

102. Z ostatniego wzoru widzimy, że, jeśli naczynie będzie napełnione mniej niż na wysokość  $h_1$ , wówczas, chcąc otrzymać podczas obrotu paraboloidę sięgającą górnej krawędzi cylindra, należy zwiększyć prędkość kątową obrotu. Do jakich granic można to zrobić, aby równanie /31/ mogło być stosowane?

Zrozumiałe jest, że im większa będzie prędkość obrotowa, tym mniejsza będzie wysokość  $h_0$ . Najmniejsza wartość  $h_0$  będzie 0; poza tą granicą  $h_0$  stanie się ujemne, zwierciadło cieczy przestanie być ciągłą powierzchnią paraboloidy.

Kiedy będzie  $h_0 = 0$  ? Otrzymamy to z równania:

$$r^2 = \frac{2g}{\omega^2} (H - h_0);$$

jeżeli ma być  $h_0 = 0$ , należy mieć  $\omega^2 r^2 = 2gH$ , a wtedy z równania /31/ otrzymamy wysokość  $h_1$ , którą ciecz powinna w naczyniu pierwotnie zajmować

$$\omega^2 = \frac{4}{r^2} \cdot g(H - h_1),$$

albo

$$\omega^2 r^2 = 4g(H - h_1);$$

ponieważ jednocześnie, jak to widzieliśmy przed chwilą,

$$\omega^2 r^2 = 2gH, \text{ więc: } 2gH = 4g(H - h_1);$$

stąd otrzymamy, że

$$h_1 = \frac{1}{2} H.$$

Tęż zależność można było znaleźć z tego warunku, że pierwotna objętość cieczy w naczyniu  $\pi r^2 h_1$ , powinna zmieścić się pomiędzy ścianką cylindra o wysokości  $H$  i promieniu  $r$  a swobodną powierzchnią paraboloidy obrotowej, dotykającej tym razem wierzchołkiem dna cylindra; objętość ta jest  $= \frac{1}{2} \pi r^2 H$ , zatem

$$\pi r^2 h_1 = \frac{1}{2} \pi r^2 H,$$

a stąd

$$h_1 = \frac{1}{2} H.$$

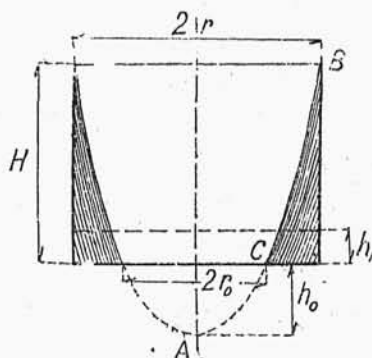
Widzimy zatem, że wzór /31/ może być stosowany przy głębokościach  $h_1 \geq \frac{1}{2} H$ .

103. Jeżeli  $h_1$  będzie  $< \frac{1}{2} H$ , wówczas otrzymamy inny kształt powierzchni swobodnej w naczyniu. Ciągłość tej powierzchni zginie.

W tym przypadku należy zagadnienie inaczej rozwiązać. Objętość cieczy przed uruchomieniem naczynia była  $= \pi r^2 h_1$ .

Po uruchomieniu naczynia ciecz zachowa tę sa-

nią objętość, lecz pod inną postacią; objętość cieczy w tym wypadku rozpatrywaną znajdziemy, jak następuje /rys.56/:



rys.56.

Objętość całego cylindra =  $\pi r^2 H$  ; objętość paraboloidy, liczonej od A do górnej krawędzi naczynia =

=  $\frac{1}{2} \pi r^2 (H + h_0)$ ; objętość części

tej paraboloidy pod dnem naczynia =  $\frac{1}{2} \pi r_0^2 h_0$ ; stąd objętość cieczy:

$$= \pi r^2 H + \frac{1}{2} \pi r_0^2 h_0 - \frac{1}{2} \pi r^2 (H + h_0) = \pi r^2 \left[ H - \frac{1}{2} H - \frac{1}{2} h_0 \right] + \frac{1}{2} \pi r_0^2 h_0 = \\ = \frac{1}{2} \pi r^2 [H - h_0] + \frac{1}{2} \pi r_0^2 h_0 = \frac{1}{2} \pi [(H - h_0) r^2 + h_0 r_0^2].$$

