

$$v = c \sqrt{JR}$$

gdzie  $c$ , jak wyżej.

Jeżeli przez  $F$  oznaczymy przekrój kanału, wówczas wydatek

$$Q = vF$$

Niech na długości  $L$  kanału będzie spadek zwiercia - dla  $k$ , wówczas z określenia  $J = \frac{k}{L}$ , mamy:  $k = JL$ ,

albo 
$$k = \frac{Q}{2g} \cdot \frac{v^2}{R} \cdot L ;$$

jeśli zauważymy, że

$$v = \frac{Q}{F}, \quad \text{otrzymamy } k = \frac{Q}{2g} \cdot \frac{Q^2 L}{F^2 R},$$

albo

$$k = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{Q^2 L}{F^2 R}$$

Wreszcie, ponieważ  $R = \frac{F}{\Omega}$ , gdzie  $\Omega$  jest obwodem zwilżonym,

$$k = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{Q^2 L \Omega}{F^3}.$$

## 282. NAJKORZYSTNIEJSZE PRZEKROJE KANAŁÓW.

W następnych rozdziałach zbadamy kilka przekrojów typowych kanałów, aby poznać, jaki będzie najkorzystniejszy kształt kanału, albo też, jakie będzie najkorzystniejsze napełnienie kanału, aby można było kanałem przepuścić jak najwięcej wody.

Podzielmy przekroje kanałów na dwa rodzaje: jeden będą to kanały o t w a r t e; drugi rodzaj to będą kanały z a m k n i ę t e. W pierwszych zwierciadło wody może być dowolnie wysoko utrzymywane, - naprz. kanał o przekroju prostokątnym, trapezowym, od góry otwarty. W kanałach drugiego rodzaju zwierciadło wody jest ograniczone zamkniętym obrysem kanału - naprz. kanał o przekroju kołowym, jajowatym.

W kanałach pierwszego rodzaju będziemy przyjmowali pole przekroju j a k o d a n e .

W kanałach drugiego rodzaju można będzie mówić o zmiennym polu przekroju, gdyż tu pole przekroju jest ograniczone zamkniętym obrysem kanału.

283. Rozpoczmy jakikolwiek kanał pierwszego rodzaju pewnego typu o zadanym polu przekroju  $F$ . Wydatek wody, dostarczonej przez ten kanał, obliczymy z wzoru:

$$Q = v \cdot F \quad \text{ponieważ} \quad v = c \sqrt{J R}$$

zatem

$$Q = F \cdot c \sqrt{J R}, \quad \text{albo} \quad Q = F \cdot c \sqrt{J \frac{F}{\Omega}}.$$

Niech będzie dany spadek jednostkowy  $J$ , wtedy n a j w i ę k s z y wydatek  $Q$  otrzymamy przy tak skonstruowanym przekroju, dla którego  $\Omega$ , jak to widać z os-

tatniego równania, będzie najmniejsze.

Zbadajmy pod tym względem kilka typowych kanałów rodzaju pierwszego.

284. 1/ PRZEKRÓJ PROSTOKĄTNY. Dane jest pole przekroju prostokątnego  $F$ ; znaleźć, jaka winna być szerokość  $b$ , tego kanału w stosunku do głębokości  $h$ , aby  $Q$  było maximum.

Przekrój  $F = bh$  /rys.

189/; obwód zwilżony  $\Omega = b + 2h$ ,  
więc  $\Omega = \frac{F}{h} + 2h$ . Najkorzystniejszy przekrój będzie taki, dla którego  $\Omega$  jest minimum. Warunek ten wyraża się, że  $\frac{d\Omega}{dh} = 0$ . Biorąc pochodną  $\Omega$  względem  $h$  i przyrównując ją do zera, znajdziemy:

$$\frac{d\Omega}{dh} = -\frac{F}{h^2} + 2 = 0;$$

stąd

$$\frac{F}{h^2} = 2, \quad \text{albo} \quad F = 2h^2.$$

Ponieważ  $F = b \cdot h$ , zatem  $bh = 2h^2$  albo  $b = 2h$ .

