

346. Niech kąt $\alpha = \pi = 180^\circ$ /rys.223/; wówczas powierzchnia AB nadaje strumieniowi kierunek wprost przeciwny pierwotnemu.

W takim razie

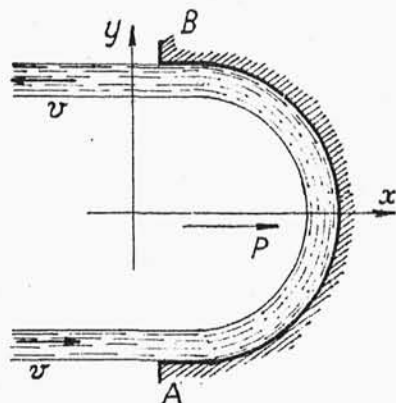
$$\cos \alpha = -1 ; \sin \alpha = 0 ;$$

$$P_x = \frac{Q \cdot r}{g} \cdot v \cdot 2 ; P_y = 0 ;$$

$$P = P_x = 2 \frac{Q r}{g} \cdot v ;$$

$$\cos(P, x) = 1 ; (P, x) = 0 ,$$

czyli, że w danym przypadku parcie strumienia jest równoległe do osi x i jest $\sqrt{2} = 1,41$ razy większe, niż w przypadku poprzednim.

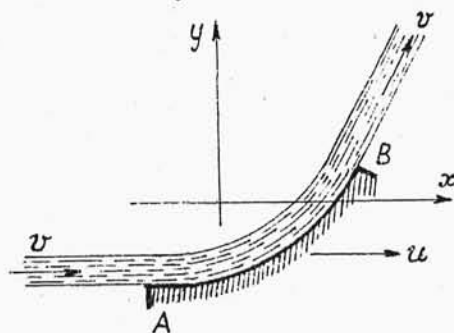


rys.223.

347. Niech powierzchnia AB będzie w ruchu z prędkością u równoległą do osi x /rys.224/.

Wówczas działanie strumienia na powierzchnię

AB będzie takie samo, jak gdyby pow. AB była



rys.224.

w spoczynku, tylko strumień wpadał na nią z prędkością względną $= (v - u)$.

W takim razie, stosując poprzednie wzory, znajdziemy:

$$P_x = \frac{Q\gamma}{g}(v-u)(1-\cos\alpha) \quad /213/$$

$$P_y = \frac{Q\gamma}{g}(v-u)\sin\alpha \quad /214/$$

348. Jeśli powierzchnia AB /rys.224/ posuwa się z prędkością u w kierunku osi x ; a w tym samym kierunku działa siła P_x , możemy w tym przypadku mówić o pracy użytecznej, wykonanej przez tę siłę P_x , w jednostkę czasu; będzie to t.zw. moc strumienia; oznaczmy ją przez E .

Wtedy

$$E = P_x \cdot u = \frac{Q\gamma}{g}(v-u) \cdot u \cdot (1-\cos\alpha) \quad /215/$$

Wzór ten możemy przedstawić w innej postaci, podstawiając zamiast Q iloczyn z przekroju przez prędkość. Mogą tu zajść dwa przypadki:

a/ kiedy mamy tylko jedną poruszającą się powierzchnię AB na nią stale dopływa strumień o przekroju F . Prędkość dopływu na powierzchnię będzie

wtedy $v-u$ i wówczas

$$Q = F(v-u)$$

oraz przypadek

b/ kiedy mamy szereg powierzchni podobnych do AB ,
związanych ze sobą w jedną całość tak, że jedna po
drugiej podchodzą pod strumień w sposób jednostajny.
Wówczas możemy powiedzieć, że dopływ strumienia o
przekroju F zachodzi z prędkością v ; zatem nasz zbiór
powierzchni przyjmuje wydatek

$$Q = F \cdot v.$$

W takim razie w przypadku /a/ otrzymamy moc stru-
mienia:

$$E_{\alpha} = F \frac{(v-u)^2}{g} \cdot \gamma \cdot u \cdot (1 - \cos \alpha) \quad /216/$$

