

a stąd

$$P_z = P_{z1} + P_{z2} = \gamma(V_1 - V_2) = \gamma V;$$

czyli, że parcie cieczy na naczynie w kierunku pionowym wyraża się tylko ciężarem cieczy, zawartej w naczyniu. - Prosta działania tego parcia, oczywiście, przejdzie przez środek ciężkości bryły, której objętość oznaczyliśmy przez V .

65. PARCIE CIECZY NA POWIERZCHNIĘ KRZYWĄ

W DOWOLNYM KIERUNKU.

Mamy powierzchnię krzywą o polu F ; dany jest kierunek u , równoległy do płaszczyzny xOz , który tworzy z osią x kąt α /rys.29/; należy znaleźć parcie cieczy na tę powierzchnię F w z a d a n y m kierunku u .

Na powierzchni F obieramy elementarne pole dF , znajdujące się na głębokości Z pod swobodną powierzchnią. Niech w tym miejscu będzie ciśnienie p . Elementarne parcie cieczy na element dF jest $dP = p \cdot dF$. Rzut tego parcia na kierunek u oznaczmy przez dP_u ; wartość jego znajdziemy: $dP_u = p \cdot dF \cdot \cos(p, u)$,

albo, rozumując tak samo, jak to uczyniliśmy w art.

56 otrzymamy:

$$dP_u = p \cdot dF_u,$$

gdzie dF_u jest rzutem elementu dF na płaszczyznę, prostopadłą do kierunku u . Ponieważ $p = p_a + \gamma z$, więc

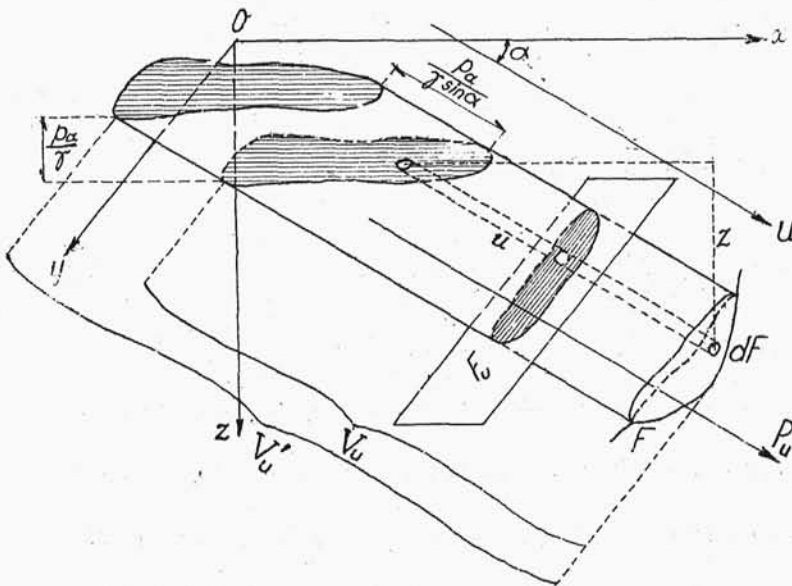
$$dP_u = p_a \cdot dF_u + \gamma z \cdot dF_u;$$

zatem rzut wypadkowego parcia na oś u

$$P_u = \int_F p_a \cdot dF_u + \int_F \gamma z \cdot dF_u,$$

albo

$$P_u = p_a \cdot F_u + \gamma \int_F z dF_u.$$



rys.29.

Całkowanie należy rozciągnąć na całą powierzchnię F . Co oznacza wyraz $Z dF_u$? Owińmy element dF powierzchnią walcową, której tworząca jest równoległa do osi u ; wtedy ta powierzchnia, przedłużona do swobodnej powierzchni cieczy, utworzy elementarny walec, opierający się na elemencie dF , kończący się na swobodnej powierzchni; przekrój poprzeczny tego walca jest dF_u i wysokość $u = \frac{Z}{\sin \alpha}$; przez u oznaczamy odcinek, zawarty między środkami ciężkości podstaw opisanego elementarnego walca. Objętość powyższego walca elementarnego, równą $u \cdot dF_u$ oznaczmy przez dV_u . Ponieważ $Z = u \cdot \sin \alpha$ więc:

$$Z \cdot dF_u = u \cdot dF_u \cdot \sin \alpha = dV_u \cdot \sin \alpha$$

Zatem

$$P_u = p_a \cdot F_u + \gamma \sin \alpha \int_F dV_u,$$

albo

$$P_u = p_a \cdot F_u + \gamma V_u \cdot \sin \alpha \quad /21/$$

W równaniu tym i w następnych F_u oznacza rzut powierzchni F na płaszczyznę normalną do kierunku u ; V_u oznacza objętość słupa walcowego o tworzącej równoległej do u , opierającego się na powierzchni F , ściętego płaszczyzną swobodnej powierzchni

ciężczy.

