

hydrodynamiczne, zachodzące z cieczami rzeczywistymi, przy zastosowaniu współczynników praktycznych.

H Y D R O S T A T Y K A.

22. Zasadnicze pojęcie, z którym stale będziemy się spotykać w hydrostatyce, jest t.zw. CIŚNIENIE HYDROSTATYCZNE. Wystawmy sobie płyn /ciecz lub gaz/, zawarty w naczyniu. Niech płyn będzie w równowadze. Nic się w równowadze płynu nie zmieni, jeśli pomyślimy wewnątrz tego płynu, dowolną powierzchnię F / zamkniętą /. Przypuśćmy, że część płynu, znajdującą się na zewnątrz powierzchni, odrzucimy, zastępując w każdym elemencie tej powierzchni działaniem odrzuconego płynu odpowiednimi siłami. Po takiej zamianie równowaga płynu nie zostanie naruszona.

Weźmy teraz w którymkolwiek miejscu powierzchni F punkt M , a wokół niego mały element powierzchni, naprz. ΔF . Na ten element niech przypada siła ΔP . Jeśli element ΔF jest dostatecznie mały, wówczas przyjąć możemy, że we wszystkich punktach tego elementu działania są jednakowe.

Aby lepiej uświadomić sobie wartość tego działania, obliczamy je w stosunku do jednostki pola, dzieląc ΔP przez ΔF . Otrzymamy wtedy siłę na jednostkę pola, którą nazwiemy ś r e d n i m c i ś n i e n i e m w pólku ΔF i oznaczymy:

$$p_{sr} = \frac{\Delta P}{\Delta F}$$

Jeśli teraz założymy, że pólko ΔF stale zachowując wewnątrz punkt M , maleje i dąży do 0, otrzymamy w granicy c i ś n i e n i e h y d r o s t a t y c z n e w danym punkcie M , które oznaczymy:

$$p_M = \lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta F}, \quad \text{albo inaczej} \quad p_M = \frac{dP}{dF} \quad /1/$$

jeśli istnieje funkcyjna zależność między wielkościami P i F .

Ponieważ siła ΔP jest mierzona w gramach, kilogramach, tonnach i t.d., zaś ΔF w mm^2 , cm^2 , m^2 i t. d., więc miara ciśnienia hydrostatycznego będzie:

$$\frac{g}{\text{mm}^2}, \frac{g}{\text{cm}^2}, \frac{kg}{\text{cm}^2}, \frac{kg}{\text{m}^2}, \frac{t}{\text{m}^2} \quad \text{i t.d.}$$

23. Pod działaniem sił takich, jak ΔP , płyn zawarty wewnątrz pomyślanej powierzchni F , znaj-

duje się w równowadze, czyli że nie ma ruchu cząstek.

Siła ΔP powinna być normalna do elementu półka ΔF i skierowana do wnętrza płynu. Gdyby bowiem siła ΔP nie była prostopadła do elementu ΔF , moglibyśmy ją rozłożyć na dwie składowe: normalną i styczną do elementu ΔF . Normalna składowa powinna być skierowana do wnętrza cieczy; w przeciwnym razie siła ta odrywałaby cząstki płynu, czemu ten nie stawiałby oporu i równowaga przepadłaby. Składowej stycznej też nie może być, gdyż przy jej istnieniu płyn w półku ΔF byłby ścinany i też nie byłoby równowagi. Z powyższego wynika, że zarówno siła ΔP jak i ciśnienie hydrostatyczne p_M winno być normalne do półka ΔF i skierowane do wnętrza płynu ograniczonego powierzchnią F .

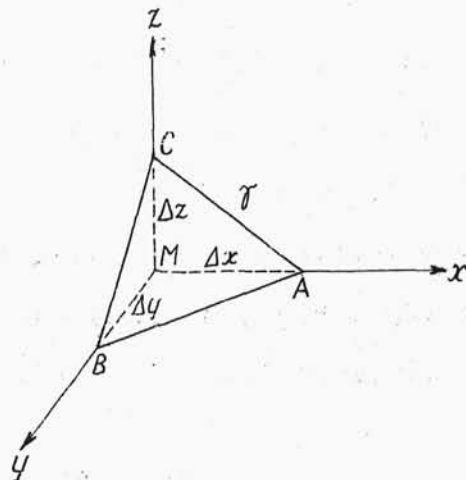
24. Zbadajmy teraz, czy ciśnienie hydrostatyczne zależy od kierunku elementu ΔF . Pytanie trzeba tak rozumieć: niech element ΔF , stanowiący część powierzchni F zawiera w sobie punkt M .