Ta objętość jest równa pierwotnej  $\pi r^2 h$ , zatem:

$$\frac{1}{2} \pi [(H - h_0) r^2 + h_0 r_0^2] = \pi r^2 h,$$

albo

$$r^2 h = \frac{1}{2} (H - h_0) r^2 + \frac{1}{2} h_0 r_0^2 \quad /a/$$

Z równania /28/

$$x^2 = \frac{2g}{\omega^2} (Z_0 - Z),$$

które zastosujemy do punktu B na krawędzi naczynia, podstawiając:  $x = r$ ,  $Z = 0$  oraz  $Z_0 = H + h_0$ , otrzymamy:

$$r^2 = \frac{2g}{\omega^2} (H + h_0) \quad /b/$$

Toż samo równanie zastosujemy do punktu C, w którym parabola przecina dno naczynia, podstawiając:

otrzymamy:  $x = r_0$ ,  $z = H$  oraz  $z_0 = H + h_0$

$$r_0^2 = \frac{2g}{\omega^2} (H + h_0 - H), \quad \text{albo} \quad r_0^2 = \frac{2g}{\omega^2} \cdot h_0 \quad /c/$$

Mamy zatem trzy równania:

$$\begin{array}{ll} r^2 h_1 = \frac{1}{2} (H + h_0) r^2 + \frac{1}{2} h_0 r_0^2 & /a/ \\ r^2 = \frac{2g}{\omega^2} (H + h_0) & /b/ \\ r_0^2 = \frac{2g}{\omega^2} h_0 & /c/ \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} \text{naależy pozbyć} \\ \text{się } r_0 \text{ i } h_0 \end{array} \right.$$

z równania /b/ obliczamy:  $h_0 = \frac{\omega^2 r^2}{2g} - H$ ; podstawiamy  $h_0$  w /c/  $r_0^2 = \frac{2g}{\omega^2} \left( \frac{\omega^2 r^2}{2g} - H \right) = r^2 - \frac{2gH}{\omega^2}$ .

Następnie wartości  $h_0$  i  $r_0$  podstawiamy w /a/:

$$r^2 h_1 = \frac{1}{2} \left( H - \frac{\omega^2 r^2}{2g} + H \right) r^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\omega^2 r^2}{2g} - H \right) \left( r^2 - \frac{2gH}{\omega^2} \right)$$

Po wykonaniu wskazanych działań i po redukcji otrzymamy:

$$r^2 h_1 = \frac{gH^2}{\omega^2},$$

a stąd

$$\omega = \frac{H}{r} \sqrt{\frac{g}{h_1}} \quad /32/$$

104. Zatem, jeśli  $h_1 \geq \frac{1}{2} H$ , należy stosować równanie /31/; na przykład, niech  $h_1 = \frac{2}{3} H$ , wtedy:

$$\omega = \frac{2}{r} \sqrt{\frac{gH}{3}} = \frac{1,156}{r} \sqrt{gH}$$

Jeśli  $h_1 < \frac{1}{2} H$ , należy stosować równanie /32/:

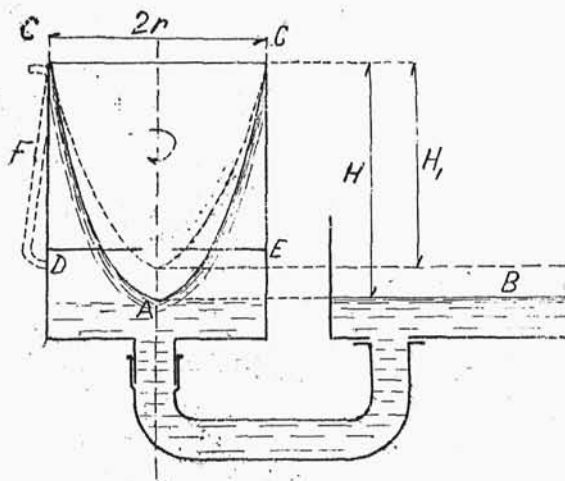
Naprz. niech  $h_1 = \frac{1}{3} H$ , wtedy

$$\omega = \frac{H}{r} \sqrt{\frac{3g}{H}} = \frac{1}{r} \sqrt{3gH} = \frac{1,73}{r} \sqrt{gH}.$$

