

menty: poprzedni Δf_1 i nowy $\Delta f_2''$, inaczej niż Δf_2 i $\Delta f_2'$ pochylony.

Niech wtedy w punkcie 2 będzie ciśnienie p_2'' , które znów znajdziemy ze wzoru /6/:

$$p_2'' = p_1 + \frac{\gamma}{g} \int_1^2 a \cdot ds \cdot \cos(a, ds)$$

Widzimy stąd, że $p_2'' = p_2' = p_2$, a więc ciśnienie w punkcie 2 nie zależy od pochylenia elementu Δf_2 c.b.d.d.

POWIERZCHNIA JEDNAKOWEGO CIŚNIENIA /EKWIPOTENCJALNA/.

29. Poprzednio poznaliśmy zmianę ciśnienia hydrostatycznego w płynie /w cieczy lub w gazie/ w dwóch bardzo bliskich punktach. Naogół ciśnienia od punktu do punktu się zmieniają, jednak można sobie wyobrazić, że może istnieć zbiór takich punktów w bliższym i dalszym sąsiedztwie, w których ciśnienie hydrostatyczne jest jedno i to samo. Punkty te znajdują się na powierzchni pewnej, którą nazywamy powierzchnią jednakowego ciśnienia, albo powierzchnią ekwipotencjalną.

Zatem powierzchnią jednakowego ciśnienia nazywać będziemy miejsce geometryczne punktów, w których jest jednakowe ciśnienie hydrostatyczne.

Znajdźmy równanie powierzchni jednakowego ciśnienia. Równanie to otrzymamy z równania /3/ w taki sposób:

Niech równanie /3/:

$$dp = \frac{\sigma}{g}(Xdx + Ydy + Zdz)$$

dotyczy dwóch nieskończenie bliskich punktów o jednakowym ciśnieniu; wtedy p jest stałe i dp dla tego przypadku = 0, zatem, po skróceniu przez $\frac{\sigma}{g}$, otrzymamy:

$$Xdx + Ydy + Zdz = 0 \quad /10/$$

Równanie to wiąże współrzędne punktów powierzchni jednakowego ciśnienia X, Y, Z z rzutami przyspieszenia siły objętościowej, albo, możemy też powiedzieć, z wielkością samej siły objętościowej, której rzuty są proporcjonalne do X, Y, Z . Będzie to więc szukane równanie powierzchni jednakowego ciśnienia.

Zwrócić tu należy uwagę, że dx, dy, dz są rzuta-

mi ds , nieskończenie małej odległości dwóch punktów, znajdujących się na szukanej powierzchni jednakowego ciśnienia.

30. Z samego określenia powierzchni jednakowego ciśnienia oraz z równania /10/ poznamy kilka właściwości tej powierzchni:

a/ Wewnątrz cieczy lub gazu możemy wyobrazić sobie nieskończenie wiele różnych powierzchni jednakowego ciśnienia. Wynika to stąd, że, wybierając dowolny punkt o pewnym ciśnieniu, możemy odnaleźć zbiór punktów o tym samym ciśnieniu, a więc leżących na wspólnej powierzchni jednakowego ciśnienia. Ponieważ ciśnień możemy wyróżnić nieskończenie wiele, zatem tyleż możemy pomyśleć powierzchni jednakowego ciśnienia.

b/ Powierzchnie jednakowego ciśnienia nie mogą się ani przecinać ani stykać ze sobą; w przeciwnym razie w punktach przecięcia się lub zetknięcia się dwóch takich powierzchni - mielibyśmy dwa różne ciśnienia, co jest przeciwne temu, czego dowiedliśmy w art.24.

c/ Na skutek poprzedniej właściwości będzie zro-

zumiały, że powierzchnie jednakowego ciśnienia tworzą wewnątrz płynu rozważanego albo powierzchnię ze wszystkich stron zamkniętą, albo też powierzchnię, która dochodzi do ścianek naczynia, wypełnionego płynem.