Mamy więc, że przekrój prostokątny o danym polu będzie najkorzystniejszy wtedy, kiedy s z e r o k o ś ć



rys.189.

jest dwa razy większa od głębokości.

W tym przypadku wydatek max.  $Q$  otrzymamy:

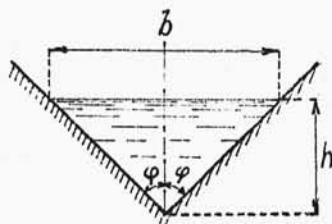
$$Q = v \cdot F = c \sqrt{J \cdot R} \cdot F; \quad \text{ponieważ } F = b \cdot \frac{b}{2} = \frac{b^2}{2};$$

$$\Omega = b + \frac{b}{2} \cdot 2 = 2b; \quad R = \frac{b^2}{2 \cdot 2b} = \frac{b}{4},$$

zatem

$$\max. Q = \frac{b^2}{2} \cdot c \sqrt{J \cdot \frac{b}{4}} = \frac{c}{4} b^{5/2} \sqrt{J}$$

285. 2/. PRZEKRÓJ TRÓJKĄTNY. Dane jest pole  $F$  przekroju trójkątnego. Znaleźć, jaki kąt powinny utworzyć ściany kanału przy dolnej krawędzi, aby przy danym spadku  $J$  można było otrzymać maximum wydatku?



rys.190.

Pole trójkąta /rys.190/  $F = \frac{bh}{2}$ ;

obwód zwilżony  $\Omega = 2\sqrt{h^2 + \frac{b^2}{4}}$ ;

ponieważ  $h = \frac{2F}{b}$ , więc  $\Omega = 2\sqrt{\frac{4F^2}{b^2} + \frac{b^2}{4}}$ .

Aby  $Q$  było max. należy taki kształt nadać przekrojowi trójkąta, aby

$\Omega$  było minimum. Do tego wystar-

czy, jeśli dwumian podpierwiastko-

wy będzie minimum, a dlatego należy, aby

$$\frac{d}{db} \left( \frac{4F^2}{b^2} + \frac{b^2}{4} \right) = 0$$

Bierąc pochodną i przyrównując ją do zera, otrzyma-

my:

$$-2 \cdot 4 \cdot F^2 b^{-3} + \frac{2b}{4} = 0$$

a stąd  $4F^2b^{-3} = b$ , albo  $4F^2 = b^4$ .

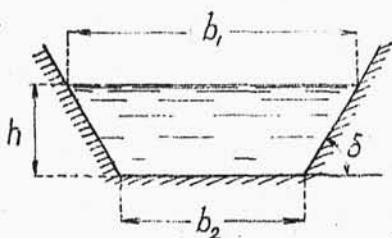
Ponieważ  $F = \frac{bh}{2}$ , zatem  $4 \cdot \frac{b^2h^2}{4} = b^4$ , albo  $h^2 = b^2$ , ostatecznie mamy warunek, że  $h = b$ .

Stąd otrzymujemy, że najkorzystniejszy kształt przekroju trójkątnego będzie taki, w którym kąt  $\varphi = 45^\circ$ , czyli w którym kąt przy wierzchołku kanału jest prosty.

Znalazłszy ten warunek, łatwo znajdziemy max.  $Q$  w kanale o takim przekroju.

Jednocześnie znajdujemy: ponieważ  $F = \frac{bh}{2} = \frac{2h^2}{2} = h^2$  albo  $F = \frac{b^2}{4}$ , więc  $h = \sqrt{F}$  oraz  $b = 2\sqrt{F}$ .

### 286. 3/ PRZEKRÓJ TRAPEZOWY.



rys.191.