Przy pewnym ustosunkowaniu prędkości u do v mo-
żemy otrzymać max. E_{α} . Będzie to wtedy, kiedy $(v-u)^2 \cdot u$
otrzyma maximum

Znaleźć wartość u możemy z warunku:

$$\frac{d}{du} [(v-u)^2 \cdot u] = 0;$$

ponieważ

$$(v-u)^2 \cdot u = v^2 \cdot u - 2u^2 \cdot v + u^3,$$

więc

$$\frac{d}{du} (v^2 \cdot u - 2u^2 \cdot v + u^3) = v^2 - 4uv + 3u^2 = 0,$$

albo

$$u^2 - \frac{4}{3} v \cdot u + \frac{v^2}{3} = 0$$

stąd

$$u = \frac{2}{3} v \pm \sqrt{\frac{4}{9} v^2 - \frac{v^2}{3}},$$

albo

$$u = \frac{2}{3} v \pm \frac{v}{3}; \quad u_1 = v; \quad u_2 = \frac{v}{3}.$$

Pierwszy pierwiastek $u_1 = v$ nie ma dla nas znaczenia, co łatwo sprawdzić, gdyż odpowiada to minimum E_α , kiedy strumień nie wpada na powierzchnię AB . Zatem max. E_α będzie przy $u = \frac{v}{3}$.

Wtedy max. $E_\alpha =$

$$= \frac{F \cdot \gamma}{g} \cdot \frac{4}{27} v^3 (1 - \cos \alpha).$$

Kiedy $\alpha = 90^\circ$, wtedy max. $E_\alpha =$

$$= \frac{F \cdot \gamma}{g} \cdot \frac{4}{27} \cdot v^3.$$

Kiedy $\alpha = 180^\circ$, wtedy max. $E_\alpha =$

$$= \frac{F \cdot \gamma}{g} \cdot \frac{4 \cdot 2}{27} \cdot v^3.$$

W przypadku /b/, kiedy strumień wpada na szereg związanych ze sobą powierzchni, wówczas moc

$$E_b = \frac{F \cdot v \cdot \gamma}{g} (v - u) \cdot u (1 - \cos \alpha) \quad /217/$$

Max. E_b będzie wtedy, kiedy $u \cdot v(v-u) = u \cdot v^2 - v \cdot u^2$ otrzyma max.

Pochodna $(u \cdot v^2 - v \cdot u^2)$ wzgl. u jest $v^2 - 2u \cdot v$;
pochodna ma być równa zeru, zatem:

$$v^2 - 2u \cdot v = 0 ; \text{ stąd } v - 2u = 0$$

albo

$$\underline{u = \frac{v}{2} .}$$

Wówczas max. $E_b =$

$$= \frac{F \cdot r}{g} \cdot \frac{v^3}{4} (1 - \cos \alpha) = \frac{Q \cdot r}{g} \cdot \frac{v^2}{4} (1 - \cos \alpha)$$

Kiedy $\alpha = 90^\circ$, max. $E_b =$

$$= \frac{F \cdot r}{g} \cdot \frac{v^3}{4} = \frac{Q \cdot r}{g} \cdot \frac{v^2}{4} = \frac{1}{2} Q \cdot r \cdot \frac{v^2}{2g} .$$

Kiedy $\alpha = 180^\circ$, max. $E_b =$

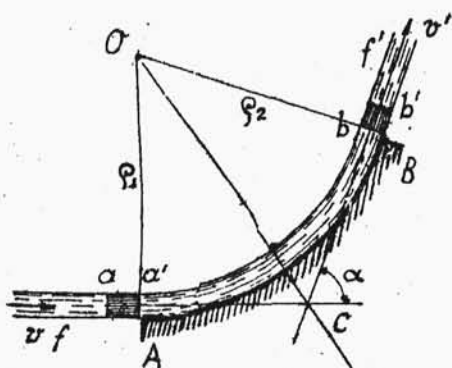
$$= \frac{F \cdot r}{g} \cdot \frac{v^3}{2} = \frac{Q \cdot r}{g} \cdot \frac{v^2}{2} = Q \cdot r \cdot \frac{v^2}{2g} .$$

