

parę o momencie $W'\alpha$, która dążyć będzie do przywrócenia ciała do pierwotnego położenia zgodnie ze strzałką (β) ; mamy zatem do czynienia z przypadkiem równowagi stałej.

78. Zwróćmy uwagę w poprzednich przykładach na punkt przecięcia się prostej działania wyporu z osią pływania ciała po jego nieznacznym odchyleniu.

Punkt ten nazywamy metacentrum.

Na rys.34 i 37 metacentrum jest powyżej środka ciężkości ciała - przy stanie równowagi stałej; na rys.35 mamy metacentrum w środku ciężkości ciała - przy stanie równowagi obrotowej; na rys.36 metacentrum znajduje się poniżej środka ciężkości ciała - przy stanie równowagi niestabilnej.

Powiemy więc: Jeżeli metacentrum znajdzie się po nad środkiem ciężkości ciała, będzie to oznaką, że mamy równowagę stałą. Powiemy następnie: im punkt M znajdzie się na osi pływania dalej od S , przy takim samym odchyleniu ciała, tym większą otrzymujemy parę $W'\alpha$, czyli tym pewniej i prędzej ciało powróci do pierwotnego położenia.

Jeżeli metacentrum /po odchyleniu ciała/ znajdzie się w środku ciężkości S , wówczas para nie powstaje i ciało nie powróci do pierwotnego położenia. Będzie to więc r ó w n o w a g a o b o j ę t n a .

Wreszcie, jeśli metacentrum znajdzie się pod środkiem ciężkości, wtedy, oczywiście, będziemy mieli do czynienia z r ó w n o w a g ą n i e s t a l ą .

Z powyższych określeń wynika sposób oznaczania stanów równowagi na podstawie tego, czy metacentrum znajduje się n a d środkiem ciężkości, czy upada n a niego, czy też opada p o n i ż e j środka ciężkości. Należy zatem bliżej zaznajomić się z określeniem miejsca metacentrum.

79. Zbadajmy z ogólniejszego punktu widzenia zachowanie się ciała pływającego.

Z mechaniki wiemy, że każdą małą zmianę w położeniu układu sztywnego możemy wykonać posiłkując się 6-ma ruchami: trzema ruchami postępowymi równoległymi do trzech prostych, wzajemnie do siebie prostopadłych i trzema obrotami około tychże prostych.

Rozpatrzmy, co się stanie z ciałem pływającym przy wykonywaniu z nim każdego z sześciu powyższych ruchów.

Obierzmy osi, jak zwykle: osi X i Y - w płaszczyźnie poziomej na swobodnej powierzchni cieczy, zaś oś Z pionowo w dół. Zauważymy, że omawiane ciała pływające i ciecz są ciężkie, to jest takie, na które działa tylko siła ciężkości.

Wykonajmy małe przesunięcie ciała w kierunku osi X . Po takim przesunięciu obie siły, jakie na dane ciało działają, mianowicie: siła ciężkości i wypór, nie zmieniają ani wartości, ani też względnego położenia, zatem stan równowagi ciała nie może w tym razie doznać jakiejkolwiek zmiany.

Jeżeli w podobny sposób wykonamy przesunięcie wzdłuż drugiej osi poziomej - osi Y - otrzymamy ten sam wynik. To samo, zresztą, otrzymamy przy przesunięciu wzdłuż jakiejkolwiek osi poziomej.

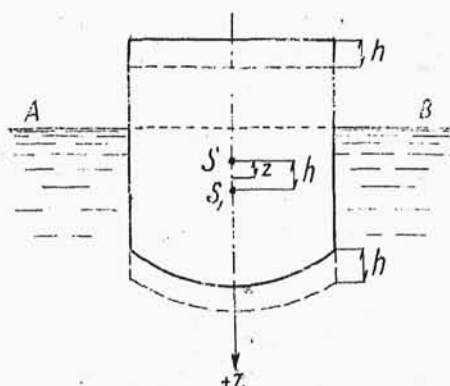
Czyli: przesunięcie ciała w kierunku poziomym żadnej wskazówki ostatecznie równowagi ciała pływającego nie da.