Dane jest pole  $F$  przekroju trapezowego i kąt  $\delta$ , utworzony przez ścianę kanału z poziomem /rys.191/. Znaleźć, jakie należy obrać  $b_1$  i  $b_2$  w stosunku do  $h$ , aby  $Q$  było maximum.

Jak z poprzedniego wiemy, max.  $Q$  będzie dla takiego przekroju, dla którego obwód zwilżony  $\Omega$  będzie minimum.

Znajdźmy zatem  $\Omega$  w zależności od  $F$  i  $h$ . Z rysunku

mamy:  $\Omega = b_2 + 2 \frac{h}{\sin \delta}$  oraz

$$b_2 = b_1 - 2 \frac{h}{\tan \delta}.$$

Ponieważ  $F = \frac{1}{2}(b_1 + b_2)h,$

zatem

$$F = \frac{1}{2}(b_1 - 2 \frac{h}{\tan \delta} + b_1)h, \text{ albo } F = (b_1 - \frac{h}{\tan \delta})h$$

stąd

$$b_1 = \frac{F}{h} + \frac{h}{\tan \delta} \quad /a/$$

Wobec tego  $\Omega = \frac{F}{h} - \frac{h}{\tan \delta} + 2 \frac{h}{\sin \delta}.$

Mamy obrać takie  $h$ , przy którym  $\Omega$  będzie minimum;

otrzymamy to z warunku

$$\frac{d\Omega}{dh} = 0$$

a więc

$$-\frac{F}{h^2} - \frac{1}{\tan \delta} + \frac{2}{\sin \delta} = 0;$$

stąd

$$\frac{F}{h^2} = \frac{2}{\sin \delta} - \frac{1}{\tan \delta} \quad /b/$$

Z równania /a/ mamy:

$$\frac{F}{h} = b_1 - \frac{h}{\tan \delta}, \quad \text{albo} \quad \frac{F}{h^2} = \frac{b_1}{h} - \frac{1}{\tan \delta}$$

Porównyując ten wynik z /b/, otrzymamy:

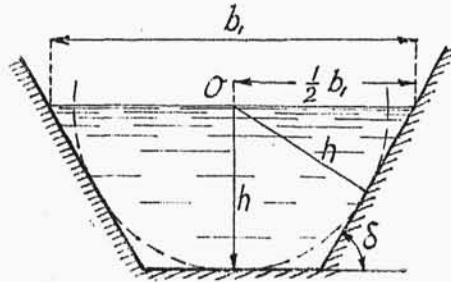
$$\frac{b_1}{h} - \frac{1}{\tan \delta} = \frac{2}{\sin \delta} - \frac{1}{\tan \delta}$$

a stąd po redukcji:  $b_1 \sin \delta = 2h,$

ostatecznie

$$h = \frac{1}{2} b_1 \sin \delta \quad /c/$$

Z ostatniego warunku dostrzegamy, że trapez /rys. 192/ winien być tak wykreślony, aby w niego można było wpisać okrąg koła, którego środek jest na poziomie zwierciadła wody w kanale.



287. W poprzednim artykule przyjęliśmy, że omawiany kanał trapezowy posiada boczne ściany po-

rys.192.

chylone do poziomu pod zadany kąt  $\delta$ . Wartość tego kąta zależy od materiału, z którego utworzone są dno i ściany kanału, gdyż nie każdy materiał może utrzymać się w ścianie kanału pod dowolnym kątem  $\delta$ .

Jeśli naprz. kanał będzie wykonany z muru lub betonu, wówczas kąt  $\delta$  może być dowolny, a nawet może być  $= 90^\circ$ .

Jeśli brzegi kanału będą wykonane w ziemi z umocnieniem odpowiednim ścian, wówczas skarpa ściany może otrzymać

pochyłość  $1:\frac{1}{2}$ , co odpowiada kątowi  $\delta = 63^\circ 20'$

"  $1:\frac{3}{4}$ , " " "  $\delta = 53^\circ 10'$

"  $1:1$  " " "  $\delta = 45^\circ$ .

