

ra, która powstanie po odchyleniu ciała, mogła przywrócić ciało do pierwotnego położenia, należy, aby

$$m > 0, \text{ czyli } \frac{J_0}{V} - c > 0,$$

albo

$$c < \frac{J_0}{V} \quad /23a/$$

Jeśli zatem chodzi o równowagę stałą ciała pływającego, zapewnioną przy odchyleniach około różnych osi poziomych, winien być zachowany powyższy warunek /23a/ dla wszystkich poziomych osi. Najbardziej niebezpieczny będzie stan równowagi przy obrocie około tej osi, względem której moment J_0 będzie najmniejszy.

Zatem powiemy, że dla równowagi stałej ciała pływającego powinien być zachowany warunek:

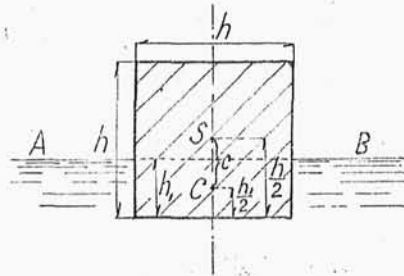
$$c < \frac{J_{0 \min}}{V} \quad /23b/$$

Dla statków, które mają budowę wydłużoną $J_{0 \min}$ będzie właśnie względem osi podłużnej statku.

84. PRZYKŁAD X. /rys.41/. Mamy belkę o przekroju kwadratowym /bok kwadratu jest h i długość belki L /. Niech belka pływa w ten sposób, że dwie jej ściany są poziome. Znaleźć przy jakich warunkach bę-

dzie. równowaga stała. Oznaczmy ciężar właściwy cieczy przez γ i ciężar właściwy ciała przez γ_1 . Przy-
puśćmy, że belka zanurza się na głębokość h_1 ,

$$\begin{aligned} \text{Wyporność } V &= h_1 \cdot h \cdot L; \\ \text{wypór } W &= V\gamma = h_1 \cdot h \cdot L \cdot \gamma; \\ \text{ciężar belki} &= h^2 L \cdot \gamma_1. \end{aligned}$$



Ponieważ w przy-

rys.41.

padku pływania ciała wypór = ciężarowi ciała, więc:

$$h_1 \cdot h \cdot L \cdot \gamma = h^2 L \cdot \gamma_1,$$

stąd

$$h_1 = h \frac{\gamma_1}{\gamma}.$$

Znajdźmy teraz, gdzie będzie metacentrum.

Skorzystamy z równania /23/.

Najmniejszy moment bezwładności pola płaszczyzny pływania jest względem osi poziomej, przechodzącej przez środek płaszczyzny pływania równoległe do długości belki.

$$J_0 = \frac{L \cdot h^3}{12}; \quad \text{wyporność } V = h_1 \cdot h \cdot L,$$

$$\text{zaś } c = \frac{h}{2} - \frac{h_1}{2}, \quad \text{zatem}$$

$$m = \frac{J_0}{V} - c = \frac{L h^3}{12 h_1 h L} - \frac{h}{2} + \frac{h_1}{2};$$

po uproszczeniach otrzymamy:

$$m = \frac{h}{12} \left[\frac{\gamma}{\gamma_1} - 6 + \frac{6\gamma_1}{\gamma} \right].$$

Jeżeli będziemy mieli dane ciężary właściwe γ i γ_1 , znajdziemy m , a więc odnajdziemy położenie metacentrum.

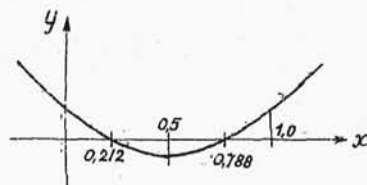
Aby równowaga była stała, winna być spełniona nierówność/23a/, albo, co na jedno wyjdzie, należy mieć

$m > 0$, t.j., że

$$\frac{\gamma}{\gamma_1} - 6 + \frac{6\gamma_1}{\gamma} > 0$$

Z tej nierówności wynika, że nie przy każdej wartości $\frac{\gamma_1}{\gamma}$ znajdzie równowaga stała. Aby to zbadać,

oznaczymy $\frac{\gamma_1}{\gamma}$ przez x ; wtedy ostatnia nierówność przybierze postać: $x^2 - x + \frac{1}{6} > 0$