Jeżeli  $h = \frac{1}{2}H$  , wtedy zarówno /31/ jak i /32/ równanie są stosowane. Otrzymujemy z nich jedną i tę samą wartość:

$$\omega = \frac{1}{r} \sqrt{2gH} = \frac{1,414}{r} \sqrt{gH} .$$

105. PRZYKŁAD XX. Poprzednie rozważania pozwolą na oznaczenie prędkości kątowej obrotu naczynia cylindrycznego, które w dolnej części połączone jest ze stojącym zbiornikiem  $B$  o znacznej objętości /rys.57/.



rys.57.

Poziom wody w zbiorniku  $B$  jest stały i zadany. Jaką prędkość kątową należy nadać naczyniu, aby woda doszła do krawędzi  $C$  , znajdującej się na wysokości  $H$  ponad zwierciadłem wody w naczyniu  $B$  ?

Podczas obrotu naczynia ciśnienia hydrostatycz-

ne w punktach obranych na osi obrotu zależą tylko od ciężaru cieczy; zatem ciśnienia w tych punktach będą się kształtowały tak samo jak w cieczy ciężkiej, będącej w spoczynku. Stąd widzimy, że jeśli ciśnienie zewnętrzne na powierzchnię wody w naczyniu  $AC$  i na powierzchnię w zbiorniku  $B$  jest jednakowe, to punkt  $A$  paraboloidy winien być na poziomie zwierciadła wody w  $B$ . Stąd wynika, że rozwiązanie polegać będzie na tym, aby znaleźć taką prędkość kątową, przy której parabola przechodzić będzie przez punkty  $C, A, C$ .

W tym celu skorzystamy z równania /28a/:

$$x^2 = \frac{2g}{\omega^2} z$$

gdzie zamiast  $x$  należy wstawić  $r$ , zamiast  $z$   $H$ .

Wtedy otrzymamy:

$$r^2 = \frac{2g}{\omega^2} H ; \quad \text{albo} \quad \omega^2 = \frac{2g}{r^2} H .$$

Stąd znajdziemy:

$$\omega = \frac{1}{r} \sqrt{2gH} .$$

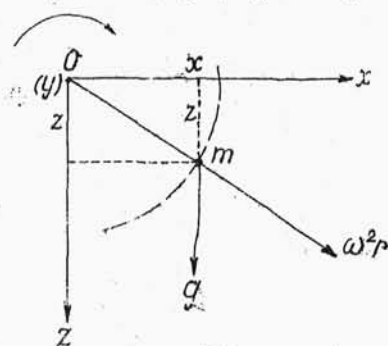
Jeżeliby w ścianie cylindrycznego naczynia zrobić otwór poniżej krawędzi  $C$ , wówczas otrzymalibyśmy wylew wody. W rezultacie będziemy mieli wpływ podniesionej na pewną wysokość wody.

Właściwie do otrzymania wypływu wody znajdzie-  
na prędkość kątową  $\omega$  nie będzie jeszcze dostatecz-  
ną; przy tej prędkości kątowej możemy tylko otrzy-  
mać podniesienie się wody i zatrzymanie się jej na  
wskazanej wysokości; do otrzymania jednak ruchu wo-  
dy prędkość kątową  $\omega$  należy powiększyć.