Jeśli na powierzchnię F od zewnątrz działa ciśnienie p_o , wtedy:

$$P_u = (p_a - p_o)F_u + \gamma \cdot V_u \cdot \sin \alpha \quad /21a/$$

W przypadku, kiedy $p_a = p_o$, otrzymamy:

$$P_u = \gamma \cdot V_u \cdot \sin \alpha \quad /21b/$$

Znalazłszy wartość wypadkowego parcia P_u , pozostaje znaleźć prostą działania tego parcia. W tym celu przedstawmy równanie /21/ w takiej postaci:

$$P_u = \gamma \left[F_u \cdot \frac{p_a}{\gamma \cdot \sin \alpha} + V_u \right] \sin \alpha$$

Wyraz w nawiasie oznacza objętość bryły, utworzonej z poznanej wyżej objętości V_u , uzupełnionej bryłą walcową o przekroju poprzecznym F_u i wysokości $\frac{p_a}{\gamma \cdot \sin \alpha}$. Oznaczywszy objętość uzupełnionej bryły przez V_u' , napiszemy, że

$$P_u = \gamma \cdot V_u' \cdot \sin \alpha$$

Z tego równania widzimy, że prosta działania parcia P_u przechodzi przez środek ciężkości bryły V_u' równoległe do zadanego kierunku u .

W przypadku, kiedy istnieją p_a i p_o postąpimy w podobny sposób.

Łatwo też poradzimy sobie, kiedy kierunek nie jest równoległy do płaszczyzny

66. DZIAŁANIE CIECZY NA CIAŁO W NIEJ ZANURZONE.

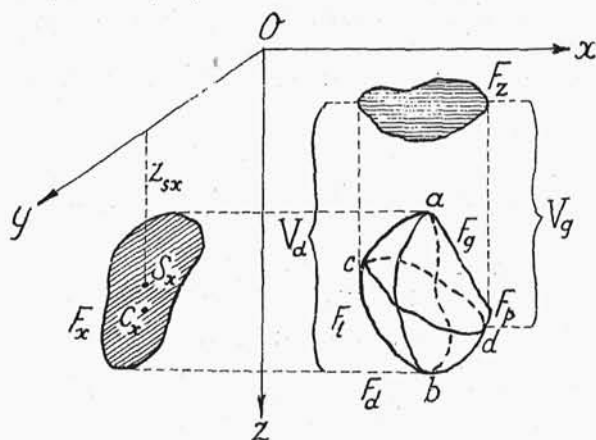
Niech będzie jakiekolwiek ciało, całkowicie zanurzone w cieczy ciężkiej. Obierzmy osi współrzędnych jak zwykle: osi x, y w płaszczyźnie poziomej na swobodnej powierzchni, oś Z pionowo w dół.

Zbadajmy działanie cieczy na ciało w którymkolwiek kierunku poziomym /naprz. w kierunku osi x /. W tym celu owińmy nasze ciało powierzchnią walcową o tworzącej równoległej do osi x tak, aby powierzchnia walcowa była stale styczna do powierzchni ciała. Wtedy punkty styczności na powierzchni ciała utworzą krzywą zamkniętą ab , która powierzchnię ciała podzieli na dwie części: prawą F_p i lewą F_l /rys. 30/. Wspomniana owijająca powierzchnia walcowa wytnie na płaszczyźnie yOz pole F_x , które może być uważane za rzut zarówno F_p , jak i F_l .

Parcie cieczy na powierzchnię F_p , w kierunku x , zgodnie z tym, co mówiliśmy w art. 62, otrzymamy:

$$P_{px} = -(F_x p_a + \gamma F_x \cdot Z_{sx}) ,$$

gdzie Z_{sx} jest odległością środka ciężkości pola rzutu F_x od swobodnej powierzchni.



rys.30.

Parcie P_{px} przejdzie przez punkt C_x , którego położenie w polu F_x zależy tylko od kształtu F_x i od położenia tego pola względem osi y i z . Parcie P_{px} działa w kierunku ujemnym x .