Ponieważ powierzchnia F była pomyślana dowolnie, więc możemy przez ten sam punkt M wyobrazić

sobie wiele różnych zamkniętych powierzchni F_1, F_2, \dots , takich jednak, aby wszystkie przechodziły przez punkt M . Każda z powierzchni posiadać będzie odpowiedni element $\Delta F_1, \Delta F_2 \dots$; te elementy mają wszystkie wspólny punkt M , lecz różnie będą względem stałych płaszczyzn pochylone. Mamy zatem zbadać, czy ciśnienia hydrostatyczne dla takich elementów $\Delta F_1, \Delta F_2 \dots$ będą się różniły między sobą i jak?

W tym celu wystawmy sobie wewnątrz płynu, znajdującego się w równowadze, przy punkcie M czworościan o bardzo małych wymiarach, utworzony przez trzy płaszczyzny do siebie prostopadłe i czwartą do nich pochyłą.

Otrzymujemy czworościan $MABC$ /rys.1/; odrzucimy płyn, znajdujący się na zewnątrz czworościanu, i zastąpmy działanie odrzu-



rys.1.

conego płynu siłami, przyłożonymi do ścian MAC ,

MBC , MAB i ABC , wówczas równowaga czworościanu nie będzie naruszona.

Zatem będą w równowadze następujące siły, działające na czworościan: 1/ siły, działające na poszczególne cząstki płynu, wypełniające czworościan; siły te nazwiemy *objętościowymi*; 2/ siła prostopadła do płaszczyzny MAB ; 3/ siła prostopadła do płaszczyzny MAC ; 4/ siła prostopadła do płaszczyzny MBC ; 5/ siła prostopadła do płaszczyzny ABC . Te ostatnie cztery siły nazwiemy *powierzchniowymi*, gdyż działają tylko na cząstki, znajdujące się na powierzchni czworościanu. Obliczmy te siły, przyjmując długości krawędzi czworościanu $\Delta x, \Delta y, \Delta z$.

Siła 1/. Niech przyspieszenie siły objętościowej będzie α . Objętość czworościanu $= \frac{1}{3} \Delta x \Delta y \Delta z$. Jeśli ciężar właściwy rozpatrywanego płynu wobec bardzo małych wymiarów czworościanu przyjmiemy jako stały $i = \gamma$, wówczas masa płynu, zawartego w czworościanie jest $\frac{1}{3} \cdot \frac{\Delta x \Delta y \Delta z}{g} \cdot \gamma$

$$\text{i siła } 1/ \frac{1}{3} \Delta x \Delta y \Delta z \frac{\gamma}{g} \cdot \alpha$$

Siła 2/: Niech ciśnienie hydrostatyczne na

płaszczyznę MAB będzie p_z , pole płaszczyzny tej jest $\frac{1}{2}\Delta x \Delta y$, zatem siła 2/ $= p_z \cdot \frac{1}{2}\Delta x \Delta y$ i jest równoległa do osi Z .

Siła 3/: Ciśnienie hydrostatyczne na płaszczyznę MAC niech będzie p_y , sama zaś siła $= p_y \cdot \frac{1}{2}\Delta x \Delta z$.

Siła 4/: Niech ciśnienie hydrostatyczne na płaszczyznę MBC będzie p_x , sama zaś siła $= p_x \cdot \frac{1}{2}\Delta y \Delta z$ wreszcie,

Siła 5/: Jeśli ciśnienie hydrostatyczne na płaszczyznę ABC oznaczmy przez p , zaś pole ABC dla krótkości przez ΔF , otrzymamy siłę 5/ $= p \Delta F$.

Ponieważ czworościan jest w równowadze, więc nic się w równowadze nie zmieni, jeśli założymy, że płyn, zawarty w czworościanie zesztynniał /pomysł Stevin'a/. Wtedy siły, przyłożone do czworościanu, powinny czynić zadość znanym 3 pierwszym warunkom równowagi ciała sztywnego, a więc: suma rzutów sił na każdą oś z osobna równa jest 0.

