

$$/31/ \quad \theta_2 = 180^\circ + \omega$$

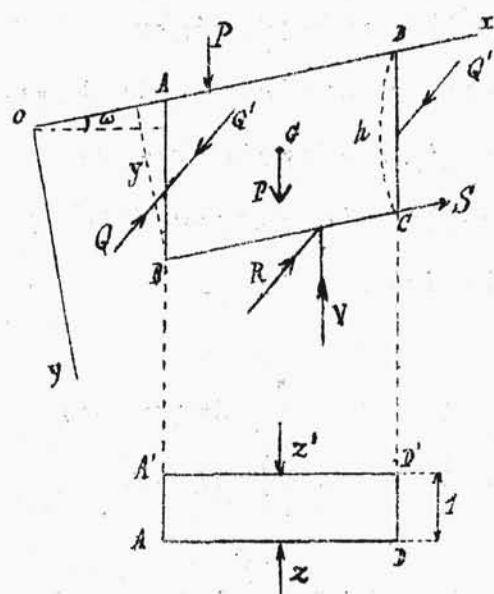
Widzimy więc, że we wszelkiem środowisku ciąglem, ważkiem i ograniczonym naziomem płaskim naprężenie na wszelkiem poletku równoległym do naziomu jest pionowe i określa się wzorem /30/, niezależnie od natury środowiska.

Elementarne rozwiązanie zadania o równowadze ziemi sypkiej w wypadku naziomu płaskiego.

§ 165. W §§ 160 i 161 pokazaliśmy, jak rozwiązać zadanie o równowadze ziemi sypkiej, ograniczonej naziomem płaskim, zapomocą metody ogólnej, polegającej na całkowaniu ogólnym równań równowagi; mieliśmy przytem więcej na względzie zapoznać się z tą metodą, niż rozwiązanie praktyczne, albowiem całkowite rozwiązanie w danym wypadku może być otrzymane drogą elementarnych rozważań, mianowicie jak następuje.

Rozpatrzmy ziemię sypką o naziomie płaskim i nachylnym do poziomu pod kątem ω /rys.199/. Wyobraźmy sobie prostopadłościan $ABCD A'B'C'D'$, wycięty ze środowiska za pomocą płaszczyzn pionowych $AB A'B'$ i $DC D'C'$ oraz - $BC B'C'$ równoleg-

łej do naziomu; w kierunku zaś równoległym do rysun-



Rys. 199

ku zapomocą płasz-
czyzn pionowych

$ABCD$ i $A'B'C'D'$

w odległości od
siebie równej jed-
nostce długości.

Na płaszczyzny

$ABCD$ i $A'B'C'D'$ dzia-

łając naprężenia,

sprowadzające się

ze względu na syme-

trję do dwóch sił

Z i Z' równych i wprost przeciwnych. Wypadkowa
naprężeń na płaszczyznę $ABA'B'$ niech będzie Q ;
oczywiście, że działanie na tę samą płaszczyznę
prawej części środka na lewą będzie się sprowa-
dzać do siły Q' , równej i wprost odwrotnej do Q
Płaszczyzny $ABA'B'$ i $DCD'C'$ znajdują się w jedna-
kowych warunkach, a zatem reakcja na płaszczyznę

$DCD'C'$ wyraża się siłą Q' , równej geometrycz-
nie Q , lecz ze zwrotem przeciwnym. Reakcja na
płaszczyznę $BCB'C'$ niech będzie R , którą roz-
łożymy na składowe S i V , równoległe do naziom-

mu i do pionu. Punkty zaczepienia powyższych sił są narazie nieznane. Prócz nich działa jeszcze ciężar P wyciętej bryły, przyłożony do jej środka ciężkości G oraz obciążenie jednostajne μ na powierzchni. Na mocy zasady zesztynienia pod działaniem powyższych sił bryła jest w równowadze. Równanie rzutów na oś poziomą wykazuje, że $S = 0$ t.j. że reakcja R jest pionowa, a znaczy jest identyczna z V . W wypadku, gdy BC jest nieskończenie małe i równa się dx , siła V sprowadza się do wypadkowej naprężeń, działających na polu $dx \cdot 1$ t.j. do siły $t_y dx \cdot 1$, co wykazuje, że naprężenie t_y jest pionowe. Równanie rzutów na oś pionową będzie wówczas:

$$\mu dx \cdot 1 + \pi dx \cos \omega \cdot h \cdot 1 - t_y dx \cdot 1 = 0,$$

skąd

$$t_y = \pi h \cos \omega + \mu = \pi y + \mu$$

przytem oczywiście jest to ciśnienie. Z rys. widać także, iż kąt między normalną zewnętrzną do BC a naprężeniem pionowym t_y jest $\theta_2 = 180^\circ + \omega$.

Dla symetrii oznaczmy $\mu = \pi e$, wtedy będziemy mieli

$$t_y = \pi(y + e) = \pi Y.$$

Znaczenie wielkości C jest wyznaczone w §162. Otrzymaliśmy więc elementarne wzory /30/ i /31/ Rozkładając na kierunki równoległe do osi x i y otrzymamy:

$$(t_y)_x = T = t_y \sin \omega = \pi Y \sin \omega,$$

$$(t_y)_y = N_2 = -t_y \cos \omega = -\pi Y \cos \omega.$$

Otrzymaliśmy więc w powyższy elementarny sposób wyrażenia /23/ i /24/ na N_2 i T . Dalsze rozwiązanie zadania polega na wyznaczeniu N_1 , korzystając z warunku Rankine'a, co jest uskutecznione w § 161.

ĆWICZENIE 11. Udowodnić syntetycznie za pomocą rozważania równowagi bryły $ABCD A'BC'D'$ rys.199/ że reakcje Q i Q' są równoległe do naziomu.

