczas ilość cieczy, przepływającej w jednostkę czasu przez ten element $= v \cdot dF$. Zróbmy takie samo obliczenie dla wszystkich elementów pola przekroju F , wówczas całkowita ilość cieczy płynącej danym strumieniem $= \int_F v dF$, gdzie całka winna objąć całe pole F przekroju.

Oznaczmy teraz średnią prędkość przez v_s ; wówczas ilość cieczy przepływającej w strumieniu w jednostkę czasu, otrzymamy: $F \cdot v_s$.

Na podstawie określenia prędkości średniej winno zatem być:

$$\int_F v dF = v_s \cdot F,$$

a stąd

$$v_s = \frac{\int v dF}{F}. \quad /44/$$

Prędkość rzeczywista w różnych punktach przekroju, jak mówiliśmy, będzie różnić się od prędkości średniej. Możemy przeto napisać, że wogóle $v = v_s + \varepsilon$, gdzie ε oznacza pewne wielkości dodatnie lub ujemne, różne w różnych miejscach przekroju. Z określenia prędkości średniej wynika, że:

$$\int_F (v_s + \varepsilon) dF = v_s F,$$

albo

$$\int_F v_s dF + \int_F \varepsilon dF = v_s F;$$

ponieważ

$$\int_F v_s dF = v_s \int_F dF = v_s \cdot F,$$

więc wielkości ε winny czynić zadość warunkowi:

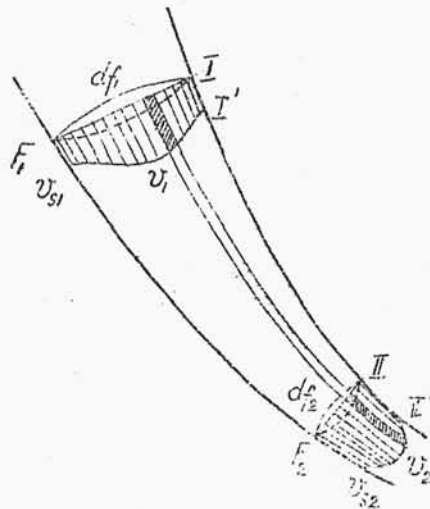
$$\int_F \varepsilon dF = 0.$$

141. Rozpatrzmy teraz, jak się wyrazi twierdzenie D. Bernoulli'ego, jeśli będziemy badali ruch cieczy rzeczywistej, płynącej s z e r o k i m s t r u m i e n i e m , kiedy zatem w różnych punktach jednego i tego samego przekroju poprzecznego będą różne prędkości.

Przypuśćmy, że mamy tu do czynienia z ruchem trwałym i ciągłym.

Postępować będziemy tak samo, jak to uczyniliśmy przy badaniu ruchu nieskończenie cienkiej strugi: obieramy część strumienia, zawartą między płaskimi przekrojami I i II o polach F_1 i F_2 /rys.83/;

po czasie Δt cząstki, będące w przekroju I, płynąc z r ó ż n y m i prędkościami, znajdą się na pewnej powierzchni krzywej I'; jednocześnie cząstki, które były



rys.83.

w płaskim przekroju II, znajdują się po czasie na powierzchni II'.

Zmiana energii kinetycznej cieczy między przekrojami I i II w czasie dt będzie równać się /w przypadku ruchu trwałego/:

en.kin. wziętej między przekrojami /II - II'/-

-en.kin., wzięta między przekrojami /I - I'/.

Energię kinetyczną cieczy między przekrojami /II - II'/ znajdziemy w taki sposób: dzielimy pole F_2 na dostatecznie małe pólka df_2 ; niech tutaj cząstki posiadają prędkość v_2 . W czasie dt cząstki przejdą drogę $v_2 \cdot dt$. Masa elementarnej strugi o przekroju df_2 , stanowiącej tylko część strumienia zawartego między /II - II'/, będzie: $\frac{v_2 \cdot dt \cdot df_2 \cdot \gamma}{g}$, a energia kinetyczna tej części będzie: $v_2 \cdot dt \cdot df_2 \cdot \frac{\gamma}{g} \cdot \frac{v_2^2}{2}$.

Wobec tego energia kinetyczna strumienia, zawartego między płaszczyzną II i powierzchnią II' otrzyma się jako:

$$\int_{F_2} v_2 \cdot dt \cdot df_2 \cdot \frac{\gamma}{g} \cdot \frac{v_2^2}{2},$$

gdzie całka jest rozszerzona na całe pole F_2 .

Czas dt jest dla wszystkich elementarnych

strug jednakowy; zatem ostatnia całka może być tak napisana:

$$\frac{\sigma}{2g} dt \int_{F_2} v_2^3 df_2 .$$

Oznaczmy średnią prędkość cieczy w przekroju II o polu F_2 przez v_{s2} . Ponieważ prędkość v_2 , wzięta w dowolnym punkcie przekroju F_2 jest wielkością różną, możemy, zgodnie z tym, jak postąpiliśmy w poprzednim artykule, napisać, że:

$$v_2 = v_{s2} + \varepsilon ;$$

Zatem

$$\int_{F_2} v_2^3 df_2 = \int_{F_2} (v_{s2} + \varepsilon)^3 df_2 ;$$

po otworzeniu nawiasu mamy:

$$\int_{F_2} v_{s2}^3 df_2 + \int_{F_2} 3 v_{s2}^2 \cdot \varepsilon df_2 + \int_{F_2} 3 v_{s2} \cdot \varepsilon^2 df_2 + \int_{F_2} \varepsilon^3 df_2 .$$

