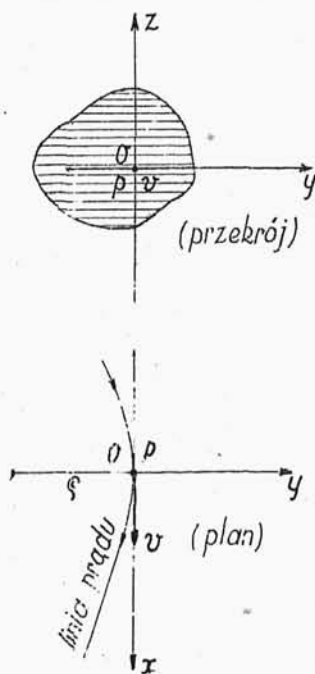


$$z + \frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\gamma} = \text{const.} \quad /c/$$

Jest to znana nam już postać równania, wyrażająca twierdzenie D. Bernoulli'ego.

146. Korzystając z otrzymanych ogólnych równań ruchu cieczy, poznamy **t w i e r d z e n i a** **B r e s s e ' a**, dotyczące rozkładu ciśnień w strudze, płynącej szerokim przekrojem. Niech będzie struga cieczy **d o s k o n a**

ł e j; przekrój strugi niech będzie znacznych rozmiarów. Przez dowolny punkt O poprowadźmy linię prądu, która na pewnym odcinku jest krzywą. W celu rozpatrzenia ciśnień, panujących w obranym przekroju /rys.85/, poprowadźmy osie prostokątne w taki sposób: oś x poprowadźmy **s t y c z**



rys.85.

n i e do linii prądu, przyjmując dodatni kierunek zgodny z kierunkiem prędkości; oś y przesuniemy w płaszczyźnie ściśle stycznej do linii prądu wzdłuż normalnej głównej, nadając jako dodatni kierunek osi o d ś r o d k a k r z y w i z n y; oś z poprowadzimy wzdłuż prostej normalnej do płaszczyzny ściśle stycznej. Niech cząstka cieczy w \mathcal{O} ma prędkość v /wzdłuż osi x / oraz ciśnienie p . Weźmy równania ruchu cieczy w postaci /46/. Jeśli siła zewnętrzna, działająca na ciecz nadaje przyspieszenie a /rzuty niech będą a_x, a_y, a_z / , wtedy równanie ruchu względem osi x będzie: $a_x - \frac{dv_x}{dt} = \frac{g}{r} \cdot \frac{\partial p}{\partial x}$.

W naszym przypadku $v_x = v$, zatem równanie otrzyma postać

$$a_x - \frac{dv}{dt} = \frac{g}{r} \cdot \frac{\partial p}{\partial x}.$$

Równanie ruchu względem osi y będzie

$$a_y - \frac{dv_y}{dt} = \frac{g}{r} \cdot \frac{\partial p}{\partial y}. \text{ Wyraz } \left(-\frac{dv_y}{dt}\right) \text{ jest to przyspieszenie siły bezwładności; w naszym przypadku przy ruchu krzywoliniowym przyspieszeniem siły bezwładności będzie tylko przyspieszenie odśrodkowe równe } \frac{v^2}{\rho},$$

gdzie v jest prędkością po linii prądu, zaś ρ jest promieniem krzywizny.

Stąd równanie ruchu w kierunku osi y otrzyma

postać:

$$\alpha_y + \frac{v^2}{r} = \frac{g}{r} \cdot \frac{\partial p}{\partial y}.$$

Równanie ruchu względem osi Z jest $\alpha_z - \frac{dv_z}{dt} = \frac{g}{r} \cdot \frac{\partial p}{\partial z}$; w naszym przypadku ruch zachodzi w płaszczyźnie ściśle stycznej, zatem rzut U na oś Z jest zerem, a więc $\frac{dv_z}{dt} = 0$. Równanie ostatnie przyjmie więc

postać:
$$\alpha_z = \frac{g}{r} \cdot \frac{\partial p}{\partial z}.$$

Zestawmy otrzymane trzy równania ruchu:

w kierunku osi x : $\alpha_x - \frac{dv}{dt} = \frac{g}{r} \cdot \frac{\partial p}{\partial x}$ /a/

" " " y : $\alpha_y + \frac{v^2}{r} = \frac{g}{r} \cdot \frac{\partial p}{\partial y}$ /b/