Drugich trzech warunków równowagi ciała sztywnego /równania momentów statycznych/ nie stosujemy tu, gdyż pierwsze trzy równania wystarczają do naszego celu. Osi obieramy równoległe do krawędzi

Δx , Δy , Δz czworościanu.

Zatem piszemy sumę rzutów sił na oś x :

$$p_x \cdot \frac{1}{2} \Delta y \Delta z + \frac{1}{3} \Delta x \Delta y \Delta z \frac{\partial}{\partial x}(\alpha)_x - (p \Delta F)_x = 0$$

gdzie znaczek x przy nawiasie ma oznaczać rzut siły na oś x .

Zauważmy, że

$$(p \Delta F)_x = p \Delta F \cos(p, x) = p \Delta F \cos(\Delta F, MBC) = p \Delta F_x$$

ΔF_x jest rzutem półka ΔF na płaszczyznę do x prostopadłą.

Ponieważ $\Delta F_x = \frac{1}{2} \Delta y \Delta z$, a więc nasze równanie otrzyma postać:

$$p_x \cdot \frac{1}{2} \Delta y \Delta z + \frac{1}{3} \Delta x \Delta y \Delta z \frac{\partial}{\partial x}(\alpha)_x - p \cdot \frac{1}{2} \Delta y \Delta z = 0$$

Skrómy obie strony ostatniego równania przez $\frac{1}{2} \Delta y \Delta z$; wówczas będziemy mieli:

$$p_x + \frac{1}{6} \Delta x \frac{\partial}{\partial x}(\alpha)_x - p = 0$$

Niech teraz krawędź Δx wraz z innymi maleje, dążąc do zera, wtedy półko ΔF zbliża się do punktu M , aż wreszcie przejdzie przez ten punkt. Wówczas wartość ciśnienia p w półku ΔF będzie odpowiadała punktowi M ; otrzymamy więc:

$$p_x - p = 0, \quad \text{albo} \quad p_x = p .$$

W podobny sposób znajdziemy z równania rzutów sił na oś y , że $p_y = p$ oraz na oś z , że $p_z = p$.

Stąd wnioskujemy, że:

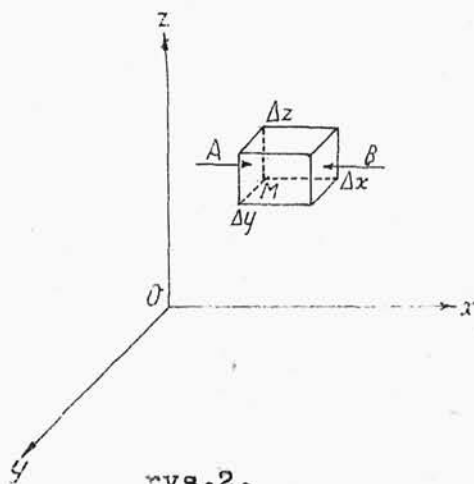
$$p_x = p_y = p_z = p \quad /2/$$

Widzimy więc, że ciśnienie w punkcie M jest co do wartości jednakowe we wszystkich płaszczyznach, przez ten punkt przesuniętych; zatem powiemy: ciśnienie hydrostatyczne w obranym punkcie płynu jest jednakowe we wszystkich kierunkach.

25. Następnym zadaniem naszym będzie znalezienie wartości ciśnienia hydrostatycznego.

W tym celu ułożymy równanie równowagi płynu, skąd otrzymamy szukaną wartość ciśnienia.

Niech będzie



naczynie wypełnione dowolnym płynem doskonałym. Płyn niech będzie w równowadze. Obierzmy osi współrzędnych prostokątnych x , y , z . Wewnątrz płynu obieramy punkt M i przy nim wyobrażamy sobie dowolnie mały prostopłascian o bokach Δx , Δy , Δz ; punkt M znajduje się w wierzchołku prostopłascianu. Wyodrębnijmy pomyślany prostopłascian w płynie i odrzućmy płyn, otaczający tę bryłę, zastępując działanie odrzuconego płynu siłami, przyłożonymi do poszczególnych płaszczyzn prostopłascianu. Jeżeli wszystkie płyn i nasz prostopłascian są w równowadze, to będą również w równowadze siły, na prostopłascian działające. Siły tu działające są: siły objętościowe, przyłożone do wszystkich cząstek prostopłascianu i siły powierzchniowe, działające normalnie do poszczególnych sześciu ścian.

