

PARCIE CIENKIEGO SWOBODNEGO STRUMIENIA CIECZY
DOSKONAŁEJ NA POWIERZCHNIĘ.

340. Parcie, wspomniane w nagłówku, znajdziemy, korzystając z twierdzenia, będącego podstawą dynamiki, które tu w krótkich zdaniach przypominamy: punkt materialny pozostaje w spoczynku, albo porusza się ruchem jednostajnym i prostoliniowym tak długo, dopóki nie zacznie nań działać jakakolwiek siła. Zmiana prędkości pod względem wartości, czy też zmiana kierunku prędkości, czy też jednoczesna zmiana kierunku i wartości prędkości, jest oznaką, że na ten punkt zaczęła działać siła.

Wartość siły jest równa iloczynowi z masy punktu i przyspieszenia; kierunek działania siły przypisujemy zgodny z kierunkiem zmiany prędkości.

Zależność powyższą wyrazimy równaniem

$$\overline{P} = m \cdot \frac{d\overline{v}}{dt}$$

gdzie \overline{P} , $d\overline{v}$ są to: wektor siły i wektor przynostu prędkości w czasie dt . Z tego zasadniczego równania otrzymamy:

$$m \cdot d\overline{v} = \overline{P} \cdot dt$$

/a/

Iloczyn masy punktu przez prędkość nazywamy ilością ruchu punktu materialnego; iloczyn masy punktu przez przyrost prędkości nazywamy przyrostem lub zmianą ilości ruchu punktu w czasie dt ; iloczyn siły P i przyrostu czasu dt nazywamy popędem siły w czasie dt .

Przyjmując powyższe określenia, wypowiemy treść równania /a/ jako twierdzenie: zmiana ilości ruchu punktu materialnego w czasie dt równa się co do wartości i kierunku popędowi siły, wywołującej tę zmianę prędkości w tym samym czasie.

Jeżeli zmiana prędkości zachodzić będzie tylko pod względem wartości /kiedy zatem kierunek ruchu pozostaje bez zmiany/, albo też jeżeli rozpatrujemy zmianę rzutu prędkości na obraną oś, wówczas równanie /a/ przybierze postać:

$$m \cdot dv = P \cdot dt \quad /b/$$

gdzie v i P są prędkością i siłą w ruchu prostoliniowym albo innym razem są rzutami prędkości i siły w

ruchu krzywoliniowym.

Równanie /b/ wypowiemy w taki sposób:

Zmiana ilości ruchu punktu w czasie dt w kierunku pewnej prostej /osi/ równa się popędowi siły w tymże czasie i w kierunku tejże osi.

Weźmy teraz układ punktów o masach $m_1, m_2 \dots m_n$, z których każdy porusza się z odpowiednią prędkością: pierwszy punkt z prędkością v_1 , drugi z prędkością v_2 , trzeci z v_3 i t.d. ostatni z v_n . Pod działaniem sił zewnętrznych, przyłożonych do poszczególnych punktów układu /sił $P_1, P_2, P_3 \dots P_n$ /, następują zmiany prędkości poszczególnych punktów w czasie dt o $dv_1, dv_2 \dots dv_n$.

Zwróćmy teraz uwagę, że na każdy punkt układu prócz siły zewnętrznej P działają siły wewnętrzne, jako oddziaływania pozostałych punktów, związanych ze sobą we wspólny układ. Np. na punkt pierwszy działają siły pochodzące od punktu 2, 3 ... n : $S_{12}, S_{13} \dots S_{1n}$; na punkt drugi siły: $S_{21}, S_{23}, S_{24} \dots S_{2n}$ i t.d. na punkt ostatni siły $S_{n1}, S_{n2}, S_{n3} \dots S_{n(n-1)}$.

