

z p o ł o ż e n i a . Drugi wyraz  $\gamma q \frac{p_i}{\gamma}$  daje energię również potencjalną, wynikającą z ciśnienia; nazwiemy tę wielkość energią z ciśnienia. Wreszcie ostatni wyraz  $\frac{\gamma q}{\gamma} \cdot \frac{v_i^2}{2}$  oznacza energię kinetyczną cząstki  $\gamma q$ . Wtedy równanie /41/ może być wypowiedziane w ten sposób: Dla każdej cząstki cieczy doskonałej, znajdującej się w ruchu trwałym i ciągłym, suma energii z położenia, energii z ciśnienia i energii kinetycznej jest wielkością stałą.

Mamy więc twierdzenie, wyrażające zasadę zachowania energii strumienia cieczy. Wartość wielkości  $q$  nie gra tu żadnej roli. Treść twierdzenia nic się nie zmieni, jeśli zamiast  $q$  przyjmiemy objętość  $Q$  cieczy, która w jednostkę czasu /sek/ przepływa w strudze lub w przewodzie.

135. PRACA STRUMIENIA CIECZY. Niech będzie przewód  $K$ , w którym płynie ciecz o ciężarze właściwym  $\gamma$  w objętości  $Q \text{ m}^3$  na sek. Niech to będzie ruch trwały

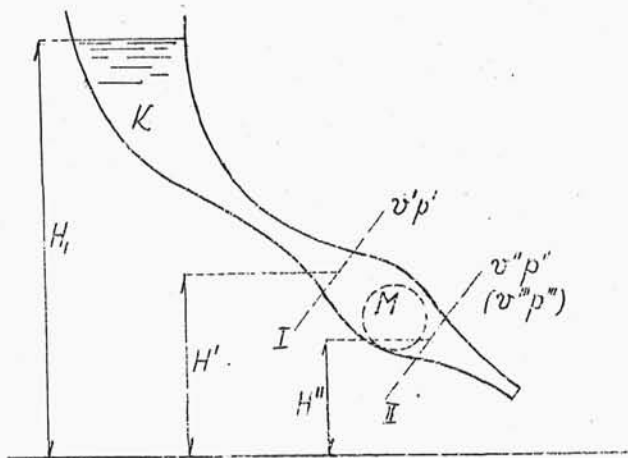
i ciągły. Na zasadzie poprzedniego artykułu wiemy, że suma trzech wspomnianych energii w każdym położeniu cieczy będzie jedna i ta sama.

Jeśli więc obierzemy dwa przekroje I i II, w których ciecz ma prędkości  $v'$  i  $v''$  oraz ciśnienia  $p'$  i  $p''$ , wówczas dla cząstki wziętej z początku w I, a następnie w II przekroju, możemy napisać, że:

$$Q \cdot \gamma \cdot H' + Q \cdot \gamma \cdot \frac{p'}{\gamma} + \frac{Q \gamma}{g} \cdot \frac{v'^2}{2} = Q \gamma H'' + Q \gamma \frac{p''}{\gamma} + \frac{Q \gamma}{g} \cdot \frac{v''^2}{2}.$$

Przypuść-

my, że w stosownym miejscu przewodu między przekrojem I i II stawiamy mechanizm  $M$ , który zostaje wprawiony w ruch przez płynącą w przewodzie ciecz. Mechanizm ten, porusza-



rys.81.

jąc się, może być wykorzystany do wykonania pracy. Praca, otrzymana przy pomocy takiego mechanizmu, który nazwiemy

silnikiem hydraulicznym, musi być zaczerpnięta z energii cieczy płynącej. Widzimy więc, że energia cieczy  $Q$  po przejściu przez silnik  $M$  powinna się zmniejszyć. Różnica między energią w przekroju I i II powinna być uważana jako energia zamieniona na pracę silnika. Oznaczmy pracę silnika w jednostkę czasu, czyli tak zwaną "moc" silnika przez  $E$ , wtedy

$$E = Q\gamma\left(H' + \frac{p'}{\gamma} + \frac{v'^2}{2g}\right) - Q\gamma\left(H'' + \frac{p''}{\gamma} + \frac{v''^2}{2g}\right),$$

gdzie  $v''$  i  $p''$  są to prędkość i ciśnienie zmienione skutkiem istnienia silnika; ostatnie równanie napiszemy w postaci:

$$E = Q\gamma(H' - H'') + Q\gamma\left(\frac{p'}{\gamma} - \frac{p''}{\gamma}\right) + \frac{Q\gamma}{g}\left(\frac{v'^2}{2} - \frac{v''^2}{2}\right).$$

Stąd wnioskujemy, że praca silnika może być oparta na wyzyskaniu energii cieczy: a/ z powodu zmiany wysokości położenia; o tym mówi pierwszy wyraz:

$Q\gamma(H' - H'')$  /; b/ z powodu zmiany ciśnienia, jak wskazuje drugi wyraz  $Q\gamma\left(\frac{p'}{\gamma} - \frac{p''}{\gamma}\right)$  /; wreszcie c/ z powodu zmiany prędkości, jak to widzimy z trzeciego wyrazu:

$$\frac{Q\gamma}{g}\left(\frac{v'^2}{2} - \frac{v''^2}{2}\right).$$

Silników mamy kilka rodzajów.

