

ry wyznacza wysokość słupa cieczy, mierzącego ciśnienie p . Wielkość $\frac{p}{\gamma}$ będziemy przez skrócenie nazywali wysokością ciśnienia p .

Równanie /12/ daje nam, że ciśnienie na dnie

$$p_d = p_a + \gamma h$$

albo po podzieleniu obydwu stron przez γ otrzymamy:

$$\frac{p_d}{\gamma} = \frac{p_a}{\gamma} + h$$

Wówczas dalej postępujemy tak /rys. 7/:

Od osi pionowej OO , odkładamy odcinek OB prostopadły do OO , i $= \frac{p_a}{\gamma}$ w skali wysokości /najlepiej w skali rysunku/. Na prostej O, B , odkładamy

$\frac{p_d}{\gamma} = \frac{p_a}{\gamma} + h$ w tej samej skali i otrzymujemy wykres OO, B, B' .

Jeżeli chcemy znaleźć ciśnienie na głębokości Z , prowadzimy prostą równoległą do OB w odległości Z od niej. Odcinek $O'B'$ wskaże wysokość ciśnienia p_z . Chcąc znaleźć samą wartość p_z , należy wartość odcinka $O'B'$, zmierzonego w skali wysokości, pomnożyć przez γ .

37. PARCIE CIECZY NA PŁASKIE POLE POZIOME.

Niech będzie naczynie z płaskim dnem poziomym

a poza tym o dowolnych kształtach. Na dnie poziomym niech będzie zadane określone pole F . Znaleźć p a r c i e c i e c z y na to pole, czyli inaczej całą siłę, z jaką ciecz na to pole działa, albo prze.

Na wszystkie elementy pola /rys.8/ mamy jednakowe ciśnienie hydrostatyczne, gdyż wszystkie elementy znajdują się na jednakowej głębokości h pod swobodną powierzchnią.

Ciśnienie na dno zatem

$$p = p_a + \gamma h,$$

więc na całe pole F działa parcie cieczy

$$P = Fp = F(p_a + \gamma h)$$

albo

$$P = Fp_a + F \cdot h \cdot \gamma \quad /13/$$

Zatem powiemy:

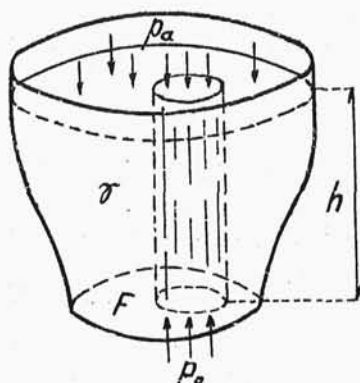
Parcie cieczy na płaskie pole poziome jest równe parciu ciśnienia zewnętrznego na to pole, zwiększonemu o ciężar słupa cieczy, wystawionego na ciśnionym polu i sięgającego powierzchni cieczy.

Jeśli na dno naczynia, od spodu, działało ciśnienie p_0 wówczas parcie na dno byłoby:

$$P = F(p_a - p_0) + F \cdot h \cdot \gamma \quad /13a/$$

W przypadku, kiedy $p_a = p_o$, wówczas:

$$P = F \cdot h \cdot \gamma \quad /13b/$$



Czyli, że w tym
razie p a r c i e
c i e c z y n a
p ł a s k i e p o-
l e p o z i o m e
= c i ęż a r o -
w i s ł ę p a
c i e c z y , w y-
s t a w i o n e g o

rys.8.

n a c i ęż n i o n y m p o l u i s i ę g a j ą c e-
g o p o w i e r z c h n i c i e c z y /twierdzenie
"STEVIN" a/ /1548-1620/.

38. Kształt bocznych ścian naczynia, ani też
objętość cieczy, zawartej w naczyniu, nie mają żad-
nego wpływu na wartość parcia. Naprz. w przypadku
naczynia, jak na rysunku 9, parcie cieczy na pole F
obliczymy, jak poprzednio, z ciężaru słupa cieczy,
opartego na polu F i sięgającego powierzchni cieczy.

39. Pożyteczne jest przedstawić parcie, wywie-
rane na płaskie dno poziome, a obliczone z wzoru

/13/, /13a/, lub /13b/, przy pomocy wykresu:

Wzór /13/

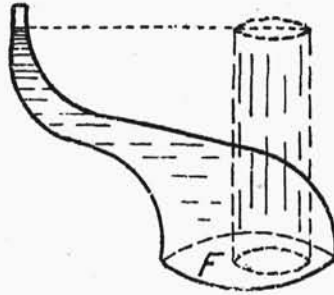
daje:

$$P = F p_a + F \cdot h \cdot \gamma$$

możemy to napisać

inaczej:

$$P = F \left(\frac{p_a}{\gamma} + h \right) \gamma$$



rys.9.

