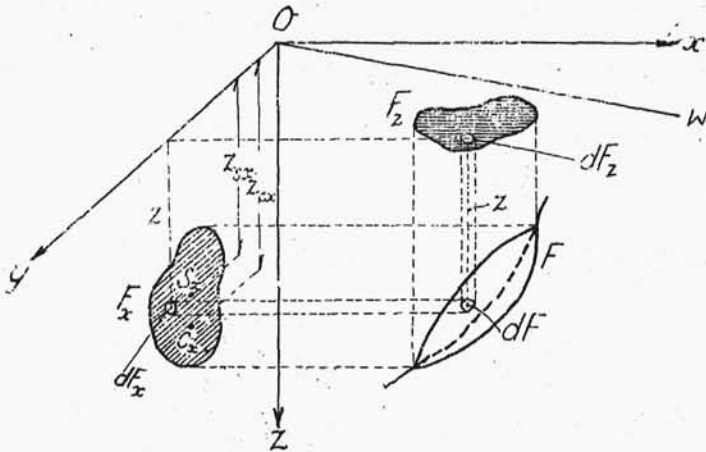


dzie ten sam, co poprzednio. Parcie wypadkowe będzie równe ciężarowi cieczy zawartej w bryle  $A, A', B, B'$ , przy czym  $h$  jest różnicą poziomów cieczy z prawej i lewej strony ściany  $AB$ .

### 55. PARCIĘ CIECZY NA POWIERZCHNIĘ KRZYWĄ.

Niech będzie zadana dowolna powierzchnia krzywa o polu  $F$ , stanowiąca, przypuśćmy, część ścianki naczynia, napełnionego cieczą /rys.25/. Znaleźć parcie cieczy na pole  $F$ . - Osi współrzędnych przyjmiemy, jak zwykle:  $x$  i  $y$  niech będą w płaszczyźnie poziomej, leżącej na swobodnej powierzchni cieczy, oś  $Z$  niech będzie pionowa, zwrócona w dół.



rys.25.

Obierzmy którykolwiek element  $dF$  na danej po-

wierzchni  $F$ . Niech element ten znajduje się na głębokości  $Z$  pod swobodną powierzchnią. Ciśnienie cieczy w tym miejscu, gdzie się znajduje element  $dF$ , niech będzie  $p$ . Ciśnienie to jest normalne do elementu  $dF$  i zwrócone od cieczy na zewnątrz.

Parcie na obrany element  $= dP = p \cdot dF$ , również jest do elementu normalne. Obierzmy inny element na powierzchni  $F$ ; otrzymamy dla niego parcie, na ogół mówiąc, nie tylko innej wartości, lecz i innego kierunku. Jeśli znajdziemy w ten sposób parcia na wszystkie elementy, wchodzące w skład powierzchni  $F$ , otrzymamy układ elementarnych parć o różnych kierunkach. Taki układ nie da się sprowadzić, ogólnie mówiąc, do jednej wypadkowej, lecz do dwóch sił mijających się, lub do jednej siły i pary sił. Zatem w danym przypadku nie zawsze można będzie mówić o wypadkowej parć elementarnych, ani też o środku parcia.

56. Określmy jednak bliżej działanie od strony cieczy na powierzchnię  $F$ . Powiedzieliśmy już, że na dowolny element  $dF$ , wzięty na głębokości  $Z$  pod swobodną powierzchnią, działa elementarne parcie

$$dP = p dF.$$

Ponieważ poszczególne parcia elementarne są różnych kierunków, więc możnaby je dodawać geometrycznie.

Byłoby to jednak postępowanie zawiłe i nie zawsze prowadzące w ogólnym przypadku do wyniku praktycznego.

Dogońniej będzie uskutecznić dodawanie elementarnych różnokierunkowych parć w sposób następujący:

Każde elementarne parcie rozłożymy na trzy kierunki: równoległe do osi  $ox, oy, oz$  /rys.25/ i dopiero wtedy składowe jednokierunkowe dodamy; otrzymamy wówczas trzy wypadkowe równoległe odpowiednio do osi współrzędnych. Z tych trzech wypadkowych będzie łatwiej poznać działanie cieczy na powierzchnię.