Chcąc znaleźć wartości

x , odpowiadające ostatniej

rys.42.

nierówności, przyrównajmy

lewą stronę nierówności do y i zobaczymy, że równanie $y = x^2 - x + \frac{1}{6}$ przedstawia parabolę. Parabola ta przecina oś x w punktach, dla których $y = 0$, zatem otrzymamy je z równania $x^2 - x + \frac{1}{6} = 0$. Wartości pierwiastków równania są:

$$x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{12}}$$

zatem

$$x_1 = 0,788 ; x_2 = 0,212 .$$

Wyznaczywszy jeszcze jeden z punktów paraboli poznamy charakter jej; obieramy punkt, którego rzędna jest 0,5. Przybliżony kształt tej krzywej wskazany jest na rysunku /42/. Z rysunku odczytujemy, że aby $x^2 - x + \frac{1}{6} > 0$, to jest, aby y było > 0 , należy na x obierać wartości mniejsze niż 0,212; x nie może też być 0 i mniejszem od zera, gdyż to znaczyłoby, że $\gamma_i = 0$, lub wielkością ujemną, co nie miałoby sensu; czyli $0 < x < 0,212$, albo też można obrać x powyżej 0,788, nie wyżej, wszakże, niż $x = 1$, gdyż jeżeli $x = \frac{\gamma_i}{\gamma} \geq 1$, odpowiada to przypadkowi, kiedy ciało już przestaje pływać po powierzchni, co w danym przypadku nas nie interesuje.

Widzimy więc, że granice dla x są:

$$0 < x < 0,212$$

oraz

$$0,788 < x < 1 ;$$

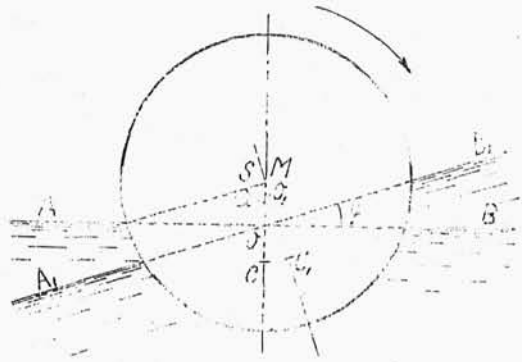
albo ostatecznie, że należy mieć takie γ_i , aby

$$0 < \gamma_i < 0,212 \gamma$$

albo

$$0,788 \gamma < \gamma_i < \gamma .$$

85. PRZYKŁAD XI. /rys.43/. Cylinder jednorodny o promieniu r i długości L pływa po powierzchni cieczy. Zbadać stan równowagi, jeśli ciężar właściwy cylindra $= \gamma_1$, a cieczy $= \gamma$. Rozpatrując nasz cylinder odchylony o mały kąt φ , zauważymy łatwo, że nowy środek zanurzenia C , znajdzie się pod środkiem ciężkości na pionie przechodzącym przez ten środek S . Stąd wywnioskujemy, że M upadnie na S . To oznacza, że to jest stan równowagi obojętnej. Ten sam wynik powinniśmy otrzymać z badania analitycznego.



rys.43.

Ciężar cylindra $= \pi r^2 L \gamma_1$; niech 2α oznacza kąt środkowy, obejmujący zanurzoną część łuku cylindra; wtedy wyporność cylindra otrzymamy:

$$L(r^2\alpha - r^2 \frac{\sin 2\alpha}{2})$$

a więc

$$W = Lr^2(\alpha - \frac{1}{2} \sin 2\alpha) \cdot \gamma$$

Zatem

$$\pi r^2 L \gamma_1 = Lr^2(\alpha - \frac{1}{2} \sin 2\alpha) \cdot \gamma,$$

albo

$$\alpha - \frac{1}{2} \sin 2\alpha = \frac{\pi \tilde{r}}{\tilde{r}};$$

z tego równania, mając dany stosunek $\frac{\tilde{r}}{\tilde{r}}$, moglibyśmy wyznaczyć kąt α .