" " " z : $\alpha_z = \frac{g}{r} \cdot \frac{\partial p}{\partial z}$ /c/

147. B r e s s e rozpatruje następujące przypadki szczególne: I. Ciecz jest ciężka. Struga cieczy płynie poziomo; linie prądu tworzą krzywe współśrodkowe. Wówczas $\alpha_z = -g$; z równania /c/ otrzymujemy:

$$-g = \frac{g}{r} \cdot \frac{\partial p}{\partial z}, \text{ albo}$$

$$r dz = \partial p \quad ; \text{ a po scałkowaniu}$$

$$r \cdot z = p + \text{const.}$$

Jeśli dla pewnego $z = z_0$ będziemy mieli $p = p_0$, wówczas $p = p_0 + r(z_0 - z)$; stąd widzimy, że rozkład ciśnienia wzdłuż osi pionowej Z podlega prawu hydrostatyki.

Zatem wypowiemy twierdzenie I: w strudze cieczy ciężkiej doskonałej, której cząstki opisują współśrodkowe tory poziome, ciśnienia hydrodynamiczne wzdłuż kierunków pionowych układają się według prawa hydrostatyki.

148. Rozpatrzmy prostoliniowy odcinek strugi cieczy ciężkiej doskonałej; niech ruch cieczy będzie jednostajny, t.j. $v = \text{constans}$.

Wówczas równanie /a/ zmieni się na :

$$a_x = \frac{g}{r} \cdot \frac{\partial p}{\partial x}.$$

Na odcinku prostoliniowym toru, promień krzywizny $\varrho = \infty$, zatem równanie /b/ otrzyma postać:

$$a_y = \frac{g}{r} \cdot \frac{\partial p}{\partial y}.$$

Równanie /c/ nie zmieni się. W rezultacie otrzymujemy równania

$$a_x = \frac{g}{r} \cdot \frac{\partial p}{\partial x}.$$

$$a_y = \frac{g}{r} \cdot \frac{\partial p}{\partial y}$$

$$a_z = \frac{g}{r} \cdot \frac{\partial p}{\partial z}.$$

Są to równania mówiące o takim samym rozkładzie ciśnień, jakie mieliśmy w hydrostatyce. Wypowiemy zatem

Twierdzenie II: W cieczy doskonałej, będącej w ruchu prostoliniowym i jednostajnym, ciśnienia hydrodynamiczne rozkładają się wewnątrz cieczy według prawa hydrostatyki.

149. Twierdzenie III.

Niech cząstki cieczy doskonałej poruszają się wszystkie jednakowo i przy tym tak, jakby się poruszały pod działaniem sił zewnętrznych; wówczas ciśnienia w tym momencie w całej cieczy są jednakowe. O słuszności tego twierdzenia przekonamy się, biorąc pod uwagę równania ruchu /46/:

$$a_x - \frac{dv_x}{dt} = \frac{g}{\gamma} \cdot \frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\alpha_y - \frac{d\ddot{v}_y}{dt} = \frac{g}{r} \cdot \frac{\partial p}{\partial y}$$
$$\alpha_z - \frac{d\ddot{v}_z}{dt} = \frac{g}{r} \cdot \frac{\partial p}{\partial z}.$$

Jeśli ruch cząstek jest taki, jakiby był pod działaniem siły, nadającej przyspieszenie α , wówczas powinno być:

$$\alpha_x = \frac{dv_x}{dt}; \alpha_y = \frac{dv_y}{dt}; \alpha_z = \frac{dv_z}{dt},$$

a wtedy z równań powyższych otrzymamy:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial z} = 0$$

Stąd widzimy, że p nie zależy od miejsca w strudze i powinno być we wszystkich punktach stałe. Zachodzi ten warunek naprz. wówczas, kiedy ciecz wypływa swobodnie przez mały otwór z naczynia i znajduje się pod działaniem siły ciężkości.

150. Twierdzenie IV.

Otrzymane wyżej twierdzenia mogą znaleźć zastosowanie również dla cieczy rzeczywistych, znajdujących się w ruchu bardzo powolnym, kiedy siły bezwładności są bardzo małe. Wówczas ciśnienia wewnątrz płynącej cieczy kształ-

t u j ą s i ę w s p o s ó b b a r d z o z b l i -
ż o n y d o t e g o , c o w y n i k a ł o b y z
p r a w a h y d r o s t a t y k i .

Dostrzeżemy to łatwo z równań /46/, jeśli od-
rzucimy przyspieszenia $\frac{dv_x}{dt}$, $\frac{dv_y}{dt}$, $\frac{dv_z}{dt}$, gdyby te z po-
wodu powolności ruchu były nieznaczące.