Każdy silnik korzysta z tej lub innej przemiany energii cieczy, albo z kilku przemian.

Jedne z silników przeważnie wyzyskują energię z położenia, jak koło wodne nasiębieczne i śródbierne; drugie korzystają przeważnie z przemiany energii z ciśnienia, jak wodne silniki tłokowe; wreszcie trzecie wyzyskują przeważnie energię kinetyczną - jak koło podsiębieczne, turbiny różnych rodzajów.

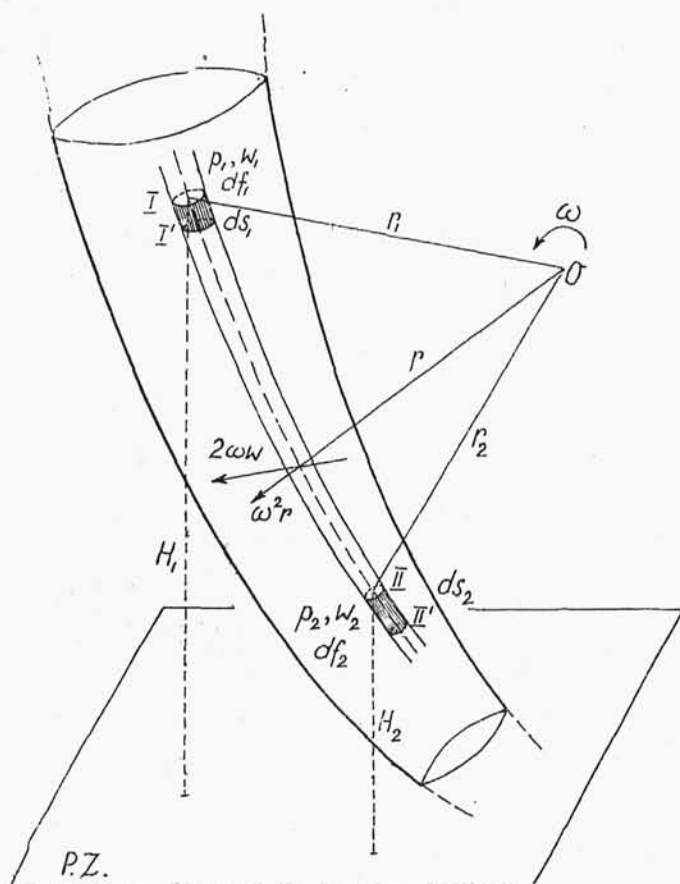
136. TWIERDZENIE D. BERNOULLI'ego DLA CIECZY  
BĘDĄCEJ W RUCHU WZGLĘDNYM.

Niech ciecz doskonała znajduje się w ruchu w naczyniu, które otrzymuje chwilowy obrót około osi  $O$  z prędkością kątową  $\omega$ .

Obierzmy wewnątrz płynącej cieczy strugę i w niej dwa przekroje  $df_1$ , oraz  $df_2$  /rys.82/. Niech te przekroje będą w odległościach  $r_1$  i  $r_2$  od osi obrotu i niech znajdują się na wysokościach  $H_1$  i  $H_2$  nad poziomem zasadniczym.

Niech, dalej, w przekroju  $df_1$  będzie prędkość /względna/  $w_1$ , ciśnienie  $p_1$ . Toż samo w przekroju  $df_2$

niech będą: prędkość  $w_2$  i ciśnienie  $p_2$ .



rys.82.

Mamy zbadać ruch części strugi, zawartej między przekrojami  $df_1$  i  $df_2$ ; wobec tego należy odrzucić ciecz, znajdującą się dookoła pomyślanej części strugi, zastępując działanie odrzuconej cieczy siłami, które będą: a/ siły powierzchniowe w przekroju I  $p, df_1$ ,

w przekroju II siła  $\rho_2 d_{f_2}^f$ , oraz siły na powierzchni bocznej naszej strugi; poza tym b/ siła ciężkości, działająca na wszystkie cząstki strugi, zawarte między przekrojami I i II /jest to siła "objętościowa"/.