Gdyby, bowiem, powierzchnia jednakowego ciśnienia miała kończyć się wewnątrz cieczy, oznaczałoby to, że przy punktach obrzeża powierzchni byłyby dwa różniące się od siebie ciśnienia.

d/ Równanie powierzchni jednakowego ciśnienia /10/ przedstawmy w odmiennej cokolwiek postaci, biorąc pod uwagę, że X, Y, Z , są rzutami przyspieszenia wypadkowego α siły objętościowej na trzy osi, do siebie prostopadłe, dx, dy, dz , zaś są rzutami odcinka ds , łączącego dwa nieskończenie bliskie punkty jednej i tej samej powierzchni jednakowego ciśnienia. Mamy więc możliwość napisania:

$$X = \alpha \cdot \cos(\alpha, x); \quad Y = \alpha \cdot \cos(\alpha, y); \quad Z = \alpha \cdot \cos(\alpha, z)$$

oraz

$$dx = ds \cdot \cos(ds, x); \quad dy = ds \cdot \cos(ds, y); \quad dz = ds \cdot \cos(ds, z)$$

a wtedy lewa strona równania przybierze postać:

$$\alpha \cdot ds \cdot \cos(\alpha, ds) = 0$$

Do tego samego równania moglibyśmy wprost dojść

wychodząc z równania /8/, pamiętając, że w nim $p = \text{const.}$ W otrzymanym dopiero co równaniu ds zerem być nie może; co się tyczy przyspieszenia a , niech będzie ono różne od zera; równanie będzie spełnione wtedy, jeśli $\cos(a, ds) = 0$ czyli, kiedy kąt (a, ds) jest prosty.

Powiemy więc, że kierunek wypadkowego przyspieszenia sił objętościowych w każdym miejscu badanego płynu jest prostopadły do powierzchni jednakowego ciśnienia.

31. LINIE SIŁ. Wyobraźmy sobie szereg bliskich powierzchni jednakowego ciśnienia F_1, F_2, F_3, \dots . Na jednej z nich, np. na F_1 obierzmy dowolny punkt; przeprowadźmy przez ten punkt normalną do powierzchni - będzie to kierunek siły objętościowej, w tym punkcie działającej. Przedłużmy ten kierunek do sąsiedniej najbliższej powierzchni F_2 . W otrzymanym punkcie przecięcia się poprowadźmy normalną do F_2 i przedłużmy tę normalną do sąsiedniej powierzchni F_3 i t.d. Otrzymamy tą drogą wielobok łamany, który dla szeregu nieskończenie

bliskich powierzchni jednakowego ciśnienia w granicy zamieni się w krzywą, nazywaną **l i n i ą s i ł**. Kierunek stycznej do otrzymanej linii sił w dowolnym punkcie, oczywiście, wskazuje kierunek siły objętościowej w tym właśnie punkcie.

Podobne linie sił mogą być przeprowadzone przez jakikolwiek punkt powierzchni F jednakowego ciśnienia. W ten sposób otrzymamy układ linii sił dla powierzchni jednakowego ciśnienia.

Aby otrzymać równanie linii sił, rozumujemy tak: kierunek przyspieszenia a siły objętościowej wskazuje w każdym miejscu kierunek elementu linii sił. Jeśli X jest rzutem a na oś x , więc będzie:

$$\begin{aligned} X &= a \cdot \cos(a, x) & \text{stąd} & \cos(a, x) = \frac{X}{a} \\ \text{również } Y &= a \cdot \cos(a, y) & \text{stąd} & \cos(a, y) = \frac{Y}{a} \end{aligned}$$

wreszcie

$$Z = a \cdot \cos(a, z) \quad \text{stąd} \quad \cos(a, z) = \frac{Z}{a}$$

Oznaczmy element linii sił przez $d\sigma$, a rzuty tego elementu na osi współrzędne przez $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$, wtedy:

$$d\xi = d\sigma \cdot \cos(a, x) = d\sigma \cdot \frac{X}{a}$$

$$d\eta = d\sigma \cdot \cos(a, y) = d\sigma \cdot \frac{Y}{a}$$

$$dz = d\delta \cdot \cos(\alpha, z) = d\delta \cdot \frac{z}{a} \quad \text{dalej}$$

z tych równań mamy:

$$\frac{d\xi}{X} = \frac{d\delta}{a} ; \quad \frac{d\eta}{Y} = \frac{d\delta}{a} ; \quad \frac{dz}{Z} = \frac{d\delta}{a} ;$$

wreszcie:

$$\frac{d\xi}{X} = \frac{d\eta}{Y} = \frac{dz}{Z} \quad /11/$$

Otrzymaliśmy tu dwa równania, które wiążą różniczki współrzędnych ξ, η, ζ linii sił z rzutami przyspieszenia siły objętościowej.