Tą właśnie drogą postąpimy.

Elementarne parcie, jak widzieliśmy,  $dP = p dF$ .  
Ponieważ  $p = p_a + \gamma z$ , więc  $dP = (p_a + \gamma z) \cdot dF$ .

Rozłożmy to parcie w kierunku trzech osi, oznaczając jego rzuty przez  $dP_x, dP_y, dP_z$ ; otrzymamy:  
w kierunku osi  $x \dots dP_x = (p_a + \gamma z) \cdot dF \cdot \cos(p, x)$

w kierunku osi  $y \dots dF_y^p = (p_\alpha + \gamma z) dF \cdot \cos(p, y)$

" " "  $z \dots dF_z^p = (p_\alpha + \gamma z) dF \cdot \cos(p, z)$

Kąt utworzony przez kierunek ciśnienia  $p$  i przez oś  $x$  jest ten sam, co i kąt, mierzący pochylenie płaszczyzny prostopadłej do kierunku  $p$ , a więc elementu  $dF$  i płaszczyzny prostopadłej do osi  $x$ , a więc płaszczyzny  $yOz$ , co oznaczymy

$$\angle(p, x) = \angle(dF, yOz)$$

w podobny sposób otrzymamy, że

$$\angle(p, y) = \angle(dF, xOz)$$

oraz

$$\angle(p, z) = \angle(dF, xOy)$$

Wówczas

$$dF_x^p = (p_\alpha + \gamma z) dF \cdot \cos(dF, yOz)$$

$$dF_y^p = (p_\alpha + \gamma z) dF \cdot \cos(dF, xOz)$$

$$dF_z^p = (p_\alpha + \gamma z) dF \cdot \cos(dF, xOy)$$

Dostrzegamy, że  $dF \cdot \cos(dF, yOz)$  jest rzutem  $dF$  na płaszczyznę  $yOz$ , prostopadłą do osi  $x$ ; możemy więc oznaczyć:

$$dF \cdot \cos(dF, yOz) = dF_x$$

w podobny sposób  $dF \cdot \cos(dF, xOz) = dF_y$

$$dF \cdot \cos(dF, xOy) = dF_z$$

Wtedy

$$\begin{aligned} dP_x &= (p_a + \gamma z) dF_x \\ dP_y &= (p_a + \gamma z) dF_y \\ dP_z &= (p_a + \gamma z) dF_z \end{aligned}$$

57. Znajdźmy rzuty parć elementarnych na wszystkie elementy, tworzące powierzchnię  $F$ , na oś  $x$  i dodajmy je; otrzymamy wypadkową rzutów równoległych do osi  $x$  :

$$P_x = \int_F (p_a + \gamma z) dF_x = \int_F p_a dF_x + \int_F \gamma z dF_x = p_a F_x + \gamma \int_F z dF_x$$

gdzie  $F_x$  jest rzutem powierzchni  $F$  na płaszczyznę  $yOz$ .

W ostatnim wyrazie  $\int_F z dF_x$  jest sumą momentów rzutów elementarnych pól  $dF$  na płaszczyznę  $yOz$  względem osi  $y$ . Jeśli przez  $z_{sx}$  oznaczmy odległość środka ciężkości rzutu pola  $F_x$  od swobodnej powierzchni, wtedy możemy napisać, że

Wówczas

$$\int_F z dF_x = F_x \cdot z_{sx} .$$

$$P_x = p_a F_x + \gamma F_x \cdot z_{sx} \quad /17/$$

Gdybyśmy w ten sam sposób postępowali z rzutami elementarnych parć w kierunku osi  $y$ , otrzymalibyśmy podobny wynik:

$$P_y = p_a F_y + \gamma F_y \cdot z_{sy} \quad /18/$$

Dostrzeżemy łatwo, że kształt wzoru na oznaczenie rzutu parcia wypadkowego pozostanie taki sam jakakolwiek będzie oś, względem której szukamy rzutu, byleby oś ta była w płaszczyźnie poziomej. Jeżeli obierzemy jakąkolwiek oś  $W$  w płaszczyźnie poziomej, /rys.25/, wówczas i dla tej osi otrzymamy, zachowując poprzednie znakowanie:

