

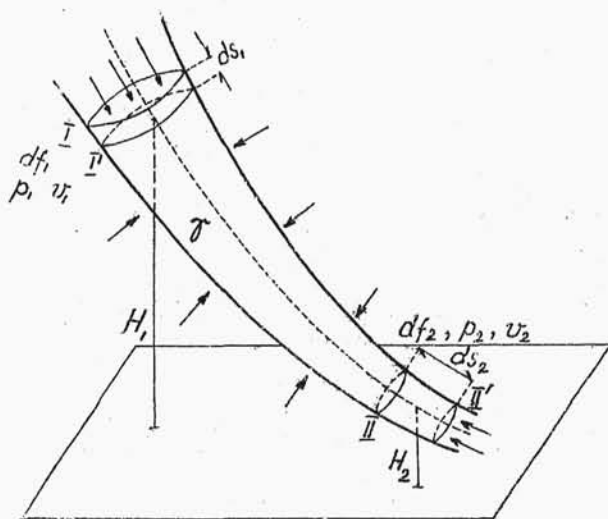
szczegóły ruchu cieczy.

Wyniki stąd otrzymane, jednak, na ogół w życiu praktycznym znajdują ograniczone zastosowanie. Natomiast jest jedno ważne twierdzenie, które otrzymuje się z równań ogólnych ruchu i które ma szerokie zastosowanie w praktycznych zagadnieniach hydraulicznych. Twierdzenie to musimy poznać. Postaramy się sprawę wyłożyć metodą prostszą, idąc za Danielem Bernoulli'm bez korzystania z ogólnych równań ruchu cieczy.

124. T w i e r d z e n i e D a n i e l a B e r n o u l l i ' e g o /1700 - 1782/.

Niech ciecz ciężka doskonała będzie w pewnym naczyniu w ruchu. Niech to będzie ruch ciągły i trwały. Obierzmy wewnątrz płynącej cieczy przy dowolnym punkcie pole elementarne prostopadłe do prędkości w tym miejscu. Przez wszystkie punkty obwodu tego pola poprowadźmy linie prądu. W ten sposób utworzy się powierzchnia, otaczająca strugę cieczy. Weźmy pod rozważanie część strugi, zawartej między dowolnymi dwoma przekrojami I i II o polach  $df_1$  i  $df_2$  /rys.74/. Po czasie bardzo małym

$dt$  ciecż, zawarta początkowo w części strugi /I-II/ płynąc razem z całą ciecżą, zajmie położenie /I'-II'/.



rys.74.

Przekrój I niech przesunie się o długość  $ds_1$ ; jeżeli prędkość cząstek ciecży w tym przekroju będzie  $v_1$ , wówczas możemy przyjąć, że w ciągu bardzo krótkiego czasu  $dt$  prędkość  $v_1$  się nie zmieni i że

$$ds_1 = v_1 \cdot dt$$

Równocześnie przekrój II przesunie się do II' na odległość  $ds_2 = v_2 \cdot dt$ , gdzie  $v_2$  jest prędkością cząstek w przekroju II, czy też II'.

Zastosujmy do cieczy, zawartej w badanej części strugi twierdzenie o zmianie /czy też przyroście/ energii kinetycznej.- Twierdzenie to, jak wiemy z mechaniki, głosi: zmiana energii kinetycznej danego układu cząstek w ciągu pewnego czasu jest równa sumie prac, wykonanych przez siły zewnętrzne, przyłożone do cząstek badanego układu i przez siły wewnętrzne, działające między tymi cząstkami w tym samym czasie.

Aby móc zastosować to twierdzenie do naszej cieczy, zawartej w strudze między przekrojami /I-II/, a następnie /I' - II'/ należy przede wszystkim tę część strugi wyodrębnić od pozostałej cieczy. Otrzymamy to, jeśli odrzucimy ciecz, otaczającą badaną strugę /I-II/ i w zamian za to przyłożymy odpowiednie siły, któreby zastąpiły oddziaływanie odrzuconej cieczy.