Nic się nie zmieni, jeżeli w naczyniu cylind-  
rycznym damy górne dno  $DE$  ; wówczas odpadnie gór-  
na część wody /ponad  $DE$  /. Jeżeli następnie wypro-  
wadzimy rurkę  $F$  przez boczną ściankę naczynia, wte-  
dy woda podniesie się w rurce  $F$  do wylotu i mo-  
że nastąpić wypływ wody przez tę rurkę.

106. PRZYKŁAD XXI. Naczynie, wypełnione cie-  
czą, obraca się około osi poziomej /rys.58/. Jaki  
będzie kształt  
powierzchni je-  
dnakowego ciś-  
nienia?

Niech ob-  
rót odbywa się



rys.58.

około osi  $OY$  z prędkością kątową  $\omega$  . Weźmy którąkol-

wiek cząstkę cieczy  $m$  w odległości  $\rho$  od osi obrotu. Wtedy możemy tę cząstkę rozpatrywać, jako będącą w spoczynku bezwzględnym, jeśli będziemy uważali, że na nią działa - prócz siły rzeczywistej - siły ciężkości - jeszcze siła odwrotna do siły unoszenia - t.zw. siła odśrodkowa. Pierwsza siła daje przyspieszenie  $g$ , druga przyspieszenie  $\omega^2 \rho$ . Rzuty tych przyspieszeń na osi  $x, y, z$  są:  $0, 0, g$  oraz  $\omega^2 x, 0, \omega^2 z$ . Wobec tego w równaniu powierzchni jednakowego ciśnienia:

$$Xdx + Ydy + Zdz = 0$$

należy wstawić zamiast  $X = \omega^2 x$  ; zamiast  $Y = 0$  ;  
zamiast  $Z = g + \omega^2 z$  . Wówczas równanie przyjmie postać:

$$\omega^2 x dx + (g + \omega^2 z) dz = 0 .$$

Po scałkowaniu znajdziemy:

$$\frac{\omega^2 x^2}{2} + gz + \frac{\omega^2 z^2}{2} = const.$$

albo

$$x^2 + z^2 + \frac{2g}{\omega^2} z = const.$$

Jest to równanie powierzchni cylindrycznej, której oś jest równoległa do osi  $y$  , lecz nie leży na tej osi.

Na ten ostatni warunek wskazuje obecność wyra -



$$z = \frac{2g}{\omega^2} Z.$$

Znajdźmy oś powierzchni jednakowego ciśnienia:  
Niech ta oś przechodzi przez punkt  $\Omega$  /rys.59/, którego współrzędnymi względem osi  $Ox$  i  $Oz$  są  $a$  i  $b$ .

Z rysunku od-  
czytujemy:  $x = \xi + a$ ;

$z = \zeta - b$  ; wówczas

równanie

$$x^2 + z^2 + \frac{2g}{\omega^2} z = \text{const.}$$

przybierze postać:

$$(\xi + a)^2 + (\zeta - b)^2 + \frac{2g}{\omega^2} (\zeta - b) = \text{const.}$$

albo

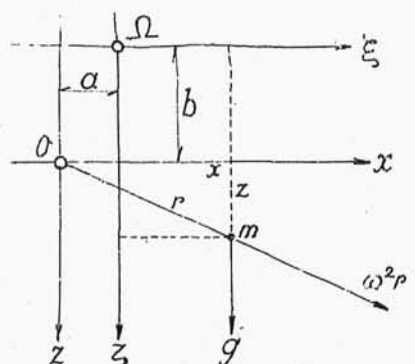
$$\xi^2 + a^2 + 2a\xi + \zeta^2 + b^2 - 2b\zeta + \frac{2g\zeta}{\omega^2} - \frac{2gb}{\omega^2} = \text{const.}$$

Aby oś powierzchni cylindrycznej przechodziła przez  $\Omega$  należy tak  $a$  i  $b$  dobrać, aby w równaniu pozostały wyrazy z  $\xi^2$  i  $\zeta^2$ , natomiast wyrazy z  $\xi$  i  $\zeta$  powinny zapaść.