Siły objętościowe znajdziemy, przyjmując, że ciężar właściwy płynu jest $= \gamma$ i że wypadkowe przyspieszenie sił objętościowych jest $= a$; wtedy wypadkowa siła objętościowa, działająca na masę prostopłascianu, równa się:

$$\Delta x \Delta y \Delta z \frac{\gamma}{g} \cdot a$$

Siłę powierzchniową działającą na ścianę A , prostopadłą do x , znajdziemy, jeśli przyjmiemy, że w punkcie M jest ciśnienie hydrostatyczne ρ , wtedy siła powierzchniowa na A jest $= \Delta y \Delta z \cdot \rho$ i skierowana wzdłuż dodatniej osi x . Niech ciśnienie ρ będzie jakąś funkcją współrzędnych x, y, z , punktu M .

Na ścianę B , również prostopadłą do x , ciśnienie hydrostatyczne już będzie się różnić od tego ciśnienia, jakie było na ścianę A , a to z tego powodu, że ściana B ma współrzędną x większą od współrzędnej ściany A o przyrost Δx ; współrzędne zaś y i z ściany B są takie same, jak ściany A . Zatem ciśnienie hydrostatyczne na ścianę B różnić się będzie od ciśnienia na ścianę A o przyrost tego ciśnienia z powodu przyrostu zmiennej x , t.j. ciśnienie na ścianę B otrzyma się:

$$\rho + \frac{\partial \rho}{\partial x} \Delta x$$

Więc na ścianę B będzie działać siła powierzchniowa o wartości

$$\Delta y \Delta z (\rho + \frac{\partial \rho}{\partial x} \Delta x)$$

i zwrócona wzdłuż ujemnego kierunku osi x .

W podobny sposób znajdziemy siły powierzchniowe, działające na tylną i przednią oraz na dolną i górną ściany prostopadłościanu, a mianowicie:

na tylną ścianę działa siła $\Delta x \Delta z \cdot p$ wzdłuż dodatniego kierunku osi y ;

na przednią ścianę: $\Delta x \Delta z (p + \frac{\partial p}{\partial y} \Delta y)$ wzdłuż ujemnego kierunku osi y ;

na dolną ścianę: $\Delta x \Delta y \cdot p$ wzdłuż dodatniego kierunku osi z ;

na górną ścianę: $\Delta x \Delta y (p + \frac{\partial p}{\partial z} \Delta z)$ wzdłuż ujemnego kierunku osi z .

Warunki równowagi obliczonych sił przedstawiają się w postaci równań:

suma rzutów sił w kierunku osi x :

$$\Delta y \Delta z \cdot p - \Delta y \Delta z (p + \frac{\partial p}{\partial x} \Delta x) + (\Delta x \Delta y \Delta z \frac{\partial}{\partial x} \cdot \alpha)_x = 0$$

albo

$$\Delta y \Delta z \cdot p - \Delta y \Delta z \cdot p - \Delta y \Delta z \Delta x \frac{\partial p}{\partial x} + \Delta x \Delta y \Delta z \frac{\partial}{\partial x} (\alpha)_x = 0$$

dalej po redukcji:

$$-\Delta y \Delta z \Delta x \frac{\partial p}{\partial x} + \Delta x \Delta y \Delta z \frac{\partial}{\partial x} (\alpha)_x = 0$$

a po skróceniu przez $\Delta x \Delta y \Delta z$, otrzymamy:

$$-\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} (\alpha)_x = 0 \quad \text{skąd} \quad (\alpha)_x = \frac{\partial p}{\partial x} \cdot \frac{q}{\rho}$$

Zupełnie podobne otrzymamy równania, stosując równania rzutów na osi y i z :

$$(a)_y = \frac{\partial p}{\partial y} \cdot \frac{g}{\gamma} \quad (a)_z = \frac{\partial p}{\partial z} \cdot \frac{g}{\gamma} .$$

Oznaczmy rzuty wypadkowego przyspieszenia sił objętościowych przez X , Y , Z , czyli oznaczmy:

$$(a)_x = X , \quad (a)_y = Y , \quad (a)_z = Z .$$

Otrzymamy:

$$X = \frac{\partial p}{\partial x} \cdot \frac{g}{\gamma} , \quad Y = \frac{\partial p}{\partial y} \cdot \frac{g}{\gamma} , \quad Z = \frac{\partial p}{\partial z} \cdot \frac{g}{\gamma} ,$$

albo:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\gamma}{g} X , \quad \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\gamma}{g} Y , \quad \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\gamma}{g} Z .$$

Stąd widzimy, że przyrosty ciśnienia w kierunku dowolnej osi są proporcjonalne do rzutu wypadkowego przyspieszenia sił objętościowych na tę oś.

Przemnożmy powyższe równania odpowiednio przez dx, dy, dz :

$$\frac{\partial p}{\partial x} dx = \frac{\gamma}{g} X dx$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} dy = \frac{\gamma}{g} Y dy$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} dz = \frac{\gamma}{g} Z dz$$

i dodajmy je; otrzymamy wtedy:

$$\frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz = \frac{\gamma}{g} (X dx + Y dy + Z dz) .$$

Jeśli ciśnienie p jest funkcją tylko zmiennych współrzędnych x , y , z , wówczas lewa strona równania jest zupełną różniczką p , co oznaczamy wprost dp .

Otrzymamy zatem równanie, wyrażające zależność ciśnienia od współrzędnych i od przyspieszenia sił objętościowych, w postaci:

$$dp = \frac{\gamma}{g} (X dx + Y dy + Z dz) \quad /3/$$

Jest to ogólne i zasadnicze równanie hydrostatyki.

26. Lewa strona ostatniego równania, mianowicie dp , jest różniczką zupełną, jeśli ciśnienie p jest funkcją tylko współrzędnych, zatem i prawa strona równania też powinna być różniczką zupełną pewnej funkcji współrzędnych x , y , z . Oznaczmy tę funkcję przez U ; wówczas:

$$X dx + Y dy + Z dz = dU$$

Żeby ostatni warunek mógł zajść, trzeba, aby:

$$X = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial U}{\partial z} \quad /4/$$

Stąd wynika, że U jest taką funkcją współrzed-

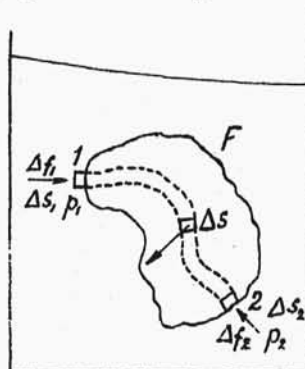
nych punktów, której pochodne cząstkowe względem zmiennych współrzędnych są odpowiednio równe rzutom wypadkowego przyspieszenia sił objętościowych na te osi. Funkcję U nazywamy p o t e n c j a - ł e m s i ł o b j ę t o ś c i o w y c h. Wypowiemy na tej zasadzie twierdzenie, że p ł y n m o ż e b y ć w r ó w n o w a d z e t y l k o p r z y d z i a - ł a n i u s i ł, p o s i a d a j ą c y c h p o - t e n c j a ł.

Równanie /3/ przepisujemy w taki sposób:

$$dp = \frac{\rho}{g} dU \quad \text{albo też} \quad dU = \frac{g}{\rho} dp \quad /5/$$

27. Aby lepiej przyswoić sobie treść otrzymanego równania /3/ spróbujemy otrzymać je odmienną od poprzedniej drogą. W tym celu wyobraźmy sobie ciecz doskonałą, będącą w stanie spoczynku w naczyniu.

Obierzmy wewnątrz cieczy badanej dwa dowolne punkty 1 i 2; poznamy ciś-



rys.3.

nienia w tych dwóch punktach. Przedstawmy sobie w tym celu wewnątrz płynu dowolną zamkniętą powierzchnię F , przechodzącą przez obrane punkty 1 i 2. Niech w tych punktach będą ciśnienia p_1 i p_2 . Obierzmy następnie przy tych punktach elementy Δf_1 i Δf_2 , należące do powierzchni F . Jeżeli płyn w naczyniu, a więc i wewnątrz powierzchni F znajduje się w równowadze, równowaga się nie zmieni, jeśli założymy, że cała powierzchnia F zesztyniała na podobieństwo skorupy, z wyjątkiem elementów Δf_1 i Δf_2 . Odrzućmy płyn, znajdujący się na zewnątrz powierzchni F ; wówczas dla równowagi płynu, zawartego wewnątrz F , na ten płyn działać będzie sztywna skorupa, wywierając w każdym miejscu działanie normalne do odpowiedniego elementu.

W miejscach, gdzie są elementy Δf_1 i Δf_2 , będą przyłożone siły, uwarunkowane ciśnieniami hydrostatycznymi p_1 i p_2 , mianowicie siły $p_1 \Delta f_1$ i $p_2 \Delta f_2$.

Mamy więc płyn, zawarty wewnątrz powierzchni F , który znajduje się w równowadze pod działaniem sił objętościowych i sił powierzchniowych.

W mechanice znane jest twierdzenie, że w przypadku równowagi układu sił zewnętrznych, suma prac przygotowanych /wirtualnych/ tych sił powinna być $=0$. Zastosujemy tu to twierdzenie.

Przed wszystkim obierzmy jakiekolwiek "przesunięcie przygotowane" dla naszego płynu. Jedno z możliwych będzie naprz. takie: wsuńmy element Δf_2 do wnętrza powierzchni F na bardzo małą długość Δs_2 , wówczas, wobec zeszywniałej powierzchni F , może wysunąć się jedynie element Δf_1 ; niech się on wysunie na długość Δs_1 .

Mamy do czynienia z płynem doskonałym, w którym równowaga ma być zachowana pomimo wykonania wyobraźnego przesunięcia; możemy zatem powiedzieć, że zachowanie równowagi i stanu poprzedniego będzie zapewnione wówczas, kiedy objętość $\Delta f_1 \cdot \Delta s_1$ równać się będzie objętości $\Delta f_2 \cdot \Delta s_2$, czyli kiedy:

$$\Delta f_1 \Delta s_1 = \Delta f_2 \Delta s_2$$

Warunek ten szczególnie wyraźny będzie, jeśli mówić będziemy o c i e c z y doskonałej, która, jak to wyżej była mowa /§7/, jest nieściśliwa.

Mówiąc o g a z i e doskonałym, trzeba sobie

uprzytomnić, że przesunięcie przygotowane, które sobie wyobraziliśmy, nie może zmienić objętości gazu, zamkniętego powierzchnią F , gdyż wtedy zmieniłoby się ciśnienie wewnątrz tej powierzchni. Zatem objętość $\Delta f_1 \cdot \Delta s_1$, winna być równa objętości $\Delta f_2 \cdot \Delta s_2$.

Przez wsunięcie elementu Δf_2 do wnętrza przesunie się szereg cząstek płynu, zawartego wewnątrz F , aż póki element Δf_1 nie wysunie się na zewnątrz. Nie jesteśmy w stanie bliżej określić, które mianowicie cząstki wezmą udział w powyższym przesunięciu. Przypuśćmy, że to właśnie będą cząstki, znajdujące się jakby w rurce dowolnie pomyślanej od punktu 2 do 1; pozostałe cząstki wewnątrz pow. F pozostaną bez ruchu. Przy tak pomyślanych przesunięciach zostaną wykonane prace przez siły objętościowe i powierzchniowe.

Obliczmy te prace.

Siła powierzchniowa, przyłożona do elementu Δf_2 jest równa $p_2 \Delta f_2$. Siła ta przejdzie drogę Δs_2 w kierunku działania siły, zatem wykona pracę:

$$p_2 \Delta f_2 \Delta s_2$$

Siła powierzchniowa, przyłożona do elementu Δf_i , jest równa $p, \Delta f_i$; siła ta przejdzie drogę ΔS_i , w kierunku wprost przeciwnym kierunkowi działania siły; wykona więc pracę:

$$- p, \Delta f_i \Delta S_i$$

Pozostałe siły powierzchniowe pozostaną bez ruchu /założyliśmy, że powierzchnia F jest jak gdyby sztywną skorupą/, a więc pracy nie wykonają.