W kanale, wykonanym w gruncie ścisłym - bez umocnienia ścian, pochyłość ściany może być 1:1,5, co odpowiada kątowi  $\delta = 33^{\circ} 40'$ .

W kanale wykonanym w lekkim gruncie pochyłość skarpy powinna być 1:2, co odpowiada kątowi  $\delta = 26^{\circ} 30'$ .

### 288. Przykład XXXI.

Przypuśćmy, że mamy wykreślić przekrój kanału trapezowego, którego pole przekroju jest  $F$  i kąt pochylenia ściany do poziomu /uwarunkowany materiałem/ jest  $\delta$ ; przy tym wymagane jest, aby kanał przeprowadził jak największą ilość wody. Zadanie rozwiążemy w taki sposób:

Z równania /a/ art. 286 mamy:

$$b_1 = \frac{F}{h} + \frac{h}{\operatorname{tg} \delta},$$

zaś równanie /c/ tegoż art. daje:

$$h = \frac{1}{2} b_1 \sin \delta.$$

Podstawiając wartość  $h$  z drugiego równania w pierwsze, otrzymamy:

$$b_1 = \frac{2F}{b_1 \sin \delta} + \frac{1}{2} b_1 \sin \delta \cdot \frac{\cos \delta}{\sin \delta},$$

a stąd po skróceniach:

$$b_1 = \sqrt{\frac{2F}{\sin \delta (1 - \frac{1}{2} \cos \delta)}}$$

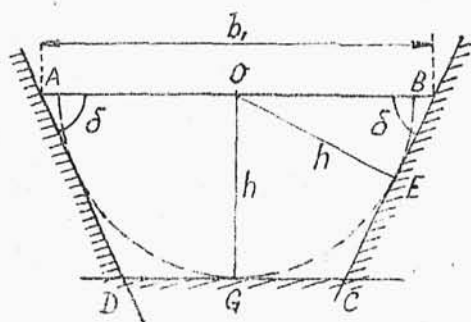
Ostatni wzór daje wartość  $b_1$ . Dalej postępujemy tak:

Odkładamy poziomy odcinek  $AB = b_1$  /rys. 193/; z końców  $A$  i



$B$  prowadzimy proste  $BC$  i  $AD$  pod zadany kąt  $\delta$  do  $AB$ . Ze środka  $O$  odcinka  $AB$

opuszczamy prostopadłą na prostą  $BC$ , otrzymamy odcinek  $OE$ , który będzie równy głębokości  $h$  kanału. Z punktu  $O$  prowadzimy prostą pionową  $OG$ , przy czym  $OG = h$ .



rys.193.

Przez punkt  $G$  prowadzimy prostą poziomą  $DC$ . Profil kanału szukanego będzie  $ABCD$ .

Zadanie to możemy rozwiązać, określwszy z równań poprzednich  $a$  i  $c$  wysokość  $h$  i z niej wykreślić przekrój kanału.

289. W art. 286 i 287 rozpatrywaliśmy kanał o przekroju trapezowym, w którym kąt  $\delta$  był z góry zadany. Mogą zachodzić jednak takie okoliczności, kiedy kąt  $\delta$  może być dowolnie obrany. Wówczas zagadnienie najkorzystniejszego kształtu kanału należy tak sformułować.

Pole przekroju kanału jest zadane  $F$ . Znaleźć kształt kanału, a więc i kąt  $\delta$ , przy którym kanał będzie mógł przeprowadzić największą ilość wody.

Z poprzednich artykułów widzieliśmy, że ten kanał

przeprowadzi najwięcej wody, którego obwód zwilżony będzie najmniejszy.