151. Twierdzenie V. J e ś l i w s t r u d z e
c i e c z y r z e c z y w i s t e j i s t n i e -
j e p ł a s k i p r z e k r ó j F , d o k t ó -
r e g o w s z y s t k i e l i n i e p r ą d u
s ą n o r m a l n e i n a p e w n e j z n a -
c z n i e j s z e j o d l e g ł o ś c i p o z o -
s t a j ą p r o s t o l i n i o w y m i , w ó w -
c z a s c i ś n i e n i a h y d r o d y n a m i -
c z n e w t y m p r z e k r o j u k s z t a ł -
t u j ą s i ę w e d ł u g p r a w a h y d r o -
s t a t y k i . P o w y ż s z ą w ł a s n o ś ć d o s t r z e ż e m y , j e ś -
l i , p r z y j ą w s z y w s p o m n i a n y p r z e k r ó j F z a p ł a s z c z y z n ą
 yOz , z w r ó c i m y u w a g ę n a t o , ż e p r ę d k o ś ć n a w s z y s t -
k i c h l i n i a c h p r ą d u j e s t n o r m a l n a d o yOz , ż e z a t e m
n i e m a s k ł a d o w y c h p r ę d k o ś c i v_y , v_z , a w i ę c $\frac{dv_y}{dt} = \frac{dv_z}{dt} = 0$.
W ó w c z a s r ó w n a n i a /46/ p r z y j m ą p o s t a ć :

$$\alpha_x - \frac{dv}{dt} = \frac{g}{\gamma} \cdot \frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\alpha_y = \frac{g}{\gamma} \cdot \frac{\partial p}{\partial y}$$

$$\alpha_z = \frac{g}{\gamma} \cdot \frac{\partial p}{\partial z}.$$

Z dwóch ostatnich równań wnioskujemy, że ciśnienia w przekroju F strugi rozkładają się według prawa hydrostatyki.

152. T w i e r d z e n i e VI dotyczy strugi cieczy rzeczywistej, płynącej w ten sposób, że linie prądu są krzywymi, do siebie równoległymi. Wówczas przekrój normalny do linii prądu, przechodzącej przez środek ciężkości przekroju, przecinać będzie wszystkie linie prądu w danej strudze pod kątem prostym.

Dla każdej linii prądu będą ważne równania z grupy równań /46/:

$$\alpha_y + \frac{v^2}{\rho} = \frac{g}{\gamma} \cdot \frac{\partial p}{\partial y}$$

oraz

$$\alpha_z = \frac{g}{\gamma} \cdot \frac{\partial p}{\partial z}.$$

Równanie ostatnie wskazuje, że ciśnienia wzdłuż normali do płaszczyzny ściśle stycznej podlegają

prawu hydrostatyki, zaś wzdłuż normalnej głównej /w płaszczyźnie ściśle stycznej/ ciśnienia są zależnione nie tylko od sił zewnętrznych lecz i od sił odśrodkowych.

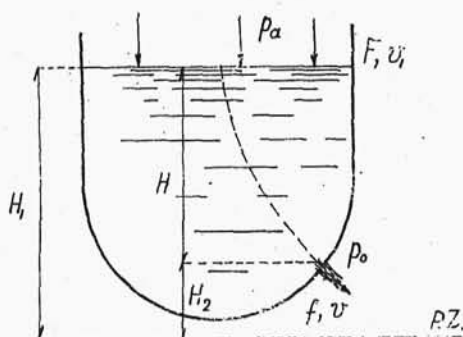
WYPLYW CIECZY PRZEZ OTWORY.

153. Niech będzie naczynie, napełnione do pewnej wysokości cieczą ciężką. Niech poziom cieczy będzie stały. W ścianie naczynia mamy otwór o n i e - w i e l k i m p o l u f /rys.86/.

Z n a l e ź ć p r ę -
d k o ś ć w y p ł y w u
i w y d a t e k c i e -
c z y w j e d n o s t -
c e c z a s u .

Przypuśćmy, że na ra-
zie mamy ciecz doskonałą.

Wyobraźmy sobie strugę cien-



rys.86.

ką, która się zaczyna na swobodnej powierzchni, będącej na wysokości H_1 , nad dowolnym poziomem zasadniczym. Niech pole swobodnej powierzchni będzie F ,

prędkość cieczy w tym przekroju niech będzie v_1 , oraz ciśnienie zewnętrzne p_a ; drugi przekrój strugi obieramy w otworze f , którego środek niech znajduje się na wysokości H_2 ponad obranym poziomem zasadniczym. Przy wylocie niech będzie prędkość v oraz ciśnienie $p_o \approx p_a$.