Będą to siły : a/ siła w przekroju I, którego pole jest  $df_1$  ; niech w tym miejscu panuje ciśnienie  $p_1$  ; zatem siła, zastępująca odrzuconą ciecz będzie  $= p_1 \cdot df_1$  ; b/ siła w przekroju II, którego pole jest  $df_2$  ; niech w tym miejscu będzie ciśnienie  $p_2$  ; a więc siła, którą należy przyjąć w tym przekroju będzie  $p_2 \cdot df_2$  ; c/ do bocznej powierzchni badanej częś-

ci strugi należy przyłożyć siły, zastępujące oddziaływanie odrzuconej cieczy; siły te ze względu na ciecz doskonałą - będą w każdym elemencie bocznej powierzchni normalne do tych elementów. Wszystkie powyższe siły są to siły "p o w i e r z c h n i o w e".

Poza siłami powyższymi a/, b/, c/ istnieją d/ siły "o b j ę t o ś c i o w e", w danym przypadku pochodzące od działania przyciągania ziemi /założyliśmy ciecz ciężką/. Wszystkie powyższe siły a/b/c/d/ są to siły z e w n ę t r z n e .

Mówiąc o siłach zewnętrznych, działających na badaną ciecz, przyjmijmy, że badana część strugi mało jest zagięta, skutkiem czego możemy nie uwzględniać s i ł d o ś r o d k o w y c h, które, gdyby struga doznawała z n a c z n i e j s z e j krzywizny, należałoby jeszcze uwzględnić, jako siły objętościowe. Następnie wewnątrz strugi m i ę d z y poszczególnymi cząstkami istnieją oddziaływania wzajemne t.zw. siły w e w n ę t r z n e, które przy ruchu cząstek mogą wykonać pracę. Jednak suma tych prac w dwóch przypadkach będzie równa zeru:

$\alpha$ / kiedy przez cały czas ruchu cząstki nie zmie-

niają między sobą wzajemnych odległości  $\beta$ / kiedy odległości te zmieniają się, lecz położenie wzajemne cząstek w końcowym momencie badania ruchu układu jest to samo, jakie było w początkowym momencie.

W naszym przypadku przyjmujemy ciecz d o s - k o n a ł ą , a więc n i e ś c i ś l i w ą; możemy więc przyjąć, że cząsteczki badanej cieczy n i e z m i e n i a j ą m i ę d z y s o b ą o d l e g ł o ś c i. Zatem powiemy, że w danym razie s u m a p r a c s i ł w e w n ę t r z n y c h j e s t r ó w n a z e r u .

Po omówieniu sił działających na badaną część strugi przystąpmy do zastosowania wypowiedzianego wyżej twierdzenia o zmianie energii kinetycznej.

Zmiana energii kinetycznej w naszym przypadku = końcowej energii kinetycznej cieczy w strudze /I' - II'/\_mniej początkowa energia kinetyczna cieczy w strudze /I - II/.

Energię kinetyczną części /I' - II'/ możemy uważać jako sumę energii cząstek zawartych w części /I' - II/ i w części /II - II'/, W podobny sposób energia kinetyczna części /I - II/ może być uważana ja-

ko suma energii części  $/I - I'/$  i części  $/I' - II/$ .

Zatem zmiana en. kin. = en. kin.  $/I' - II/$  +  
+ en. kin.  $/II - II'/$  - en. kin.  $/I - I'/$  - en. kin.  $/I' - II/$ .

Ponieważ z a k o ż y l i ś m y r u c h t r w a-  
ł y, to jest taki, w którym cząstki cieczy, znajdujące się w części strugi  $/I' - II/$ , na początku czasu  $dt$  i po czasie  $dt$ , będą miały podobne prędkości, więc energia kinetyczna  $/I' - II/$  na początku czasu  $dt$  i po czasie  $dt$  będzie ta sama.

Możemy więc powiedzieć, że:

Zmiana energii kinetycznej = en. kin.  $/II - II'/$  -  
- en. kin.  $/I - I'/$ . Czyli, otrzymujemy rezultat taki,  
jak gdyby część cieczy, znajdująca się w strudze  
 $/I' - II/$  udziału w ruchu nie brała, natomiast część  
 $/I - I'/$  przeniosła się do  $/II - II'/$ .

Znajdźmy energię kinetyczną części  $/II - II'/$ .