W art.286 mamy obliczony obwód zwilżony /rys.191/:

$$\Omega = \frac{F}{h} - \frac{h}{\operatorname{tg} \delta} + 2 \frac{h}{\sin \delta}$$

W obecnym przypadku  $\delta$  należy uważać jako wielkość zmienną. Również zmienną pozostaje  $h$ . Mamy zatem  $\Omega$  jako funkcję dwóch zmiennych niezależnych, dla której szukamy warunków minimum wartości.

Jeżeli  $\Omega$  jest funkcją dwóch zmiennych  $h$  i  $\delta$  minimum  $\Omega$  otrzymamy przy takich wartościach  $h$  i  $\delta$ , przy których cząstkowe pochodne:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial h} \quad \text{ i } \quad \frac{\partial \Omega}{\partial \delta}$$

stają się z osobna zerami.

Pierwszą pochodną obliczyliśmy w art.286. Stąd otrzymaliśmy warunek, że trapez o danym polu powinien być opisany wokół koła, którego środek znajduje się na powierzchni zwierciadła. Ten zatem warunek i tu obowiązuje.

Druga pochodna ma nam ustalić wartość na  $\delta$ .

Znajdźmy

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \delta} = \frac{\partial}{\partial \delta} \left[ \frac{F}{h} - \frac{h}{\operatorname{tg} \delta} + 2 \frac{h}{\sin \delta} \right] = h \cdot \frac{1}{\cos^2 \delta \cdot \operatorname{tg}^2 \delta} - \frac{2h \cos \delta}{\sin^2 \delta}.$$

Ponieważ ta pochodna ma być równa 0, a następnie ponieważ ani  $h$  ani też  $\delta$  nie są zerami, więc po prze-

róbkach prostych otrzymamy równanie:

$$1 - 2\cos\delta = 0 \text{ albo } \cos\delta = \frac{1}{2}, \text{ stąd } \delta = 60^\circ.$$

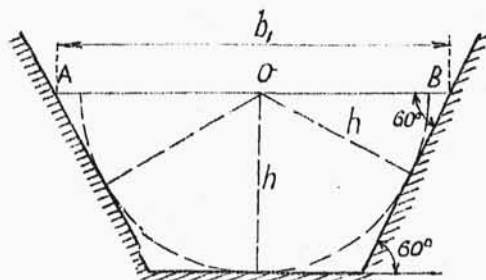
Otrzymujemy zatem, że poszukiwany trapez powinien mieć bok pochylony do poziomu pod kątem  $60^\circ$ . Łącząc ten warunek z otrzymanym poprzednio, powiemy, że szukany trapez będzie połową sześciokąta foremnego, opisanego na kole, którego środek znajduje się na powierzchni zwierciadła wody, jak to widzimy na rys.194.

Łatwo też znajdziemy, że szerokość kanału na poziomie zwierciadła wody

$$b_1 = 4\sqrt{\frac{F}{3\sqrt{3}}}$$

głębokość wody w kanale

$$h = \sqrt{\frac{F}{\sqrt{3}}}.$$



rys.194.

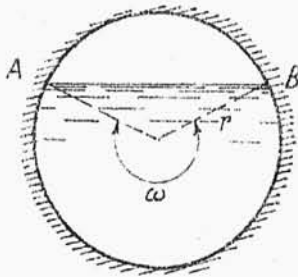
290. Powyższe badania przekrojów kanałów /prostokątnego, trójkątnego, trapezowego/ dają wskazówkę, jak należy badać przekroje "otwarte", gdzie pole przekroju może dowolnie rosnąć wraz z podnoszeniem się zwierciadła wody w kanale.

Przejdziemy teraz do kanałów, które są zamknięte, sklepione, w których zatem zwierciadło wody nie może być

dowolnie podniesione.

Jako najczęściej spotykany kanał tego rodzaju rozpatrzmy kanał o przekroju kołowym.

