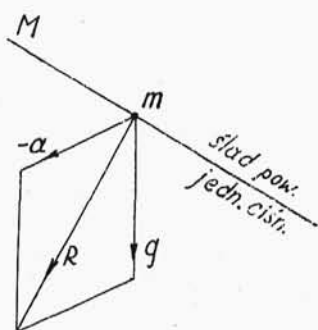


Powiemy więc, że prosta M , a zatem płaszczyzna jednakowego ciśnienia jest prostopadła do wypadkowego przyspieszenia.

Ten, zresztą, wynik można było przewidzieć, gdybyśmy wzięli pod uwagę własność powierzchni jednakowego ciśnienia, przytoczoną w art.30 punkt d/.

96. Zadanie poprzednie można było rozwiązać drogą wykreślną, korzystając z własności powierzchni stałego ciśnienia, o czym była mowa w art.30 punkt d/, a o czym przed chwilą przypomnieliśmy.



rys.52.

Postępujemy tak: na cząstkę m /rys.52/ działają: siła rzeczywista, nadająca przyspieszenie g i siła uzupełniająca, zdolna nadać przyspieszenie $-\alpha$. Dodajmy wy-

kreślnie te dwa przyspieszenia. Otrzymujemy przyspieszenie wypadkowe R .

Poprowadźmy teraz przez punkt m prostą M prostopadłą do R , otrzymamy ślad powierzchni jednakowego ciśnienia na płaszczyźnie xOz ; z tego śladu

wnioskujemy już łatwo o charakterze samej powierzchni jednakowego ciśnienia.

97. Szczególne przypadki w ostatnim przykładzie mogą być takie /rys. 50 i 51/:

a/ kiedy $\alpha = 0$, wtedy $\operatorname{tg}\beta = \frac{\alpha}{g}$, co łatwo też dostrzec z geometrycznego rozwiązania;

b/ kiedy $\alpha = 90^\circ$ /naczynie posuwa się pionowo w górę/, $\operatorname{tg}\beta = 0$, czyli że $\beta = 0$; wówczas powierzchnie jednakowego ciśnienia są płaszczyznami poziomymi;

c/ kiedy $\alpha = 180^\circ$ /naczynie porusza się poziomo w stronę ujemnych x /, wtedy $\operatorname{tg}\beta' = -\frac{\alpha}{g}$, a więc powierzchnie jednakowego ciśnienia tworzą z osią x kąt $\beta'' = -\beta$ z przypadku a/.

d/ kiedy $\alpha = 270^\circ$ /naczynie opada pionowo w dół/, i kiedy $\alpha \leq g$

wówczas $\operatorname{tg}\beta = 0$ i kąt $\beta = 0$, t.j.

powierzchnie jednakowego ciśnienia są płaszczyznami poziomymi.

e/ kiedy $\alpha = 270^\circ$ i poza tym $\alpha > g$ /naczynie spada pionowo w dół ruchem swobodnym/ wówczas:

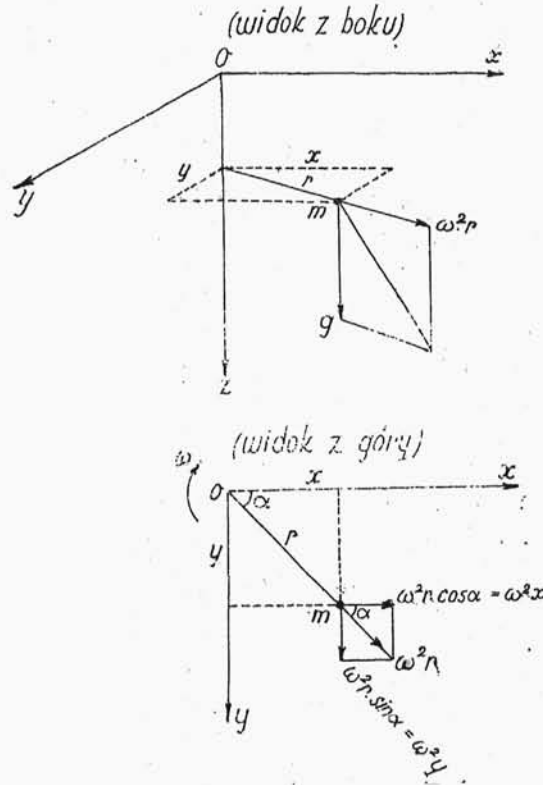
$\operatorname{tg}\beta = \frac{0}{0}$; to znaczy, że wtedy powierzchnie jednakowego ciśnienia nie istnieją, gdyż poszczególne cząstki cieczy zachowują się jak swobodne cząstki.

nie wywierając jedna na drugą żadnego ciśnienia. W każdym miejscu cieczy ciśnienie jest jednakowe i równe zewnętrznemu ciśnieniu.