W tym przypadku

otrzymujemy parcie

/rys.10/ jako ciężar

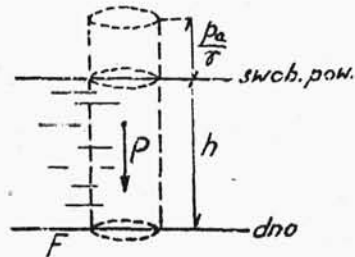
walcowego słupa cie-

czy o podstawie F i wy-

sokości h , zwiększo-

nej o $\frac{p_a}{\gamma}$ t.j. o wyso-

kość ciśnienia zewnętrznego na swobodną powierzch-
nię cieczy.



rys.10.

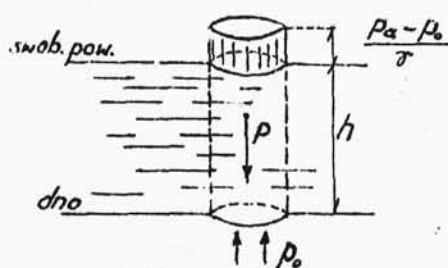
Podobnie wzór /13a/: $P = F(p_a - p_o) + F \cdot h \cdot \gamma$

może być przekształcony na taki:

$$P = F \left(\frac{p_a - p_o}{\gamma} + h \right) \gamma$$

Wówczas otrzymujemy parcie /rys.11/ jako cięż-
zar walcowego słupa cieczy o podstawie F i wysokoś-

ci h , zwiększonej o wysokość różnicy ciśnień na



rys.11.

swobodną powierzchnię i na dno od spodu.

40. Należy jeszcze wyznaczyć, gdzie przechodzi prosta działania znalezionego parcia jako siły wypadko-

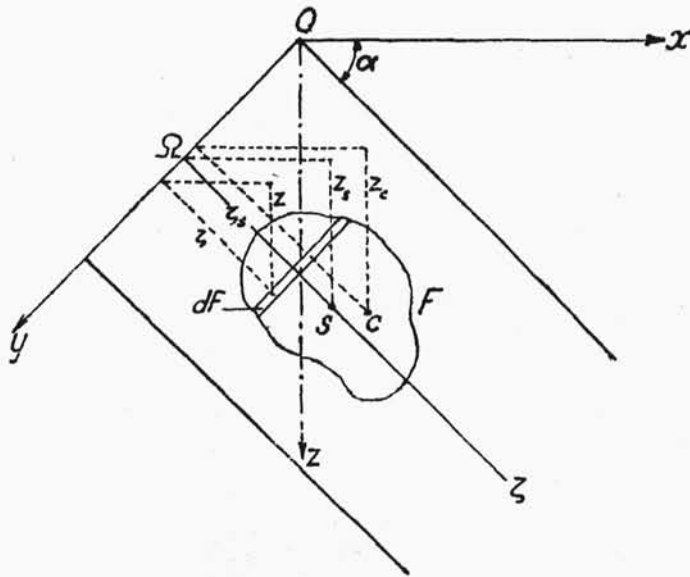
wej w różnych przypadkach.

Ponieważ wyżej wykreślone słupy cieczy dokładnie wyznaczają r o z k ł a d parcia na dno poziome, przeto powiemy, że linia działania parcia przejdzie pionowo przez środek ciężkości odpowiednio zbudowanego walca; ponieważ zaś tworząca tych słupów-walców jest pionowa, zatem kierunek siły P przebieje podstawę - ciśnione pole płaskie - w j e g o ś r o d k u o i ę ż k o ś c i. Przez ten punkt przechodzi prosta działania parcia P ; dlatego nazywamy ten punkt ś r o d k i e m p a r c i a.

41. PARCIE CIECZY NA PŁASKIE POLE POCHYLE.

Niech będzie naczynie ze ścianą płaską pochy-

loną do poziomu pod kątem α . Na ścianie tej niech będzie dane pewne pole F /rys.12/. Mamy znaleźć parcie wody na to pole.



rys.12.

Obierzmy osi spółrzędnych x, y, z , tak samo, jak poprzednio.