Parcie cieczy na powierzchnię F_l w kierunku x , podobnie, jak poprzednio, otrzymamy:

$$P_{lx} = F_x p_a + \gamma F_x \cdot Z_{sx} .$$

Parcie to działa w kierunku dodatnim x i przechodzi przez punkt C_x ten sam, co i parcie P_{px} . Biorąc pod uwagę jednoczesne działanie P_{px} i P_{lx} zauważymy, że te parcia są sobie równe, mają kierunki

wprost przeciwne i przechodząc przez ten sam punkt, mają wspólną prostą działania, a więc znoszą się.

Widzimy zatem, że wypadkowe parcie cieczy w kierunku osi X na ciało zanurzone równa się zeru. To samo dotyczy każdego kierunku p o z i o m e - g o.

Stąd wniosek: c i a ł o z a n u r z o n e w c i e c z y n i e d o z n a j e ż a d n e - g o r u c h u w k i e r u n k u p o z i o m y m p o d d z i a ł a n i e m c i e c z y . Ciało będzie tylko ściskane przez otaczającą ciecz.

67. Poznajmy teraz działanie cieczy w kierunku pionowym na ciało zanurzone w niej.

W tym celu owińmy ciało powierzchnią cylindryczną o tworzącej równoległej do osi Z , poprowadzonej stycznie do powierzchni ciała /rys.30/. Punkty styczności niech utworzą krzywą zamkniętą cd , która dzieli powierzchnię ciała F na dwie części: górną F_g i dolną F_d . Jednocześnie wspomniana powierzchnia cylindryczna na płaszczyźnie xOy wytnie pole F_z , które możemy uważać jako rzut F_g lub F_d .

Znajdźmy działanie cieczy w kierunku osi Z na

górną powierzchnię F_g . Zgodnie z art.64

$$P_{gz} = \rho_a \cdot F_z + \gamma \cdot V_g , \quad \text{albo} \quad P_{gz} = \gamma \left[\frac{\rho_a}{\gamma} F_z + V_g \right] ,$$

gdzie V_g jest to objętość opierającej się na powierzchni F_g bryły, otoczonej z boków powierzchnią cylindryczną; bryła sięga swobodnej powierzchni cieczy. Parcie to przechodzi przez środek ciężkości bryły V_g uzupełnionej bryłą o podstawie F_z i wysokości $\frac{\rho_a}{\gamma}$. Parcie to skierowane jest w dół.

Znajdźmy teraz działanie cieczy w kierunku osi Z na dolną powierzchnię F_d . W podobny do poprzedniego sposób znajdziemy:

$$P_{dz} = -(\rho_a \cdot F_z + \gamma \cdot V_d) , \quad \text{albo} \quad P_{dz} = -\gamma \left[\frac{\rho_a}{\gamma} F_z + V_d \right] ,$$

gdzie V_d jest objętością bryły, która się opiera na powierzchni F_d , jest otoczona z boków powierzchnią cylindryczną i sięga swobodnej powierzchni.

Parcie P_{dz} przechodzi przez środek ciężkości bryły $(\frac{\rho_a}{\gamma} F_z + V_d)$ i skierowane jest ku górze. Dlatego też postawiony jest znak /-/ przed wartością parcia P_{dz} .

Wypadkowe parcie na ciało w kierunku pionowym otrzymamy:

$$P_z = P_{gz} + P_{dz} = \rho_a F_z + \gamma V_g - \rho_a F_z - \gamma V_d$$

albo

$$P_z = \gamma(V_g - V_d).$$

Z rysunku łatwo dostrzeżemy, że V_d jest zawsze większe, niż V_g , przy czym różnica między V_d i V_g jest równa dokładnie objętości V zanurzonego ciała.

Zatem napiszemy, że

$$P_z = -\gamma V \quad /22/$$

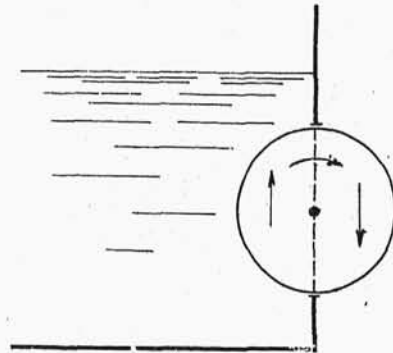
Stąd wnioskujemy, że wypadkowe p a r c i e c i e c z y n a c i a ł o w n i e j z a n u r z o n e w k i e r u n k u p i o n o w y m j e s t z w r ó c o n e k u g ó r z e i r ó w n a s i ę c i ęż a r o w i c i e c z y , z a w a r t e j w o b j ę t o ś c i z a n u r z o n e g o c i a ł a . P a r c i e t o n a z y w a m y w y p ó r e m . Z p r z e b i e g u r o z u m o w a n i a w i d a ć , że w y p ó r p r z e c h o d z i p r z e z ś r o d e k c i ęż k o ś c i z a n u r z o n e j c z ę ś c i c i a ł a , w y p e ł n i o n e j j e d n o r o d n ą m a s ą . P u n k t t e n n a z y w a m y ś r o d k i e m z a n u r z e n i a l u b t e ż ś r o d k i e m w y p o r u .