4/ PRZEKRÓJ KOŁOWY. Niech będzie kanał przekroju kołowego o promieniu  $r$  /rys.195/. Zwierciadło wody niech



rys.195.

zwierciadła  $J$  ?

Wiemy, że prędkość  $v = c \sqrt{J \cdot R}$ . Aby sprawy nie wikłać, przyjmijmy, że  $c$  jest stałe.

Wówczas prędkość  $v$  zależy od  $R$  i max.  $v$  będzie przy max.  $R$ . Znajdźmy zatem  $R$ .

$$R = \frac{F}{\Omega}; \quad F = \frac{\omega r^2}{2} + 2 \cdot \frac{r^2}{2} \cos(180^\circ - \frac{\omega}{2}) \cdot \sin(180^\circ - \frac{\omega}{2})$$

albo

$$F = -\frac{\omega r^2}{2} + r^2 \sin \frac{\omega}{2} (-\cos \frac{\omega}{2}) = -\frac{\omega r^2}{2} - \frac{r^2 \sin \omega}{2} = -\frac{r^2}{2} (\omega + \sin \omega).$$

Następnie mamy:  $\Omega = r \cdot \omega$

zatem

$$R = \frac{r^2(\omega - \sin\omega)}{2 \cdot r \cdot \omega}, \text{ albo } R = \frac{r}{2} \left(1 - \frac{\sin\omega}{\omega}\right).$$

$R$  będzie maximum dla takiego  $\omega$ , kiedy  $\frac{dR}{d\omega} = 0$ .

Pochodna

$$\frac{dR}{d\omega} = \frac{d\left(1 - \frac{\sin\omega}{\omega}\right)}{d\omega} = -\frac{\omega \cdot \cos\omega - \sin\omega}{\omega^2},$$

zatem:

$$\frac{\omega \cdot \cos\omega - \sin\omega}{\omega^2} = 0.$$

Ponieważ  $\omega$  nie może być  $\infty$ , więc  $\omega \cos\omega - \sin\omega = 0$ ,

albo

$$\omega = \operatorname{tg} \omega.$$

Rozwiązując to równanie względem  $\omega$ , otrzymujemy:

$$\omega = 257^\circ 30'$$

Przy takim więc kącie otrzymamy maximum prędkości.

291. Badając przepływ wody przez przekrój kołowy nastrocza się drugie pytanie: przy jakim napełnieniu kanału /inaczej przy jakim kącie  $\omega$  / będzie maximum wydajności?

Wiemy, że  $Q = vF$ , inaczej:  $Q = c\sqrt{R \cdot J} \cdot F$ .

Ponieważ przy zwiększaniu się kąta  $\omega$ ,  $F$  będzie rosło, prędkość zaś  $v$  przy powiększaniu się kąta  $\omega$  ponad  $257^\circ 30'$  będzie maleć, więc max.  $Q$  nie zajdzie jednocześnie

nie z max.  $\mathcal{U}$ .

Znajdźmy zatem takie  $\omega$ , aby  $Q$  było maximum.

Z poprzedniego mamy:

$$Q = Fv = \frac{r^2}{2}(\omega - \sin\omega)c \sqrt{J \frac{\omega - \sin\omega}{\omega} \cdot \frac{r}{2}}$$

albo inaczej

$$Q = \frac{r^2}{2} \cdot c \cdot \sqrt{J \cdot \frac{r}{2}} \sqrt{\frac{(\omega - \sin\omega)^3}{\omega}}$$

Widzimy zatem, że  $Q$  będzie max., kiedy wielkość znajdującą się pod drugim pierwiastkiem będzie maximum; kiedy więc zajdzie warunek, że

$$\frac{d}{d\omega} \left[ \frac{(\omega - \sin\omega)^3}{\omega} \right] = 0$$

Szukana pochodna jest:

$$\frac{3(\omega - \sin\omega)^2(1 - \cos\omega)\omega - (\omega - \sin\omega)^3 \cdot 1}{\omega^2}.$$