Podzielmy pole F na bardzo wąskie podłużne paski prostymi równoległymi do osi y . Ciśnienie we wszystkich punktach każdego z elementarnych pasków, wobec jego wąskości, można przyjąć jako jednakowe; niech dla pewnego paska o polu dF ciśnienie będzie

ρ ; wówczas parcie elementarne na ten pasek $= \rho dF$.
Znajdźmy w ten sposób elementarne parcia dla wszystkich poszczególnych pasków, tworzących razem pole F .
Wszystkie parcia są prostopadłe do płaszczyzny pola, a więc są do siebie równoległe; możemy zatem mówić o sumie parć elementarnych, jako o parciu wypadkowym na zadane pole. Powiemy zatem, że całkowite parcie:

$$P = \int_F \rho dF$$

gdzie całka winna objąć wszystkie elementarne paski, zawarte w polu F .

Parcie P będzie prostopadłe do F

Jeśli na swobodnej powierzchni cieczy mamy ciśnienie zewnętrzne p_a , wówczas w badanym pasku, znajdującym się na głębokości Z pod swobodną powierzchnią, otrzymamy ciśnienie $\rho = p_a + \gamma z$.

Stąd parcie

$$P = \int_F (p_a + \gamma z) dF$$

Po otworzeniu nawiasu mamy:

$$P = \int_F p_a dF + \int_F \gamma z dF = p_a \int_F dF + \gamma \int_F z dF$$

Wiemy, że

$$\int_F dF = F$$

Poza tym zauważmy, że $\int_F z dF$ jest to suma momentów elementarnych pasków względem płaszczyzny xoy . Ponieważ ta suma obejmuje wszystkie paski całego pola F , przeto suma momentów elementarnych pasków jest równa momentowi całego pola F , t.j. $= Fz_s$, gdzie z_s jest odległość środka ciężkości S pola F od płaszczyzny xoy .

Mamy zatem ostatecznie:

$$P = p_a F + \gamma F z_s \quad /14/$$

Jeśli na nasze pole F od zewnątrz naczynia działać będzie zewnętrzne ciśnienie wszędzie jednakowe i równe p_o , wówczas otrzymamy:

$$P = (p_a - p_o) F + \gamma F z_s \quad /14a/$$

Kiedy, wreszcie, na swobodną powierzchnię i na ściankę boczną od zewnątrz, działa jednakowe ciśnienie, kiedy zatem $p_a = p_o$, wówczas otrzymamy:

$$P = \gamma F z_s \quad /14b/$$

Równanie /14/ czy też /14a/ pozwoli na wyprowadzenie twierdzenia:

parcie cieczy ciężkiej na płaskie pole pochyłe jest równe ciśnieniu zewnętrznemu -

lub różnicy ciśnień zewnętrznych - na ciśnione pole, zwiększonemu o ciężar słupa cieczy, którego podstawą, jest pole ciśnione, a wysokość jest równa odległości środka ciężkości tego pola od swobodnej powierzchni cieczy.

Równanie /14b/ zawiera twierdzenie:

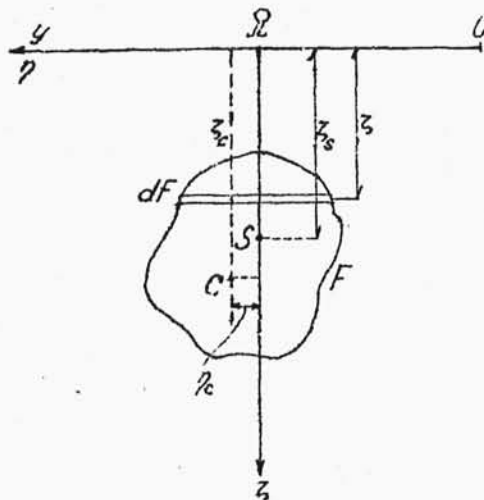
Parcie cieczy na płaskie pole pochyłe jest równe ciężarowi słupa cieczy, którego podstawą jest ciśnione pole zaś wysokością jest odległość środka ciężkości tego pola od swobodnej powierzchni.

Z poprzedniego wynika, że wartość parcia nie zmieni się, jeśli zmienimy pochylenie pola, pozostawiając środek ciężkości jego w tym samym miejscu.

42. Znajdźmy teraz ŚRODEK PARCIA na płaskie pole pochyłe; będzie to punkt, przez który przejdzie wypadkowe parcie cieczy. Znajdźmy środek ten w przypadku, kiedy na swobodną powierzchnię działa ciśnienie p_a .