Objętość cieczy zawartej w tej części strugi  
jest:

$$df_2 \cdot ds_2.$$

Jeśli przez  $\gamma$  oznaczymy ciężar właściwy badanej  
cieczy, wówczas ciężar cieczy  $/II - II'/$  jest  $df_2 ds_2 \gamma$ ,  
zaś masa jest

$$df_2 \cdot ds_2 \cdot \frac{\gamma}{g}.$$

Ponieważ wszystkie cząstki cieczy w tej objętości mają jednakową prędkość  $v_2$ , zatem energia kinetyczna tej cieczy =

$$df_2 \cdot ds_2 \cdot \frac{\gamma}{g} \cdot \frac{v_2^2}{2}.$$

W taki sam sposób znajdziemy energię kinetyczną cieczy, zawartej w strudze /I - I'/.

Objętość tej cieczy =  $df_1 \cdot ds_1$ ; masa =  $df_1 \cdot ds_1 \cdot \frac{\gamma}{g}$ ;  
energia kinetyczna =  $df_1 \cdot ds_1 \cdot \frac{\gamma}{g} \cdot \frac{v_1^2}{2}$ .

Ostatecznie zmiana energii kinetycznej jest:

$$df_2 \cdot ds_2 \cdot \frac{\gamma}{g} \cdot \frac{v_2^2}{2} - df_1 \cdot ds_1 \cdot \frac{\gamma}{g} \cdot \frac{v_1^2}{2}$$

Ze względu na założoną ciągłość ruchu należy przyjąć, że  $df_2 \cdot ds_2 = df_1 \cdot ds_1$ .

A wtedy zmianę energii kinetycznej badanej cieczy możemy przedstawić w postaci:

$$df_1 \cdot ds_1 \cdot \gamma \left( \frac{v_2^2}{2g} - \frac{v_1^2}{2g} \right).$$

Obliczmy teraz pracę sił, działających na daną część strugi podczas przesunięcia się jej z położenia /I - II/ do /I' - II'/.

Przystąpmy do obliczenia sumy prac sił

zewnętrznych, o których wyżej była mowa.

Mamy siły, działające na obraną część strugi: siły powierzchniowe i siłę ciężkości, jako siłę objętościową.

Parcie na pole  $df_1$  od odrzuconej części strugi równe  $p_1 \cdot df_1$  skierowane jest do wnętrza strugi badanej i jest normalne do  $df_1$ . Podczas przesunięcia się przekroju I na miejsce I' siła ta przejdzie drogę  $ds_1$ , w kierunku siły i wykona pracę:

$$p_1 \cdot df_1 \cdot ds_1.$$

Parcie na pole  $df_2$  równe  $p_2 \cdot df_2$  jest normalne do  $df_2$  i jest skierowane do wnętrza strugi badanej. Podczas przesunięcia się punktu II na miejsce II', siła ta przejdzie drogę  $ds_2$  w kierunku wprost przeciwnym działaniu siły. Praca tu wykonana  $= -p_2 \cdot df_2 \cdot ds_2$ . Parcia na powierzchnię boczną naszej strugi, jakkolwiek istnieją, pracy żadnej nie wykonają, gdyż są normalne do dróg, które zostaną opisane przez punkty przyłożenia tych paró.

Siła objętościowa - siła ciężkości - przy przesunięciu się strugi z /I - II/ do /I' - II'/ wykona taką samą pracę, jak kiedybyśmy element /I - I'/'



przenieśli na miejsce /II - II'/, nie ruszając zupełnie części /I' - II/.

Niech środki pól  $df_1$  i  $df_2$  znajdują się na wysokościach  $H_1$  i  $H_2$  /rys. 74/ ponad dowolnie obraną płaszczyznę poziomą.

Ciężar elementu /I - I'/ jest  $= df_1 \cdot ds_1 \cdot \gamma$ ; taki sam będzie ciężar elementu /II - II'/.

Pracę tej siły otrzymamy równą

$$\int_{H_2}^{H_1} df_1 \cdot ds_1 \cdot \gamma \cdot ds \cos(ds, q)$$

gdzie  $ds$  jest elementarnym przesunięciem cząstki o ciężarze  $df_1 \cdot ds_1 \cdot \gamma$  / na drodze od I do II przekroju, zaś kąt  $(ds, q)$  jest to kąt utworzony kierunkiem przesunięcia  $ds$  i przyspieszeniem  $q$  siły ciężkości.