$$P_W = p_a \cdot F_W + \gamma \cdot F_W \cdot z_{SW} \quad /19/$$

Na zasadzie tych wzorów wypowiemy twierdzenie: rzut parcia cieczy na dowolną powierzchnię w kierunku jakiegokolwiek OSI POZIOMEJ jest równy ciśnieniu zewnętrznemu na rzut ciśnionego pola na płaszczyznę prostopadłą do obranej osi, zwiększonemu o ciężar słupa cieczy, którego podstawą jest wspomniany rzut, a wysokością odległość środka ciężkości tego rzutu od swobodnej powierzchni.

Łatwo zastosować powyższe wzory do przypadku,

kiedy na zadaną powierzchnię od zewnątrz działa ciśnienie, naprz.  $p_0$ . Wtedy:

$$P_w = (p_a - p_0) F_w + \gamma F_w Z_{sw} \quad /19a/$$

albo też w przypadku, z którym spotykać się będziemy bardzo często, kiedy  $p_a = p_0$ , wówczas:

$$P_w = \gamma F_w Z_{sw} \quad /19b/$$

58. Z przebiegu powyższego rozumowania wynika, że miejsce punktu, w którym rzut wypadkowej  $P_x$ ,  $P_y$ , czy  $P_w$  przetnie płaszczyznę prostopadłą do osi  $x$  lub  $y$ , czy też do osi  $Z$  znajdziemy w taki sam sposób, jak to robiliśmy przy odnajdywaniu środka ciśnienia na pole płaskie, w danym razie pionowe. Uskuteczmy to na podstawie wzorów /15/, /15a/, /15b/ oraz /16/, /16a/ lub /16b/.

Naprz. niech trzeba będzie znaleźć punkt, w którym rzut wypadkowego parcia  $P_x$  przetnie rzut pola  $F_x$ ; dajmy na to w przypadku, kiedy  $p_a = p_0$

Korzystamy z wzoru /15b/:

$$\zeta_c = \zeta_s + \frac{J_{\eta_0}}{F \cdot \zeta_s},$$

w którym należy przyjąć:  $\zeta_c = Z_{cx}$ ;  $\zeta_s = Z_{sx}$ ;  $J_{\eta_0}$  = mom. bezwładn. pola  $F_x$  względem osi równoległej do  $y$ , przechodzącej przez  $S_x$ ;  $F = F_x$ .

/Rys.26/. Zatem znajdziemy  $Z_{cx}$  z wzoru

$$Z_{cx} = Z_{sx} + \frac{J_{\rho 0}}{F_x \cdot Z_{sx}}$$

To jest jedna współrzędna punktu  $C_x$ ; drugą znajdziemy z wzoru /16b/:

$$\rho_c = \frac{J_z \rho}{F \cdot Z_s},$$

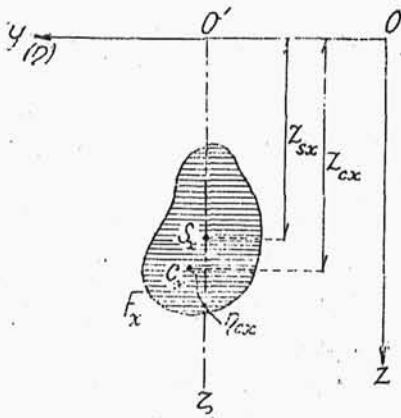
w którym trzeba przyjąć:

$$\rho_c = \rho_{cx}, \quad F = F_x, \quad Z_s = Z_{sx}$$

Zatem z wzoru:

$$\rho_{cx} = \frac{J_z \rho}{F_x \cdot Z_{sx}}.$$

Przy tym należy pamiętać, że oś  $\zeta$  przechodzi przez środek ciężkości  $S_x$  pola  $F_x$  i że wobec tego



rys.26.