Przypuśćmy, że znaleźliśmy α .

W ogólnym równaniu /23/, dającym wysokość metacentryczną

$$m = \frac{J_o}{V} - C,$$

podstawmy na

$$V = L r^2 (\alpha - \frac{1}{2} \sin 2\alpha); \text{ na } J_o = \frac{1}{12} L (2 r \sin \alpha)^3$$

i na

$$C = \frac{2}{3} \cdot \frac{r \cdot \sin^3 \alpha}{\alpha - \frac{1}{2} \sin 2\alpha};$$

wówczas

$$m = \frac{\frac{1}{12} L (2 r \sin \alpha)^3}{L r^2 (\alpha - \frac{1}{2} \sin 2\alpha)} - \frac{\frac{2}{3} r \cdot \sin^3 \alpha}{\alpha - \frac{1}{2} \sin 2\alpha}.$$

Po sprowadzeniu prawej strony do wspólnego mianownika znajdziemy, że $m = 0$; więc metacentrum upada na środek ciężkości S przy każdej wartości α .

Zatem równowaga cylindra pływającego jest równowagą obojętną.

Na przykładzie tym poznajemy, że nieraz prędzej

i bardziej przekonująco dochodzimy do wyniku, stosując metodę geometryczną niż metodę analityczną.

Przykład powyższy może nastroczyć jeszcze pytanie, jak głęboko zanurzy się w cieczy cylinder jednorodny o ciężarze właściwym γ_1 .

Odpowiedź sprowadza się do znalezienia środkowego kąta 2α z otrzymanego wyżej równania:

$$\alpha - \frac{1}{2} \sin 2\alpha = \frac{\pi \gamma_1}{\gamma}.$$

Rozwiązanie równań tego rodzaju nie należy do prostych.

Pokażemy, jak rozwiązanie takiego równania można ułatwić sposobem wykreślnym. Oznaczmy prawą stronę równania $\frac{\pi \gamma_1}{\gamma}$ przez y . Równanie przybierze postać:

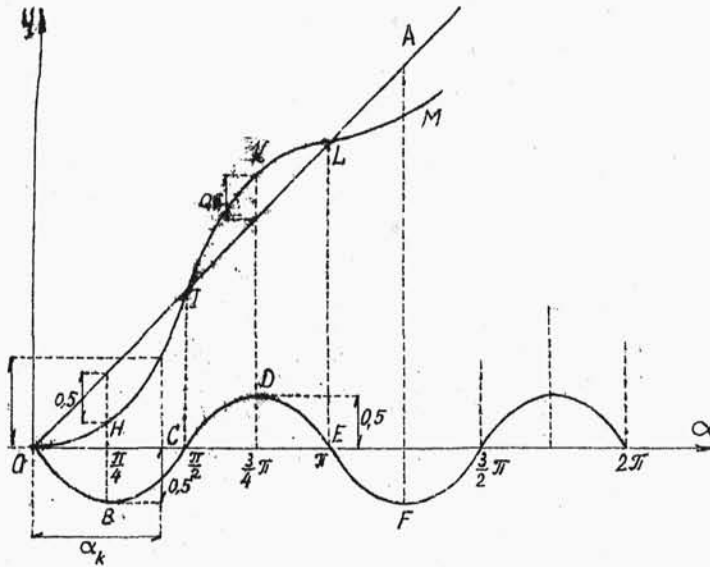
$$y = \alpha - \frac{1}{2} \sin 2\alpha.$$

Ponieważ y składa się z dwóch wyrazów: α i $-\frac{1}{2} \sin 2\alpha$ możemy rozbić dane równanie na dwa:

$$y_1 = \alpha; \quad y_2 = -\frac{1}{2} \sin 2\alpha \quad \text{tak, iż} \quad y = y_1 + y_2$$

Równanie $y_1 = \alpha$ oznaczać będzie linię prostą; obierzmy osi α i y i przyjmijmy jednakową skalę dla odcinków odkładanych na obydwóch osiach. Wtedy równanie $y_1 = \alpha$ będzie równaniem prostej, przechodzącej przez początek O i pod kątem 45° do osi α . Jest to

prosta OA /rys.44/. Równanie drugie $y_2 = -\frac{1}{2}\sin 2\alpha$ jest równaniem sinusoidy. Krzywą tę wykreślimy z kil-



rys.44.