98. PRZYKŁAD XVIII. Naczynie, napełnione ciężką, jednorodną cieczą, obraca się około osi pionowej ze stałą prędkością kątową ω . Znaleźć kształt powierzchni jednakowego ciśnienia, oraz wyznaczyć linie sił.

W danym razie będziemy rozpatrywali cząstkę cieczy względem osi, z których oś x i y znajdują się w płaszczyźnie poziomej, oś Z jest skierowana pionowo w dół; niech oś Z będzie osią obrotu naczynia /rys.53/. Osi Ox i Oy biorą razem z naczyniem udział w obrocie.- Cząstka m znajduje się w stanie spoczynku względnego w stosunku do obranych osi x, y, Z ; na podstawie teorii spoczynku względnego możemy taką cząstkę uważać w spoczynku bezwzględnym, jeśli prócz siły rzeczywistej - siły ciężkości - przyjmujemy, że na cząstkę działa jeszcze siła uzupełniająca, która jest równa i przeciwna sile unoszenia. Siłą unoszenia będzie w tym przypadku siła dośrodkowa. Zatem powinniśmy przyjąć, że na badaną cząstkę cieczy działa siła ciężkości i siła od-

wrotna do siły dośrodkowej czyli tak zwana
siła o d ś r o d k o w a, mogąca nadać przyspie-
szenie $=\omega^2 r$, skierowane o d o s i o b r o t u .



rys. 53.

W równaniu powierzchni jednakowego ciśnienia

$$Xdx + Ydy + Zdz = 0$$

należy zamiast X, Y, Z wstawić sumy rzutów przys-
pieszeń g i $\omega^2 r$ na osi x, y, z .

Przyspieszenie	ma rzuty na oś		
	x	y	z
g	0	0	g
$\omega^2 r$	$\omega^2 x$	$\omega^2 y$	0

Zatem

$$X = \omega^2 x$$

$$Y = \omega^2 y$$

$$Z = g$$

Wobec tego równanie powierzchni jednakowego ciśnienia otrzyma postać:

$$\omega^2 x dx + \omega^2 y dy + g dz = 0$$

a po scałkowaniu:

$$\frac{\omega^2 x^2}{2} + \frac{\omega^2 y^2}{2} + g z = \text{Const.},$$

albo inaczej:

$$x^2 + y^2 + \frac{2gz}{\omega^2} = C'.$$

Jest to równanie powierzchni krzywej drugiego stopnia. Zbadajmy bliżej kształt tej powierzchni.

W tym celu przetnijmy znalezioną powierzchnię jakąkolwiek płaszczyzną poziomą, t.j. płaszczyzną prostopadłą do Z .

Równanie takiej płaszczyzny będzie $Z = C''$ /dowolna stała/. Przecięcie się płaszczyzny tej z powierzchnią znalezioną znajdzie podług linii krzywej, której równanie otrzymamy, rozwiązując razem rów-

nanie:

$$x^2 + y^2 + \frac{2gz}{\omega^2} = C'$$

$$z = C''$$

otrzymamy: $x^2 + y^2 = C' - \frac{2gC''}{\omega^2}$ albo napiszemy prościej:

$$x^2 + y^2 = \text{Const.}$$

Jest to równanie okręgu koła, którego środek znajduje się na osi Z .

Zatem powiemy, że znaleziona powierzchnia jest powierzchnią o b r o t o w ą, otrzymaną przez obrót pewnej krzywej około osi Z .

Znajdźmy tę krzywą. W tym celu przetnijmy znalezioną powierzchnię płaszczyzną pionową, przechodzącą przez oś Z , na przykład płaszczyzną xOz . Równanie płaszczyzny xOz jest: $y = 0$. Rozwiązując jednocześnie równanie powierzchni krzywej:

$$x^2 + y^2 + \frac{2gz}{\omega^2} = C'$$

oraz $y = 0$

otrzymamy: $x^2 + \frac{2gz}{\omega^2} = C'$. Jest to równanie paraboli, której osią jest oś Z .

Powiemy zatem, że powierzchnie jednakowego

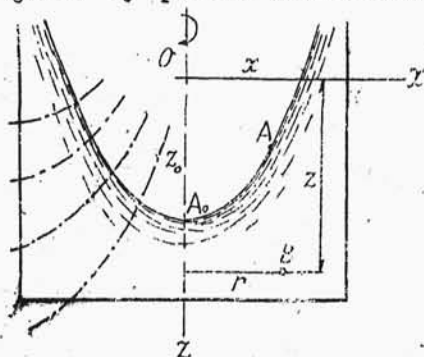
ciśnienia w cieczy, znajdującej się w naczyniu, które się obraca jednostajnie około osi pionowej, są paraboloidami obrotowymi.

Powierzchnia swobodna takiej cieczy również jest paraboloidą obrotową.

Niech równanie paraboli, otrzymującej się z przecięcia swobodnej powierzchni płaszczyzną xOz będzie

$$x^2 + \frac{2gz}{\omega^2} = C_0.$$

Do wyrugowania C_0 skorzystamy z tego warunku, że najniższy punkt zwierciadła cieczy /rys.54/ znajduje się w odległości Z_0



rys. 54.

i jednocześnie na osi obrotu; zatem przy $x=0$ mamy dla tego punktu:

$$0 + \frac{2gZ_0}{\omega^2} = C_0$$

Znaleźliśmy C_0 , które

wstawimy w równanie poprzednie:

$$x^2 + \frac{2gz}{\omega^2} = \frac{2gZ_0}{\omega^2},$$

albo

$$x^2 = \frac{2g}{\omega^2}(Z_0 - z)$$

Jest to równanie krzywej przekroju swobodnej powierzchni cieczy, obracającej się z naczyniem około osi pionowej.

Należy tu zwrócić uwagę, że oś x oraz początek współrzędnych znajdują się w odległości Z_0 nad wierzchołkiem paraboli.

Gdybyśmy zmienili osi współrzędnych, przyjmując początek współrzędnych w wierzchołku A_0 paraboli, poziomą oś x stycznie do paraboli, a oś Z pionowo do góry, wówczas równanie /28/ przybrałoby postać:

$$x^2 = \frac{2g}{\omega^2} \cdot Z \quad /28a/$$

99. Jeśliby zachodziła potrzeba znalezienia ciśnienia hydrostatycznego w naczyniu z poprzedniego przykładu, należałoby skorzystać z równania /3/:

$$dp = \frac{\gamma}{g}(Xdx + Ydy + Zdz);$$

po scałkowaniu otrzymamy:

$$p = \frac{\gamma}{g} \int (Xdx + Ydy + Zdz) + Const.$$

Niech w punkcie A będzie ciśnienie p_a , wtedy

$$p = p_a + \frac{\gamma}{g} \int_A^{(x,y,z)} (Xdx + Ydy + Zdz).$$

Jeśli podstawimy na X, Y, Z wartości poprzednio otrzymane, znajdziemy:

$$\rho = \rho_a + \frac{\gamma}{g} \left[\frac{\omega^2 x^2 + \omega^2 y^2}{2} + gZ \right]_A^{(x,y,z)}.$$

Jeżeli za punkt A przyjmiemy wierzchołek paraboli A_0 /najniższy punkt swobodnego zwierciadła o współrzędnych $x=0, y=0, z=z_0$ /, dowolny zaś punkt, np. B /rys.54/ obierzemy w odległości r od osi obrotu i na głębokości Z od płaszczyzny xOy , wtedy:

$$\rho = \rho_a + \frac{\gamma}{g} \left[\frac{\omega^2 r^2}{2} + g(z-z_0) \right] \quad /29/$$

100. Znajdźmy równanie linii sił dla powyższego przypadku. Równanie różniczkowe linii sił jest:

$$\frac{d\xi}{X} = \frac{d\eta}{Y} = \frac{dz}{Z}.$$

Spółrzędne ξ i η , wobec symetrii powierzchni jednakowego ciśnienia, względem osi Z są jednakowego charakteru, zatem wystarczy rozpatrzeć równanie:

$$\frac{d\xi}{X} = \frac{dz}{Z}$$

Ponieważ $X = \omega^2 x$, $Z = g$, więc

$$\frac{d\xi}{\omega^2 x} = \frac{dz}{g}$$

Tu właściwie X jest jednoznaczne ze współrzędną ξ badanej linii sił.