Zatem pracę ciężaru  $df_1 \cdot ds_1 \cdot \gamma$  otrzymamy po scałkowaniu ostatniego wyrazu, pamiętając, że  $df_1 \cdot ds_1 \cdot \gamma$  jest wielkością stałą:  $df_1 \cdot ds_1 \cdot \gamma (H_1 - H_2)$ .

Wszystkie prace mamy obliczone. Możemy napisać równanie, wynikające z twierdzenia o zmianie energii kinetycznej:

$$df_1 \cdot ds_1 \cdot \gamma \left( \frac{v_2^2}{2g} - \frac{v_1^2}{2g} \right) = p_1 \cdot df_1 \cdot ds_1 - \\ - p_2 \cdot df_2 \cdot ds_2 + df_1 \cdot ds_1 \cdot \gamma (H_1 - H_2).$$

albo po skróceniu przez  $df_1 \cdot ds \cdot \gamma$ , otrzymamy:

$$\frac{v_2^2}{2g} - \frac{v_1^2}{2g} = \frac{p_1}{\gamma} - \frac{p_2}{\gamma} + H_1 - H_2 .$$

Aby lepiej zaznaczyć treść tego równania, przenieśmy wyrazy, dotyczące położenia I na jedną stronę równania, pozostałe wyrazy na drugą; otrzymamy:

$$H_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} = H_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} .$$

Równanie to, jak widzimy z przebiegu rozumowania, nie zależy od tego, gdzie obraliśmy przekrój II; moglibyśmy w tej samej strudze obrać jakiś inny przekrój III, którego wysokość byłaby  $H_3$ , ciśnienie  $p_3$  i prędkość  $v_3$ . Wówczas otrzymane równanie mogłoby być rozszerzone dla przekroju III w taki sposób:

$$H_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} = H_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} = H_3 + \frac{p_3}{\gamma} + \frac{v_3^2}{2g}, \text{ i t.d.}$$

czyli, że ta strona równania jest const. /41/

Treść tego równania zawiera zapowiedziane t w i e r d z e n i e D a n i e l a B e r n o u l l i ' e - g o .

Aby łatwiej i prościej wypowiedzieć to twierdzenie, wprowadźmy kilka określeń, a więc:

$H_1, H_2, H_3 \dots$  będziemy nazywali w y s o k o ś c i a m i p o ł o ż e n i a różnych miejsc

strugi nad obranym poziomem zasadniczym albo poziomem porównawczym;  $\frac{p_1}{\gamma}, \frac{p_2}{\gamma}, \frac{p_3}{\gamma}$  - są to, jak wiemy, wysokości ciśnienia hydrodynamicznego w tych miejscach strugi; wreszcie

$$\frac{v_1^2}{2g}, \frac{v_2^2}{2g}, \frac{v_3^2}{2g} \text{ i t.d.}$$

są to wysokości, odpowiadające prędkościom  $v_1, v_2, v_3$  w tych samych miejscach strugi; nazwiemy je wprost wysokościami prędkości.

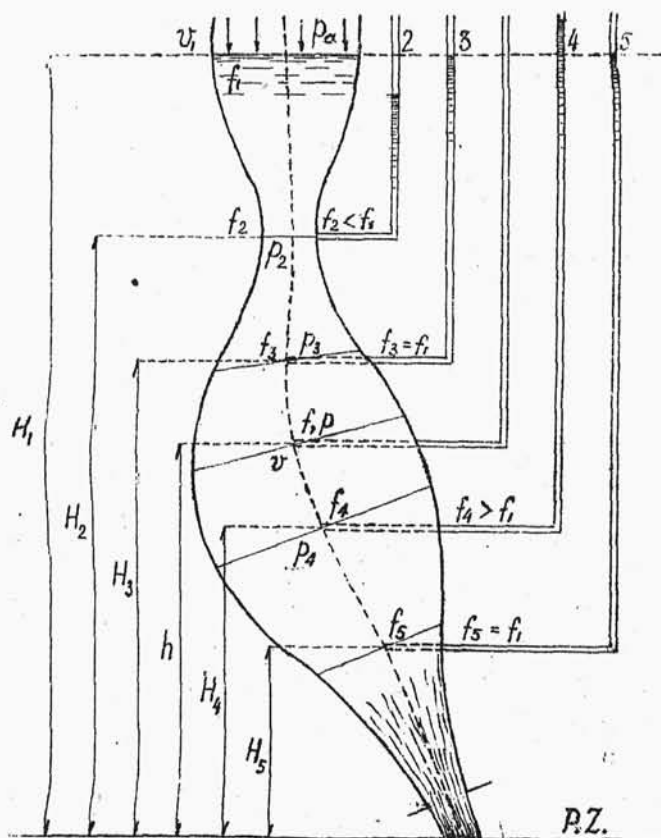
Wprowadziwszy powyższe określenia, wypowiemy twierdzenie w taki sposób:

Dla cieczy ciężkiej i doskonałej, znajdującej się w ruchu trwałym i ciągłym, suma trzech wysokości: wysokości położenia, wysokości ciśnienia i wysokości prędkości jest wielkością stałą w każdym przekroju strugi cieczy.

125. Na zasadzie twierdzenia D. Bernoulli'ego możemy poznać różnicę między ciśnie-

niem hydrostatycznym a hydrodynamicznym.

Niech będzie naczynie, jak na rysunku 75, w którym ciecz znajduje się w ruchu trwałym.



rys.75.

Wyobraźmy sobie wewnątrz tej cieczy strugę w bliskości osi naczynia. Obierzmy w tej strudze prze-

krój na wysokości  $h$  od poziomu zasadniczego; niech tu będzie ciśnienie hydrodynamiczne  $p$  i prędkość  $v$ .

Twierdzenie D. Bernoulli'ego daje nam możliwość napisania równania dla cząstki wziętej na swobodnej powierzchni, gdzie mamy  $p_a$  i  $v$ , ciśnienie i prędkość i w przekroju wziętym na wysokości  $h$  nad poziomem zasadniczym.

Równanie to jest:

$$H_i + \frac{p_a}{\gamma} + \frac{v_i^2}{2g} = h + \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g}.$$

Z równania tego otrzymamy:

$$p = p_a + \gamma(H_i - h) + \gamma \frac{v_i^2 - v^2}{2g} \quad /a/$$

Taka jest wartość ciśnienia hydrodynamicznego. Zachodzi teraz pytanie, jakie byłoby ciśnienie hydrostatyczne w tym samym miejscu, a więc wtedy, gdyby ciecz nie wypływała z naczynia.

Oznaczmy ciśnienie hydrostatyczne w tym miejscu przez  $p'$ . Według twierdzeń hydrostatyki napiszemy:

$$p' = p_a + \gamma(H_i - h) \quad /b/$$

Wstawmy wartość  $p'$  z równania /b/ w równanie

/a/, otrzymamy:

$$p = p' + \gamma \cdot \frac{v_i^2 - v^2}{2g} \quad /c/$$

Stąd wnioskujemy, że ciśnienie hydrodynamiczne  $p$  różni się od hydrostatycznego  $p'$ . Różnica ta zależy od wielkości  $\gamma \cdot \frac{v_i^2 - v^2}{2g}$

Jeżeli  $v = v_i$ , wtedy  $p = p'$

"  $v > v_i$  "  $p < p'$

"  $v < v_i$  "  $p > p'$

Wobec ciągłości ruchu, musi być spełniony warunek, że

$$v_i f_i = v f \quad \text{czyli} \quad v = v_i \cdot \frac{f_i}{f}$$

stąd wynika, że  $p = p'$ , jeśli  $f = f_i$ .

Będzie to zatem w przekrojach wziętych na wysokościach  $H_3, H_5$ , gdzie  $f_3 = f_5 = f_i$ .

Następnie  $p < p'$ , gdzie  $f < f_i$ ; znajdziemy ten warunek w przekroju, wziętym na wysokości  $H_2$  i w sąsiednich.

Wreszcie  $p > p'$ , gdzie  $f > f_i$ ; warunek ten będzie spełniony w przekroju, wziętym na wysokości  $H_4$  i w sąsiednich.