Otrzymany warunek największej mocy strumienia, uderzającego o powierzchnię poruszającą się, przy $u = \frac{v}{2}$ jest przestrzegany przy budowie kół wodnych podsiębiernych, kół Peltona, w turbinach o swobodnym strumieniu.

349. Znajdźmy linię działania parcia strumienia na powierzchnię. Weźmy przykład, rozpatrzony w art. 343. Zastosujmy tu twierdzenie o zmianie momentu statyczne-

go ilości ruchu.

Obierzmy sobie pewien punkt O , względem którego będziemy obliczali momenty statyczne zarówno ilości ruchu jak i moment popędu siły zewnętrznej w danym przypadku oddziaływania powierzchni AB na strumień. Jeżeli punkt O obierzemy na prostej parcia, wówczas moment popędu parcia będzie zerem. W ten sposób otrzymamy równanie, z którego uda się znaleźć jeden punkt, należący do prostej działania parcia. Ponieważ kierunek parcia umiemy określać, znajdziemy zatem i samą linię działania parcia.



rys. 225.

Niech ruch strumienia będzie trwały. Wówczas zmiana momentów statycznych ilości ruchu obliczy się jako różnica momentu ilości ruchu cieczy zawartej między bb' i momentu ilości ruchu cieczy w aa' .

Pierwszy moment względem O jest

$$- \frac{f' \cdot v' \cdot dt \cdot \delta}{g} \cdot v' \cdot \varrho_2 ;$$

drugi moment jest

$$-\frac{f \cdot v \cdot dt \cdot \delta}{g} \cdot v \cdot \varrho_1 ;$$

zmiana momentów jest

$$-\frac{f' \cdot v' \cdot dt \cdot \delta}{g} \cdot v' \cdot \varrho_2 + \frac{f \cdot v \cdot dt \cdot \delta}{g} \cdot v \cdot \varrho_1 .$$

Ta zmiana równa się momentowi statycznemu popędu oddziaływania powierzchni na strumień względem punktu O .

Ponieważ założyliśmy, że punkt O jest na linii działania parcia, więc moment popędu = 0.

Otrzymujemy zatem równanie:

$$-\frac{f' \cdot v' \cdot dt \cdot \delta}{g} \cdot v' \cdot \varrho_2 + \frac{f \cdot v \cdot dt \cdot \delta}{g} \cdot v \cdot \varrho_1 = 0$$

Ponieważ z warunku ciągłości mamy

$$f' \cdot v' = f \cdot v$$

więc po skróceniu przez $\frac{f \cdot v \cdot dt \cdot \delta}{g}$ otrzymamy:

$$v' \cdot \varrho_2 = v \cdot \varrho_1 \quad /b/$$

Jeżeli przyjmiemy, że prędkości v i v' nie różnią się między sobą, znajdziemy, że

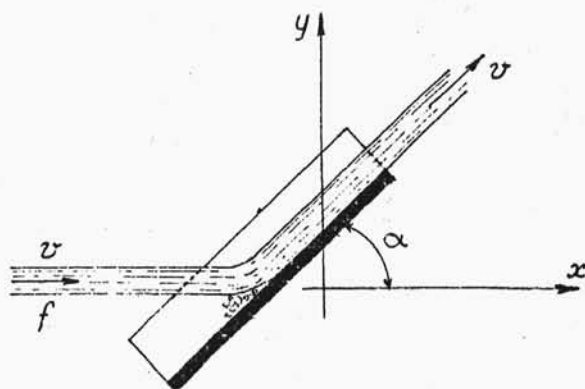
$$\varrho_1 = \varrho_2 ,$$

czyli, że punkt O znajduje się na prostej dzielącej kąt ACB przez pół.