Siły podane tu pod a/ i b/ są to siły i s t o - t n i e działające na badaną strugę.

W danym przypadku ciecz płynie w naczyniu, które samo jest w ruchu, czyli ruch cieczy w stosunku do naczynia jest r u c h e m w z g l ę d n y m . Z teorii ruchu względnego wiemy, że możemy ruch ten uważać jako r u c h b e z w z g l ę d n y, czyli uważać, że ruch unoszenia/tj. ruch naczynia/ nie istnieje, jeśli prócz sił, wyżej wyliczonych, istotnie na ciecz działających, przyłożymy siły f i k c y j - n e t.zw. siły uzupełniające: jedną p r z e c i w - n ą i r ó w n ą s i l e u n o s z e n i a i drugą t.zw. z ł o ż o n ą s i ł ę o d ś r o d k o w ą.

Pierwsza siła uzupełniająca będzie to siła o d - ś r o d k o w a, która mogłaby nadać w miejscu odległym o  $\rho$  od osi obrotu przyspieszenie  $\omega^2 \rho$ . Siła ta skierowana jest o d o s i o b r o t u w z d ł u ż p r o m i e n i a .

Druga siła uzupełniająca, t.zw. z ł o ż e n i a s i ł a o d ś r o d k o w a według twierdzenia C o r i o l i s a jest to siła, która mogłaby nadać przyspieszenie równe  $2W\omega \sin \beta$ , gdzie  $W$  jest prędkością względną w danym punkcie,  $\omega$  - prędkością kątową obrotu, zaś  $\beta$  jest to kąt, który prędkość  $W$  tworzy z osią obrotu. Jeżeliby ciecz płynęła w płaszczyźnie prostopadłej do osi obrotu, wtedy kąt  $\beta$  byłby  $= 90^\circ$ , a zatem przyspieszenie złożonej siły odśrodkowej byłoby  $= 2W\omega$ . W ogólnym przypadku  $\beta \neq 90^\circ$ . Kierunek tego przyspieszenia jest prostopadły do płaszczyzny, przesuniętej przez kierunek prędkości względnej w danym punkcie i przez prostą równoległą do osi obrotu, wyprowadzoną z tegoż punktu. Zatem przyspieszenie to b ę d z i e n o r m a l n e w każdym miejscu d o p r ę d k o ś c i w z g l ę d n e j .

Uprzytomniwszy sobie, jakie siły działają na naszą ciecz, rozpatrzmy część obranej strugi, zawartej między przekrojami I i II.

Zastosujemy, podobnie, jak to robiliśmy w art. 124 twierdzenie o zmianie energii kinetycznej dla

tej strugi w ciągu czasu  $dt$ , kiedy struga zajmie położenie I' II', kiedy zatem przekroje  $df_1$  i  $df_2$  przesuną się o  $ds_1$  i  $ds_2$ .

Jeżeli założymy, że mamy do czynienia z ruchem trwałym i ciągłym, jak to mieliśmy we wspomnianym art., otrzymamy: zmiana energii kinetycznej w czasie  $dt$  będzie

$$\frac{ds_2 \cdot df_2 \cdot \gamma \cdot \frac{w_2^2}{2}}{g} - \frac{ds_1 \cdot df_1 \cdot \gamma \cdot \frac{w_1^2}{2}}{g}$$

Siły, istotnie działające na naszą strugę, wykonają w czasie  $dt$  następujące prace:

Parcia na pole  $df_1$  i  $df_2$  wykonają prace:

$$+df_1 \cdot p_1 \cdot ds_1 \quad \text{ i } \quad -df_2 \cdot p_2 \cdot ds_2$$

Parcia na boczną powierzchnię strugi nie wykonają pracy, gdyż są normalne do drogi.

Siła ciężkości wykona pracę:

$$df_1 \cdot ds_1 \cdot \gamma (H_1 - H_2)$$

Przejdziemy teraz do sił uzupełniających /fikcyjnych/.