Są to równania różniczkowe linii sił.

ZASTOSOWANIE POWYŻSZYCH TWIERDZEŃ DO CIECZY CIĘŻKIEJ.

32. W szeregu następnych artykułów rozpatrzemy zastosowanie poprzednich wiadomości wyłącznie do cieczy ciężkiej, t.j. takiej, na którą działa tylko siła ciężkości. Ponieważ będziemy rozpatrywali ciecz, zawartą w naczyniu o bardzo nieznacznych /w porównaniu z promieniem kuli ziemskiej/ wymiarach, przeto linie działania siły ciężkości w różnych punktach cieczy będziemy mogli przyjąć za równoległe, przyspieszenie zaś tej siły będziemy przyjmowali we wszystkich punk-

tach cieczy jednakowe.

Osi współrzędnych najdogodniej będzie obierać w taki sposób: osi x i y - poziome, zaś oś Z - pionową, zwróconą w dół. Zbadajmy przede wszystkim, jaki kształt będą miały dla cieczy ciężkiej powierzchnie jednakowego ciśnienia.

Równanie różniczkowe takiej powierzchni w ogólnej postaci jest:

$$Xdx + Ydy + Zdz = 0$$

Przy założeniu cieczy ciężkiej i przy obranych osiach otrzymamy: $X=Y=0$, $Z=g$; wówczas równanie poprzednie zmieni się w:

$$gdz = 0 \quad \text{albo} \quad dz = 0$$

po scałkowaniu:

$$Z = \text{const.}$$

Równanie to w osiach x, y, z , oznacza płaszczyzny, równoległe do płaszczyzny xy , a więc powierzchnie jednakowego ciśnienia dla cieczy ciężkiej będą płaszczyznami poziomymi.

Ponieważ na swobodnej powierzchni, gdzie się ciecz kończy i dotyka się powietrza, mieć będziemy zawsze jednakowe ciśnienia, więc swobodna powierzch-

nia, będąc jednocześnie powierzchnią jednakowego ciśnienia, jest płaszczyzną poziomą.

W dalszym ciągu wykładu obierać będziemy dla cieczy ciężkich płaszczyznę xy w płaszczyźnie swobodnej powierzchni cieczy.

33. Otrzymaliśmy równanie równowagi w ogólnym przypadku:

$$dp = \frac{\gamma}{g}(Xdx + Ydy + Zdz)$$

Przy założeniu cieczy ciężkiej /ciężar właściwy $= \gamma$ / i przy obranych osiach $X=0$, $Y=0$, $Z=g$, równanie równowagi daje:

$$dp = \frac{\gamma}{g} \cdot g \cdot dz = \gamma \cdot dz$$

Po scałkowaniu:

$$p = \gamma z + C \quad / \text{ stała całkowania } /$$

Stałą całkowania możemy określić z jakiegokolwiek warunku, skądinąd nam znanego; najczęściej będziemy mieli dane ciśnienie na swobodnej pow. cieczy. Niech to będzie ciśnienie atmosferyczne, które będziemy oznaczali przez p_a ; wtedy z warunku, że przy $z=0$, $p=p_a$ otrzymamy: $p_a = C$; samo zaś równanie, po wyrugowaniu stałej całkowania, przybierze postać:

$$\rho = \rho_a + \gamma Z \quad /12/$$

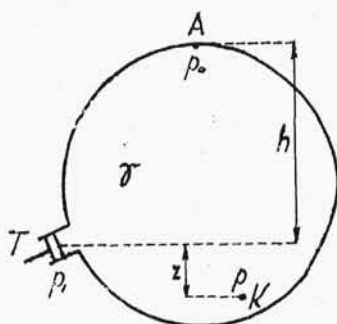
Z tego równania widzimy, że ciśnienie hydrostatyczne w cieczy ciężkiej rośnie liniowo w miarę zagłębiania się pod swobodną powierzchnię. Wyraz γZ w równaniu /12/ możemy napisać: $\gamma \cdot 1^2 Z$; wtedy $1^2 Z$ oznacza objętość słupa o podstawie = jednostce pola i wysokości Z .