ku punktów. Odłożymy na osi α wartości: $0, \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}; \frac{3}{4}\pi; \pi, \dots, \frac{3}{2}\pi, \dots, 2\pi$ i t.d.; odpowiednie wartości y_2 będą: $0; -\frac{1}{2}; 0; +\frac{1}{2}; 0$ i t.d. Odłożymy te wartości y_2 na stosownych rzędnych, zachowując obraną skalę. Otrzymamy szereg punktów O, B, C, D, E, F, \dots ; przy pomocy tych punktów możemy wykreślić w przybliżony sposób sinusoidę. Na rysunku ta krzywa jest uwidoczniona: $OBCDEF$. Jeżeli teraz rzędne y_1 i y_2 dodamy razem, zachowując znaki, otrzymamy

krzywą przypominającą rozciągniętą sinusoidę $OHKLM$. Czyli rzędne tej krzywej dają wartości y . W naszym zadaniu $y = \frac{\pi \tilde{r}}{\tilde{r}}$; znając stosunek $\frac{\tilde{r}}{\tilde{r}}$ znajdziemy li - czbową wartość y . Niech $\frac{\pi \tilde{r}}{\tilde{r}} = k$; wówczas na osi y odkładamy odcinek $= k$ i szukamy przy jakim α , y otrzy - ma wartość k . Będzie to wartość α_k . Jeżelibyśmy chcieli oznaczyć zupełnie dokładną wartość na α , na - leżałoby uciec się do pomocy tablic i szeregiem prób znaleźć wartość α z dowolną dokładnością, ope - rując już tylko w zupełnie bliskich granicach kąta α_k znalezionej wykreślnie.

Zrozumieliśmy jest, że wykonany wykres może słu - żyć do znajdowania α z równania $\alpha - \frac{1}{2} \sin 2\alpha = k$ przy zmiennych wartościach wyrazu k .

Z równania, otrzymanego powyżej: $\alpha - \frac{1}{2} \sin 2\alpha = \pi \frac{\tilde{r}}{\tilde{r}}$, znajdziemy, że $\frac{\tilde{r}}{\tilde{r}} = \frac{2\alpha - \sin 2\alpha}{2\pi}$. Jeśli cylinder ma pływać, kąt α powinien być

$$\pi > \alpha > 0$$

Naprz. niech $\alpha = 60^\circ = \frac{\pi}{3}$, wtedy:

$$\frac{\tilde{r}}{\tilde{r}} = \frac{\frac{2}{3}\pi - \sin 120^\circ}{2\pi} = \frac{\frac{2}{3}\pi - 0,866}{2\pi} = 0,195.$$

86. PRZYKŁAD XII. /rys.45/. Niech będzie ciało pływające w postaci półcylindra o promieniu r , dłu -

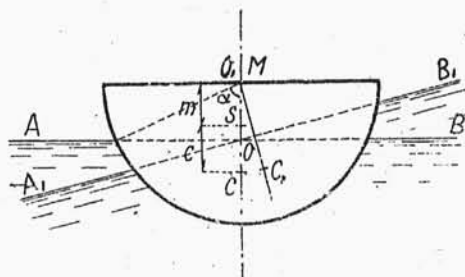
gości L i o ciężarze właściwym γ .

Przed wszystkim ustalmy zanurzenie ciała; otrzymamy to z przyrównania ciężaru ciała do wyporu.

Ciężar ciała

$$G = \frac{1}{2} \pi r^2 L \gamma.$$

Wypór, jak w poprzednim przykładzie:



rys.45.

$$W = r^2 \left(\alpha - \frac{1}{2} \sin 2\alpha \right) L \gamma$$

Stąd otrzymujemy zależność:

$$\frac{\gamma}{\gamma} = \frac{2\alpha - \sin 2\alpha}{\pi}.$$

Jak określić α z tego równania przy zadanym stosunku $\frac{\gamma}{\gamma}$ było wskazane w przykładzie poprzednim.