Prosta ta zatem będzie linią działania parcia powierzchni na strumień, a więc linią parcia strumienia na

powierzchnię AB .

350. Rozpatrzmy, jakie będzie działanie strumienia na płaszczyznę z obrzeżami po bokach, kiedy strumień wpada na nią pod kątem α /rys.226/.



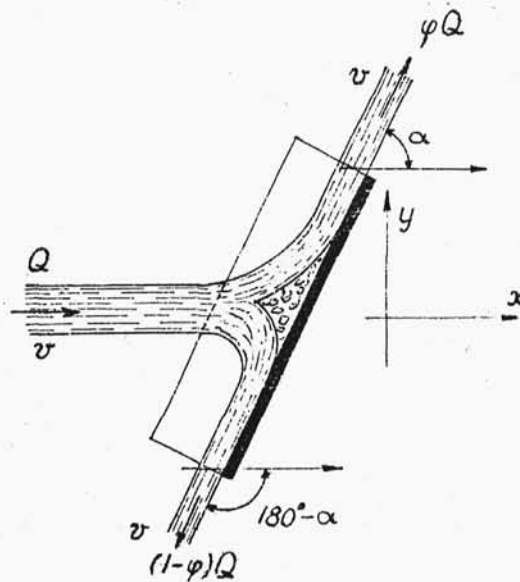
rys.226.

Strumień przez płaszczyznę zostanie odchylony. Jeżeli kąt α jest niewielki, wówczas odchylenie może być łagodne i strumień popłynie tak, jakby to była powierzchnia krzywa, którego działanie na strumień już poprzednio było rozpatrzone.

Przypuśćmy, że osi x i y są w płaszczyźnie nie poziomej, wówczas rzuty oddziaływania P strumienia na płaszczyznę znajdziemy z wzorów, poprzednio otrzymanych:

$$P_x = \frac{Q \cdot \delta \cdot v}{g} (1 - \cos \alpha) ; \quad P_y = - \frac{Q \cdot \delta}{g} \cdot v \cdot \sin \alpha .$$

351. Zwiększajmy kąt α /rys.227/. Przy pewnym położeniu płaszczyzny strumień zacznie się rozczepiać. W miejscu, gdzie wpada strumień na płaszczyznę, utworzy się z wirów rodzaj klina, który rozdziela strugi strumienia. Otrzymujemy obraz, jak na rysunku.



rys.227.

Przypuśćmy, że strumień dzieli się na dwie części, tak, że z ogólnego wydatku Q płynie w kierunku dodatnich y ilość wody $= \varphi Q$; w przeciwnym kierunku płynie $Q - \varphi Q = Q(1 - \varphi)$.

Jeżelibyśmy tym razem chcieli znaleźć rzuty całkowitego parcia na osi x i y , t.j. P_x i P_y , nie będziemy tego w stanie zrobić, póki nie znamy φ .

Przyjmijmy na chwilę, że φ mamy dane.

Wtedy powiemy: zmiana ilości ruchu części strumienia φQ w kierunku x w elemencie czasu =

$$\frac{\varphi Q \cdot dt \cdot v}{g} (v \cdot \cos \alpha - v);$$

zmiana il.r. części $Q(1-\varphi)$ jest

$$\frac{(1-\varphi)Q \cdot dt \cdot v}{g} [v \cos(180-\alpha) - v] = \frac{(1-\varphi)Q \cdot dt \cdot v}{g} (-v \cos \alpha - v)$$

zatem zmiana ilości ruchu będzie

$$\begin{aligned} \frac{Q \cdot dt \cdot v}{g} [\varphi \cos \alpha - \varphi + (1-\varphi)(-1 - \cos \alpha)] &= \frac{Q \cdot dt \cdot v}{g} [\varphi \cos \alpha - \varphi - \\ - 1 + \varphi - \cos \alpha + \varphi \cos \alpha] &= \frac{Q \cdot dt \cdot v}{g} (2\varphi \cos \alpha - 1 - \cos \alpha). \end{aligned}$$