Wówczas twierdzenie, zawarte w równaniu /12/ wypowiemy w taki sposób: Ciśnienie hydrostatyczne (ρ) w każdym punkcie cieczy jest równe ciśnieniu na swobodnej powierzchni (ρ_a), zwiększonemu o ciężar słupa cieczy, którego podstawa jest równa jednostce pola, a wysokość jest równa (Z) odległości tego punktu od swobodnej powierzchni cieczy.

34. PRAWO PASCALA /1623-1662/.

Niech ciecz ciężka będzie zawarta w naczyniu zamkniętym /rys.5/. Niech w jednym miejscu naczynia znajduje się mały tłoczek T , szczelnie dopasowany

i mogący poruszać się bez tarcia. Przypuśćmy, że tłoczek T jest wciskany do wnętrza naczynia z taką siłą, że w miejscu zetknięcia się tłoczka z cieczą istnieje ciśnienie hydrostatyczne p_1 . Jakie będzie



rys.5.

ciśnienie w jakimkolwiek punkcie A , albo K naczynia? Obierzmy w naczyniu najwyższy punkt A , który możemy uważać, jako będący na pewnej swobodnej powierzchni

cieczy; niech tu panuje ciśnienie p_0 .

Wówczas:

$$p_1 = p_0 + \rho h$$

Oznaczywszy ciśnienie w K przez p , napiszemy:

$$p = p_0 + \rho(h+z)$$

albo po wyrugowaniu p_0 :

$$p = p_1 + \rho z$$

co zresztą, można było napisać wprost, porównywując ciśnienie przy T i w K .

Wciśnijmy tłoczek T silniej do wnętrza, wywierając ciśnienie przy T równe p_2 , wówczas ciśnienie w dowolnym punkcie K wzrośnie o tę samą różnicę $p_2 - p_1$, gdyż obecnie w K będzie ciśnienie:

$$p' = p_2 + \gamma Z$$

a zatem wzrosło o

$$p' - p = p_2 - p_1$$

Stąd wnioskujemy, że zwiększenie ciśnienia w którymkolwiek miejscu cieczy powoduje takie samo co do wartości zwiększenie ciśnienia we wszystkich punktach cieczy, bez względu na kierunek samego ciśnienia.

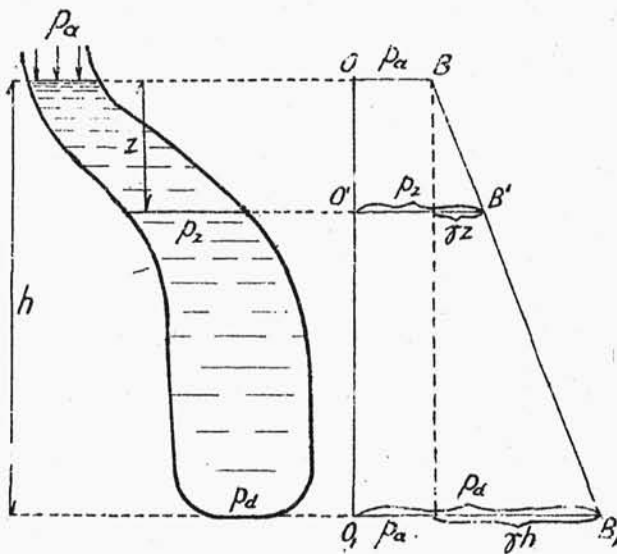
Na tym właśnie polega prawo/hydrostatyczne/Pascala.