Ponieważ v_{s2} jest wielkością stałą dla wszystkich elementarnych strug, więc poprzednie wyrażenie przybierze postać:

$$v_{s2}^3 \int_{F_2} df_2 + 3 v_{s2}^2 \int_{F_2} \varepsilon df_2 + 3 v_{s2} \int_{F_2} \varepsilon^2 df_2 + \int_{F_2} \varepsilon^3 df_2$$

albo, ponieważ zgodnie z poprzednim artykułem,

$$\int_{F_2} \varepsilon df_2 = 0 \quad \text{więc ostatni wielomian będzie:}$$

$$v_{s2}^3 \cdot F_2 + 3 v_{s2} \int_{F_2} \varepsilon^2 df_2 + \int_{F_2} \varepsilon^3 df_2 .$$

Wracając teraz do otrzymanej wyżej wartości energii kinet. części strumienia, zawartego między II i II', i uwzględniając ostatnie wyrażenie, znajdziemy, że szukana energia kinetyczna:

$$\frac{\gamma}{2g} dt \int_{F_2} v_2^3 df_2 = \frac{\gamma}{2g} dt \left[v_{s2}^3 F_2 + 3 v_{s2} \int_{F_2} \varepsilon^2 df_2 + \int_{F_2} \varepsilon^3 df_2 \right].$$

Wyraz zawarty w nawiasie jest większy niż $v_{s2}^3 F_2$, możemy zatem napisać zamiast nawiasu wyraz $\alpha_2 \cdot v_{s2}^3 F_2$, gdzie $\alpha_2 > 1$ i zależy od tego, w jaki sposób zmieniają się prędkości w różnych punktach tego samego przekroju.

Spółczynnikiowi α , noszącemu nazwę współczynnika S a i n t - V e n a n t ' a, w obliczeniach nadajemy wartość najczęściej 1,1, niekiedy 1,2, a nawet 1,25 przy zapuszczonym korycie, którym płynie struga cieczy. Przy bardzo szorstkich i zapuszczonych korytach α może być jeszcze większe.

Otrzymujemy więc, że energia kinetyczna części strumienia, zawartego między II i II' =

$$= \gamma dt \alpha_2 \frac{v_{s2}^3}{2g} F_2, \quad \text{albo} \quad = \gamma dt F_2 \cdot v_{s2} \cdot \frac{\alpha_2 v_{s2}^2}{2g}$$

W podobny zupełnie sposób znajdziemy energię kinetyczną cieczy, zawartej w strumieniu między I

i I'; energia ta = $\gamma \cdot dt \cdot F_1 \cdot v_{s1} \cdot \frac{\alpha_1 \cdot v_{s1}^2}{2g}$, gdzie v_{s1} oznacza średnią prędkość w przekroju I o polu F_1 .

Ponieważ rozkłady prędkości w przekroju F_1 i F_2 mogą być różne, zatem mogą też być różne i współczynniki α_1 i α_2 , w tych przekrojach.

Mamy zatem, że zmiana energii kinetycznej strumienia między I i II przekrojem w czasie dt będzie się równać:

$$\gamma \cdot dt \cdot F_2 \cdot v_{s2} \frac{\alpha_2 \cdot v_{s2}^2}{2g} - \gamma \cdot dt \cdot F_1 \cdot v_{s1} \frac{\alpha_1 \cdot v_{s1}^2}{2g}.$$

Jeśli uwzględnimy, że ruch cieczy w strumieniu jest ciągły, będziemy mieli, że $F_1 \cdot v_{s1} = F_2 \cdot v_{s2}$, zatem powyższa zmiana energii

$$= \gamma \cdot dt \cdot F_2 \cdot v_{s2} \left(\frac{\alpha_2 \cdot v_{s2}^2}{2g} - \frac{\alpha_1 \cdot v_{s1}^2}{2g} \right).$$

Gdybyśmy następnie obliczyli sumę prac wykonanych w czasie dt przez siły zewnętrzne, przyłożone do cząstek strumienia między przekrojami I i II i przyrównali tę sumę znalezionej poprzednio zmianie energii kinetycznej i dokonali wreszcie odpowiednich redukcji, otrzymalibyśmy równanie D. Bernoulli'ego podobne do poprzedniego z tą różnicą, że zamiast prędkości cząstek w danych przekrojach mieli-

byśmy p r ę d k o ś c i ś r e d n i e ,wpro-
dzone z pewną poprawką.

Równanie to będzie miało kształt:

$$Z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{\alpha_1 v_{s1}^2}{2g} = Z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{\alpha_2 v_{s2}^2}{2g} + (h_{st})^2.$$

W następstwie, dla uproszczenia pisma, będzie-
my oznaczali p r ę d k o ś c i ś r e d n i e w
przekrojach I i II strumienia wprost przez v_1 i v_2
i wówczas równanie D.Bernoulli 'ego napiszemy:

$$Z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} = Z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} + (h_{st})^2 \quad /45/$$

OGÓLNE RÓWNANIA RUCHU CIECZY.

142. W poprzednich artykułach staraliśmy się
wyprowadzić w sposób dość elementarny równanie,
wypowiadające bardzo ważne dla hydrauliki twier-
dzenie D.Bernoulli 'ego. Uważamy za właściwe dowieść
tego twierdzenia, wychodząc z o g ó l n y c h
r ó w n a ń r u c h u c i e c z y . Poznamy inny spo-
sób postępowania i inne metody rozumowania, które
mogą w pewnych przypadkach dać wskazówkę przy roz-
wiązywaniu niektórych zagadnień hydraulicznych.

Przede wszystkim należy otrzymać ogólne rów-
nanie ruchu cieczy doskonałej, podane przez L.Eule-
ra /1707 - 1783/.

Niech ciecz doskonała o ciężarze właściwym γ