Obliczmy teraz popęd sił, działających na nasz strumień w kierunku osi x i y w czasie dt . Na strumień działają: siła ciężkości, której kierunek z założenia jest prostopadły do płaszczyzny xoy , oraz oddziaływanie płaszczyzny na strumień $= (-P)$. Oddziaływanie strumienia na płaszczyznę oznaczamy przez P . Zatem popęd sił w kierunku osi x będzie $-P_x \cdot dt$.

Wobec tego

$$-P_x \cdot dt = \frac{Q \cdot dt \cdot v}{g} [2\varphi \cos \alpha - 1 - \cos \alpha];$$

stad

$$P_x = \frac{Q \cdot v}{g} [1 + \cos \alpha (1 - 2\varphi)].$$

W podobny sposób znajdziemy składową P_y :

Zmiana ilości ruchu obydwóch części strumienia w kierunku osi y :

$$\frac{\varphi Q dt \bar{r}}{g} v \sin \alpha - \frac{(1-\varphi) Q dt \bar{r}}{g} v \sin (180-\alpha),$$

albo inaczej

$$\frac{Q dt \bar{r}}{g} v \sin \alpha [\varphi - 1 + \varphi] = \frac{Q dt \bar{r}}{g} v \sin \alpha (2\varphi - 1)$$

popęd siły $/-P_y/$ jest $= -P_y dt$, zatem:

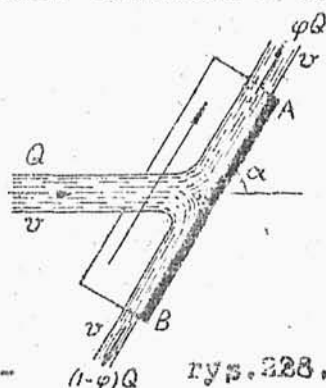
$$\frac{Q dt \bar{r}}{g} v \sin \alpha (2\varphi - 1) = -P_y dt; \text{ stąd } P_y = \frac{Q \bar{r}}{g} v \sin \alpha (1 - 2\varphi).$$

Z powyższego widzimy, że sposób, w jaki się strumień rozczepił, ma wpływ na składowe P_x i P_y , zatem i na siłę P .

352. Spróbujmy znaleźć stosunek φ , o którym była mowa w poprzednim artykule.

Jeśli przyjmiemy, że powierzchnia płaszczyzny AB jest doskonale gładka, wówczas strumień w tej płaszczyźnie nie doznaje żadnego oddziaływania.

Zauważywszy to, zbadajmy zmianę ilości ruchu naszego strumienia w kierunku równoległym do płasz-



rys. 328.

czyżny AB w czasie dt ; jako dodatni kierunek przyjmujemy ku górze /rys.228/. Badamy ruch trwały.

Końcowa ilość ruchu strumienia przy A będzie:

$$\frac{\varphi \cdot Q \cdot dt \cdot r}{g} \cdot v;$$

Końcowa ilość ruchu strumienia przy B będzie:

$$-\frac{(1-\varphi)Q \cdot dt \cdot r}{g} \cdot v;$$

następnie początkowa ilość ruchu strumienia jest:

$$\frac{Q \cdot dt \cdot r}{g} \cdot v \cdot \cos \alpha;$$

wobec tego równanie zmiany ilości ruchu otrzyma postać:

$$\frac{\varphi Q \cdot dt \cdot r}{g} \cdot v - \frac{(1-\varphi)Q \cdot dt \cdot r}{g} \cdot v - \frac{Q \cdot dt \cdot r}{g} \cdot v \cos \alpha = 0$$

W prawej stronie równania mamy zero, gdyż w płaszczyźnie AB siła nie działa, a więc popęd jest równy zero.