Przyjmijmy płaszczyznę pola F za płaszczyznę rysunku i odnieśmy pole F do osi Ωz i $\Omega \eta$ tak, aby oś z przechodziła przez S , zaś oś η była zgodna z osią y /rys.12 i 13/. Niech współrzędne środka parcia (C) będą z_c i η_c . Znajdźmy najprzód z_c .

Na pasek o polu dF , którego współrzędna jest z , działa elementarne parcie $dP = p dF$. Moment elementarnego parcia dP względem osi η jest $p dF z$.



rys.13.

Suma momentów

elementarnych parć względem osi η jest:

Hydraulika 259.

$$\int_F p \cdot dF \cdot z$$

Ta suma równa się momentowi całkowitego parcia P , przechodzącego przez punkt C , względem osi η , zatem równa się $P \cdot z_c$, a więc

$$P z_c = \int_F p dF z \quad /a/$$

gdzie całkowanie rozciąga się na całe pole ciśnienne.

Z poprzedniego wiemy, że $p = p_a + \gamma z$; następnie widzimy /rys.12/, że $z = z_s \sin \alpha$, więc

$$p dF z = (p_a + \gamma z) \cdot dF z = p_a dF z + \gamma dF z^2 \sin \alpha$$

Zatem

$$\int_F p \cdot dF \cdot z = p_a \int_F dF \cdot z + \gamma \sin \alpha \int_F z^2 \cdot dF.$$

Wyraz $\int_F dF \cdot z = F \cdot z_s$; następnie $\int_F z^2 \cdot dF = J_\eta$ t.j. równa się momentowi bezwładności pola F względem osi η .
więc ostatecznie otrzymane równanie /a/ możemy przepisać:

$$P \cdot z_c = p_a \cdot F \cdot z_s + \gamma \sin \alpha \cdot J_\eta.$$

Stąd spórzędna:

$$z_c = \frac{p_a \cdot F \cdot z_s + \gamma \sin \alpha \cdot J_\eta}{P}$$

Z poprzedniego /14/ po uwzględnieniu, że $z = z_s \sin \alpha$ mamy:

$$P = p_a \cdot F + \gamma \cdot F \cdot z_s \sin \alpha$$

zatem

$$z_c = \frac{\rho_a \cdot F \cdot z_s + \gamma \cdot \sin \alpha \cdot J_\eta}{\rho_a \cdot F + \gamma \cdot F \cdot z_s \cdot \sin \alpha}$$

Wprowadźmy jeszcze taką zmianę. Niech J_{η_0} oznacza moment bezwładności pola F względem osi, przechodzącej przez środek ciężkości S równoległej do osi η , wtedy, jak to wiemy z mechaniki:

$$J_\eta = J_{\eta_0} + F \cdot z_s^2 ;$$

wówczas

$$z_c = \frac{\rho_a \cdot F \cdot z_s + \gamma \cdot \sin \alpha (J_{\eta_0} + F \cdot z_s^2)}{\rho_a \cdot F + \gamma \cdot F \cdot z_s \cdot \sin \alpha}$$

a po podzieleniu, znajdziemy:

$$z_c = z_s + \frac{\gamma \cdot J_{\eta_0} \cdot \sin \alpha}{\rho_a \cdot F + \gamma \cdot F \cdot z_s \cdot \sin \alpha} \quad /15/$$

Stąd dostrzegamy, że środek parcia znajduje się zawsze poniżej środka ciężkości pola ciśnionego.

W przypadku, kiedy na zewnętrzną stronę pola F działa ciśnienie ρ_o , wtedy

$$z_c = z_s + \frac{\gamma \cdot J_{\eta_0} \cdot \sin \alpha}{(\rho_a - \rho_o) F + \gamma \cdot F \cdot z_s \cdot \sin \alpha} \quad /15a/$$

Wreszcie, kiedy $\rho_a = \rho_o$, znajdziemy

$$z_c = z_s + \frac{J_{\eta_0}}{F \cdot z_s} \quad /15b/$$

43. Znajdźmy obecnie drugą współrzędną η_c środka parcia.

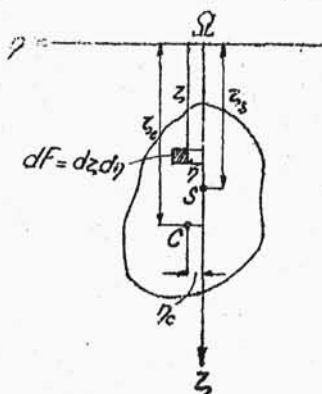
Dogodniej teraz będzie pole F podzielić na elementarne pólka dF o wymiarach $dz \cdot d\eta$ /rys.14/. Współrzędne tego pólka są z i η . Obliczmy sumę momentów parć elementarnych na takie pólka względem osi Z .