Zastosujmy dla każdego oddzielnie rozpatrywane

go punktu równanie /b/, obierając pewną oś rzutów; niech to będzie dowolna oś x . Oznaczmy rzuty przyrostów prędkości na tę oś przez $dv_{1x}, dv_{2x}, dv_{3x} \dots dv_{nx}$ oraz rzuty sił zewnętrznych przez $P_{1x}, P_{2x}, P_{3x} \dots P_{nx}$ i sił wewnętrznych przez $(S_{12})_x, (S_{13})_x, \dots (S_{1n})_x, (S_{21})_x, (S_{23})_x \dots$

Wówczas dla punktu pierwszego napiszemy:

$$m_1 \cdot dv_{1x} = [P_{1x} + (S_{12})_x + (S_{13})_x + \dots (S_{1n})_x] dt$$

dla punktu drugiego:

$$m_2 \cdot dv_{2x} = [P_{2x} + (S_{21})_x + (S_{23})_x + \dots (S_{2n})_x] dt$$

dla punktu trzeciego:

$$m_3 \cdot dv_{3x} = [P_{3x} + (S_{31})_x + (S_{32})_x + \dots (S_{3n})_x] dt \quad \text{i t.d.}$$

dla punktu ostatniego:

$$m_n \cdot dv_{nx} = [P_{nx} + (S_{n1})_x + (S_{n2})_x + \dots (S_{n(n-1)})_x] dt$$

Dodajmy wszystkie te równania stronami.

Ponieważ w układzie punktów siły wewnętrzne występują zawsze p o d w i e , mając wspólne linie działania, jednakowe wartości i kierunki przeciwnie, zatem siły S przy sumowaniu zniosą się. Wówczas otrzymamy:

$$m_1 \cdot dv_{1x} + m_2 \cdot dv_{2x} + \dots m_n \cdot dv_{nx} = (P_{1x} + P_{2x} + \dots P_{nx}) dt \quad 199$$

Lewą stronę równania /199/ nazwiemy zmianą ilości ruchu układu punktów w czasie dt w kierunku osi x ; prawą stronę równania tegoż nazwiemy sumą popędów sił

z e w n ę t r z n y c h w czasie dt w kierunku tejże osi x . Wypowiemy teraz twierdzenie:

Z m i a n a i l o ś c i r u c h u u k ł a -
d u p u n k t ó w w c z a s i e dt , w k i e -
r u n k u p e w n e j o s i r ó w n a s i ę s u -
m i e p o p ę d ó w s i ł z e w n ę t r z n y c h
w t y m ż e c z a s i e dt w k i e r u n k u t e j -
ż e o s i x .

Zwrócić należy z naciskiem uwagę na to, że w równaniu /199/ n i e m a w c a l e s i ł w e w -
n ę t r z n y c h, działających między punktami ukła-
du.

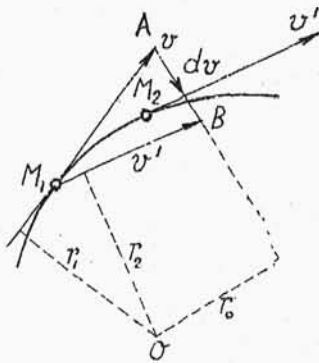
Wypowiedziane ostatnio twierdzenie służyć nam będzie do rozwiązywania wielu zagadnień, dotyczących parcia strumienia cieczy na powierzchnię.

341. Przypomnijmy jeszcze jedno twierdzenie z dynamiki o zmianie ilości ruchu, które w pewnych zagadnieniach da się korzystnie zastosować.

Niech będzie punkt M o masie m , który w pewnym momencie znajduje się na torze w miejscu M_1 /rys. 219/ i posiada tu prędkość v ; po bardzo krótkim czasie niech punkt przesunie się do M_2 i tu niech ma prędkość v' . Prędkość v' różni się od v ; zmiana ta zaszła pod

działaniem pewnej siły przez czas dt . Zmiane prędkości znajdziemy, jeśli od punktu M_1 poprowadzimy prostą równoległą do v' i odłożymy odcinek $M_1B = v'$. Jeżeli odcinek $M_1A = v$, wówczas odcinek AB będzie przyrostem /zmianą/ prędkości v w czasie dt , gdyż dodając do prędkości $v = M_1A$ odcinek AB , otrzymamy odcinek $M_1B = v'$.

Niech następnie będzie pewnym punkt O , względem



dem którego możemy wziąć

momenty statyczne boków

zamkniętego trójkąta M_1AB .

Niech r_1 będzie ramie-

niem odcinka M_1A , r_2 -

odcinka M_1B i r_0 - odcin-

ka AB .

rys.219.