80. Wykonajmy przesunięcie ciała w kierunku pio-

nowym, wszystko jedno - czy na dół, czy do góry.

Niech przy tym przesunięciu środek ciężkości S zajmie nowe położenie S' , o h niżej od pierwotnego /rys.38/. Przed prze-

sunięciem ciała działały na nie siły: ciężar G i wypór W , przy czym $W = G$. Po zanurzeniu ciała /jakąś postronną siłą/ na niez-



rys.38

naczną głębokość h na ciało to działać będą: ten sam ciężar G oraz inny wypór; będzie on zwiększony w porównaniu z poprzednim wyporem o ciężar cieczy w objętości tej części ciała, która dodatkowo została zanurzona.

Wypór końcowy będzie $= W + \gamma F h$, jeżeli przez F oznaczmy pole płaszczyzny pływania.

Zatem na ciało działa wypadkowa pionowa skierowana do góry i równa : $-(W + \gamma F h - G)$;

Pod działaniem tej siły ciało zacznie się wynurzać z pewnym przyspieszeniem.

Niech w pewnej chwili, po czasie t od początku

tego ruchu, środek ciężkości znajdzie się na głębokości Z od pierwotnego położenia S . W tym momencie na ciało działa ku górze wypadkowa:

$$-(W + \gamma FZ - G),$$

albo, ponieważ $W = G$, więc działa wypadkowa $= -\gamma FZ$.

Siła ta nadaje ciału przyspieszenie $\frac{d^2Z}{dt^2}$; ponieważ masa poruszającego się ciała $= \frac{G}{g}$, mamy więc równanie ruchu wynurzającego się ciała:

$$\frac{d^2Z}{dt^2} \cdot \frac{G}{g} = -\gamma FZ,$$

albo

$$\frac{d^2Z}{dt^2} = -\frac{\gamma g F}{G} Z$$

Jest to równanie różniczkowe ruchu /drga-
nia/ h a r m o n i c z n e g o .

Scałkujemy to równanie. W tym celu oznaczmy $\frac{\gamma g F}{G}$ przez k^2 ; równanie otrzyma wówczas postać: $\frac{d^2Z}{dt^2} = -k^2 Z$.

Pomnóżmy obie strony przez $2 \frac{dZ}{dt}$; otrzymamy:

$$2 \frac{dZ}{dt} \cdot \frac{d^2Z}{dt^2} = -k^2 \cdot 2 \cdot Z \frac{dZ}{dt},$$

czyli

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{dZ}{dt} \right)^2 = -k^2 \frac{d}{dt} (Z^2),$$

skąd po scałkowaniu

$$\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = -k^2 z^2 + \text{const.}$$

Stałą całkowania wyrugujemy z warunku, że, kiedy $z = h$, wtedy prędkość $v = \frac{dz}{dt}$ była = 0, więc otrzymamy:

$$0 = -k^2 h^2 + \text{const.}, \text{ stąd } \text{const.} = k^2 h^2;$$

zatem

$$\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = v^2 = -k^2 z^2 + k^2 h^2,$$

albo inaczej:

$$v^2 = k^2 (h^2 - z^2); \quad \text{wreszcie } v = k \sqrt{h^2 - z^2}.$$

Z ostatniego równania możemy wyznaczyć prędkości ciała przy różnych położeniach środka ciężkości.

Ostatnie równanie możemy przedstawić w postaci:

$$\frac{dz}{dt} = k \sqrt{h^2 - z^2};$$

w celu scałkowania oddzielmy zmienne:

$$dt = \frac{1}{k} \cdot \frac{dz}{\sqrt{h^2 - z^2}}$$

po scałkowaniu otrzymamy:

$$t = \frac{1}{k} \text{ arc. sin } \frac{z}{h} + \text{const.}$$

Stałą całkowania wyrugujemy z warunku: kiedy

$t = 0$, a więc na samym początku, wtedy $z = h$.

Stąd:

$$0 = \frac{1}{k} \cdot \frac{\pi}{2} + \text{const.}$$

albo

$$\text{const.} = -\frac{\pi}{2k},$$

a więc:

$$t = \frac{1}{k} \cdot \text{arc. sin } \frac{z}{h} - \frac{\pi}{2k}.$$

Z tego wzoru możemy znaleźć czas t , w którym środek ciężkości S będzie w odległości z od początkowego położenia.

Czas potrzebny, aby środek ciężkości znalazł się w pierwotnym miejscu równowagi niech będzie t_1 ; czas ten znajdziemy, zakładając, że $z = 0$.

Ponieważ sinus jest zerem dla łuków $0, \pi, 2\pi, 3\pi, \dots$, wogóle $n\pi / h$ jest liczbą całkowitą/, zatem po czasie

$$\begin{aligned} t_0 &= \frac{1}{k} \cdot 0 - \frac{\pi}{2k} = -\frac{\pi}{2k} \\ t_1 &= \frac{1}{k} \cdot \pi - \frac{\pi}{2k} = \frac{\pi}{2k} \\ t_2 &= \frac{1}{k} \cdot 2\pi - \frac{\pi}{2k} = \frac{3\pi}{2k} \\ t_3 &= \frac{1}{k} \cdot 3\pi - \frac{\pi}{2k} = \frac{5\pi}{2k} \text{ i t.d.} \end{aligned}$$

środek ciężkości ciała znajdzie się w pierwotnym miejscu równowagi.

Czas liczymy od 0 , zatem pierwsza znaleziona

wartość na czas nie ma dla nas znaczenia.

Z następnych wartości t_1, t_2, t_3 i t.d. wnioskujemy, że na pełne wahnięcie się środka ciężkości potrzebny jest czas $= t_3 - t_1$ lub $t_4 - t_2$ i t.d., czyli okres wahnięcia

$$T = \frac{4\pi}{2k} = \frac{2\pi}{k}.$$

Z równania

$$t = \frac{1}{k} \arcsin \frac{z}{h} - \frac{\pi}{2k}$$

po podstawieniu na k wartości: $k = \frac{2\pi}{T}$ otrzymamy:

$$t = \frac{T}{2\pi} \arcsin \frac{z}{h} - \frac{\pi T}{2 \cdot 2\pi},$$

albo

$$t + \frac{T}{4} = \frac{T}{2\pi} \arcsin \frac{z}{h};$$

jeszcze dalej

$$\left(t + \frac{T}{4}\right) \frac{2\pi}{T} = \arcsin \frac{z}{h},$$

a stąd

$$\frac{z}{h} = \sin \frac{2\pi}{T} \left(t + \frac{T}{4}\right),$$

ostatecznie

$$z = h \cdot \sin \frac{2\pi}{T} \left(t + \frac{T}{4}\right).$$

Z tego równania dostrzegamy periodyczność ruchu. Zatem, kiedy ciało zanurzymy w kierunku pionowym na głębokość h , zacznie się wówczas ruch harmoniczny środka ciężkości ciała około punktu, w którym był pierwotnie środek ciężkości ciała.

Obszerność drgania = h ; okres drgania

$$T = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi\sqrt{G}}{\sqrt{\gamma g F}}$$

jak widzimy, niezależny jest od obszerności drgania, lecz od G , F i γ .

Gdyby ciecz była doskonała, wówczas drgania takie istniałyby trwale; wobec, jednak, lepkości cieczy, drgania te będą stopniowo słabnąć, aż wreszcie po pewnym czasie ciało wróci do pierwotnego stanu równowagi.

Stąd wnioskujemy, że przesunięcie ciała w kierunku pionowym nie powinno mieć wpływu na zmianę równowagi ciała, jeśli przed tym ta równowaga istniała.

81. Zbadajmy teraz wpływ ruchów obrotowych na stan równowagi ciała, a więc przede wszystkim wpływ obrotu około osi p i o n o w e j . Łatwo dostrze-

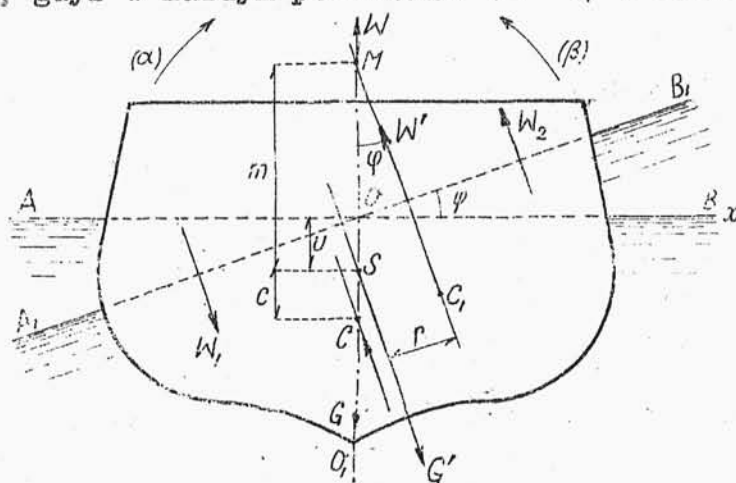
zemy, że przy takim obrocie ani wartość wyporu, ani położenie wyporu względem ciężaru ciała nie zmienia się. Zatem obrót ciała około osi pionowej nie da powodu do zmiany równowagi ciała pływającego.

Inna będzie sprawa przy wykonaniu obrotu ciała około tej czy innej osi *p o z i o m e j*. Część ciała wówczas się zanurzy, inna się wynurzy i, jakkolwiek wartość wyporu się nie zmieni, to położenie jego może się zmienić; ten właśnie warunek zadecyduje o równowadze ciała. Rozważmy tę sprawę szczegółowej.

82. Niech będzie ciało pływające o przekroju jak na rysunku. Przekrój obrany jest prostopadle do osi, około której mamy wykonać obrót. Niech płaszczyzna pływania będzie AB ; oś pływania OO_1 . Środek ciężkości S niech się znajduje nad środkiem wyporu C w odległości C .

W punkcie S działa ciężar ciała G ku dołowi, w punkcie C działa wypór W ku górze. Wiemy, że dla ciała pływającego istnieje zależność $G = W = V\gamma$, gdzie V oznacza wyporność. Obróćmy ciało około osi poziomej zgodnie ze strzałką (α) o bardzo mały kąt φ ;

wtedy płaszczyzna pływania będzie A, B . W nowym położeniu wypór co do wartości powinien zostać takim samym, gdyż w każdym położeniu $W = G$. Ponieważ



rys.39.

przy założonym obrocie część ciała AOA_1 , wynurzyła się, a BOB_1 , zanurzyła się, wypór zaś W' ma się nie zmienić, zatem objętości wynurzonej części AOA_1 , i zanurzonej BOB_1 , winny być sobie równe.

Ponieważ, następnie, pole płaszczyzny pływania AB i pole A, B , bardzo mało się od siebie różnią, przeto zmiana położenia AB na A, B , może być dokonana przez obrócenie ciała około osi, przechodzącej normalnie do rysunku przez punkt O . Łatwo dowieść, że oś obrotu przechodzi przez środek cięż-

kości pola płaszczyzny pływania. Wychodzimy ze wspomnianego warunku, iż objętość AOA_1 i BOB_1 są sobie równe. Z rysunku 40 objętość AOA_1 i BOB_1 możemy

obliczyć na podstawie twierdzenia Pappusa:

$$\text{obj. } AOA_1 = \int_0^A x \cdot dF \cdot \varphi \quad \text{oraz} \quad \text{obj. } BOB_1 = \int_0^B x \cdot dF \cdot \varphi,$$

zatem:

$$\varphi \int_0^A x \cdot dF = \varphi \int_0^B x \cdot dF,$$

albo

$$\int_0^A x \cdot dF = \int_0^B x \cdot dF,$$

jeszcze inaczej:

$$-\int_0^A x \cdot dF + \int_0^B x \cdot dF = 0,$$

wreszcie

$$\int_A^0 x \cdot dF + \int_0^B x \cdot dF = 0.$$

Obie całki łączymy w jedną, pisząc: $\int_A^B x \cdot dF = 0$.

$\int_A^B x \cdot dF$ równa się $x_0 \cdot F$ gdzie x_0 jest odległością środka ciężkości pola AB od osi Oy , zaś F jest wartością tego pola; zatem mamy,

$$\int_A^B x \cdot dF = x_0 \cdot F = 0 \quad \text{a stąd wynika, że } x_0 = 0$$

co było do dowiedzenia.

Po odchyleniu ciała na kąt φ , zaczynają na ciało działać siły W' i G' /rys.39/, tworzące parę o momencie $W' \cdot r = G' \cdot r = V \gamma \cdot r$. Aby ciało zostało

przywrócone do pierwotnego położenia należy, aby para sił miała obrót w stronę wskazaną strzałką (β) ; przy założonym odchyleniu ciała para winna mieć moment ujemny, jak to widać na rysunku. Zatem moment obrotowy pary w przypadku równowagi stałej

$$M = -V\gamma \cdot r$$

Ramię r możemy uważać jako bardzo mały łuk, opisany promieniem m przy obrocie o kąt φ , zatem $r = m\varphi$; zaś moment pary szukanej

$$M = -V\gamma \cdot m \cdot \varphi .$$

Znajdźmy inne wyrażenie dla momentu tej pary, która winna przywrócić ciało do poprzedniego położenia. Na ciało po odchyleniu go działają następujące siły: ciężar G' , przyłożony do punktu S i wypór $V\gamma$, przyłożony do punktu C_1 .

Wypór $V\gamma$ pierwotnie był przyłożony do punktu C , po odchyleniu przesunął się do C_1 dla tego, że część ciała AOA_1 , wynurzyła się; z tego więc powodu zmniejszył się wypór $V\gamma$ o wypór odpowiadający wynurzonej części AOA_1 ; niech to będzie wypór W_1 . Następnie, objętość ciała BOB_1 , zanurzyła się, skutkiem tego powstał nowy wypór, odpowiadający zanurzonej części BOB_1 . Niech to będzie wy-

pór W_2 . Z poprzedniego wynika, że $W_1 = W_2$. Jeślibyśmy dodali razem wypór $V\gamma$, przyłożony w C , z wyporami W_1 i W_2 , przyłożonymi do właściwych środków wyporu, otrzymalibyśmy $V\gamma$, przyłożony w punkcie C . Po tym co wyżej zaznaczono, możemy powiedzieć, że na odchylone ciało działają 4 siły: ciężar G' , przyłożony do punktu S , wypór $V\gamma$, przyłożony do C , wreszcie wypory W_1 i W_2 ; z nich wypór W_1 skierowany jest w stronę przeciwną, a W_2 w tę samą stronę, co $V\gamma$. Te cztery siły razem złożone dadzą szukaną parę. Moment pary otrzymamy, biorąc sumę momentów statycznych powyższych sił względem jakiegokolwiek punktu, np. względem punktu O /rys.39/.

Zróbmy to: moment stat. ciężaru G jest $-Gu\varphi$; mom.

stat. wyporu $V\gamma$, przyłożonego do C jest $= V\gamma(c+u)\varphi$.

Znajdźmy teraz momenty statyczne wyporów W_1 i W_2 względem O . Zacznijmy od wyporu W_2 . Moment statyczny wyporu

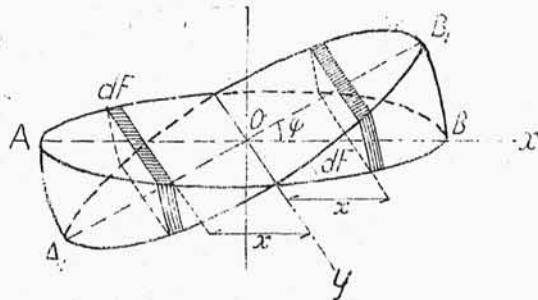
W_2 otrzymamy jako

sumę momentów elementarnych wyporów.