Po skróceniu otrzymamy:

$$\varphi - (1-\varphi) - \cos \alpha = 0,$$

z stąd

$$2\varphi = 1 + \cos \alpha.$$

albo

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \frac{1 + \cos \alpha}{2} \\ 1 - \varphi &= \frac{1 - \cos \alpha}{2} \end{aligned} \right\}$$

Jak widzimy, współczynnik φ zależy od kąta α ; przy $\alpha = 0$, $\varphi = 1$; im kąt α jest większy, tym φ jest mniejsze; przy $\alpha = 90^\circ$, $\varphi = 1 - \varphi = \frac{1}{2}$, czyli, że, kiedy strumień wpada na płaszczyznę pod kątem prostym, wtedy strumień dzieli się na 2 równe części.

Wówczas

$$p_x = \frac{Q}{g} \cdot v \cdot \varphi, \quad p_y = 0$$

oraz

$$P = \sqrt{p_x^2 + p_y^2} = \frac{Q \varphi v}{g}$$

kąty

$$(P, x) = 0; \quad (P, y) = 90^\circ.$$

353. Rozpatrzmy szczególny przypadek, kiedy należy znaleźć parcie strumienia na płaszczyznę z poprzedniego zagadnienia, kiedy, mianowicie, szukamy parcia w kierunku *n o r m a l n y m* do płaszczyzny, pochylonej do osi x pod kątem α /rys.229/.

Chodzi tu więc o znalezienie parcia w kierunku N ; niech ta oś tworzy kąt β z osią x , albo z kierunkiem pierwotnej prędkości v .

Obliczmy zmianę ilości ruchu w kierunku normalnej N w czasie dt . Końcowa ilość ruchu = 0, ilość ruchu

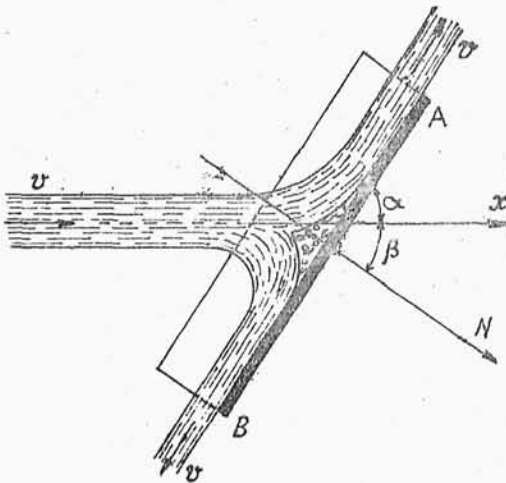
początkowa =

$$= \frac{Q \cdot dt \cdot r}{g} \cdot v \cdot \cos \beta.$$

Zmiana ilości ruchu =

$$= - \frac{Q \cdot dt \cdot r}{g} \cdot v \cdot \cos \beta.$$

Jeśli parcie strumienia na płaszczyznę w kierunku N oznaczmy przez P_n , wtedy siła oddziaływania



rys. 229.

płaszczyzny na strumień $= -P_n$. Popęd tej siły $= -P_n dt$, wówczas napiszemy równanie:

$$- \frac{Q \cdot dt \cdot r}{g} \cdot v \cos \beta = -P_n \cdot dt,$$

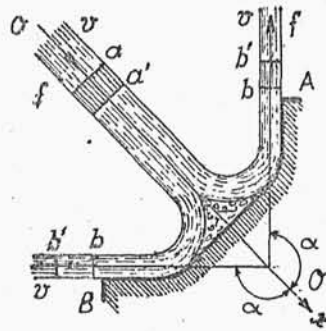
a stąd parcie strumienia

$$P_n = \frac{Q \cdot r}{g} \cdot v \cdot \cos \beta = \frac{Q \cdot r}{g} \cdot v \cdot \sin \alpha \quad /218/$$

Parcie to, jak widzimy, nie zależy od tego, w jaki sposób strumień został rozczepiony przez płaszczyznę AB .