$J_z \rho$  jest momentem odśrodkowym pola  $F_x$  względem osi  $y\zeta$ .

W przypadkach, kiedy  $\rho_a$  samo lub  $\rho_a$  i  $\rho_b$  istnieją, należy stosować z podobnymi zmianami przytoczone

wyżej wzory /15/, /15a/ oraz /16/ i /16a/.



59. Znajdźmy teraz wartość parcia w kierunku osi  $Z$ . Potraktowanie odpowiednich wielkości będzie cokolwiek odmienne niż to było dla jakiegokolwiek kierunku  $p o z i o m e g o$ .

W końcu art./56/ otrzymaliśmy, że w kierunku osi  $Z$  działa składowa elementarnego parcia

$$dP_z = (p_a + \gamma z) dF_z$$

Zbierzmy wszystkie parcia w tym samym kierunku, otrzymamy parcie wzdłuż osi  $Z$ :

$$P_z = \int_F (p_a + \gamma z) dF_z = \int_F p_a dF_z + \gamma \int_F z dF_z$$

albo, inaczej /rys.25/:

$$P_z = p_a \cdot F_z + \gamma \int_F z dF_z$$

Co oznacza ostatnia całka  $\int_F z dF_z$  ? Dostrzeżemy to, jeśli zwrócimy uwagę na znaczenie  $z dF_z$ . Wystawmy sobie w tym celu prostą równoległą do osi  $Z$ , która, posuwając się po obrysie elementu  $dF$ , pozostaje stale do  $Z$  równoległą; prosta ta, posuwając się, utworzy powierzchnię cylindryczną, która na płaszczyźnie poziomej  $xOy$  wytnie elementarne pole  $dF_z$  /rys.25/. W ten sposób otrzymamy elementarny walec o średniej wysokości  $Z$  i o przekroju  $p o p r z e - c z n y m dF_z$ ; objętość takiego walca jest  $z dF_z$ .

Wówczas  $\int_F z dF_z$  przedstawi sumę objętości elementarnych walców, takich, jak powyższy, albo wprost daje nam objętość bryły, która opiera się na zadanej powierzchni  $F$ , jak na podstawie, z boków otoczona jest powierzchnią cylindryczną, u góry kończy się na swobodnej powierzchni cieczy.

Jeżeli tak opisaną objętość bryły oznaczmy przez  $V_F$ , wtedy  $\int_F z dF_z = V_F$  i ostatnie równanie przybierze postać:

$$p_z = p_a F_z + \gamma \cdot V_F \quad /20/$$

Z równania tego wypływa twierdzenie: rzut wypadkowego parcia na pionową oś  $Z$  na daną powierzchnię  $F$  równa się ciśnieniu zewnętrznemu na rzut  $F_z$  powierzchni  $F$  na płaszczyznę poziomą  $xOy$ , zwiększonemu o ciężar cieczy w objętości bryły cylindrycznej, opierającej się, jak na podstawie, na zadanej powierzchni  $F$  i sięgającej do swobodnej

powierzchni cieczy.

Jeżeli od dołu na zadaną powierzchnię działa ciśnienie zewnętrzne  $\rho_0$ , wówczas rzut wypadkowego parcia w kierunku osi  $Z$  będzie:

$$\rho_z = (\rho_a - \rho_0) F_z + \gamma \cdot V_F \quad /20a/$$

W przypadku, kiedy  $\rho_a = \rho_0$ , wówczas:

$$\rho_z = \gamma \cdot V_F \quad /20b/$$

60. Należy jeszcze bliżej określić, gdzie się znajdzie prosta działania znalezionego rzutu na oś  $Z$  wypadkowego parcia. W przypadku najprostszym, kiedy  $\rho_z$  można obliczyć według wzoru /20b/ /w razie  $\rho_a = \rho_0$ / widzimy, że parcie wypadkowe  $\rho_z$  składa się z parć elementarnych, z których każde jest, jak to wyżej otrzymaliśmy, proporcjonalne do objętości odpowiedniego elementarnego walca.