Znajdźmy teraz położenie metacentrum M .

Jak wiemy, odległość M od S obliczymy z równania /23/

$$m = \frac{J_0}{V} - c$$

W naszym przykładzie

$$J_0 = \frac{1}{12} L (2r \sin \alpha)^3 = \frac{2}{3} L r^3 \sin^3 \alpha$$

$$V = r^2 L \left(\alpha - \frac{1}{2} \sin 2\alpha \right); \quad c = \overline{OC} - \overline{OS}.$$

$$\overline{OC} = \frac{2}{3} \cdot \frac{r \sin^3 \alpha}{\alpha - \frac{1}{2} \sin 2\alpha} ; \quad \overline{OS} = \frac{2}{3} \cdot \frac{r}{\frac{\pi}{2} - 0} = \frac{4}{3} \cdot \frac{r}{\pi} ;$$

Zatem

$$C = \frac{2}{3} \cdot \frac{r \sin^3 \alpha}{\alpha - \frac{1}{2} \sin 2\alpha} - \frac{4}{3} \cdot \frac{r}{\pi} ;$$

po podstawieniu tych wartości w równanie /23/, otrzymamy: $m = \frac{4}{3} \cdot \frac{r}{\pi} .$

Stąd wnioskujemy, że w danym przypadku metacentrum upadnie w środek cylindra, co, zresztą, można otrzymać prędzej rozważając zagadnienie sposobem geometrycznym.

87. PRZYKŁAD XIII. Niech będzie ciało w postaci jednorodnego prostopadłościanu, o wymiarach w przekroju h i b , długości L i ciężarze właściwym γ . Znaleźć warunki równowagi stałej takiego pływającego prostopadłościanu /rys.46/.

Głębokość zanurzenia Z , znajdziemy z równania:

$$bhL\gamma = bzL\gamma ,$$

albo

$$h\gamma = z\gamma ,$$

stąd

$$z_1 = h \cdot \frac{\sigma_1}{\sigma}$$

W równaniu /23/: $m = \frac{J_0}{V} - c$ podstawimy: na $J_0 = \frac{Lb^3}{12}$; na $V = bz_1L$ i na $c = \overline{O, S} - \overline{O, C} = \frac{1}{2}h - \frac{1}{2}z_1 = \frac{h-z_1}{2}$; wówczas otrzymamy:

$$m = \frac{Lb^3}{12bz_1L} - \frac{h-z_1}{2} = \frac{b^2}{12z_1} - \frac{h-z_1}{2}$$

podstawmy na $z_1 = h \cdot \frac{\sigma_1}{\sigma}$

$$m = \frac{b^2}{12h} \cdot \frac{\sigma}{\sigma_1} - \frac{h}{2} \left(1 - \frac{\sigma_1}{\sigma}\right) = \frac{h}{12} \left[\frac{b^2}{h^2} \cdot \frac{\sigma}{\sigma_1} - 6 \left(1 - \frac{\sigma_1}{\sigma}\right) \right]$$

Dla otrzymania równowagi stałej należy mieć $m > 0$, a to jest możliwe, kiedy $\frac{b^2}{h^2} \cdot \frac{\sigma}{\sigma_1} > 6 \left(1 - \frac{\sigma_1}{\sigma}\right)$; stąd otrzymujemy warunek:

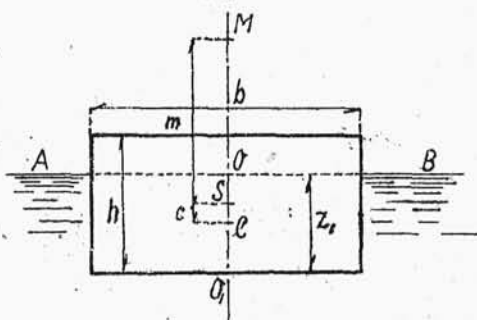
$$\frac{b}{h} > \sqrt{6 \frac{\sigma_1}{\sigma} \left(1 - \frac{\sigma_1}{\sigma}\right)}$$

rys.46.