Zatem:  $2a\xi$  winno być  $= 0$ , skąd otrzymujemy, że  $a = 0$  oraz

$$\zeta \left( \frac{2g}{\omega^2} - 2b \right) = 0 \quad \text{skąd} \quad b = \frac{g}{\omega^2} \quad /33/$$

Wówczas nasze równanie przyjmie postać:



rys.59.

$$\xi^2 + \zeta^2 + b^2 - \frac{2gb}{\omega^2} = \text{const.}$$

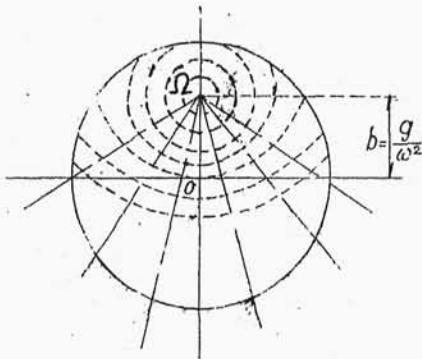
ponieważ  $b = \frac{g}{\omega^2}$ , więc:

$$\xi^2 + \zeta^2 + \frac{g^2}{\omega^4} - \frac{2g^2}{\omega^4} = \text{const.}$$

albo:

$$\xi^2 + \zeta^2 = \frac{g^2}{\omega^4} + \text{const.}$$

Widzimy więc, że w danym przypadku powierzchniami jednakowego ciśnienia będą powierzchnie cylindryczne, których oś znajduje się p o n a d o s i ą o b r o t u n a w y s o k o ś c i  $\frac{g}{\omega^2}$  /rys. 60/.



rys. 60.

W miarę zwiększania prędkości kątowej  $\omega$  oś  $\Omega$  będzie się zbliżać do osi obrotu  $O$ ; wreszcie, kiedy prędkość kątowa  $\omega$  staje się bardzo duża, wówczas  $b = \frac{g}{\omega^2}$ , staje

się bliskie 0.

Taki układ powierzchni jednakowego ciśnienia znajdujemy w wodzie, napełniającej skrzynki koła wodnego lub kanały turbiny z osią poziomą. Przy kołach wodnych  $b$  jest bardzo znaczne, gdyż prędkość  $\omega$

jest bardzo mała.

Jak się przedstawiają swobodne powierzchnie wody w skrzynkach koła wodnego, pokazane jest na sąsiednim rysunku /rys.61/.

Ciśnienie hydrostatyczne w naszym przypadku znajdziemy z równania:

$$p = p_a + \frac{\gamma}{g} \int_a^{(x,y,z)} (Xdx + Ydy + Zdz);$$

po podstawieniu odpowiednich wartości na  $X, Y, Z$  otrzymamy:

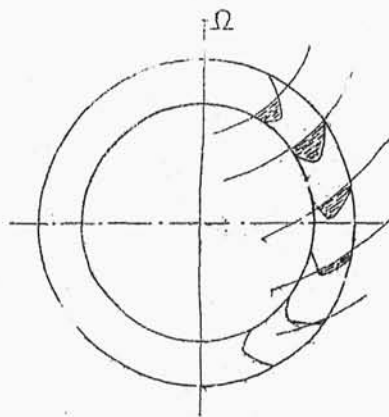
$$p = p_a + \frac{\gamma}{g} \left[ \frac{\omega^2}{2} (x^2 + z^2) + gz \right]_{a}^{(x,y,z)}$$

Równanie linii sił znajdziemy zwykłą drogą, posilkując się równaniami:

$$\frac{d\xi}{X} = \frac{d\eta}{Y} = \frac{dz}{Z},$$

podstawiając wartości odpowiednie na  $X, Y$  i  $Z$ .

Znajdziemy, że będzie to pęk prostych, przechodzących przez oś  $\Omega$ , prostopadłych do osi  $\Omega$ .



rys.61.

## 107. NACZYNNIA POŁĄCZONE NAPEŁNIONE CIECZĄ JEDNORODNĄ.

Niech będą dwa naczynia połączone, o dowolnych