



tu  $K$ , na odległość  $d$  od  $H$ . Z powodu przesunięcia ciężaru statek się przechylił o pewien kąt, który możemy określić, posilkując się pionem, zawieszonym naprz. na maszcie. Niech to będzie kąt  $\varphi$ . Płasczyną pływania będzie wówczas  $A, B$ . Na podstawie danych: wyporności  $V$ , wartości ciężaru  $Q$ , odległości  $d$  i kąta  $\varphi$  należy znaleźć  $m$ , co pozwoli oznaczyć miejsce metacentrum.

Rozumujemy tak: jeżeli wyporność  $V$  znaleźliśmy, ciężar właściwy zaś wody =  $\gamma$ , otrzymamy ciężar statku  $G = V\gamma$ .

Nachylenie się statku spowodowane zostało przeniesieniem ciężaru  $Q$  z punktu  $H$  do punktu  $K$ . Poprzednio były dwa obciążenia po  $Q$  w punktach  $H$  i  $I$ . Zmianę w układzie obciążeń możemy sobie wyobrazić dokonaną w taki sposób: zostawmy ciężary  $Q$  w pierwotnym położeniu w punktach  $H$  i  $I$ ; przyłożmy do  $H$  siłę  $-Q$  i w punkcie  $K$  dodajmy nową siłę  $= Q$ . W ten sposób, właściwie, na statek dodatkowo działać będą dwie siły:  $-Q$  w punkcie  $H$  i  $+Q$  w punkcie  $K$ . Siły te tworzą parę, jak widzimy z rysunku, o momencie  $Q \cdot d$ .

Pod działaniem tej pary statek się nachylił, ale

tylko do pewnego stopnia, gdyż dalszemu pochyleniu się przeciwdziała para, wytworzona przez ciężar statku  $G$ , przyłożony do punktu  $S$  i wypór  $W=G$ , przyłożony do punktu  $C$ . Moment pary przeciwdziałającej dalszemu odchyłaniu się jest  $-G \cdot r$ . Zatem możemy napisać równanie:

$$Qd - Gr = 0$$

Ponieważ  $r = m\varphi$ , więc

$$Qd = Gm\varphi$$

a stąd

$$m = \frac{Qd}{G\varphi} \quad \text{albo} \quad m = \frac{Qd}{V\gamma\varphi} \quad /24/$$

W szczególnym przypadku, niech  $V = 12000 \text{ m}^3$ ;  
 $\gamma$  dla wody morskiej  $= 1030 \text{ kg/m}^3$ ,  $Q = 25 \text{ tonn}$ ;  
 $d = 5 \text{ m.}$ , kąt  $\varphi = 3/4^\circ$ .

$$\text{Wówczas} \quad m = \frac{25000 \cdot 5}{12000 \cdot 1030 \cdot \frac{\pi \cdot 0,75}{180}} = 0,722 \text{ m.}$$

90. Dla zorientowania się, jakie wartości w praktyce otrzymuje wysokość metacentryczna  $m$ , przytaczamy kilka liczb /dla statków załadowanych/.

Wielkie pasażerskie statki oceaniczne

$$m = 0,4 - 0,6 \text{ m.}$$

Statki towarowe mniejsze i większe

$$m = 0,4 - 0,5 \text{ m.}$$

Wielkie krążowniki	$m = 1,0m.$
Małe krążowniki	$m = 0,7m.$
Torpedowce	$m = 0,4 - 0,5m.$
Statki rzeczne	$m = 1,0 - 3,0m.$
Statki i łodzie /jachty/ żaglowe	$m = 1,0 - 1,2m.$
Statki żaglowe wymagają większej wartości $m$ z	

powodu parcia wiatru na żagiel.

Statki wojenne również otrzymują większe wartości  $m$ , aby można było celniej strzelać z armat okrętowych.

Duża wartość  $m$  dla statków nie jest pożądana, gdyż przez to wzrasta, powiedzmy, "sztywność i twardość" statku, wyrażająca się w silnych uderzeniach i krótkich wstrząśnieniach; te objawy dla pasażerów są przykre, również dla wytrzymałości różnych części statku nie są one obojętne.

Na tych przykładach, dotyczących badania równowagi stałej ciał pływających w związku z położeniem metacentrum, zatrzymamy się i przejdziemy do przykładów, uzupełniających ogólne uwagi o powierzchniach jednakowego ciśnienia.

91. W artykułach /29-31/ były omawiane ogólne

właściwości powierzchni jednakowego ciśnienia. W art. 32 mówiliśmy o kształcie powierzchni jednakowego ciśnienia w przypadku cieczy ciężkiej, zawartej w naczyniu o niewielkich /w porównaniu z długością promienia kuli ziemskiej/ rozmiarach.

Dla tego przypadku otrzymaliśmy, że wszystkie powierzchnie jednakowego ciśnienia w cieczy ciężkiej, zawartej w naczyniu o niewielkich wymiarach są p ł a s z c z y z n a m i p o z i o m y m i.

Linie sił, jak wynika z samego założenia, są pionowe. Możemy to sprawdzić, stosując równania różniczkowe linii sił /11/:

$$\frac{d\xi}{X} = \frac{d\eta}{Y} = \frac{dz}{Z} \quad /11/$$

W tych równaniach  $d\xi$ ,  $d\eta$ ,  $dz$  są różniczkami spółrzędnych linii sił,  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  są rzutami przyspieszenia wypadkowego:  $X=0$ ;  $Y=0$ ;  $Z=g$ .

Z równania /11/ otrzymamy właściwie dwa:

$$\frac{d\xi}{X} = \frac{dz}{Z} \quad \text{i} \quad \frac{d\eta}{Y} = \frac{dz}{Z},$$

stąd

$$d\xi \cdot Z = dz \cdot X \quad \text{oraz} \quad d\eta \cdot Z = dz \cdot Y,$$

wreszcie:

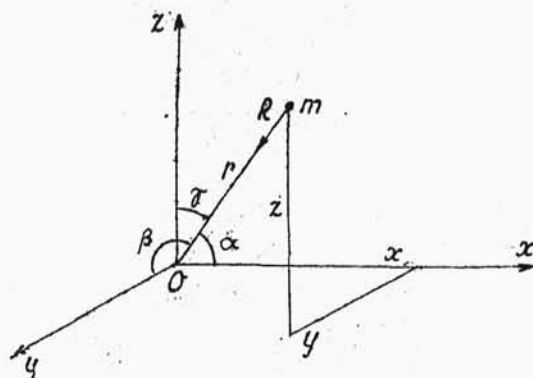
$$d\xi = 0; \quad d\eta = 0$$

a po scałkowaniu:

$$\xi = \text{const}_1 ; \quad \eta = \text{const}_2$$

Każde z tych równań wyznacza płaszczyznę: pierwsze - układ płaszczyzn prostopadłych do osi  $X$ , drugie - prostopadłych do osi  $Y$ ; oba zaś równania razem - wyznaczają proste przecięcia się tych płaszczyzn: będą to proste równoległe do osi  $Z$ , czyli proste pionowe, co się zgadza z poprzednią uwagą.

92. PRZYKŁAD XVI. Niech będzie woda zawarta w zbiorniku o znacznych wymiarach /wielkie jezioro, morze, ocean/. Siły objętościowe, działające na cząstki wody, są zwrócone do jednego punktu  $O$  /naprz. do środka ziemi/ i są zależne od odległości  $r$  cząstki od tego środka /rys.49/. Niech przyspieszenie siły objętościowej będzie  $R = f(r)$ .



rys.49.

Jaki będzie kształt powierzchni jednakowego ciśnienia?

Początek osi obieramy w środku /ziemi/; zaś osi jak na rysunku.

W równaniu powierzchni jednakowego ciśnienia

$$Xdx + Ydy + Zdz = 0 \quad /10/$$

należy podstawić

$$X = -R \cos \alpha,$$

$$Y = -R \cos \beta,$$

$$Z = -R \cos \gamma;$$

ponieważ spółrzędna  $x = r \cos \alpha$ , więc  $\cos \alpha = \frac{x}{r}$ ;

podobnież:  $y = r \cos \beta$ , więc  $\cos \beta = \frac{y}{r}$ ,

wreszcie  $z = r \cos \gamma$ , więc  $\cos \gamma = \frac{z}{r}$ ,

a wtedy

$$X = -R \cdot \frac{x}{r}; \quad Y = -R \cdot \frac{y}{r}; \quad Z = -R \cdot \frac{z}{r};$$

założyliśmy że  $R = f(r)$ , więc

$$- \frac{x}{r} \cdot f(r) dx - \frac{y}{r} f(r) dy - \frac{z}{r} f(r) dz = 0;$$

po skróceniu przez  $\frac{f(r)}{r}$ , które nie są zerami, otrzymamy:

$$x dx + y dy + z dz = 0,$$

a po scałkowaniu:  $x^2 + y^2 + z^2 = \text{const.}$

Z rysunku widzimy, że  $\text{const.} = r^2$  a więc:  $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ .

Jest to równanie powierzchni kulistej, której środek znajduje się w  $O$ . Mamy zatem, że w przypadku sił objętościowych, skierowanych do wspólnego środka, powierzchnie jednakowego ciśnienia są powierzchniami kulistymi. Jeśli przyjmiemy, że ciśnienie zewnętrzne /atmosferyczne/ we wszystkich miejscach powierzchni swobodnej będzie to samo, to powiemy, że i swobodna powierzchnia w naszym przypadku będzie powierzchnią kulistą. Stwierdzamy dalej, że kształt powierzchni jednakowego ciśnienia w danym przypadku nie zależy od kształtu funkcji  $f$ .

-----

93. Przy sposobności znajdziemy w poprzednim przypadku ciśnienie cieczy w którymkolwiek punkcie, jeśli wiemy, że w danym punkcie  $\alpha$  /naprz. na swobodnej powierzchni/ jest ciśnienie  $p_\alpha$ .

Z ogólnego równania /3/

$$dp = \frac{\gamma}{g}(Xdx + Ydy + Zdz)$$

po scałkowaniu otrzymamy

$$p = p_\alpha + \frac{\gamma}{g} \int_{\alpha}^{(x,y,z)} (Xdx + Ydy + Zdz).$$



Poprzednio otrzymaliśmy, że

$$\begin{aligned} X &= -\frac{R_x}{r} = -\frac{f(r)}{r} \cdot x \\ Y &= -\frac{R_y}{r} = -\frac{f(r)}{r} \cdot y \\ Z &= -\frac{R_z}{r} = -\frac{f(r)}{r} \cdot z \end{aligned}$$

wtedy:

$$p = p_a - \frac{\gamma}{g} \int_a^{(x,y,z)} \frac{f(r)}{r} (x dx + y dy + z dz)$$

ponieważ  $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ , więc

$$x dx + y dy + z dz = r dr$$

zatem:

$$p = p_a - \frac{\gamma}{g} \int_a^{(x,y,z)} f(r) dr \quad /25/$$

Jeśli byśmy mieli zadaną funkcję  $f(r)$ , wtedy moglibyśmy przystąpić do całkowania.

94. Niech postać funkcji tej będzie dana taka:

$$f(r) = \frac{c}{r^2} ; \text{ wtedy}$$

$$\int_a^{(x,y,z)} f(r) dr = c \int_a^{(x,y,z)} \frac{dr}{r^2} = \left[ -\frac{c}{r} \right]_a^{(x,y,z)}$$

równanie poprzednie zamieni się w następujące:

$$p = p_a + \frac{\gamma}{g} \left( \frac{c}{r} \right)_a^{(x,y,z)} = p_a + \frac{\gamma c}{g} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r_a} \right) \quad /26/$$

gdzie  $r_a$  jest promieniem punktu  $\alpha$ .

Jeśli by tu była mowa o kuli ziemskiej /będącej w stanie spoczynku/, zaś punkt  $\alpha$  byłby obrany

na powierzchni ziemi w odległości  $r_a$  od środka ziemi, naprz. w odległości od środka  $r = \frac{1}{2} r_a$ , otrzymalibyśmy

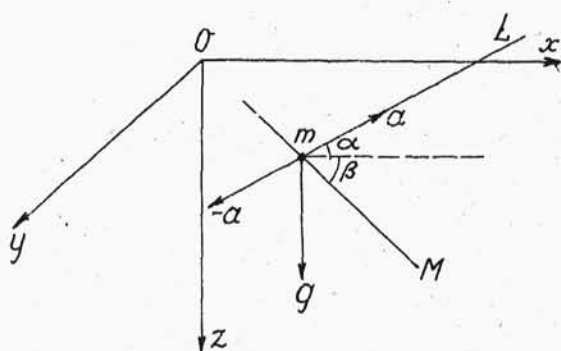
$$\rho = \rho_a + \frac{\gamma_c}{g r_a}, \text{ a więc } > \rho_a$$

Gdyby punkt ten był obrany tuż przy środku ziemi, czyli kiedy  $r=0$ : wówczas ciśnienie tuż przy środku ziemi

$$\rho = \rho_a + \frac{\gamma_c}{g} \left( \frac{1}{0} - \frac{1}{r_a} \right) = \infty.$$

#### 95. PRZYKŁAD XVII.

Naczynie, napełnione cieczą ciężką, porusza się wzdłuż linii prostej z zadaniem przyspieszeniem  $a$ /rys. 50/. Obieramy osi współrzędnych, połączonych z naczyniem, w ten sposób, że oś  $x$  i  $y$  leżą w płaszczyźnie poziomej, oś zaś  $z$  jest skierowana pionowo w dół.



rys.50.

Dalej, niech zadane przyspieszenie  $a$  znajduje się w płaszczyźnie  $xOz$ , tworząc z osią  $x$  kąt  $\alpha$ .

Według teorii ruchu względnego, lub w szczególnym przypadku spoczynku względnego, jeśli mamy napisać równanie ruchu lub równanie równowagi, należy przyjąć, że na poruszający się punkt działają prócz sił istotnie przyłożonych jeszcze siła fikcyjna uzupełniająca, t.j. siła równa, lecz odwrotnie skierowana do siły unoszenia. Siłą, istotnie działającą na dowolną cząstkę cieczy w naczyniu naszym będzie siła ciężkości, nadająca przyspieszenie  $g$ , skierowane pionowo w dół. Siła unoszenia cząstki jest to siła, która nadaje cząstce przyspieszenie wzdłuż prostej  $L$ . Siłą uzupełniającą, wobec powyższego, będzie siła, która byłaby w stanie nadać cząstce przyspieszenie  $-\alpha$ , t.j. odwrotnie skierowane w porównaniu z  $\alpha$  jednak wzdłuż tej samej prostej  $L$ .

Rozpatrujemy więc cząstkę cieczy, jak gdyby pozostającą w stanie spoczynku bezwzględnego pod działaniem sił, mogących nadać przyspieszenie  $g$  i  $-\alpha$ . Po tym wyjaśnieniu przystępujemy do równania /10/:

$$Xdx + Ydy + Zdz = 0$$

Rzuty wypadkowego przyspieszenia na osi  $x, y, z$  otrzymują się z sumy rzutów przyspieszeń składowych

na te trzy osi.

		daje rzuty na osi		
		$x$	$y$	$z$
Przyspieszenie	$g$	0	0	$g$
	$-a$	$-a \cos \alpha$	0	$+a \sin \alpha$

a zatem  $X = 0 - a \cdot \cos \alpha$

$$Y = 0$$

$$Z = g + a \cdot \sin \alpha$$

Wobec tego równanie powierzchni jednakowego ciśnienia otrzyma postać:

$$-a \cdot \cos \alpha \cdot dx + (g + a \cdot \sin \alpha) dz = 0$$

a po scałkowaniu

$$-a \cdot \cos \alpha \cdot x + (g + a \cdot \sin \alpha) z = C$$

Jest to równanie, które w osiach  $x, y, z$  oznacza płaszczyznę równoległą do osi  $y$ .

Nadając różne wartości na  $C$  otrzymamy szereg płaszczyzn do siebie równoległych i równoległych do osi  $y$ .

Płaszczyzna ta, w przecięciu się z płaszczyzną  $xOz$  daje ślad w postaci prostej, której równanie w osiach  $x, y, z$  jest takie samo, jak i powyższe:

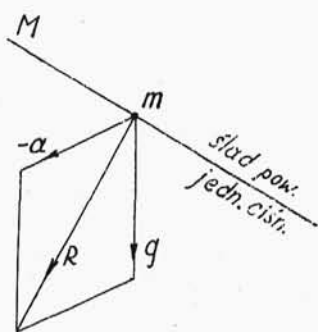
$$-a \cdot \cos \alpha \cdot x + (g + a \cdot \sin \alpha) z = C$$



Powiemy więc, że prosta  $M$ , a zatem płaszczyzna jednakowego ciśnienia jest prostopadła do wypadkowego przyspieszenia.

Ten, zresztą, wynik można było przewidzieć, gdybyśmy wzięli pod uwagę własność powierzchni jednakowego ciśnienia, przytoczoną w art.30 punkt d/.

96. Zadanie poprzednie można było rozwiązać drogą wykreślną, korzystając z własności powierzchni stałego ciśnienia, o czym była mowa w art.30 punkt d/, a o czym przed chwilą przypomnieliśmy.



rys.52.

Postępujemy tak: na cząstkę  $m$  /rys.52/ działają: siła rzeczywista, nadająca przyspieszenie  $g$  i siła uzupełniająca, zdolna nadać przyspieszenie  $-\alpha$ . Dodajmy wy-

kreślnie te dwa przyspieszenia. Otrzymujemy przyspieszenie wypadkowe  $R$ .

Poprowadźmy teraz przez punkt  $m$  prostą  $M$  prostopadłą do  $R$ , otrzymamy ślad powierzchni jednakowego ciśnienia na płaszczyźnie  $xOz$ ; z tego śladu