Naprzykład dla drzewa sosnowego mamy $\frac{\sigma_1}{\sigma} = 0,6$; wówczas warunek równowagi stałej wymaga, aby

$$\frac{b}{h} > \sqrt{6 \cdot 0,6(1-0,6)}, \text{ albo } \frac{b}{h} > 1,2.$$

Jeśli $\frac{b}{h}$ będzie większe niż 1,2 będzie równowa-



ga stała, kiedy $\frac{b}{h}$ będzie $< 1,2$, wówczas będzie równowaga niestała. Przy $\frac{b}{h} = 1,2$ mamy równowagę obojętną; wtedy $m = 0$. Ciekawe: nie każda belka pływająca ma równowagę stałą.

88. PRZYKŁAD XIV. W przykładzie poprzednim przyjąć, że bal jest sosnowy i że $b = 8h$; znaleźć miejsce metacentrum /rys.47/.

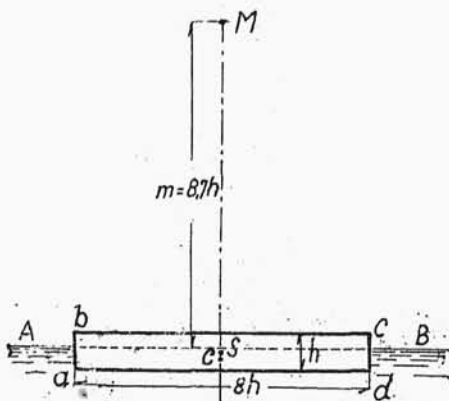
Z równania otrzymanego w poprzednim przykładzie:

$$m = \frac{h}{12} \left[\frac{b^2}{h^2} \cdot \frac{\gamma}{\gamma'} - 6 \left(1 - \frac{\gamma}{\gamma'} \right) \right]$$

po podstawieniu na $\frac{\gamma}{\gamma'} = 0,6$ i na $\frac{b}{h} = 8$ otrzymamy:

$$m = \frac{h}{12} \left[\frac{64}{0,6} - 6 \cdot 0,4 \right] = 8,7h.$$

Otrzymujemy wysoko położone metacentrum, co za-



rys.47.

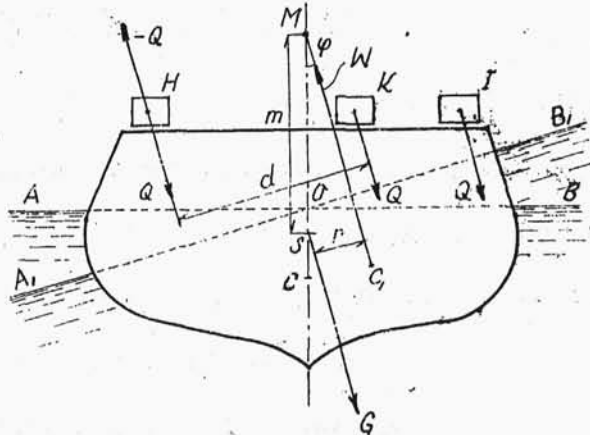
a lub d.

pewnia wielką stateczność pływającego ciała. Otrzymane położenie metacentrum jest tak długo, póki ciało przy pochyłaniu się nie zanurzy krawędzi górnych b lub c albo nie wynurzy krawędzi dolnych

W tych razach stateczność, oczywiście, będzie mniejsza.

89. PRZYKŁAD XV. Dla nowowypbudowanego statku nieraz znajdują metacentrum z pochylenia się statku przy niesymetrycznym obciążeniu jego.

Postępuje się wtedy w sposób taki: badany statek wyprowadzamy do basenu na zupełnie spokojną wodę, gdzie statek pływa. Na pokładzie ustawiamy symetrycznie w punktach H i I dwa znacznie-
sze i równe ciężary Q /rys.48/. Niech AB będzie płaszczyzną pływania.



rys.48.

Notujemy głębokość, do której statek zanurza się w wodzie. Znając przekroje i wymiary statku, możemy z zagłębienia statku oznaczyć wyporność V . Dalej określamy ciężar właściwy wody w basenie.

Następnie jeden z ciężarów naprz. Q , pomieszczony w punkcie H , przesuwamy po pokładzie do punk-