Wówczas napiszemy:

$$M_1A \cdot r_1 + AB \cdot r_0 = M_1B \cdot r_2,$$

albo

$$v \cdot r_1 + dv \cdot r_0 = v' \cdot r_2,$$

albo jeszcze inaczej:

$$v' \cdot r_2 - v \cdot r_1 = dv \cdot r_0.$$

Pomnożmy obie strony równania przez m /masa pun-

ktu/ oraz prawą stronę podzielimy i pomnożymy przez dt , wtedy otrzymamy:

$$m \cdot v' r_2 - m v r_1 = m \cdot \frac{dv}{dt} \cdot dt \cdot r_0.$$

W prawej stronie $m \frac{dv}{dt}$ jest ta wartość siły, pod której działaniem zaszła zmiana prędkości o dv w czasie dt . Oznaczmy tę siłę przez P , wtedy równanie ostatecznie otrzyma postać:

$$m v' r_2 - m v r_1 = P dt \cdot r_0 \quad /200/$$

Lewą stronę równania możemy określić jako zmianę momentu statycznego ilości ruchu punktu w czasie dt względem O ; prawą stronę zaś jako moment popędu siły względem tegoż O w tym samym czasie dt .

Przyjmując te określenia, otrzymamy taką treść równania /200/:

Zmiana momentu statycznego ilości ruchu punktu w czasie dt względem punktu O równa się momentowi statycznemu popędu siły, działającej na punkt w tym samym czasie względem tegoż punktu O .

Łatwo też możemy otrzymać twierdzenie o momen-

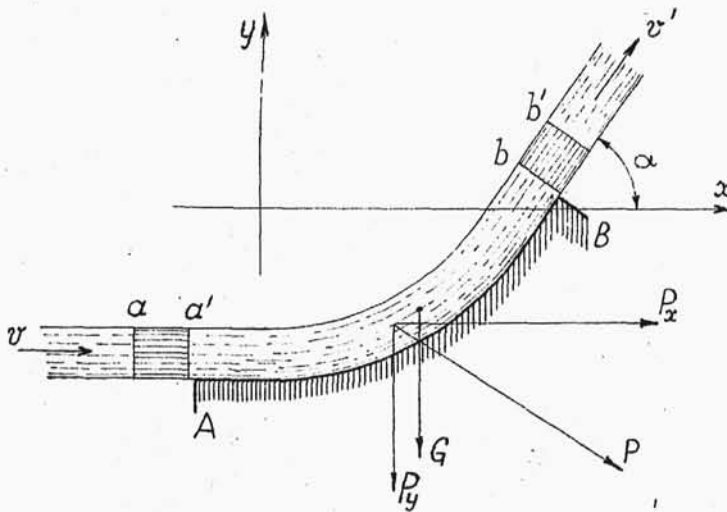
cie ilości ruchu układu punktów materialnych, wypowiadając je w sposób następujący:

Zmiana momentu statycznego ilości ruchu układu punktów w czasie dt względem punktu O równa się sumie momentów statycznych popędów sił zewnętrznych, działających na układ punktów w tym samym czasie i względem tegoż punktu O .

342. Na kilku przykładach pokażemy, jak można określić parcie strumienia na powierzchnię.

Niech będzie dana powierzchnia AB /rys.220/, na którą wpada strumień wody o wydatku $Q \frac{m^3}{sek}$ z prędkością $v \frac{m}{sek}$. Niech ten strumień po pewnym czasie opuszcza powierzchnię z prędkością v' . Strumień, płynąc po powierzchni AB , doznaje oddziaływania od tej powierzchni, co się uwidocznia w zmianie kierunku ruchu strumienia. Równocześnie strumień wywiera pewne oddziaływanie na tę powierzchnię. Oddziaływanie to nazywać będziemy parciem strumienia cieczy na daną powierzchnię.

Zadanie polegać będzie na znalezieniu parcia tego strumienia na zadaną powierzchnię AB .



rys.220.

Aby ułatwić rozwiązanie, przyjmijmy następujący układ osi współrzędnych do siebie prostopadłych: oś x obierzmy równoległe do prędkości strumienia przed wejściem na powierzchnię AB , oś y prostopadle do x , zwróconą w kierunku strzałki. Znajdźmy składowe P_x i P_y szukanego parcia w kierunku obranych osi x i y ; wówczas znajdziemy całe parcie

$$P = \sqrt{P_x^2 + P_y^2}$$

oraz kąty, które to parcie tworzy z osiami x, y z równań

$$\cos(P, x) = \frac{P_x}{P} \quad \text{oraz} \quad \cos(P, y) = \frac{P_y}{P}.$$

Zastosujmy teraz twierdzenie o zmianie ilości ruchu dla obranej części cieczy w kierunku jednej, a po tym drugiej osi /p.art.340/.

W tym celu rozpatrzmy część strumienia, zawartą w pewnej chwili między przekrojami α i b . Po bardzo małym okresie czasu dt strumień przesunie się, przy czym przekrój α zajmie położenie α' zaś przekrój b zajmie położenie b' .

Przekroje α i α' są tak obrane, że strumień cieczy w nich jeszcze nie doznał oddziaływania powierzchni AB , zaś przekroje b, b' są wzięte w tych miejscach, gdzie strumień już przeszedł doznawać oddziaływania powierzchni.

Wtedy możemy twierdzenie o zmianie ilości ruchu pewnej części cieczy zastosować do cieczy, zawartej na początku czasu dt między przekrojami α i b , zaś w końcu czasu dt - między przekrojami α' i b' , obliczając zmianę ilości ruchu raz względem osi x , drugi raz względem osi y . Obliczmy zmianę ilości ruchu względem osi x .

Jak wiemy, zmiana ilości ruchu pewnego układu względem dowolnej osi równa się końcowej ilości ruchu mniej początkowa ilość ruchu względem tejże osi.

Kończową ilość ruchu cieczy, zawartej między $\alpha'b'$ możemy uważać jako złożoną z ilości ruchu cieczy, zawartej między α' i b i z ilości ruchu cieczy, zawartej między b i b' .

Początkową zaś ilość ruchu możemy przyjąć złożoną z ilości ruchu cieczy, zawartej między α i α' oraz ilości ruchu cieczy, zawartej między α' i b . Odejmijmy od końcowej ilości ruchu początkową, i przyjmijmy, że mamy do czynienia z ruchem trwałym, wówczas znajdziemy, że zmiana ilości ruchu całej cieczy badanej w okresie czasu dt = ilości ruchu cieczy, zawartej między przekrojami b i b' , mniej ilość ruchu zawarta między przekrojami α i α' . Te zaś poszczególne ilości ruchu obliczymy w taki sposób: objętość cieczy między b i b' jest $= f'v'dt$, gdzie f' jest polem przekroju strumienia przy b . Ciężar tej cieczy $= f'v'dt \cdot \gamma$, zaś masa $f'v'dt \cdot \frac{\gamma}{g}$. Ponieważ prędkość cieczy w omawianym elemencie jest v' , a rzut tej prędkości na oś x jest $v' \cos \alpha$ gdzie przez α oznaczamy kąt odchylenia stru-

mienia przez powierzchnię/, więc ilość ruchu cieczy, zawartej między b i b' względem osi x jest równa:

$$f' \cdot v' \cdot dt \cdot \frac{\partial}{\partial y} \cdot v' \cdot \cos \alpha.$$

Ponieważ $Q = f' \cdot v'$, więc powyższą ilość ruchu możemy przedstawić inaczej:

$$Q \cdot dt \cdot \frac{\partial}{\partial y} \cdot v' \cdot \cos \alpha.$$

W podobny sposób znajdziemy ilość ruchu cieczy, zawartej między przekrojami α i α' . Będzie to

$$f \cdot v \cdot dt \cdot \frac{\partial}{\partial y} \cdot v$$

albo

$$Q \cdot dt \cdot \frac{\partial}{\partial y} \cdot v.$$

Zatem zmiana ilości ruchu =

$$= Q \cdot dt \cdot \frac{\partial}{\partial y} (v' \cos \alpha - v).$$

Na podstawie twierdzenia o zmianie ilości ruchu wiemy, że ta zmiana w czasie dt , w kierunku osi jest równa popędowi sił zewnętrznych, które na badaną ciecz działają, w tym samym kierunku osi x i w tym samym czasie.