$$\text{Parcie elementarne} = p dF = (p_a + \gamma \cdot z \cdot \sin \alpha) dF.$$

Suma momentów tych parć względem osi Z jest równa:

$$\begin{aligned} \int_F p_a \cdot \eta \cdot dF + \int_F \gamma \cdot z \cdot \eta \cdot \sin \alpha \cdot dF = \\ = p_a \int_F \eta \cdot dF + \gamma \cdot \sin \alpha \int_F z \eta \cdot dF. \end{aligned}$$

Wiemy, iż $\int_F \eta \cdot dF = F \cdot \eta_a = 0$ ponieważ oś Z przechodzi przez środek ciężkości S pola F ; wyraz $\int_F z \eta \cdot dF$ jest znany w mechanice jako moment odśrodkowy pola F względem osi Z i η , który oznaczamy przez $J_{z\eta}$.



rys.14.

Zatem suma momentów elementarnych parć względem $\eta = \gamma \cdot \sin \alpha \cdot J_{z\eta}$.
Suma ta = momentowi całkowitego parcia względem osi Z , czyli $P \cdot \eta_c$, zatem

$$P_{\eta_c} = \gamma \sin \alpha \cdot J_{z\eta}$$

stąd

$$\eta_c = \frac{\gamma J_{z\eta} \sin \alpha}{p}$$

albo

$$\eta_c = \frac{\gamma J_{z\eta} \sin \alpha}{p_a F + \gamma F z_s \sin \alpha} \quad /16/$$

Jeżeli na zewnętrzną stronę płaszczyzny pola F działa ciśnienie p_o , wtedy:

$$\eta_c = \frac{\gamma J_{z\eta} \sin \alpha}{(p_a - p_o) F + \gamma F z_s \sin \alpha} \quad /16a/$$

Wreszcie, kiedy $p_a = p_o$, wtedy:

$$\eta_c = \frac{\gamma J_{z\eta} \sin \alpha}{\gamma F z_s \sin \alpha}$$

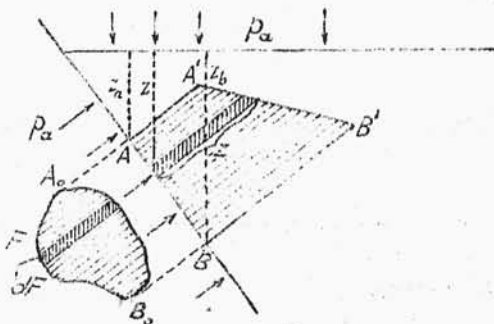
a po skróceniu

$$\eta_c = \frac{J_{z\eta}}{F \cdot z_s} \quad /16b/$$

Dla pól symetrycznych względem osi z , $J_{z\eta} = 0$, zatem i $\eta_c = 0$, czyli że środek parcia na pole symetryczne znajduje się na osi z , przechodzącej przez środek ciężkości tego pola.

44. W a r t o ś ć parcia cieczy, jak i ś r o d e k parcia możemy nieraz prędzej i prościej wyznaczyć sposobem geometrycznym. Aby pokazać, jak należy w tym celu postępować, przypuśćmy, że mamy da-

ne płaskie pole pochyłe F , które w kładzie jest przedstawione z boku, zaś w rzucie na płaszczyznę pionową przedstawia się jako prosta AB /rys.15/.



rys.15.

Niech prócz tego ciśnienie na swobodną powierzchnię i na ściankę pochyłą od zewnątrz będzie jednakowe $i = p_a$. Wte-

dy w jakimkolwiek elemencie pola dF panuje ciśnienie $p = \gamma z$, a parcie, przypadające na pole elementarne, $dP = p dF = \gamma z \cdot dF$. Parcie to możemy sobie uzmysłowić jako ciężar słupka cieczy, opierającego się na tym elemencie dF i mającego wysokość z , równą głębokości środka paska pod swobodną powierzchnią. Wykreślamy ten słupek prostopadle do AB . Postąpmy w taki sam sposób ze wszystkimi elementarnymi polami, wchodzącymi w skład pola F , poczynawszy od elementu przy A i kończąc na elemencie przy B . Otrzymamy słupek cieczy, opierający się na polu AB i kończący się płaszczyzną $A'B'$. że $A'B'$ jest płaszczyzną łat-

wo dostrzeżemy, zwróciwszy uwagę na to, że wysokości Z wzrastają liniowo.