Zatem wypadkowe parcie powinno przejść przez środek ciężkości bryły, której objętość oznaczyliśmy przez  $V_F$ .

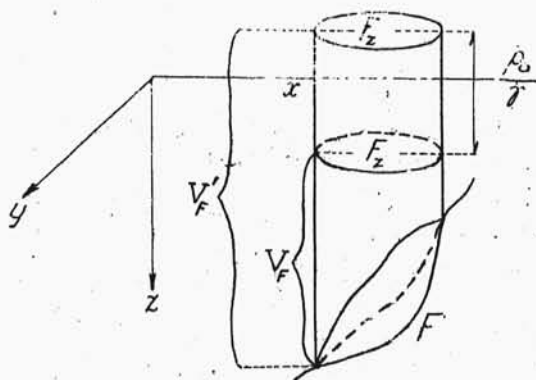
W przypadku, kiedy  $\rho_z$  wyznaczamy z wzoru /20/ lub /20a/, należy wypadkową  $\rho_z$  traktować jako powstałą z dwóch sił:  $\rho_a \cdot F_z$  /lub  $(\rho_a - \rho_0) F_z$  / oraz z siły  $\gamma \cdot V_F$ . Pierwsza siła przechodzi przez środek cięż-

kości pola  $F_z$ , druga - przechodzi, jak wyżej powiedzieliśmy, przez środek ciężkości bryły  $\gamma V_F$ , a prosta działania wspólnej wypadkowej  $P_z$  określi się na zasadzie, znanej w mechanice.

61. Wzór /20/ możemy przedstawić w takiej postaci:

$$P_z = \gamma \cdot F_z \cdot \frac{\rho_a}{\gamma} + \gamma V_F, \quad \text{albo:} \quad P_z = \gamma \left[ F_z \frac{\rho_a}{\gamma} + V_F \right],$$

skąd wyczytamy, że rzut wypadkowego parcia w kierunku osi Z równy jest ciężarowi dwóch brył /rys.27/:



rys.27.

z nich jedna jest to walec, opierający się, jak na podstawie, na polu  $F_z$  i o wysokość  $\frac{\rho_a}{\gamma}$ ; druga bryła o objętości  $V_F$  jest już z poprzedniego znana. Dwie

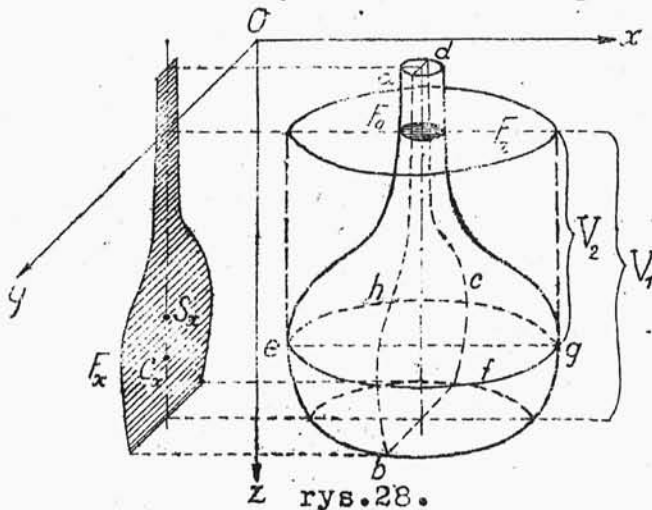
te bryły razem stanowią jedną  $V_F'$ , przypominającą bryłę o objętości  $V_F$ , lecz wydłużoną o wysokość  $\frac{\rho_a}{\gamma}$ . Stąd też wnioskujemy, że wypadkowa parcia pionowego przejdzie przez środek ciężkości bryły  $V_F'$ , gdzie

$$V'_F = F_z \cdot \frac{p_a}{\gamma} + V_F$$

Takie same uwagi możemy zastosować i do wzoru /20a/.

## 62. PRZYKŁAD VII.

Niech będzie jakiekolwiek naczynie napełnione cieczą do pewnej wysokości /rys.28/. Znaleźć parcie cieczy na ścianki naczynia w kierunku p o z i o m y m.