Zastosujemy twierdzenie D. Bernoulli'ego do cząstki na początku i na końcu tak pomyślanej strugi, pisząc:

$$H_1 + \frac{p_a}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} = H_2 + \frac{p_o}{\gamma} + \frac{v^2}{2g}.$$

Ponieważ ruch mamy ciągły, więc $v_1 F = v f$ czyli $v_1 = v \frac{f}{F}$, zatem:

$$H_1 + \frac{p_a}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} \left(\frac{f}{F}\right)^2 = H_2 + \frac{p_o}{\gamma} + \frac{v^2}{2g}$$

Stąd

$$v = \sqrt{\frac{2g[H_1 - H_2 + \frac{p_a - p_o}{\gamma}]}{1 - \left(\frac{f}{F}\right)^2}}$$

Ponieważ $H_1 - H_2 = H$, gdzie przez H oznaczamy głębokość środka /ciężkości/ otworu f pod swobodną powierzchnią, więc:

$$v = \sqrt{\frac{2g\left(H + \frac{p_a - p_o}{\gamma}\right)}{1 - \left(\frac{f}{F}\right)^2}}$$

Taki jest wynik teoretyczny.

Ponieważ, jednak, mamy ciecz rzeczywistą, zachod-

dział muszą pewne opory przy wypływie, które spowodują mniejszą niż teoretyczną prędkość. Aby wynik, otrzymany dla cieczy doskonałej, można było stosować do cieczy rzeczywistej - przede wszystkim do wody - należy wzór ostatni uzupełnić współczynnikiem φ , pisząc:

$$v = \varphi \sqrt{\frac{2g(H + \frac{p_a - p_o}{\gamma})}{1 - (\frac{f}{F})^2}} \quad /49/$$

Współczynnik φ nazywamy **współczynnikiem prędkości**; będzie to stosunek prędkości rzeczywistej do prędkości teoretycznej. Wartość tego współczynnika otrzymujemy z doświadczenia: φ jest mniejsze od jednostki, o czym niżej.

154. Rozpatrując wzór /49/ widzimy że może tu zajść kilka przypadków.

a/ Przede wszystkim, kiedy przekrój F jest bardzo duży w porównaniu z f . Wtedy ułamek $\frac{f}{F}$ jest bardzo mały w porównaniu z jednością, tym bardziej wzięty do kwadratu, może więc być przy jedności opuszczony. Otrzymujemy wzór:

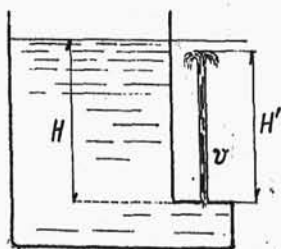
$$v = \varphi \sqrt{2g(H + \frac{p_a - p_o}{\gamma})} \quad /50/$$

b/ Niech, dalej, będzie ten przypadek, że ciśnienie zewnętrzne na swobodną powierzchnię i przy otworze f są równe: $p_a = p_o$. Wtedy:

$$v = \sqrt{2gH} \quad /51/$$

Ten ostatni wzór znalazł na podstawie doświadczeń Torricelli /1608 - 1647/.

Wzór Torricelli'ego dla cieczy doskonałej wskazuje, że cząstki cieczy wypływające z otworu mają taką prędkość, jaką miałyby, spadając ruchem swobodnym ze swobodnej powierzchni do poziomu środka otworu. Wynik ten nie zależy od tego, w jakim miejscu ścianki wykonany jest otwór. Jeśli wyobrazimy sobie otwór w miejscu, jak na rysunku 87, ciecz doskonała wypływać będzie z prędkością



rys.87.

$v = \sqrt{2gH}$ do góry. Cząstki wyrzucone do góry z prędkością v , mogą się podnieść na wysokość $\frac{v^2}{2g}$ czyli w naszym przypadku na wysokość H . Doś-

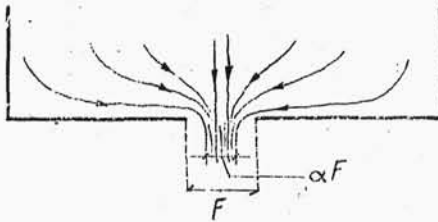
wiadczenie nie stwierdza tego wyniku ściśle, co jest zrozumiałe, gdyż prędkość wypływu cieczy rzeczywistej jest $v = \varphi \sqrt{2gH}$, a stąd wysokość podniesienia się strumienia $H' = \frac{v^2}{2g} = \varphi^2 H$; ponieważ $\varphi < 1$; więc $H' < H$. Prócz tego strumień cieczy w powietrzu doznaje tarcia, przez co wysokość podniesienia się jego tym bardziej jest zmniejszona.