Mamy zatem:

$$\frac{1}{\omega^2} \cdot \frac{d\xi}{\xi} = \frac{dz}{g};$$

po scałkowaniu otrzymamy:

$$\frac{1}{\omega^2} \log \xi = \frac{1}{g} z + \text{const.}, \text{ albo } \log \xi = \frac{\omega^2}{g} z + \text{const.}$$

Niech szukana linia sił ma przechodzić przez punkt, którego współrzędne są ξ_1 i z_1 ; wtedy znajdziemy:

$$\log \xi - \log \xi_1 = \frac{\omega^2}{g} (z - z_1) \quad , \text{ albo:}$$

$$\log \frac{\xi}{\xi_1} = \frac{\omega^2}{g} (z - z_1).$$

Stąd

$$\frac{\xi}{\xi_1} = e^{\frac{\omega^2}{g} (z - z_1)}$$

albo

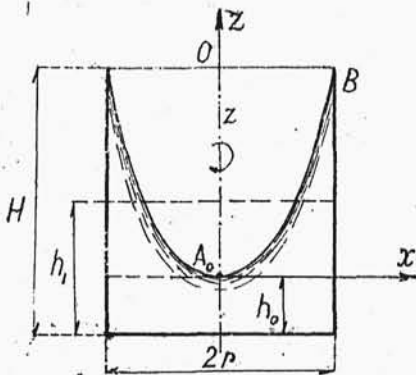
$$\xi = \xi_1 \cdot e^{\frac{\omega^2}{g} (z - z_1)}$$

/30/

Jest to równanie krzywej logarytmicznej.

Łatwo się przekonać, że linie sił tworzą układ krzywych, które asymptotycznie zbliżają się do osi ζ t.j. do osi obrotu.

101. PRZYKŁAD XIX. Mamy naczynie cylindryczne z osią pionową /rys.55/. Średnica naczynia: $=2r$, wysokość $=H$. Naczynie



rys.55.

początkowo jest napełnione cieczą do wysokości h_1 . Znaleźć, z jaką prędkością kątową winno się naczynie obracać, aby ciecz podniosła się do brzegów naczynia?

Niech szukana prędkość
kątowna $= \omega$.

Podczas obrotu naczynia około osi pionowej utworzy się swobodna powierzchnia paraboloidalna; niech wtedy najniższy punkt A_0 zwierciadła znajduje się na wysokości h_0 ponad dnem naczynia. Wówczas objętość cieczy, zawartej między ściankami naczynia, a swobodną powierzchnią paraboloidalną, powinna być równą pierwotnej objętości cieczy, t.j. $\pi r^2 h_1$.

Objętość cieczy między ściankami naczynia a paraboloidą znajdziemy w taki sposób:

Objętość całego cylindra $= \pi r^2 H$; objętość paraboloidy obrotowej jest dokładnie równa połowie objętości cylindra, otaczającego rozpatrywaną część paraboloidy, ta ostatnia objętość cylindra $= \pi r^2 (H - h_o)$, zatem objętość paraboloidy:

$$\frac{1}{2} \pi r^2 (H - h_o).$$

Stąd otrzymujemy, że objętość cieczy po utworzeniu się powierzchni paraboloidalnej:

$$\begin{aligned} &= \pi r^2 H - \frac{1}{2} \pi r^2 (H - h_o) = \\ &= \pi r^2 (H - \frac{1}{2} H + \frac{1}{2} h_o) = \frac{1}{2} \pi r^2 (H + h_o). \end{aligned}$$

Ponieważ objętość cieczy w naczyniu przed uruchomieniem jego i podczas obracania naczynia jest jednakowa, zatem:

$$\pi r^2 h_i = \frac{1}{2} \pi r^2 (H + h_o),$$

albo

$$H + h_o = 2 h_i$$

Stąd znajdziemy

$$h_o = 2 h_i - H;$$

Znaleziona wysokość h_o wskazuje nam położenie

wierzchołka A_0 paraboli, która powinna /zgodnie z warunkiem zadania/ przechodzić również przez górną krawędź naczynia cylindrycznego, to jest przez punkt B /rys.55/.

Równanie tej paraboli, otrzymane w końcu art. 98 jest następujące /28a/:

$$x^2 = \frac{2g}{\omega^2} z, \text{ przyczem osi współ-}$$

rzędnych mają początek w wierzchołku A_0 paraboli. Ponieważ parabola ta ma przechodzić przez punkt B , rzędne tego punktu / $x = r$, $z = H - h_0$ / powinny spełniać powyższe równanie, t.j.

$$r^2 = \frac{2g}{\omega^2} (H - h_0);$$

stąd

$$\omega^2 = \frac{2g}{r^2} (H - h_0).$$

Poprzednio znaleźliśmy, że

$$h_0 = 2h_1 - H,$$

więc

$$\omega = \frac{2}{r} \sqrt{g(H - h_1)} \quad /31/$$