354. Niech będzie powierzchnia obrotowa AB z osią OO . Niech wzdłuż tej osi na powierzchnię AB spływa

strumień o przekroju f z prędkością v /rys.230/. Strumień rozdziela się po powierzchni AB i spływa z krawędzi. Niech prędkość strumienia spływającego z powierzchni będzie również v . Wówczas przekrój strumienia pierścieniowego będzie też f . Wydatek będzie $Q = f \cdot v$.



rys.230.

Znajdźmy parcie strumienia w kierunku osi $\sigma\sigma$ na powierzchnię AB . Jeśli ruch strumienia jest trwały, zmianę ilości ruchu obliczymy jako ilość ruchu pierścienia strumienia bb' mniej ilość ruchu części $\alpha\alpha'$ strumienia. Wzdłuż całego otworu pierścieniowego strumień posiada prędkości tworzące z osią $\sigma\sigma$ kąt α . Dlatego też ilość ruchu końcowa względem osi x jest:

$$\frac{Q dt}{g} v \cos \alpha;$$

ilość ruchu początkowa:

$$\frac{Q dt}{g} v.$$

Zmiana ilości ruchu =

$$= \frac{Q dt}{g} (v \cos \alpha - v).$$

Popęd siły $(-P_x)$, działającej na strumień od stró-

ny powierzchni na ciecz $= -P_x \cdot dt$. Jeśli ciężaru części strumienia zawartej między przekrojami α, b nie uwzględnimy, otrzymamy równanie:

$$\frac{Q \, dt \, r}{g} \cdot v (\cos \alpha - 1) = -P_x \cdot dt;$$

stąd

$$P_x = \frac{Q \, r}{g} v (1 - \cos \alpha) \quad /219/$$

Łatwo przekonać się, że parcie strumienia w kierunku osi prostopadłej do x jest $= 0$.

Równanie /219/ posłużyć może do obliczenia parcia strumienia na płaszczyznę, jeśli przyjmiemy $\alpha = 90^\circ$.

Wówczas

$$P_{x(\alpha=90^\circ)} = \frac{Q \, r}{g} \cdot v,$$

albo

$$P_{x(\alpha=90^\circ)} = \frac{f \cdot v^2 \, r}{g} \quad /220/$$

Jeśli powierzchnia otrzyma kąt $\alpha = 180^\circ$, wówczas

$$P_{x(\alpha=180^\circ)} = \frac{2Q \, r}{g} \cdot v,$$

albo

$$P_{x(\alpha=180^\circ)} = \frac{2f v^2 \, r}{g} \quad /221/$$

Powierzchnie, poprzednio rozpatrywane, mogą być rozważane jako będące w ruchu, zupełnie tak samo, jak

to widzieliśmy w §347 i następnym.

Możemy też mówić o mocy, wykonywanej przez strumień, oraz określanie warunków maximum mocy.

PARCIE STRUMIENIA CIECZY O ZNACZNYM PRZĘKROJU NA POWIERZCHNIĘ OGRANICZONĄ.

355. We wszystkich rozpatrywanych poprzednio zagadnieniach przyjmowaliśmy, że strumień jest o przekroju małym w porównaniu z polem powierzchni, na którą strumień wpada.

W tych warunkach strumień ma możność spływania po powierzchni, opuszczając ją z prędkościami, stycznymi do końcowych elementów powierzchni.

Jeśli sobie przedstawimy powierzchnię o polu nie-
dość dużym w porównaniu z przekrojem strumienia, wówczas prędkości strumienia, opuszczającego powierzchnię, nie zdążą przyjąć kierunku stycznego do skrajnych elementów powierzchni.

Otrzymamy wtedy przypadek, uwidoczniiony na rysunku 231, kiedy np. powierzchnia staje się płaską, ograniczoną w wymiarach płytką. Wówczas strumień spływający z płytki ma prędkość, która tworzy z kierunkiem po-