Obierzmy dowolnie osi  $x, y$  tak jednak, aby płaszczyzna  $xOy$  znalazła się na swobodnej powierzchni cieczy. Jakie będzie parcie cieczy na naczynie w kierunku osi  $x$  ? Aby na to odpowiedzieć, weźmy prostą równoległą do osi  $x$  i prowadźmy ją tak, aby stale dotykała powierzchni naczynia, nie przestając być do osi  $x$  równoległą . Otrzymamy na powierzchni naczynia krzy-

wą  $abcd$  , która podzieli powierzchnię naczynia na dwie części, prawą i lewą; jednocześnie owa prosta na płaszczyźnie  $yOz$  narysuje rzut tej krzywej. Każda z powierzchni naczynia, czy prawa, czy lewa mają ten sam rzut  $F_x$  na płaszczyźnie  $yOz$  . Parcie na prawą część  $P_{x1}$  określimy zgodnie z wzorem /17/, /18/ lub /19/; weźmy dla przykładu wzór /17/:

$$P_{x1} = p_a \cdot F_x + \gamma \cdot F_x \cdot z_{sx} .$$

Parcie to skierowane jest na prawo - w stronę dodatnich  $x$  . Parcie na lewą część powierzchni naczynia  $P_{x2}$  znajdziemy z tegoż wzoru /17/:

$$P_{x2} = -(p_a \cdot F_x + \gamma \cdot F_x \cdot z_{sx}) ;$$

znak tego parcia ujemny.

Widzimy więc, że  $P_{x1}$  i  $P_{x2}$  mają jednakowe wartości i znaki różne. Należy jeszcze przekonać się, gdzie są proste działania tych sił. Znajdziemy to z wzoru /15/. Zauważymy, że punkt  $C_x$  jest wspólny dla obydwóch sił  $P_{x1}$  i  $P_{x2}$  . Stąd wnioskujemy, że obie siły, działając na naczynie, wzajemnie się znoszą; żadnego więc zewnętrznego działania w kierunku poziomym na naczynie z powodu parcia cieczy nie otrzymamy. Tylko materiał ścianki naczynia będzie rozciągany. Taki sam wynik otrzyma-

my, jeśli obierzemy oś  $Y$  lub jakąkolwiek oś  $W$  byleby tylko ta oś była w płaszczyźnie poziomej.

63. PRZYKŁAD VIII. Poprzednie naczynie /rys.28/, wewnątrz próżne, opuścimy do cieczy, zanurzając je do głębokości tej samej, co pierwszej. Znaleźć, jakie tym razem będzie działanie cieczy na naczynie. Postępując, jak w przykładzie VII, dzielimy powierzchnię naczynia na dwie części - prawą i lewą. Znajdujemy parcie na każdą z tych części powierzchni w kierunku poziomym. Otrzymamy parcie zupełnie takie samo, jak poprzednio, z tą tylko różnicą, że parcie na prawą część powierzchni będzie skierowane w stronę ujemnych  $x$ -ów, na lewą zaś część - w stronę dodatnich  $x$ -ów. W rezultacie obydwa parcia się zniosą, czyli, że ciecz nie wywrze żadnego działania na naczynie w kierunku poziomym; jedynie materiał ścianek naczynia będzie tym razem ścisany.

64. PRZYKŁAD IX. Weźmy to samo naczynie /rys.28/ i znajdziemy działanie cieczy, napęlniającej naczynie, w kierunku  $p i o n o w y m$ .

Obierzmy tym razem prostą równoległą do osi  $Z$  i

prowadźmy ją stycznie do powierzchni naczynia, lecz wciąż równolegle do osi  $Z$ .

Na powierzchni otrzymamy krzywą zamkniętą  $efgh$ , która podzieli ściankę naczynia na części górną i dolną. Jednocześnie wspomniana prosta wytnie na płaszczyźnie  $xOy$  - pole  $F_z$ .