Elementarny wypór możemy sobie przed-

stawić, jako ciężar

cieczy, wziętej



rys.40.

w objętości, opisanej przez element pola dF obrany w płaszczyźnie pływania // rys. 40 / podczas obrotu tego elementu o kąt φ . Niech obrany element dF znajduje się w odległości x od osi obrotu. Podczas obrotu element dF przejdzie drogę $x\varphi$, opisując objętość $= dFx\varphi$. Objętości tej odpowiada wypór $= \gamma dFx\varphi$; moment statyczny tego wyporu względem osi obrotu =

$$= -\gamma dFx \cdot \varphi \cdot x = -\gamma dF \cdot \varphi \cdot x^2.$$

Moment całego wyporu W_2 znajdziemy, jako sumę elementarnych wyporów, obliczonych jak powyżej; zatem moment statyczny wyporu W_2 względem osi O będzie:

$$= -\int_0^B \gamma dF \cdot x^2 \varphi = -\gamma \varphi \int_0^B dF \cdot x^2,$$

gdzie całka jest rozszerzona na tę część pola płaszczyzny pływania, która znajduje się po prawej stronie osi obrotu.

W podobny sposób da się wyrazić moment statyczny wyporu W_1 , trzeba tylko będzie całkę rozszerzyć na lewą część pola F . Znak momentu wyporu W_1 będzie również taki sam, jak i wyporu W_2 . Możemy więc określić sumę momentów statycznych wyporów W_1 i W_2 od razu, pisząc, że moment statyczny wyporu W_1 + moment statyczny wyporu $W_2 = -\gamma \varphi \int_A^B dF \cdot x^2$, jeśli rozumieć bę-

dziemy, że całka rozszerza się teraz na całe pole F płaszczyzny pływania. Wyrażenie $\int dF \cdot x^2$ nie jest niczym innym, jak momentem bezwładności pola płaszczyzny pływania względem osi obrotu.

Oznaczmy ten moment przez J_0 .

Zesumujmy wszystkie znalezione momenty; otrzymamy moment pary wypadkowej:

$$-G \cdot u \cdot \varphi + V \gamma (c + u) \varphi - \gamma \varphi J_0$$

Wartość tego momentu znaleźliśmy poprzednio w innej postaci; mianowicie $-V \gamma m \varphi$, zatem możemy napisać

$$-V \gamma m \varphi = -G u \varphi + V \gamma (c + u) \varphi - \gamma \varphi J_0,$$

ponieważ wypór $V \gamma = G$, więc

$$-V \gamma m \varphi = -V \gamma u \varphi + V \gamma c \varphi + V \gamma u \varphi - \gamma \varphi J_0,$$

albo po redukcji i po podzieleniu przez $\gamma \varphi$, znajdziemy:

$$m = \frac{J_0}{V} - c \quad /23/$$

Określiwszy m , mamy możliwość znalezienia miejsca metacentrum. Długość m nazywamy wysokością metacentryczną.

83. Z równania /23/ i z rys.39 widzimy: aby pa-

ra, która powstanie po odchyleniu ciała, mogła przywrócić ciało do pierwotnego położenia, należy, aby

$$m > 0, \text{ czyli } \frac{J_0}{V} - c > 0,$$

albo

$$c < \frac{J_0}{V} \quad /23a/$$

Jeśli zatem chodzi o równowagę stałą ciała pływającego, zapewnioną przy odchyleniach około różnych osi poziomych, winien być zachowany powyższy warunek /23a/ dla wszystkich poziomych osi. Najbardziej niebezpieczny będzie stan równowagi przy obrocie około tej osi, względem której moment J_0 będzie najmniejszy.

Zatem powiemy, że dla równowagi stałej ciała pływającego powinien być zachowany warunek:

$$c < \frac{J_{0 \min}}{V} \quad /23b/$$

Dla statków, które mają budowę wydłużoną $J_{0 \min}$ będzie właśnie względem osi podłużnej statku.

84. PRZYKŁAD X. /rys.41/. Mamy belkę o przekroju kwadratowym /bok kwadratu jest h i długość belki L /. Niech belka pływa w ten sposób, że dwie jej ściany są poziome. Znaleźć przy jakich warunkach bę-