Przejdźmy teraz do pracy sił objętościowych.

Całe nasze przesunięcie przygotowane możemy sobie inaczej jeszcze wystawić; mianowicie możemy element płynu $\Delta f_2 \Delta S_2$ przenieść do miejsca $\Delta f_1 \Delta S_1$, nie ruszając wcale pozostałego płynu. Skutkiem tego zadanie sprowadza się do obliczenia pracy siły objętościowej, działającej na element o objętości $\Delta f_2 \Delta S_2$ jak gdyby siła ta działała podczas przenoszenia elementu z miejsca 2 do miejsca 1 tą samą drogą, na jakiej znajdują się poruszone cząstki płynu. Pozostałe siły objętościowe, działające na inne cząstki badanego płynu, nie biorące udziału w ruchu, nie wykonają żadnej pracy.

Znajdźmy siłę objętościową, która działa na

przesuwający się element o objętości $\Delta f_2 \Delta s_2$ lub $\Delta f_1 \Delta s_1$, co na jedno wychodzi.

Jeżeli przyspieszenie siły objętościowej w dowolnym miejscu odbywanej drogi jest α , wówczas siła objętościowa będzie miała wartość:

$$\frac{\Delta f_1 \Delta s_1 \tau}{g} \cdot \alpha$$

Praca, wykonana przez tę siłę na elemencie drogi ds , będzie równa:

$$\frac{\Delta f_1 \Delta s_1 \tau}{g} \cdot \alpha \cdot ds \cdot \cos(\alpha, ds)$$

na całej zaś drodze od punktu 2 do punktu 1 otrzymamy pracę:

$$\frac{\tau}{g} \int_2^1 \Delta f_1 \Delta s_1 \cdot ds \cdot \alpha \cdot \cos(\alpha, ds)$$

ponieważ objętość elementu $\Delta f_1 \Delta s_1$ jest stała, zatem możemy poprzednio otrzymaną sumę tak napisać:

$$\frac{\tau}{g} (\Delta f_1 \Delta s_1) \int_2^1 \alpha ds \cos(\alpha, ds)$$

Inne siły objętościowe /jak to dopiero co wspomnieliśmy/, pracy nie wykonają; zatem suma wszystkich prac przygotowanych, która powinna być według twierdzenia równa zeru, dostarcza nam równanie:

$$-p_1 \Delta f_1 \Delta s_1 + p_2 \Delta f_2 \Delta s_2 + \frac{\tau}{g} \Delta f_1 \Delta s_1 \int_2^1 \alpha ds \cdot \cos(\alpha, ds) = 0;$$

ponieważ $\Delta f_1 \Delta s_1 = \Delta f_2 \Delta s_2$, równanie skracamy i otrzymujemy:

$$-p_1 + p_2 + \frac{\sigma}{g} \int_2^1 a ds \cdot \cos(\alpha, ds) = 0$$

stąd

$$p_2 = p_1 + \frac{\sigma}{g} \int_1^2 a ds \cdot \cos(\alpha, ds) \quad /6/$$

Obierzmy prostokątne osi współrzędnych x, y, z ; wówczas wiadomo nam z geometrii analitycznej:

$$\cos(\alpha, ds) = \cos(\alpha, x) \cdot \cos(ds, x) + \cos(\alpha, y) \cdot \cos(ds, y) + \cos(\alpha, z) \cdot \cos(ds, z)$$

Podstawiając to do wyrazu z pod znaku całki, otrzymamy:

$$a ds \cos(\alpha, ds) = a \cos(\alpha, x) \cdot ds \cos(ds, x) + \\ + a \cos(\alpha, y) \cdot ds \cos(ds, y) + a \cos(\alpha, z) \cdot ds \cos(ds, z) .$$

Jeśli rzuty przyspieszenia a na osi x, y, z oznaczmy przez X, Y, Z , zaś rzuty przesunięcia ds na te osi oznaczmy przez dx, dy, dz , wówczas równanie /6/ przybierze postać:

$$p_2 = p_1 + \frac{\sigma}{g} \int_1^2 (X dx + Y dy + Z dz) \quad /7/$$

Punkty 1 i 2 obrane zostały zupełnie dowolnie w płynie; możemy je też obrać tuż obok siebie, naprz. w odległości ds ; wtedy ciśnienia różnić się będą o

wartość nieskończenie małą: $p_2 - p_1 = dp$ i w takim przypadku całkowanie będzie zbędne; wówczas otrzymamy z równania /6/

$$dp = \frac{\sigma}{g} \cdot \alpha \cdot ds \cdot \cos(\alpha, ds) \quad /8/$$

albo z równania /7/

$$dp = \frac{\sigma}{g} (Xdx + Ydy + Zdz)$$

Mamy więc tu to samo równanie zasadnicze, które otrzymaliśmy poprzednio /3/.