§ 166. Powyższe wyniki mogą być wyrażone, a nawet częściowo otrzymane geometrycznie zapomocą koła naprężeń. Wiemy /§ 151/, że mając funkcje N_1 , N_2 i T możemy zbudować to koło dla każdego punktu środowiska; wiemy też /§ 156/, że z powodu warunku Rankine'a dla ziemi sypkiej wszelkie koła naprężeń dla danego punktu leżą wewnątrz kąta $\phi O \phi' = 2\varphi$ /rys.200/, ewentualnie są styczne do boków tego kąta. Korzystając z tej uwagi, możemy uniknąć analizy, przeprowadzonej w § 161 i zastąpić ją następującem rozważaniem geometrycznem. -

prężeń np. (A) , odpowiadającemu pewnemu stanowi równowagi statecznej, ponieważ tutaj

$$\max \varphi = \varphi_{TOC} < \varphi.$$

Takich kół (A) , a zatem odpowiednich stanów równowagi jest nieskończenie wiele, skrajne koła (A_1) i (A_2) styczne do boków $O\phi$ i $O\phi'$ odpowiadają równowadze granicznej parcia i odporu.

Koło (A_1) , dla którego, jak widać z rysunku, $|N_1| < |N_2|$, odpowiada parciu, koło (A_2) , dla którego $|N_1| > |N_2|$ - odporowi. Koło (A_1) odpowiada w rozwiązaniu analitycznym pierwiastkowi A_1 , koło (A_2) - pierwiastkowi A_2 , koło (A) - liczbie A , oznaczającej zadość nierówności:

$A_1 < A < A_2$, gdyż w tym stanie $|N_1|$, proporcjonalne do A , jest większe od $|N_1|$ w stanie (A_1) i mniejsze od $|N_1|$ w stanie (A_2) . W ten sposób otrzymaliśmy geometrycznie te same wyniki, które w §.161 zostały otrzymane analitycznie.

W podobny sposób można wyjaśnić stan równowagi naprężonej dla ziemi spoistej, korzystając z wykresu podobnego do rys.191. Nie wchodzimy jednak w te szczegóły, gdyż w następstwie przy obliczaniu parcia na mury będziemy dla większej określoności uważali ziemię za sypką.

ĆWICZENIE 12. Otrzymać z rys. 200 wzory:
/25/, /26/, /27/.

ĆWICZENIE 13. Wykazać za pomocą koła naprężeń, że $\max |t_{nt}|$ zachodzi na poletkach, nachylonych pod kątem 45° do osi głównych; jaki jest kąt ϑ dla tych poletek?

ĆWICZENIE 14. Wykazać, że w ziemi spójnej w stanie parcia istnieją w wierzchniej warstwie ciągnięcia. Jaka jest grubość tej warstwy? Czy w stanie odporu istnieją ciągnięcia?

Ciecz idealna.

§ 167. Z powyższych wzorów na naprężenia w środowisku sypkim można otrzymać, jako poszczególny wypadek naprężenie w cieczy idealnej. Charakterystyką fizyczną środowiska będzie tutaj warunek:

$t_{nt} = 0$, który oznacza, że w cieczy idealnej nie wytwarza się żadnego odporu na ścinanie, czyli ślizganie, t.j. że w środowisku tem niema tarcia ani spójności. Jest to poszczególny wypadek warunku /14/ przy $\varphi = 0$ lub /16/ przy $\varphi = 0$ i

$C = 0$. Otrzymamy więc szukane naprężenia, kładąc w powyższych wzorach $\varphi = 0$ i uwzględniając, że $\omega = 0$ t.j. że powierzchnia cieczy jest

pozioma, otrzymamy mianowicie:

$$N_2 = -\pi(y+e) = -(\pi y + p), T=0, N_1 = -\pi(y+e) = -(\pi y + p).$$

p - może oznaczać tutaj ciśnienie atmosferyczne na powierzchni cieczy; ignorując tę wielkość otrzymamy:

$$N_1 = N_2 = -\pi y, \quad T=0.$$

Z wzoru /7/ otrzymamy, że

$$t_{nn} = -\pi y$$

t.j. w cieczy idealnej działają tylko ciśnienia;

na wszelkim poletku w danym punkcie działają ciśnienia jednakowe: $t_n = \pi y$, t.j. proporcjonalne do głębokości. Oczywiście, że w cieczy istnieje tylko jeden stan równowagi, gdyż tutaj $A_1 = A_2$.

CWICZENIE 15. Znaleźć naprężenia w cieczy idealnej i ważkiej bezpośrednio za pomocą całkowania równań /1/ i /2/ z uwzględnieniem warunku $t_{nt} = 0$ oraz warunków /5/ i /6/ i na powierzchni.

Parcie ziemi na powierzchnię zewnętrzną.

§ 168.* Na poletku ds o normalnej zewnętrznej n działa naprężenie t_n , będące reakcją części środowiska, znajdującego się po stronie normalnej. Niech mamy powierzchnię cylindryczną o długości

* W każdym punkcie środowiska

tworzącej $= 1$, której ślad w płaszczyźnie Oxy prostopadłej do tworzącej jest krzywą (A) , który możemy podzielić na nieskończoną ilość poletek ds ; powierzchnia (A) rozdziela środowisko na część I i II; wyobraźmy sobie w każdym punkcie A powierzchnię normalną n , skierowaną w stronę części II środowiska. Układ naprężeń t_n , a właściwie sił $t_n ds \cdot 1$ jest reakcją części II środowiska na powierzchnię (A) . W rozważanym wypadku układu płaskiego naprężeń siły $t_n ds \cdot 1$ sprowadzają się do jednej siły czyli wypadkowej, którą nazywamy parciem; w wypadku równowagi granicznej biernej, czyli w stanie odporu ziemi, wypadkową tę nazywamy odporem. - Zwykle mamy do czynienia z wypadkiem, gdy powierzchnia (A) jest płaszczyzną. Na mocy zasady działania i przeciwdziałania na każdym poletku ds o normalnej n' odwrotnej do n działa naprężenie $t_{n'}$, różne i odwrotne do t_n . Układ $t_{n'} ds \cdot 1$ wyraża reakcję, czyli parcie środowiska na powierzchnię (A) ze strony I środowiska.

Obliczenie np. parcia ziemi w wypadku równowagi granicznej na pomyślaną w ziemi płaszczyznę OA_1

ze strony normalnej n można wykazać w sposób następujący. Naprężenie t_n rozłożymy na osie n i t i do obliczenia składowych t_{nn} i t_{nt} użyjemy wzorów /7/ i /8/, kładąc w nich za N_1, N_2 i T wartości z wzorów /23/, /24/ i /26/.

Parcie R rozłożymy też na składowe R_n i R_t i obliczymy je z wzorów:

$$R_n = \int_0^{OA_1} t_{nn} \cdot ds, \quad R_t = \int_0^{OA_1} t_{nt} \cdot ds$$

$$R = \sqrt{R_n^2 + R_t^2}$$

Oczywiście że kąt między linią działania R a osią n jest φ , gdyż wszystkie naprężenia w płaszczyźnie OA_1 są równoległe.

Punkt zaczepienia parcia R będzie w odległości $OA_0 = S_0$, którą obliczymy z równania, wyrażającego, że moment wypadkowej R równa się sumie momentów składowych $t_n ds$ czyli $t_{nn} ds$ i $t_{nt} ds$:

$$R_n \cdot OA_0 = \int_0^{OA_1} t_{nn} \cdot ds \cdot OA$$

przytem A oznacza dowolny punkt na prostej OA_1 , między O i A_1 .

Oczywiście, że do obliczenia parcia możnaby użyć składowe na osie Oxy , korzystając z wzorów /3/ i /4/ na t_{nx} i t_{ny} , lecz ten sposób byłby bardziej skomplikowany.

ĆWICZENIE 16. Obliczyć parcie ziemi sypkiej na płaszczyznę pionową przy $\omega = \gamma$ i powierzchni nieobciążonej.

ĆWICZENIE 17. Obliczyć parcie cieczy idealnej na powierzchni, której ślad OA_1 jest parabolą o średnicach poziomych, punkt O jest wierzchołkiem.

§ 169. Często można osiągnąć uproszczenia w obliczeniach, wprowadzając osie główne. Kierunki osi głównych znajdziemy z równania /4/. Dla środowiska sypkiego przy naziomie płaskim w wypadku parcia mamy:

$$/32/ \quad \operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2T}{N_1 - N_2} = \frac{2 \sin \omega}{-\frac{A_1}{\pi} + \cos \omega};$$

ponieważ $\left| \frac{A_1}{\pi} \right| > \cos \omega$, $\alpha_0 < 0$. Z równania tego widać, że kierunki osi głównych są tutaj w każdym punkcie jednakowe, a zatem torry naprężeń głównych tworzą siatkę z linii prostych.

Naprężenie główne obliczymy z równań /10/,

jak widać z nich N_1 i N_2 są też proporcjonalne do $Y = y + e$.

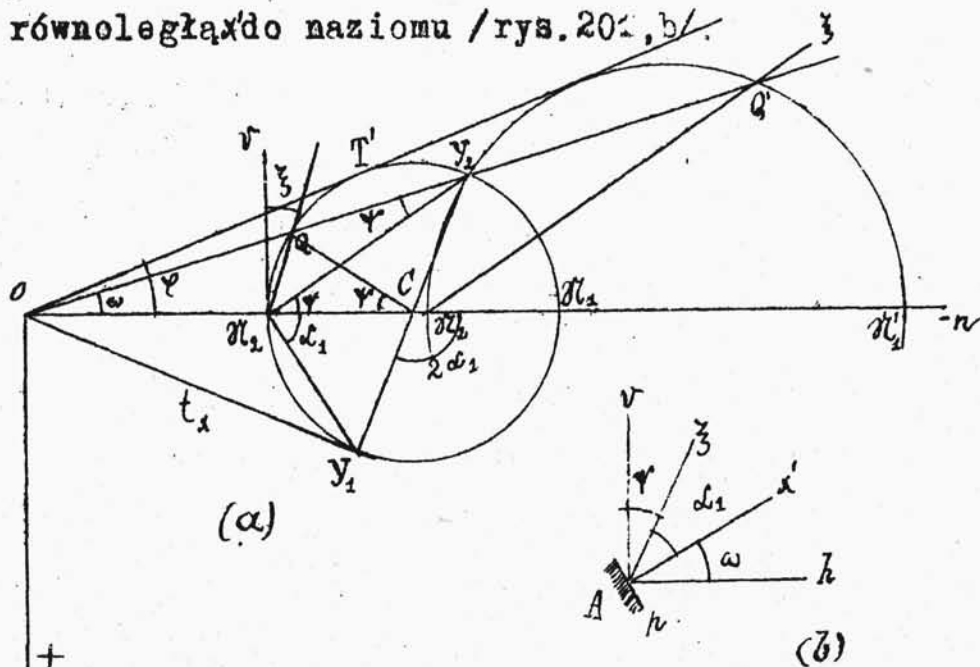
Znajomość osi głównych daje odrazu w każdym punkcie poletka ślizgania, które są nachylone do osi ξ pod kątem $45^\circ - \frac{\varphi}{2}$. Ponieważ tory naprężeń głównych są prostymi, powierzchnie ślizgania stają się tutaj płaszczyznami.

Z powyższego widać, że znajomość wzorów na N_1 , N_2 i T rozwiązuje wszelkie kwestje, dotyczące stanu naprężonego, ziemi sypkiej o naziomiu płaskim. Stosowanie ^(powyższej) metody analitycznej prowadzi do wzorów dość skomplikowanych: prostsze wzory otrzymamy, korzystając z koła naprężeń, gdyż ten wykres stanowi syntezę dość skomplikowanych trygonometrycznych zależności w danym zagadnieniu. Prócz tego ta ostatnia metoda daje możliwość uzyskania rozwiązania wykreślnego. Uczynimy to w kilku następujących §§.

CWICZENIE 18. Obliczyć kierunki osi głównych w wypadku $\omega = \varphi$ i znaleźć płaszczyznę ślizgania.

Kierunki osi głównych w ziemi sypkiej
o naziomie płaskim.

§ 170. Jeżeli koło naprężeń zbudować przy osiach Ont , z których oś On jest równoległa do osi X , czyli do naziomu, to położenie osi ξ i η , określa się, jak powiedziano w § 151. - Jeżeli zaś oś On jest zbudowana poziomo, to rzeczywiste położenie osi głównych można zbudować w sposób następujący: Odcinek $OY_2 = \pi_y$ pod kątem ω do osi On odpowiada naprężeniu t_y , odcinek OY_1 odpowiada naprężeniu t_x na pośłku Ap prostopadłym do naziomu, czyli posiadającym normalną równoległą do naziomu /rys. 201, b/.



Rys. 201

Podobnie znajdziemy kierunek ξ w wypadku odporu /rys.202/, mianowicie:

$$\begin{aligned} & 4 N_1 C Y_2 = 2\alpha_1 = 2 \angle (\xi, x); \quad 4 C N_2 Y_2 = 90^\circ - \alpha_1 = \omega + \psi; \\ & 4 O Y_2 N_1 = \psi; \quad 4 N_2 Y_2 Q' = 180^\circ - \psi; \end{aligned}$$

a zatem wszelki kąt wpisany przeciwległy jest ψ ,
a centralny $4 Q' C N_2 = 2\psi$; wobec tego kąt między cięciwą $N_2 Q$ a styczną $N_2 V$ jest równy ψ ,
a więc prosta $N_2 Q'$ jest kierunkiem osi ξ .

Równanie do obliczenia ψ otrzymamy z powyższych wykresów. Z rys.201, rozpatrując trójkąt OQC , mamy:

$$\frac{QC}{OC} = \frac{\sin \omega}{\sin (180^\circ - \omega - 2\psi)} = \frac{\sin \omega}{\sin (\omega + 2\psi)} = \frac{CT}{OC} = \sin \varphi,$$

skąd

$$/33/ \quad \sin (\omega + 2\psi) = \frac{\sin \omega}{\sin \varphi}.$$

Łatwo sprawdzić dosłownie w ten sam sposób, że równania to stosuje się także w wypadku odporu; oczywiście, że jeden z pierwiastków równania wyznacza kąt ψ dla wypadku parcia, drugi - dla odporu. Z wzoru /33/ tak samo jak i z wzoru /32/ widać, że kierunki osi głównych przy naziomnie płaskim są we wszystkich punktach jednakowe. -

W dwóch ważnych poszczególnych wypadkach wzór

/37/ daje następujące rezultaty.

Dla naziomu poziomego $\omega = 0$, $\psi = 0$ - wynik otrzymany już w § 162. Przy $\omega = \varphi$ t.j. dla stoku naturalnego

$$\varphi + 2\psi = 90^\circ, \quad \psi = 45^\circ - \frac{1}{2}\varphi;$$

CWICZENIE 19. Zbudować kierunki osi głównej ξ w wypadkach parcia i odporu, korzystając z kąta $\angle_2 = \angle(\xi, y)$ t.j. z kąta między osią ξ a osią y , prostopadłą do naziomu.

CWICZENIE 20. Wykazać, że kąty $2\psi = \angle QC\pi_2$ /rys.201/ i $2\psi = \angle Q'C\pi_2$ /rys.202/ są podwojeniami pierwiastkami równania /33/.

CWICZENIE 21. Udowodnić z wykresów 201 i 202, że naprężenie t_n na poletku poziomym jest równoległe do naziomu /por. z ówcz. 11/.

CWICZENIE 22. Oznaczając przez χ kąt ostry, zawarty między osią $Ay' \parallel Oy$ i prostą $A\xi$ i liczony jako dodatni od osi Ay' , w kierunku odwrotnym do ruchu wskazówki zegara, udowodnić równość:

$$(34) \quad \sin(\omega + 2\chi_0) = - \frac{\sin \omega}{\sin \varphi}.$$

CWICZENIE 23. Udowodnić równość

/35/

$$\operatorname{tg} \psi \cdot \operatorname{cotg}(\psi + \omega) = \frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi}$$

Wskazówka. Dowód syntetyczny można oprzeć na równości /33/. Można także podać dowód analityczny w sposób następujący. Należy napisać równanie /1/ i /2/ oraz /5/ i /6/, przyjmąwszy za osie współrzędnych kierunki ξ i η , które są stałe przy naziomie płaskim. Dołączyć do tych równań równanie Rankine'a /17/. Znaleźć z tych równań jedną z całek \mathcal{N}_1 lub \mathcal{N}_2 . Z warunków /5/ i /6/ otrzymamy szukany związek.

CWICZENIE 24. Na podstawie równości /35/ wykazać, że linja pionowa i linja naziomu są średnicami sprzężonemi elipsy, mającej za kierunki osi kierunki ξ i η oraz stosunek półosi $\tan(45^\circ - \frac{\gamma}{2})$.

Położenie płaszczyzn ślizgania.

§ 171. Z § 159 wiemy, że dwa poletka ślizgania w danym punkcie A leżą pod kątem $45^\circ - \frac{\gamma}{2}$ do osi głównej ξ , czyli do kierunku głównego naprężenia większego oo do wartości bezwzględnej /rys.203/.

Z rys. tego mamy:

$$\sigma + \gamma = 45^\circ - \frac{\gamma}{2} ; \quad \sigma' - \gamma = 45^\circ - \frac{\gamma}{2} ;$$

podstawiając otrzymane stąd wartości γ w równanie /33/, otrzymamy następujące wzory do obliczenia ką-

tów δ i δ' , określających położenie płaszczyzn ślizgania:

$$\cos(2\delta + \varphi - \omega) = \frac{\sin \omega}{\sin \varphi}$$

/36/

$$\cos(2\delta' + \varphi + \omega) = - \frac{\sin \omega}{\sin \varphi}$$

W poszczególnych wypadkach otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \text{Przy } \omega = 0, 2\delta + \varphi &= 2\delta' + \varphi = \\ &= 90^\circ, \delta = \delta' = 45^\circ - \frac{1}{2}\varphi. \end{aligned}$$

$$\text{Przy } \omega = \varphi, \cos 2\delta = 1,$$

$$\cos(2\delta' + 2\varphi) = -1$$

$$\begin{aligned} \delta = 0, 2\delta' + 2\varphi &= 180^\circ, \delta' = 90^\circ - \varphi \\ \text{t.j. jedna z płaszczyzn} \end{aligned}$$

ślizgania jest pionowa, druga równoległa do na-
ziomu.

Wykreślne kierunki płaszczyzn ślizgania wyzna-
czają np. w wypadku parcia /rys.204/ proste QT i

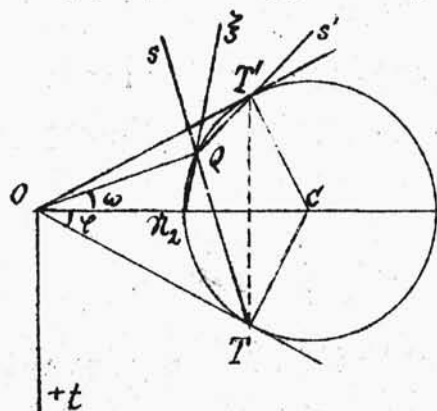
QT' . Rzeczywiście

$$\angle OCT = 90^\circ - \varphi, \text{ a więc}$$

$$\angle \pi_2 QT = 45^\circ - \frac{1}{2}\varphi.$$

Kąt $TCT' > 180^\circ$ - z pra-
wej strony równa się

$$180^\circ + 2\varphi, \text{ a więc } \angle TQT' = 90^\circ + \varphi$$



Rys. 204

i $4 s' Qs = 90^\circ - \varphi$, a zatem $4 \xi Qs' = 45^\circ - \frac{1}{2} \varphi$.

CWICZENIE 33. Zbudować wykreslinie położenie płaszczyzn ślizgania w wypadku odporu.

CWICZENIE 35. Na podstawie /30/ wykazać następujący wzór na ω w funkcji φ i σ .

$$/37/ \quad \operatorname{tg} \omega = \frac{\sin \varphi \cdot \cos (\varphi + 2\sigma)}{1 - \sin \varphi \cdot \sin (\varphi + 2\sigma)}$$

CWICZENIE 36. Wyrażenie /34/ przekształcić na proporcję

$$/38/ \quad \frac{\cos \omega}{1 + \sin \varphi \cdot \sin (\varphi + 2\sigma - 2\omega)} = \frac{\sin \omega}{\sin \varphi \cdot \cos (\varphi + 2\sigma - 2\omega)}$$

Wzór Rankine'a na naprężenia.

§ 172. Korzystając z koła naprężeń łatwo otrzymać dla wszelkiego środowiska wzór na naprężenie t_n na dowolnem poletku o normalnej n w zależności od naprężeń głównych \mathcal{N}_1 i \mathcal{N}_2 oraz kąta θ między normalną n a naprężeniem t_n . Przypuśćmy, że \mathcal{N}_1 i \mathcal{N}_2 są ujemne, Z rys.205 mianowicie mamy:

$$\left. \begin{array}{l} t_n \\ t_n' \end{array} \right\} = OR \text{ lub } OR' = OJ \pm JR.$$

$$OJ = OC \cos \vartheta = -\frac{1}{2}(\mathcal{N}_1 + \mathcal{N}_2) \cos \vartheta = -\frac{1}{2}(\mathcal{N}_1 + \mathcal{N}_2) \cos \theta.$$

Znak (+) przed pierwiastkiem dotyczy naprężeń t_n , dla których punkt R zawiera się na łuku TN_1T' . Znak -/- dotyczy naprężeń t_n' , dla których punkt R' leży na łuku TN_2T' .

Kierunek naprężenia określi się przez kąt między osią ξ a naprężeniem, nazwijmy ten kąt przez β i liczymy go, jak i kąt α od ξ w kierunku ruchu wskazówki zegara. Oczywiście, że $\beta = \alpha + \theta$.

Mamy

$$t_{n\xi} = t_n \cos \beta, \quad t_{n\eta} = t_n \sin \beta$$

skąd

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{t_{n\eta}}{t_{n\xi}}.$$

Zważając na wzory /11/ otrzymamy:

$$\text{/40/} \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{N_2}{N_1} \operatorname{tg} \alpha$$

Wzory /39/ i /40/ określają naprężenie i jego kierunek, o ile wiadome są naprężenia główne.

§ 173. We wzorze /42/ pierwszy wyraz pierwiastka jest pewną funkcją x i y , t.j.

$$\frac{N_1 - N_2}{N_1 + N_2} = f(x, y).$$

Dla ciała stałego $f(x, y)$ jest nieznaną; dla

cieczy idealnej $f(x, y) = 0$. Dla środowiska sypkiego oba naprężenia główne są jednego znaku $f(x, y)$ oznacza $\sin \max \vartheta$, lecz ogólnie kąt $\max \vartheta$ jest nieznany, wiemy tylko, że granicą wyższą jest dla $\max \vartheta$ kąt tarcia φ ; jedynie gdy pewien obszar środowiska znajduje się w stanie równowagi granicznej mamy, że kąt $\max \vartheta$ jest stały i równa się φ i funkcja $f(x, y) = \sin \varphi$.

Dla środowiska sypkiego wzory /39/ i /40/ przechodzą na następujące:

$$/41/ \quad \left. \begin{matrix} t_n \\ t_{n'} \end{matrix} \right\} = - \frac{1}{2} (\mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2) (-\cos \theta \pm \sqrt{\sin^2 \varphi - \sin^2 \theta})$$

$$/42/ \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi} \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg}^2 (45^\circ - \frac{1}{2} \varphi) \operatorname{tg} \alpha.$$

Zgodnie z powiedzianem powyżej co do znaku przed pierwiastkiem, możemy powyższą regułę wyrazić tutaj w sposób następujący: znak (+) bierzemy, gdy α zawiera się między $-(45^\circ + \frac{1}{2} \varphi)$ a $(45^\circ + \frac{1}{2} \varphi)$, znak /-/- dla pozostałej części obwodu.

Z wzoru /41/ widać znak $\operatorname{tg} \beta$ jest taki sam, jak znak $\operatorname{tg} \alpha$; jeżeli α jest kątem ostrym,

to znak $\operatorname{tg} \beta$ dodatni, lecz $\beta = \alpha + \theta$, a kąt θ jest tępy, a zatem wówczas $180^\circ < \beta < 270^\circ$.

CWICZENIE 27. Obliczyć kierunek t_n t.j. kąt β z koła naprężeń, jako sumę $\beta = \alpha + \theta$.

CWICZENIE 28. Korzystając z wzorów /42/ i /35/ udowodnić, że naprężenie na poletku pionowym jest równoległe do naziomu /por. ów. 11 i 21/.

CWICZENIE 29. Na podstawie równości /42/ wykazać, że kierunek naprężenia i kierunek poletka są średnicami sprzężonemi elipsy, mającej za kierunki osi kierunki ξ i η oraz stosunek półosi $\operatorname{tg}(45^\circ - \frac{1}{2}\varphi)$.

Obliczenie naprężeń głównych.

§ 174. Według wzorów /30/ i /31/ naprężenie $t_y = \pi Y$, a kąt $\theta_2 = 180^\circ + \omega$; z drugiej strony na mocy /41/ i wykresu /201/ mamy w wypadku parcia /gdy $OY_2 > OY_1$ / na naprężenie t_y następujące wyrażenia:

$$\text{/43/} \quad t_y = \pi Y = -\frac{1}{2}(\mathcal{N}_1 + \mathcal{N}_2)(\cos \omega + \sqrt{\sin^2 \varphi - \sin^2 \omega}).$$

Stąd

$$\text{/44/} \quad \mathcal{N}_1 + \mathcal{N}_2 = -\frac{2\pi Y}{\cos \omega + \sqrt{\sin^2 \varphi - \sin^2 \omega}}$$

Na mocy zaś warunku /17/, wziętego dla równowagi granicznej, mamy:

$$/45/ \quad \mathcal{N}_1 - \mathcal{N}_2 = - \frac{2 \pi y \sin \varphi}{\cos \omega + \sqrt{\sin^2 \varphi - \sin^2 \omega}}$$

Z powyższych dwóch równań otrzymujemy:

$$/46/ \quad \left. \begin{matrix} \mathcal{N}_1 \\ \mathcal{N}_2 \end{matrix} \right\} = - \frac{\pi y (1 \pm \sin \varphi)}{\cos \omega + \sqrt{\sin^2 \varphi - \sin^2 \omega}} .$$

W wypadku odporu $OY_2 < OY_1$, więc we wzorze /43/ należy przed pierwiastkiem postawić znak(-), wzór(46) pozostanie słuszny przy zmianie przed pierwiastkiem znak /+/ na /-/.

ĆWICZENIE 30. Wykazać następujący wzór na naprężenie na poletku pionowym

$$/47/ \quad t_h = \pi y \frac{\cos \omega \pm \sqrt{\sin^2 \varphi - \sin^2 \omega}}{\cos \omega \mp \sqrt{\sin^2 \varphi - \sin^2 \omega}} .$$

znaki górne dotyczą odporu, dolne - parcia.

ĆWICZENIE 31. Wyprowadzić bezpośrednio z koła naprężeń następujące wzory:

$$/48/ \quad \mathcal{N}_1 = - \pi y \frac{\cos \varphi}{\cos (\omega + \varphi)} .$$

$$/49/ \quad \mathcal{N}_2 = -\pi Y \frac{\sin \varphi}{\cos(\omega + \varphi)}$$

Ćwiczenie 32. Udowodnić wzory /48/ i /49/ na podstawie wzorów /46/ i /33/.

Ćwiczenie 33. Udowodnić równość /35/ na podstawie koła naprężeń i wzorów: /46/, /30/ i /47/.