155. Teoretyczny wydatek Q otrzymujemy ze wzoru:

$$Q = v \cdot F.$$

W rzeczywistości jednak, okazuje się, że przekrój wypływającego z otworu strumienia nie jest taki sam jak pole otworu; zachodzi tu, jak będziemy to nazywali, dławienie strumienia; skutkiem dławienia przekrój strumienia jest nie F , lecz αF , gdzie α jest ułamkiem zwykłym, nazywanym współczynnikiem dławienia. Zjawisko dławienia strumienia wypływającego przez otwór w dnie objaśnić można w taki sposób /rys.88/: do otworu w cienkiej ścianie dopływa ciecz z różnych miejsc naczynia. Częstki cieczy, płynące strugami wzdłuż prostych prostopadłych do pola otworu, nie doznają żadnej zmiany kierunku ruchu; natomiast cząstki, płynące do

otworu w strudze, będącej wzdłuż płaszczyzny dna, zmu-

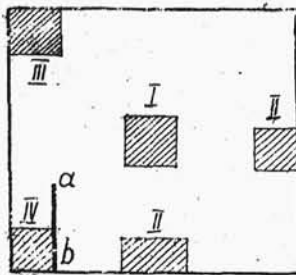


rys.88.

szone są zmienić kie-
runek ruchu; ta zmia-
na jednak musi zacho-
dzić - wobec bezwład-
ności cieczy - stop-
niowo i przez to ciecz
nie może wypełnić ca-

łego przekroju, lecz wypływa zwężonym - inaczej powie-
my - z d ł a w i o n y m przekrojem.

Jeśli otwór w dnie znajduje się z daleka od ścia-
nek bocznych naczynia, wówczas strumień będzie zdła-
wiony ze wszystkich stron. Na rys.89 mamy pokazane w



rys.89.

planie dno; otwór I spowo-
duje dławienie ze wszyst-
kich stron; nazwiemy takie
dławienie z u p e ł n y m.
Gdyby otwór był wykonany
w miejscu II - otrzymamy
dławienie n i e z u p e ł -

n e , jak w danym przypadku zachodzące z trzech stron.
W razie otworu III - będzie dławienie n i e z u p e ł -

n e z dwóch stron. Gdybyśmy mieli wykonaną przy dnie pionową ściankę ab przy samym otworze IV, otrzymamy dławienie tylko z jednej strony. Stąd widzimy, że położenie otworu w dnie względem ścianek naczynia ma wpływ na dławienie, a więc na wartość współczynnika dławienia α .

Powyższe uwagi, dotyczące otworu w dnie naczynia, są ważne również dla otworów, wykonanych w ścianie bocznej naczynia niezależnie od tego, czy ścianka ta będzie pionowa, czy też pochylona.

Uwagi powyższe są również słuszne dla otworów nie tylko prostokątnych, jak wyżej, lecz dla otworów jakiegokolwiek kształtu. Oczywiście w każdym z tych przypadków wartości współczynnika α będą różne.

156. Jeśli uwzględnimy, że prędkość rzeczywista jest φ razy większa niż teoretyczna, oraz że przekrój rzeczywisty jest αF , wówczas otrzymamy, że rzeczywisty wydatek:

$$Q = \varphi \cdot v \cdot \alpha F = \varphi \alpha \cdot v F = \mu v F,$$

gdzie $\mu = \varphi \alpha$ nazywamy współczynnikiem wydátku.

157. Należy parę słów poświęcić współczynnikom

prędkości, dławienia i wydatku, aby móc się lepiej orientować w liczbach, które są podawane w tablicach.

Spółczynnik prędkości φ z trudem daje się wyznaczyć bezpośrednio z doświadczenia. Natomiast współczynnik dławienia α i wydatku μ dają się dość prosto wyznaczyć. Jeśli zatem poznamy bezpośrednio współczynniki α i μ , znajdziemy wtedy współczynnik φ z zależności $\varphi = \frac{\mu}{\alpha}$.

Z tych obliczeń wynika, że współczynnik prędkości φ jest dość bliski 1 i dla otworów w cienkich ściankach ma wartości 0,96 do 0,99.