Pochodna ta ma być zerem przy szukanej wartości kąta  $\omega$ . Ponieważ  $\omega$  nieskończoną wielkością nie jest, zatem licznik musi być = 0. Więc:

$$3(\omega - \sin\omega)^2(1 - \cos\omega)\omega - (\omega - \sin\omega)^3 = 0.$$

Po skróceniu przez  $(\omega - \sin\omega)^2$ , gdyż  $(\omega - \sin\omega)$  nie jest zerem, otrzymamy:

$$3\omega - 3\omega \cos\omega - \omega + \sin\omega = 0$$

albo

$$2\omega - 3\omega \cos\omega + \sin\omega = 0.$$

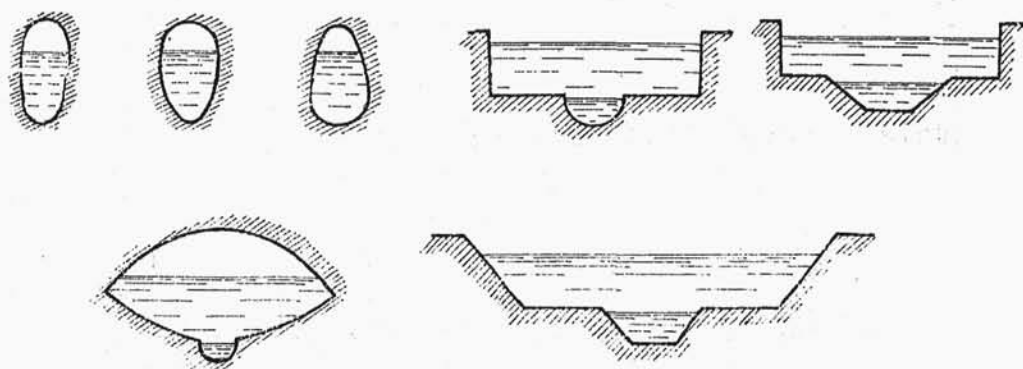
Wartość  $\omega$ , czyniąca zadość temu równaniu, jest:

$$\omega = 308^\circ$$

Przy takim napełnieniu kanału kołowego otrzymamy maximum wydatku.

Wypadnie tu zaznaczyć, że znaleziony stan napełnienia kanału  $\omega = 308^\circ$  jest bardzo niestabilny i przy jakiegokolwiek przyczynie, wywołującej wachanie się zwierciadła wody, przekrój kanału wypełnia się całkowicie i wydatek maleje.

292. Poza kanałami o przekrojach wyżej rozpatrzonych stosowane są kanały wielu innych przekrojów, jak kanały owalne, jajowate, muszlowe i różne kombinowane /rys.196/.



rys.196.

Każdy z tych kanałów może być badany, jak to robiliśmy z kanałami poprzednimi.

293. Przejdźmy teraz do rozpatrzenia paru typowych zagadnień, dotyczących obliczania kanałów lub rzek.

#### ZADANIE TYPU I.

Niech będzie kanał gotowy; zatem znamy jego przekrój  $F$ , obwód zwilżony  $\Omega$  i mamy dany spadek  $J$  zwierciadła wody w kanale. Znaleźć, jaki wydatek wody możemy uzyskać w takim kanale?

W art.281 mieliśmy wzór, z którego znajdziemy wydatek:

$$Q = vF$$

następnie prędkość  $v$  znajdziemy ze wzoru tam przytoczonego:

$$v = c\sqrt{J \cdot R}$$

gdzie  $J$  spadek zwierciadła jest dany;

$$R = \frac{F}{\Omega}$$

należy uważać też za znany.

Co się tyczy spółczynnika  $c$ , jego wartość znajdziemy według jednego z wzorów podanych w art.280.

Wobec tego napiszemy:

$$Q = cF\sqrt{J \frac{F}{\Omega}}$$