Ćwiczenie 34. W wypadku równowagi granicznej naprężenia można określić przez dwa parametry:

1/ ciśnienia średnie

$$\mu = -\frac{1}{2} (N_1 + N_2) = -\frac{1}{2} (\mathcal{N}_1 + \mathcal{N}_2)$$

i 2/ kąt ostry φ zawarty między osią $Ay' \parallel Oy$ i prostą A_3 , liczony za dodatni od osi Ay' w kierunku odwrotnym do ruchu wskazówki zegara. /Boussinesq/. Udowodnić za pomocą koła naprężeń, że przy dowolnych osiach współrzędnych naprężenia N_1, N_2 i T wyrażają się w sposób następujący:

$$/50/ \quad N_1 = -\mu (1 + K \cos 2x)$$

$$/51/ \quad N_2 = -\mu (1 - K \cos 2x)$$

$$/52/ \quad T = -\mu K \sin 2x$$

gdzie $K = \sin \varphi$. Ciśnienie średnie μ nie zależy od kierunku osi współrzędnych, kąt x zależy. Kąt x_0 .

w ćwicz. 22 odpowiada poszczególnemu wypadkowi, gdy oś O_x jest równoległa do naziomu.

Ćwiczenie 35. Wykazać, że ciśnienie średnie μ można określić wzorem:

$$/53/ \quad \mu = - \frac{\pi Y \sin \alpha}{h \sin 2\alpha_0}$$

gdzie kąt α_0 wyznacza równanie /34/.

Ćwiczenie 36. Wykazać, że naprężenie na poletku nachylnym pod kątem ε do pionu można wyznaczyć z wyrażenia:

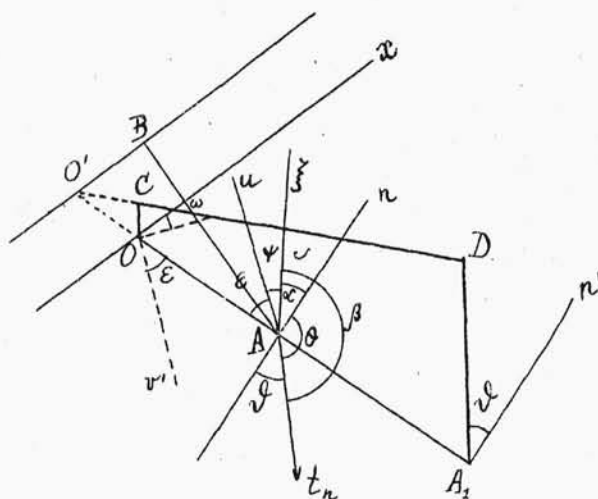
$$/54/ \quad t = -\pi Y \frac{\sin \alpha}{\sin \varphi \sin 2\alpha_0} \sqrt{1 - 2 \sin \varphi \cos 2(\varepsilon + \varphi) + \sin^2 \varphi}$$

Wskazówka. Należy wziąć oś O_y równoległą do poletka i obliczyć t z wzoru $t_x = \sqrt{N_x^2 + T^2}$ korzystając z wzorów /50/ i /52/.

§ 175. Korzystając z wzoru /44/ możemy wyrażenie /41/ na naprężenie przedstawić w postaci:

$$/55/ \quad \frac{t_n}{t_n'} = \pi Y \frac{-\cos \theta \pm \sqrt{\sin^2 \varphi - \sin^2 \theta}}{\cos \omega + \sqrt{\sin^2 \varphi - \sin^2 \omega}}$$

Dla poletek płaszczyzny OA_1 /rys. 206/, nachylną do pionu pod kątem ε kąt α jest stały, ponieważ $\alpha = 90^\circ - \varepsilon - \varphi$; także stały jest kąt β na mocy wzoru /42/, a zatem stały jest i kąt $\theta = \beta - \alpha$. -



Wszystkie naprężenia na płaszczyznę OA_1 są równoległe i nachylone do normalnych n pod kątem:

$$\varphi = 180^\circ + \varepsilon - \beta = 270^\circ - \varepsilon - \gamma - \beta.$$

Rys. 206

Rozważane naprężenia

wyrażają się wzorem /55/, w którym współczynnik przy γ jest stały, ponieważ $\gamma = AB = AO' = s'$, a więc wykres naprężeń CD jest linią prostą, wpadającą w O' . Parcie na płaszczyznę OA_1 jest to całka

$$/56/ \quad R = \int_0^{OA_1} t_n ds$$

gdzie $s = OA$.

Punkt zaczepienia A_0 parcia obliczymy z równania momentów

$$(a) \quad R \cdot OA_0 \cos \varphi = \int_0^{OA_1} t_n ds \cdot s \cdot \cos \varphi$$

czyli

$$/57/ \quad OA_0 = \frac{1}{R} \int_0^{OA_1} t_n s ds$$

Płaszczyzna trapezu $OCDA_1$ równa się

$$\int_0^{OA_1} t_n \cdot ds \cos \vartheta = \cos \vartheta \cdot R$$

t.j. parcie R równa się płaszczyźnie trapezu, podzielonej przez $\cos \vartheta$. Pozatem łatwo wykazać, że parcie R przechodzi przez środek ciężkości trapezu; rzeczywiście, mnożąc równość (a) przez $\cos \vartheta$, widzimy, że prawa część wyraża moment statyczny pola trapezu względem prostej OC ; w lewej części $R \cos \vartheta$ wyraża płaszczyznę trapezu, a zatem $OA_0 \cos \vartheta$ wyraża odległość od punktu O do prostej, przechodzącej przez środek ciężkości, równoległej do OC . Gdy obciążenia zewnętrznego nie ma trapez zamienia się na trójkąt, skąd widać, że parcie zaczepione jest w punkcie A_0 , przytem $OA_0 = \frac{2}{3} OA_1$.