Spółczynnik ten zależy od wysokości, na jakiej znajduje się otwór pod swobodną powierzchnią.

Doświadczenia wskazują, że im wysokość ta jest większa, tym wartość φ jest bliższa górnej granicy.

Ważniejsze znaczenie w zastosowaniach praktycznych ma współczynnik wydatku μ a nieraz współczynnik dławienia α . Doświadczenia wskazują, że wartości współczynnika μ zależą: a/ od ciśnienia, b/ od wymiarów otworu, c/ od kształtu otworu, d/ od sposobu wykonania otworu oraz e/ od miejsca gdzie w ścianie lub w dnie jest wykonany otwór.

Zależności powyższych dopatrzemy się z poniższych tabel, z których tabela A dotyczy otworu okrągłego o ϕd mm, tabela B - otworu kwadratowego o boku a mm; otwory wykonane są w cienkiej ścianie; ciśnienie wyrażone jest w H -m. słupa wodnego; wypływ wody swobodny w powietrze. /Według Smith'a/.

A. /spółczynnik μ /.

d mm H m	10	20	30	60	180
0,5	0,622	0,609	0,605	0,600	0,597
1,0	0,615	0,605	0,603	0,599	0,597
1,5	0,613	0,604	0,601	0,598	0,597
2,0	0,610	0,603	0,600	0,598	0,597
3,0	0,605	0,600	0,598	0,597	0,596
6,0	0,600	0,597	0,596	0,596	0,596
15,0	0,596	0,595	0,594	0,594	0,594
30,0	0,593	0,592	0,592	0,592	0,592

B. /spółczynnik μ /.

$\frac{\alpha}{Hm}$ mm	10	20	30	60	180
0,5	0,626	0,613	0,609	0,605	0,603
1,0	0,620	0,609	0,607	0,605	0,603
1,5	0,617	0,607	0,606	0,604	0,603
2,0	0,614	0,607	0,605	0,604	0,603
3,0	0,610	0,605	0,604	0,603	0,602
6,0	0,605	0,602	0,602	0,601	0,601
15,0	0,601	0,601	0,600	0,600	0,599
30,0	0,598	0,598	0,598	0,598	0,598

Z tabelek powyższych widzimy, że w miarę wzrostu ciśnienia współczynnik μ maleje; przy małych ciśnieniach zmniejszanie się μ jest szybsze niż przy większych.

Przy tym samym ciśnieniu współczynnik μ maleje ze zwiększeniem wymiarów otworu; przy małych otworach zmniejszanie się μ jest szybsze niż przy większych.

Spółczynnik μ jest większy dla otworów kwadratowych niż dla okrągłych/jeśli $\alpha = \alpha$ /.

Dla otworów o innych kształtach współczynnik μ ma inne wartości. Stwierdzono, że kolejno mają co raz większe μ otwory: kołowy, kwadratowy, trójkątny i prostokątny.

Następnie zrozumiałe jest, że jeśli otwór w ścianie wykonany jest niestarannie, jest nierówny, z pokaleczony-

mi krawędziami, wówczas μ będzie mniejsze. Wreszcie położenie otworu w dnie naczynia względem ścianek naczynia wpływa na współczynnik wydatku μ , gdyż, jak to było wyjaśnione w art. 153, od tego położenia zależy współczynnik dławienia, a ten ma wpływ na wartość współczynnika wydatku μ .

Jeżeli dla otworu prostokątnego I/rys. 89/ μ będzie = 0,62, to dla otworu II μ = 0,64, dla otworu III μ = 0,663 a dla otworu IV μ = 0,69.

Wyżej mówiliśmy szczegółowiej o współczynniku wydatku. Jeśli przypomnimy sobie uwagę, zrobioną wyżej co do współczynnika prędkości, że φ jest bliskie 1, przekonamy się, że współczynnik dławienia $\alpha = \mu$.

153. PRZYSTAWKI. Współczynniki dławienia i wydatku mogą być znacznie zmienione przez zastosowanie t.zw. przys t a w k i, tj. rurki wylotowej o różnych kształtach.

a/ Zewnętrzna przystawka cylindryczna/rys. 90/ o średnicy d i długości $l = \begin{vmatrix} 1d & 2-3d & 12d \\ 0,83 & 0,82 & 0,77 \end{vmatrix}$ daje współczynnik $\mu =$

b/ Przystawka stożkowa o kącie δ i o długości $l = 2,5d$ /rys. 91/, przy $d = 20$ mm i przy ciśnieniu 3 m