Mając w sposób powyższy wykreśloną bryłę, znajdziemy łatwo jej objętość i ciężar, w założeniu, że bryła jest wypełniona cieczą.

Wypadkowe parcie przejdzie, oczywiście, przez środek ciężkości bryły; punkt, w którym prosta działania parcia wypadkowego przebiega pole AB , jest $\text{ś r o d k i e m p a r c i a}$. Gdyby płaszczyzna $A'B'$ była równoległa do AB , wówczas parcie przechodziłoby przez środek ciężkości pola F . W danym razie widać, że środek ciężkości bryły wpłynie na obniżenie prostej działania parcia względem środka ciężkości pola.

Jeśli pole F będzie figurą foremną, środek ciężkości da się łatwo znaleźć i dla tego też, drogą opisaną postępując, można szybko i prosto otrzymać wyniki. Postępowanie to daje ten sam rezultat, co wzory /14b/, /15b/ i /16b/.

45. Weźmy przypadek, kiedy na swobodnej powierzchni jest ciśnienie np. ρ_α . Na boczną ścianę od zewnątrz niech nie będzie ciśnienia /rys.16/.

Wówczas, w którymkolwiek elemencie pola F otrzy-

W celu znalezienia prostej działania parcia należy określić środek ciężkości wspomnianej bryły.

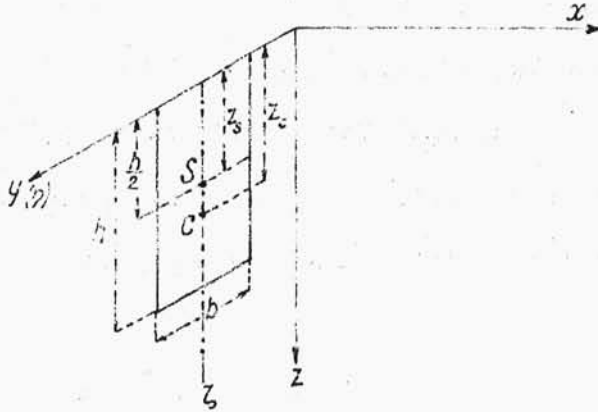
Odnalezienie środka ciężkości bryły $ABB''A''$ może być uproszczone przez znalezienie oddzielnie środka ciężkości bryły $ABB'A'$ i bryły $A'B'B''A''$. Co do drugiej bryły zrozumiałym jest, że prosta równoległa do parcia, przechodząca przez środek ciężkości tej bryły, przejdzie przez środek ciężkości pola F , zatem prosta działania parcia wypadkowego przy uwzględnieniu ciśnienia p_a - przesunie się ku górze, przebijając pole F bliżej jego środka ciężkości.

Gdyby wysokość $\frac{\rho_a}{\gamma}$ była bardzo znaczna w porównaniu z głębokościami A i B , wówczas środek ciśnienia byłby bardzo bliski do środka ciężkości pola F .

Jeśli na pole F było ciśnienie zewnętrzne, z boku, $= p_0$, wówczas nasz wykres tyle tylko zmieniłby się, że część górna słupa cieczy o wysokości $\frac{\rho_a}{\gamma}$ mieć będzie wysokość $\frac{\rho_a - p_0}{\gamma}$. Wszystkie uwagi, zrobione dla przypadku poprzedniego, pozostają w mocy; dlatego tu ich nie powtarzamy.

Pożytecznym będzie wyjaśnienie sobie, co się dzieć będzie ze środkiem parcia, jeśli pole F będziemy zesuwali w jego płaszczyźnie coraz głębiej.

46. PRZYKŁAD I. Niech będzie prostokątne pole o wymiarach: $b \times h$ na ścianie pionowej /rys.17/.



rys.17.

Znaleźć parcie wody, kiedy ciśnienie zewnętrzne na swobodną powierzchnię i na boczną ścianę są jednakowe.

Parcie znajdziemy na zasadzie twierdzenia, zawartego w równaniu/14b/: $P = \gamma F z_s$; w naszym przykładzie

$$F = bh ; \quad z_s = \frac{h}{2} ,$$