Siłami zewnętrznymi są: 1/ Siła oddziaływania powierzchni AB na strumień = $-P$; /przez P oznaczamy szukane parcie strumienia na powierzchni; przyjmujemy tym czasem, że parcie P

jest zwrócone w kierunku dodatnich osi x i y ; zatem parcie powierzchni na strumień, które powinno być równe P , lecz odwrotnie skierowane, musimy oznaczyć przez $(-P)/$; 2/ Siła ciężkości, działająca na rozpatrywaną część strumienia i 3/ parcie atmosfery na zewnętrzną powierzchnię cieczy. Jeśli przyjmie-
my, że powierzchnia AB znajduje się w tej samej at-
mosferze, co i strumień, wówczas rzut parcia atmosfery na oś w dowolnym kierunku = 0.

Popęd siły $/-P/$ w kierunku osi x jest równy $-P_x \cdot dt$.
Co się tyczy popędu siły ciężkości, to go obliczymy w taki sposób:

Niech oś x będzie pozioma; ciężar rozpatrywanej części strumienia między przekrojami a i b niech będzie C ; przypuśćmy, że siła C jest prostopadła do osi x , zatem rzut C na oś x jest = 0 i popęd tej siły w kierunku osi również jest zero.

Siły P i C dają popęd w czasie dt w kierunku osi x tylko $-P_x \cdot dt$.

Równanie więc, napisane na zasadzie twierdzenia o zmianie ilości ruchu, otrzyma postać:

$$Q \cdot dt \cdot \frac{v}{g} (v' \cos \alpha - v) = -P_x \cdot dt,$$

albo po skróceniu przez dt :

$$P_x = Q \cdot \frac{\partial}{\partial t} (v - v' \cos \alpha) \quad /201/$$

W podobny sposób znajdziemy zmianę ilości ruchu badanej części strumienia w kierunku pionowej osi y .

Ilość ruchu końcowa =

$$= Q \cdot dt \cdot \frac{\partial}{\partial t} \cdot v' \sin \alpha.$$

Ilość ruchu początkowa = 0, gdyż rzut prędkości początkowej na oś y jest równy zeru.

Zatem zmiana ilości ruchu w czasie dt na oś y jest równa:

$$Q \cdot dt \cdot \frac{\partial}{\partial t} \cdot v' \sin \alpha.$$

Obliczmy teraz popędy sił $(-P)$ i C w tym samym czasie dt w kierunku osi y .

Popęd siły $(-P)$ jest równy $-P_y \cdot dt$; popęd siły C jest równy $-C \cdot dt$, a więc otrzymujemy równanie w postaci:

$$Q \cdot dt \cdot \frac{\partial}{\partial t} \cdot v' \sin \alpha = -P_y \cdot dt - C \cdot dt,$$

albo po skróceniu przez dt :

$$Q \cdot \frac{\partial}{\partial t} \cdot v' \sin \alpha = -P_y - C,$$

albo jeszcze inaczej:

$$P_y = -C - Q \cdot \frac{\partial}{\partial t} \cdot v' \sin \alpha \quad /202/$$

Całkowite parcie strumienia na powierzchnię znajdziemy:

$$P = \sqrt{P_x^2 + P_y^2} = \sqrt{Q^2 \frac{r^2}{g^2} (v - v' \cos \alpha)^2 + (C + Q \cdot \frac{r}{g} v' \sin \alpha)^2}$$

343. W szczególnym wypadku, kiedy AB /rys.220/ jest powierzchnią cylindryczną z tworzącą pionową, wówczas ciężar C tworzy z osiami x i y kąt 90° , zatem w równaniu /202/ wyraż C przepadnie; otrzymamy więc:

$$P_x = Q \cdot \frac{r}{g} (v - v' \cos \alpha) \quad /203/$$

$$P_y = -Q \cdot \frac{r}{g} \cdot v' \sin \alpha \quad /204/$$

$$P = \sqrt{\frac{Q^2 r^2}{g^2} (v - v' \cos \alpha)^2 + Q^2 \frac{r^2}{g^2} v'^2 \sin^2 \alpha}$$

albo inaczej

$$P = \frac{Q r}{g} \sqrt{v^2 + v'^2 - 2v \cdot v' \cos \alpha} \quad /205/$$

oraz

$$\cos(P, x) = \frac{v - v' \cos \alpha}{\sqrt{v^2 + v'^2 - 2v v' \cos \alpha}}; \quad \cos(P, y) = \frac{-v' \sin \alpha}{\sqrt{v^2 + v'^2 - 2v v' \cos \alpha}} \quad /206/$$

Stąd widzimy, że kąt między dodatnim kierunkiem siły P i osią y będzie $> 90^\circ$.

344. Załóżmy, że powierzchnia AB /Rys.220/ jest zupełnie gładka, a tworząca jej jest pionowa. Wtedy v' różnić się będzie od v tylko kierunkiem, gdyż parcie

powierzchni gładkiej, działając w każdym miejscu normalnie do strumienia, może zmienić tylko kierunek, nie zaś wartość prędkości. Inaczej rzecz będzie się przedstawiała wówczas, kiedy oś y będzie równoległa do ciężaru C , a tworząca powierzchni będzie pozioma. W tym przypadku siła ciężkości będzie musiała wpłynąć na wartość prędkości v , chyba że wysokość pionowa między A i B będzie bardzo mała.

Przyjmując założenie powyższe, że $v = v'$, otrzymamy:

$$P_x = Q \cdot \frac{\delta}{g} \cdot v (1 - \cos \alpha) \quad /207/$$

$$P_y = - \frac{Q \delta}{g} \cdot v \cdot \sin \alpha \quad /208/$$

$$P = \frac{Q \delta}{g} \cdot v \cdot \sqrt{2(1 - \cos \alpha)},$$

albo

$$P = \frac{Q \delta}{g} \cdot v \cdot 2 \sin \frac{\alpha}{2} \quad /209/$$

$$\cos(\beta, x) = \frac{1 - \cos \alpha}{\sqrt{2(1 - \cos \alpha)}} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}} = \sin \frac{\alpha}{2},$$

czyli że

$$\cos(P, x) = \cos(90 - \frac{\alpha}{2}), \text{ a więc } (P, x) = 90 - \frac{\alpha}{2}$$

Następnie

$$\cos(P, y) = -\frac{\sin \alpha}{\sqrt{2(1 - \cos \alpha)}} = -\sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$$

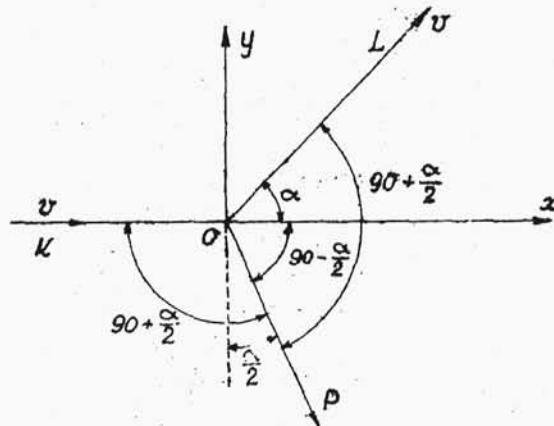
albo

$$\cos(P, y) = -\cos \frac{\alpha}{2} = \cos(180 - \frac{\alpha}{2}) ;$$

stąd

$$(P, y) = 180 - \frac{\alpha}{2} .$$

Widzimy stąd, że w przypadku, kiedy $v = v'$, kierunek parcia P /rys.221/ położy kąt KOL między odwróconym kierunkiem prędkości wejścia i kierunkiem prędkości zejścia strumienia z powierzchni.



rys.221.

345. Niech kąt $\alpha = \frac{\pi}{2} = 90^\circ$ /rys.222/; otrzymamy wtedy powierzchnię cylindryczną, która odchyła strumień o kąt prosty.

Wtedy

$$p_x = \frac{Q}{g} \cdot v \quad /210/$$

$$p_y = -\frac{Q}{g} \cdot v \quad /211/$$

$$P = \frac{Q}{g} \cdot v \cdot \sqrt{2} \quad /212/$$

$$\cos(p, x) = \frac{1}{\sqrt{2}}; \quad \cos(p, y) = -\frac{1}{\sqrt{2}};$$

$$\cos(p, x) = \cos(45^\circ); \quad \cos(p, y) = -\cos 45^\circ = \cos(180^\circ - 45^\circ).$$

stąd

$$(p, x) = 45^\circ; \quad (p, y) = 180^\circ - 45^\circ,$$

czyli, że kierunek siły P jest równoległy do prostej połówiącej kąt prosty, zawarty między ujemną osią x i dodatnią osią y .