Dalsze uwagi, wypowiedziane co do potencjału sił w stosunku do równania /3/ pozostają w mocy.

Jeśli U jest potencjałem sił objętościowych, to, jak to już wiemy,

$$dU = Xdx + Ydy + Zdz$$

i wtedy równanie /7/ możemy napisać w takiej postaci:

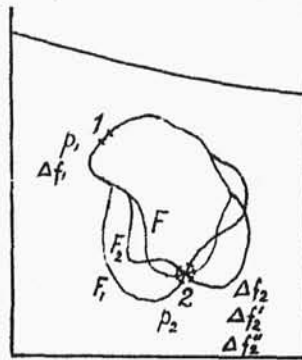
albo

$$p_2 = p_1 + \frac{\sigma}{g} \int_1^2 dU$$
$$p_2 = p_1 + \frac{\sigma}{g} (U_2 - U_1) \quad /9/$$

czyli, że zależność między ciśnieniem hydrostatycznym i potencjałem sił objętościowych jest liniowa.

28. Skorzystajmy z poprzednio zastosowanej metody dowodzenia i sprawdźmy tą drogą własność ciśnienia, poznaną w §24.

Niech powierzchnia F przechodzi przez elementy Δf_1 i Δf_2 tak, jak to podaliśmy w poprzednim §. Poznaliśmy tam zależność między ciśnieniami p_1 i p_2 :



rys.4.

$$p_2 = p_1 + \frac{\gamma}{g} \int_1^2 \alpha \cdot ds \cdot \cos(\alpha, ds)$$

Wyobraźmy sobie inną powierzchnię F_1 przechodzącą przez te same punkty 1 i 2 tak, aby element Δf_1 pozostał w niej bez zmiany natomiast element $\Delta f_2'$, zawierający punkt 2, niech zmieni swe pochylenie. Niech wtedy w punkcie 2 będzie ciśnienie p_2' ; znajdziemy je ze wzoru /6/:

$$p_2' = p_1 + \frac{\gamma}{g} \int_1^2 \alpha \cdot ds \cdot \cos(\alpha, ds)$$

czyli widzimy, że $p_2' = p_2$

Dalej wyobraźmy sobie, trzecią powierzchnię F_2 , przechodzącą przez punkty 1 i 2 i zawierającą ele-

menty: poprzedni Δf_1 i nowy $\Delta f_2''$, inaczej niż Δf_2 i $\Delta f_2'$ pochylony.

Niech wtedy w punkcie 2 będzie ciśnienie p_2'' , które znów znajdziemy ze wzoru /6/:

$$p_2'' = p_1 + \frac{\gamma}{g} \int_1^2 a \cdot ds \cdot \cos(a, ds)$$

Widzimy stąd, że $p_2'' = p_2' = p_2$, a więc ciśnienie w punkcie 2 nie zależy od pochylenia elementu Δf_2 c.b.d.d.

POWIERZCHNIA JEDNAKOWEGO CIŚNIENIA /EKWIPOTENCJALNA/.

29. Poprzednio poznaliśmy zmianę ciśnienia hydrostatycznego w płynie /w cieczy lub w gazie/ w dwóch bardzo bliskich punktach. Naogół ciśnienia od punktu do punktu się zmieniają, jednak można sobie wyobrazić, że może istnieć zbiór takich punktów w bliższym i dalszym sąsiedztwie, w których ciśnienie hydrostatyczne jest jedno i to samo. Punkty te znajdują się na powierzchni pewnej, którą nazywamy **p o w i e r z c h n i ą j e d n a k o w e g o c i ś n i e n i a**, albo **p o w i e r z c h n i ą e k w i p o t e n c j a l n ą**.