§ 176. Przy naziomiu poziomym i płaszczyźnie OA , pionowej mamy $\omega = 0$, $\psi = 0$, $\alpha = 90^\circ$, $\operatorname{tg} \alpha = \infty$, $\operatorname{tg} \beta = \infty$, $\beta = 270^\circ$, $\theta = 180^\circ$ a więc z /55/

$$/58/ \left. \frac{t_n}{t_n'} \right\} = \pi y \frac{1 \pm \sin \varphi}{1 + \sin \varphi}$$

Znak $/+ /$ odpowiada odporowi, $/- /$ parciu. Jest to ten sam wzór, jaki otrzymaliśmy w § 163 inną drogą.

zaczepienia parcia w środku ciężkości trapezu.

Napężenie i parcie na płaszczyźnie
ślizgania.

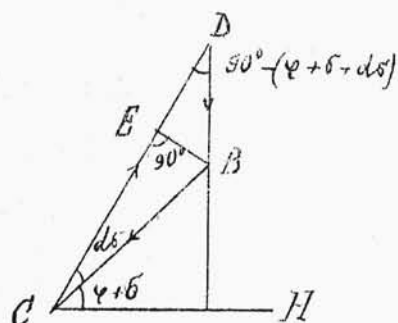
§ 178. Z rys. 192 otrzymujemy, że napężenie na poletku ślizgania będzie:

$$t_s = OT = \sqrt{Ox_1 \cdot Ox_2} = \sqrt{x_1 \cdot x_2}$$

Przyjmując pod uwagę wzór /46/ otrzymamy na t_s następujący wzór Rankiene'a:

$$/59/ \quad t_s = \frac{\pi Y \cos \varphi}{\cos \omega + \sqrt{\sin^2 \varphi - \sin^2 \omega}}$$

§ 179. Bardzo prosty wzór na napężenie i parcie na płaszczyźnie ślizgania możemy otrzymać w sposób następujący. Niech AS będzie płaszczyzna ślizgania. Rozpatrzmy równowagę wycinka ziemi AQS z obciążeniem zewnętrznym równoznacznym ciężarowi słupa $MNSQ \cdot 1$. Na bok AS działa parcie R pod kątem tarcia φ ; na bok AQ działa parcie $R + dr$ także pod kątem φ , ponieważ na płaszczyźnie ślizgania AS kąt φ jest max. i równa się φ , a więc $d\varphi = 0$ z tego powodu na płaszczyźnie AQ nieskończenie bliskiej kąt φ ogólnie



rys. 208(b)

t.j.

$$/60/ \quad R = \frac{1}{2} \pi s^2 \cos(\varphi + \delta)$$

Napężenie będzie:

$$/61/ \quad t_s = \frac{dR}{ds} = \pi s \cos(\varphi + \delta)$$

Są to wzory Lévy.

W wypadku, kiedy jest obciążenie równomierne,
mamy:

$$dG = \frac{1}{2} \pi s^2 d\delta + \pi h_0 dx \cos \omega$$

Z trójkąta SLQ mamy:

$$SL = s d\delta = dx \sin(90^\circ - \delta - d\delta + \omega)$$

stąd

$$dx = \frac{s d\delta}{\cos(\delta - \omega)}$$

Podstawiając tę wartość na dx w powyższy wzór otrzymamy:

$$dG = \frac{1}{2} \pi s^2 ds \left(1 + \frac{2h_0 \cos \omega}{s \cos(\varphi - \omega)} \right)$$

lecz $s \cos(\varphi - \omega) = y$, a zatem

$$/62/ \quad R = \frac{1}{2} \pi s^2 \left(1 + \frac{2h_0 \cos \omega}{y} \right) \cos(\varphi + \omega).$$

Ćwiczenie 37. Wyprowadzić wzór /61/ zapomocą koła naprężeń.

Ćwiczenie 38. Wyprowadzić z koła naprężeń następujący wzór na naprężenie na płaszczyźnie ślizgania:

$$/63/ \quad t_s = \pi y \frac{\sin \varphi}{\sin(\varphi + \varphi - \omega)}$$

Ćwiczenie 39. Korzystając z wzoru /54/ wyprowadzić następujący wzór Boussinesq'a na płaszczyznę ślizgania:

$$/64/ \quad t_s = -\pi y \frac{\cotg \varphi \sin \omega}{\sin 2\lambda_0}$$

U w a g a . Kąt λ_0 ma znaczenie wyjaśnione w ćwiczeniu 22.

Ćwiczenie 40. Wzór /64/ wyprowadzić z koła Rankine'a.

Ćwiczenie 41. Wyprowadzić analitycznie następują-
cy wzór na naprężenie na płaszczyznę ślizgania:

$$/65/ \quad t_s = -\pi y \sqrt{\frac{\sin 2\psi}{\sin 2(\psi + \omega)}}$$

Ćwiczenie 42. Wzór /65/ wyprowadzić z koła Ranki-
ne'a.

Ćwiczenie 43. Przekształcić wzór /63/ na wzór
/61/.

Wskazówka: Wyrugować kąt ω za pomocą wzoru /37/.

Ćwiczenie 44. Przekształcić wzór /59/ przy $e=0$
na wzór /61/.

Ćwiczenie 45. Przekształcić wzór /64/ na wzór /61/.

Wskazówka. Rozwiązanie można oprzeć na odpowied-
niem przekształceniu proporcji /38/.

Ćwiczenie 46. Wyprowadzić wzór /59/ z wzorów na
 $t_{n\zeta}$ i $t_{n\eta}$ przy osiach głównych.



nr 63