Pierwsza siła uzupełniająca, t.j. siła odśrodkowa, której przyspieszenie w każdym miejscu  $= \omega^2 r$ , działając na element strugi  $df \cdot ds$  o masie  $\frac{df \cdot ds}{g} \cdot \gamma$ , wykona podczas przesunięcia tego elementu na drodze



$ds$  pracę równą

$$\frac{df \cdot ds \cdot r}{g} \omega^2 r \cdot ds \cdot \cos(r, ds).$$

Całkowita praca przy przesunięciu całej strugi z położenia I - II do I' - II' będzie:

$$\int_I^{II} \frac{df \cdot ds \cdot r}{g} \cdot \omega^2 r \cdot ds \cdot \cos(r, ds).$$

Ponieważ iloczyn  $df \cdot ds$ , następnie  $r, g, \omega^2$  są wielkościami stałymi dla wszystkich elementów drogi, zaś  $ds \cdot \cos(r, ds)$  może być uważane jako przyrost  $r$ , czyli jako  $dr$ , więc poprzednia praca otrzyma się z wyrażenia:

$$\frac{df \cdot ds \cdot r}{g} \cdot \omega^2 \int_I^{II} r \cdot dr = \frac{df \cdot ds \cdot r}{g} \cdot \omega^2 \cdot \frac{r_2^2 - r_1^2}{2}.$$

Jeżeli oznaczymy przez  $U_1$  i  $U_2$  prędkości unoszenia w przekroju I i II, wtedy otrzymamy:

$\omega r_1 = U_1$  i  $\omega r_2 = U_2$ ; wówczas obliczana praca będzie ostatecznie:

$$\frac{df \cdot ds \cdot r}{g} \cdot \frac{U_2^2 - U_1^2}{2}.$$

Przejdźmy teraz do obliczenia pracy, wykonanej przez drugą siłę uzupełniającą - "złożoną siłę odśrodkową".

Zauważmy, że kierunek tej siły w każdym przekroju strugi, jest normalny do osi strugi, czyli do

prędkości w danym miejscu strugi. Przy przesunięciach poszczególnych elementów, tworzących strugę badaną, praca tej siły równa się zeru, a więc w sumie praca "złożonej siły odśrodkowej" = 0.

Po tych obliczeniach możemy napisać równanie, zawierające twierdzenie o zmianie energii kinetycznej w postaci takiej:

$$\frac{ds_2 \cdot df_2 \cdot r}{g} \cdot \frac{W_2^2}{2} - \frac{ds_1 \cdot df_1 \cdot r}{g} \cdot \frac{W_1^2}{2} = df_1 \cdot ds_1 \cdot p_1 - df_2 \cdot ds_2 \cdot p_2 + df_1 \cdot ds_1 \cdot r (H_1 - H_2) + \frac{df \cdot ds \cdot r}{g} \cdot \frac{U_2^2 - U_1^2}{2}.$$

Ponieważ  $df_1 \cdot ds_1 = df_2 \cdot ds_2 = df \cdot ds$ , więc po skróceniu:

$$\frac{W_2^2}{2g} - \frac{W_1^2}{2g} = \frac{p_1}{r} - \frac{p_2}{r} + H_1 - H_2 + \frac{U_2^2}{2g} - \frac{U_1^2}{2g}.$$

Po przestawieniu stosownym wyrazów, otrzymamy:

$$H_1 + \frac{p_1}{r} + \frac{W_1^2}{2g} - \frac{U_1^2}{2g} = H_2 + \frac{p_2}{r} + \frac{W_2^2}{2g} - \frac{U_2^2}{2g} \quad /42/$$

Równanie to zawiera twierdzenie D. Bernoulli'ego dla cieczy doskonałej, będącej w ruchu względnym.

Równanie to, jak widzimy, różni się od równania dla cieczy, będącej w ruchu bezwzględnym, tylko wyrazami  $\frac{U_1^2}{2g}$ , wzgl.  $\frac{U_2^2}{2g}$ , t.j. wysokościami pręd.

kości unoszenia w odpowiednich przekrojach strugi.  
Zapamiętać należy, że te wysokości winny być o d-  
j ę t e od odpowiednich stron równania.

Wynik ostatnio otrzymany znajduje zastosowanie  
przy badaniu ruchu cieczy w pompach odśrodkowych,  
oraz w turbinach wodnych różnych systemów.

### 137. TWIERDZENIE D.BERNOULLI 'ego DLA CIECZY RZECZYWISTYCH.

Ciecz doskonała tym się zasadniczo różni od cie-  
czy rzeczywistych, że nie posiada lepkości. Lepkość  
będzie tym czynnikiem, który zmusza nas do wprowadze-  
nia pewnych zmian w równaniu, wyrażającym twierdze-  
nie D.Bernoulli ego, otrzymanym dla cieczy doskona-  
łej.

Lepkość powoduje to, że poszczególne cząstki  
cieczy, znajdującej się w strudze, doznają od czas-  
tek cieczy, płynących w sąsiednich strugach - prze-  
szkody w ruchu, w postaci tarcia.

Skutkiem tego oddziaływanie na powierzchnię bocz-  
ną strugi badanej od strony tej cieczy, którą odrzu-  
ciliśmy, już nie może być normalne do poszczególnych