35. WYKRESY CIŚNIEŃ.

Z dużym pożytkiem nieraz będziemy korzystali z wykresów, wskazujących przejrzyście na rozkład ciśnień w cieczy. Postępować będziemy w taki sposób:

Niech naczynie będzie napełnione cieczą o cięż-

zarze właściwym γ do wysokości h . Na swobodną po-



rys.6.

od punktu O odkładamy odcinek OB , przedstawiający w pewnej skali wartość ciśnienia p_a /np.1 kg/cm² jako odcinek 2 cm długości/; od punktu O , przy dnie, odkładamy odcinek OQ , w tej samej skali, równy ciśnieniu $p_a + \gamma h$, wreszcie prowadzimy prostą BB_1 i otrzymujemy wykres OO_1B_1B . Chcąc znaleźć ciśnienie p_2 w którymkolwiek punkcie cieczy, obranym na głębokości Z , należy poprowadzić prostą równoległą do OB w odległości Z od niej. Odcinek

wierzchnię
niech działa
ciśnienie p_a .

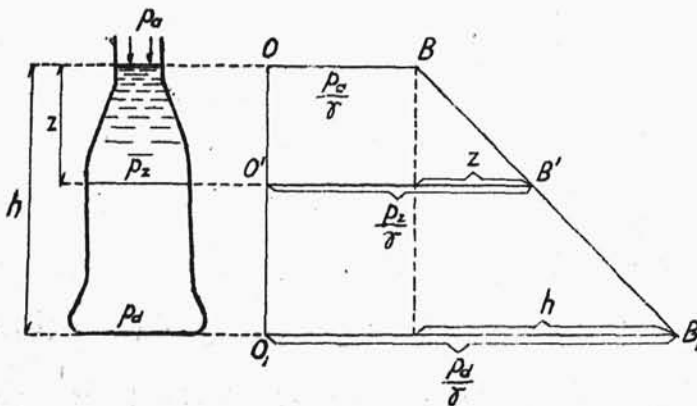
Na samym
dnie otrzyma-
my ciśnienie
zgodnie z rów-
naniem /12/:

$$p_d = p_a + \gamma h$$

Prowadzimy
prostą pionową
 OO_1 /rys.6/;

$O'B'$, zmierzony w przyjętej skali, wskaże wartość ciśnienia ρ_z .

36. Można jeszcze inaczej budować podobny wykres ciśnień. Przede wszystkim wprowadźmy jedno pojęcie,



rys.7.

które wynika z takiego określenia: wiemy, że ciśnienie hydrostatyczne ρ jest to siła przypadająca na jednostkę pola, z jaką działa ciecz na to pole. Możemy więc ciśnienie przedstawić jako ciężar słupa cieczy rozważanej /o ciężarze właściwym γ /, którego podstawą jest jednostka pola, a wysokość, dajmy na to, u , czyli, że $\rho = 1 \cdot u \cdot \gamma$; stąd $u = \frac{\rho}{\gamma}$. Otóż często będziemy korzystali z ilorazu $\frac{\rho}{\gamma}$, któ-

ry wyznacza wysokość słupa cieczy, mierzącego ciśnienie p . Wielkość $\frac{p}{\gamma}$ będziemy przez skrócenie nazywali wysokością ciśnienia p .

Równanie /12/ daje nam, że ciśnienie na dnie

$$p_d = p_a + \gamma h$$

albo po podzieleniu obydwu stron przez γ otrzymamy:

$$\frac{p_d}{\gamma} = \frac{p_a}{\gamma} + h$$

Wówczas dalej postępujemy tak /rys. 7/:

Od osi pionowej OO , odkładamy odcinek OB prostopadły do OO , i $= \frac{p_a}{\gamma}$ w skali wysokości /najlepiej w skali rysunku/. Na prostej O, B , odkładamy

$\frac{p_d}{\gamma} = \frac{p_a}{\gamma} + h$ w tej samej skali i otrzymujemy wykres OO, B, B' .

Jeżeli chcemy znaleźć ciśnienie na głębokości Z , prowadzimy prostą równoległą do OB w odległości Z od niej. Odcinek $O'B'$ wskaże wysokość ciśnienia p_z . Chcąc znaleźć samą wartość p_z , należy wartość odcinka $O'B'$, zmierzonego w skali wysokości, pomnożyć przez γ .

37. PARCIE CIECZY NA PŁASKIE POLE POZIOME.

Niech będzie naczynie z płaskim dnem poziomym