Znajdźmy parcie cieczy na dolną część  $-P_{z1}$ . Zgodnie z wzorem /20/, /20a/ lub /20b/ - skorzystajmy tu dla przykładu z wzoru /20/ - otrzymamy:

$$P_{z1} = \rho_a \cdot F_z + \gamma V_1$$

gdzie przez  $V_1$  oznaczmy objętość cieczy, zawartej w bryle cylindrycznej, opierającej się o dolną część powierzchni naczynia i sięgającej do swobodnej powierzchni. Parcie to zwrócone jest pionowo w dół. Znajdźmy teraz parcie cieczy na górną część ścianki  $-P_{z2}$ .

Na podstawie wzoru /20/, napiszemy:

$$P_{z2} = -[\rho_a(F_z - F_o) + \gamma V_2], \text{ gdzie } (F_z - F_o)$$

jest rzutem górnej części ścianki naczynia na płaszczyznę  $xOy$  / $F_o$  jest pole przekroju otworu naczynia na poziomie swobodnej powierzchni/, zaś  $V_2$  jest objętością bryły, utworzonej przez górną część ścianki naczynia /wnętrze bryły/ i przez powierzchnię cylin-



dryczną między krzywą  $efgh$  i swobodną powierzchnią. Parcie  $P_{z2}$  jest zwrócone pionowo w górę, a więc jest ujemne.

$$\begin{aligned}\text{Wypadkowe parcie: } P_z &= P_{z1} + P_{z2} = \\ &= \rho_a \cdot F_z + \gamma \cdot V_1 - \rho_a (F_z - F_o) - \gamma \cdot V_2 = \rho_a \cdot F_o + \gamma (V_1 - V_2).\end{aligned}$$

Z rysunku dostrzegamy, że  $V_1 - V_2$  jest to objętość cieczy, zawartej w naczyniu; niech to będzie  $=V$ , zatem mamy ostatecznie:

$$P_z = \rho_a \cdot F_o + \gamma \cdot V.$$

Widzimy zatem, że parcie cieczy na naczynie w kierunku pionowym jest równe ciężarowi cieczy, zawartej w naczyniu, zwiększonemu o ciśnienie zewnętrzne na swobodną powierzchnię cieczy.

Taki wynik otrzymaliśmy, przyjmując, że mamy tylko ciśnienie  $\rho_a$  na swobodną powierzchnię; czyli przez to przyjęliśmy, że na ściankę naczynia od zewnątrz nie ma żadnego ciśnienia.

Jeżeli na zewnątrz naczynia zewsząd będzie ciśnienie  $\rho_a$ , wtedy, stosując równanie /20b/, znajdziemy

$$\begin{aligned}P_{z1} &= \gamma \cdot V_1 \\ P_{z2} &= -\gamma \cdot V_2\end{aligned}$$

a stąd

$$P_z = P_{z1} + P_{z2} = \gamma(V_1 - V_2) = \gamma \cdot V;$$

czyli, że parcie cieczy na naczynie w kierunku pionowym wyraża się tylko ciężarem cieczy, zawartej w naczyniu. - Prosta dzia-  
łania tego parcia, oczywiście, przejdzie przez środek ciężkości bryły, której objętość oznaczyliśmy przez  $V$ .

#### 65. PARCIE CIECZY NA POWIERZCHNIĘ KRZYWĄ

W DOWOLNYM KIERUNKU.

Mamy powierzchnię krzywą o polu  $F$ ; dany jest kierunek  $u$ , równoległy do płaszczyzny  $xOz$ , który tworzy z osią  $x$  kąt  $\alpha$  /rys.29/; należy znaleźć parcie cieczy na tę powierzchnię  $F$  w z a d a n y m kierunku  $u$ .

Na powierzchni  $F$  obieramy elementarne pole  $dF$ , znajdujące się na głębokości  $Z$  pod swobodną powierzchnią. Niech w tym miejscu będzie ciśnienie  $p$ . Elementarne parcie cieczy na element  $dF$  jest  $dP = p \cdot dF$ . Rzut tego parcia na kierunek  $u$  oznaczmy przez  $dP_u$ ; wartość jego znajdziemy:  $dP_u = p \cdot dF \cdot \cos(p, u)$ ,