126. Łatwo sprawdzić doświadczalnie otrzymane

wyniki przy pomocy otwartych piezometrów, tak wstawionych, aby mierzyły ciśnienie w przekrojach, o których była wyżej mowa. Jeżeli ciecz w naczyniu będzie w spoczynku, wtedy we wszystkich piezometrach ciecz stanie na j e d n a k o w y m p o z i o m i e z p o z i o m e m w n a c z y n i u /przyjmujemy, że na otwarte końce piezometrów działa ciśnienie  $p_a$  to samo, co na swobodnej powierzchni w naczyniu/

Pozwólmy cieczy płynąć przez naczynie; niech ruch się utrwali, co nastąpi w bardzo krótkim czasie.

Wtedy zauważymy, że ciecz w piezometrach zmieni poziom; w niektórych tylko pozostanie bez ruchu, w innych zaś opadnie lub podniesie się w porównaniu z poprzednim stanem. Mianowicie /rys.75/ w piezometrze 2 opadnie, w piezometrze 3 pozostanie bez zmiany, w piezometrze 4 podniesie się, wreszcie w 5 - pozostanie bez zmiany.

Podobnie moglibyśmy stwierdzić słuszność otrzymanych wyników, stosując mały balonik gumowy, napełniony gazem i obciążony ciężarkiem, któryby był w stanie balonik zanurzyć w wodzie.

Zanurzajmy taki balonik w naszym naczyniu w

różnych przekrojach. Sledźmy za stanem balonika wtedy, kiedy ciecz jest w spoczynku i kiedy następnie ciecz zacznie przepływać ruchem trwałym.

Należy spodziewać się, że w przekroju 2 balonik podczas przepływu cieczy rozszerzy się w porównaniu z tym stanem, kiedy ciecz będzie bez ruchu; w przekrojach 3 i 5 balonik nie powinien doznać zmiany; w przekroju zaś 4 balonik winien się skurczyć.

127. Wróćmy jeszcze do równania /c/ z art.125:

$$p = p' + \gamma \cdot \frac{v_1^2 - v^2}{2g}$$

Zbadajmy ciśnienie w tych przekrojach, których pole  $f$  jest  $< f_1$ , podobnie jak to mamy z przekrojem  $f_2$ , gdzie niech będzie prędkość  $u_2$ .

Taki przypadek może zajść wówczas, kiedy  $u_2$  będąc  $>$  niż  $u_1$ , jest takie, że bezwzględna wartość

$$\left| \gamma \cdot \frac{v_1^2 - v_2^2}{2g} \right| \text{ jest } = p'.$$

Wówczas oczywiście  $p = 0$

Będzie to oznaczać, że cząstki cieczy w takim przekroju poruszają się jakby zupełnie s w o b o d n e cząstki, nie odczuwające obecności sąsiednich.

Jeżeliby zachodził taki warunek, że przy  $u_2 > u_1$



bezwzględna wartość  $\left| \gamma \cdot \frac{v_1^2 - v_2^2}{2g} \right|$  jest  $> \rho'$ , wtedy otrzymalibyśmy  $\rho < 0$ , co musiałoby oznaczać, że ciśnienie hydrodynamiczne w takim przypadku zamieniłoby się w rozciąganie, co jest niemożliwe w cieczy doskonałej. Cząstki nie byłyby w stanie wypełnić całego przekroju; struga jak gdyby rozsypywała się.

#### 128. W o d o m i e r z V e n t u r i .

Jest to przyrząd utworzony z dwóch stożkowych rur, połączonych ze sobą mniejszymi średnicami. Przyrząd ten nazywany jest często "zwężką" Venturi'ego /rys. 76/. Przy pomocy zwężki możemy mierzyć wydatek wody, przepływającej przez przewod, w który jest włączona wspomniana zwężka. Pomiar wody uskuteczniany na podstawie zależności, wynikających z twierdzenia D. Bernoulli'ego. Przyrząd, jak powiedzieliśmy, składa się z dwóch rur stożkowych, połączonych ze sobą zwężonymi przekrojami, szerokimi zaś łącząc się z przewodem rurowym. W przekroju  $A$ , podobnie jak w przekroju  $B$  na rorze mamy kanałki obrotowe, które przy pomocy szeregu otworów łączą się z