Twierdzenie powyższe jest treścią Z a s a d y
A r c h i m e d e s a /287-212 przed Chr./.

68. Odpowiedź na dwa poniższe przykłady wyjaś-
ni lepiej treść zasady Archimedesesa.

PRZYKŁAD X.

Niech będzie na-
czynie, w którego ścian-
ce pionowej jest wykona-
ny otwór prostokątny. W
otwór ten wprowadzony jest
dokładnie walec ciężki,
mogący się obracać bez
żadnego tarcia około osi



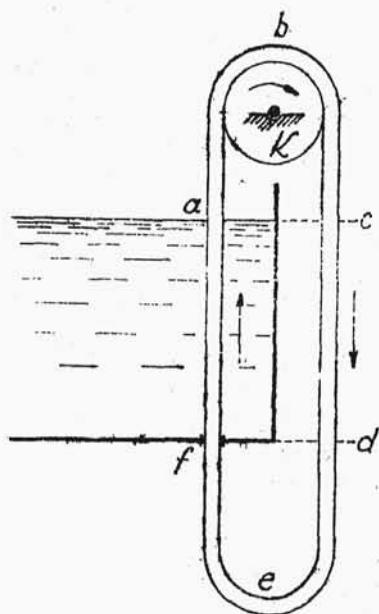
rys.31.

poziomej. Naczynie napełnione jest do pewnej wyso-
kości jakąkolwiek cieczą naprz.wodą. Pół walca jest
stałe w wodzie, druga połowa w powietrzu. Zdawałoby
się, że prawa połowa, będąc cięższą, niż lewa /na
nią bowiem działa wypór/ powinna dążyć do podniesie-
nia się, skutkiem czego powinien nastąpić obrót wal-
ca około osi poziomej. Obrót ten powinien odbywać się
stałe, gdyż stałe jedna połowa walca będzie w wodzie,
druga połowa w powietrzu. Otrzymujemy zatem urządze-

nie o właściwości t.zw. "p e r p e t u u m m o b i -
l e" . Czy to będzie tak , a jeśli nie - to dlaczego?

69. PRZYKŁAD XI.

Mamy naczynie, które w dnie poziomym posiada
otwór *f* ; przez otwór ten przeciągnięta jest dosko-



nale giętka taśma gu-
mowa o stałym przekro-
ju, tworząca zamknię-
ty obwód *abcdef*.

Otwór jest dopasowany
szczelnie do taśmy tak
jednak, że taśma może
bez żadnego oporu prze-
suwać się przez ten ot-
wór. Taśma przerzucona
jest przez krążek *K* .

rys.32.

Naczynie napełnio-
ne jest do pewnej wyso-

kości cieczą dowolną, naprz.wodą.

Podzielimy w myśli taśmę na części: część *abc*
powinna być w równowadze; tak samo część *def* . Nato-
miast część *cd* , znajdująca się w powietrzu, wobec

części αf , będącej w wodzie, zdawałoby się, powinna pociągnąć taśmę tak, jak to wskazują strzałki. Stąd powinien powstać obrót krążka K . Ruch ten powinien zachodzić stale bez zużycia jakiejkolwiek energii zewnętrznej.

Innymi słowy, mamy znów "perpetuum mobile". Czy rzeczywiście tak będzie, a jeśli nie, to dlaczego?

70. ZACHOWANIE SIĘ CIAŁA ZANURZONEGO W CIECZY.

Niech będzie ciało *j e d n o r o d n e* o objętości V i o ciężarze właściwym γ ; niech ciecz ma ciężar właściwy γ . Mamy zatem ciało o ciężarze $G = \gamma \cdot V$. Po zanurzeniu ciała w cieczy zaczyna na nie działać wypór $W = \gamma V$.

Ponieważ założyliśmy, że ciało jest jednorodne, więc środek ciężkości i środek wyporu są w jednym i tym samym punkcie. Ciało, zatem znajduje się w cieczy pod działaniem dwóch sił, do jednego punktu przyłożonych: ciężaru G , skierowanego w dół, i wyporu W , skierowanego do góry. Tu mogą zajść następujące 3 przypadki: