

przechodzą przez punkty  $A_1$  i  $A_4$  przytem  $\alpha_2 \alpha_3$  ma kierunek pionowy i promień  $\bar{c} a_{23} = B = P$ , budujemy ten wielobok  $\alpha_0 \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$ . Bok  $\alpha_1 \alpha_2$  jest równoległy do promienia  $\bar{c} a_{12}$ , a więc trójkąty  $\alpha_1 \alpha_2 A_4$  i  $a_{12} \bar{c} a_{23}$ , oraz czworokąty  $\alpha_1 \bar{E} \alpha_2 A_4$  i  $a_{12} a_{01} \bar{c} a_{23}$  są podobne. Ponieważ  $A_5 C = A_3 D = \bar{E} \alpha_2$  i  $A_5 C = A_3 \bar{E}$  /gdyż  $A_1 A_5 = A_3 A_4 = a$  i  $A_5 A_4 = A_2 A_3 = \bar{c}$ / zbudujemy więc kąt  $\alpha$  odkładając  $a_{01} C = a_{01} \bar{c}$  i łącząc  $C$  z  $a_{23}$ , kąt  $\bar{c} a_{23} \bar{c} = A_3 A_4 \alpha_2 = \alpha$ .

Wzór /a/ § 47 otrzymamy z trójkąta  $\bar{c} a_{23} a_{12}$   
 $a_{12} a_{23} = \bar{c} a_{12} \operatorname{tg} \alpha$ , lecz  $a_{12} a_{23} = Q$   
 $\bar{c} a_{23} = P - Q$ , więc

$$Q = (P - Q) \operatorname{tg} \alpha$$

czyli  $Q(\sin \alpha + \cos \alpha) - P \sin \alpha = 0$

#### WYKRESY NATĘŻEŃ. /sił osiowych/.

§.80. W § 28 zapoznaliśmy się z pewnym ogólnym sposobem wyznaczania drogą analityczną natężeń w prętach kratownicy, który to sposób nazywaliśmy sposobem równowagi węzłów. Zajmiemy się teraz zastosowaniem tego sposobu do rozwiązania zagadnienia drogą wykreślną. Przypuśćmy, że mamy dźwigar kratowy, t.j. niezmienny układ przegubowy, znajdujący się w równowadze pod działaniem sił bezpośrednio przyłożonych wyłącznie do przegubów czyli węzłów; pozatem zakładamy, że podpory dźwigara znajdują się też w węzłach. Przy takim działaniu sił zewnętrznych,

jak wiemy z § 28, siły wewnętrzne czyli reakcje połączeń przegubowych prętów sprowadzają się do natężeń, lub inaczej sił osiowych, mających znane linje działania, mianowicie proste łączące osie przegubów. W wypadku, gdy ciała układu są prętami prostolinijnymi, linje działania natężeń wpadają na osie prętów. Jak wiemy z § 29 liczba niewiadomych natężeń równa się liczbie prętów, gdyż każdy pręt, rozpatrywany jako swobodny, znajduje się pod działaniem dwóch natężeń, stanowiących siły równe wprost przeciwne i będące reakcjami od sąsiednich przegubów,

Każdy węzeł, rozpatrywany jako ciało swobodne, znajduje się pod działaniem reakcyj ze strony schodzących się w nim prętów, przytem reakcje te są to siły równe i wprost przeciwne natężeniom tych prętów. Rozpatrzmy nasamprzód dźwigar, w którym wyznaczenie natężeń prętów i reakcyj podpór jest zadaniem określonym t.j. gdy  $a + b = 2n$  /§ 29/, co jak wiemy jest warunkiem tylko koniecznym, ale niedostatecznym.

Ponieważ wszystkie siły działające na każdy węzeł przecinają się w jednym punkcie, więc warunek równowagi węzła jest tylko jeden, mianowicie, że wielobok tych sił powinien być zamknięty. Siły bezpośrednio przyłożone są znane, reakcje podpór często można także wyznaczyć

poprzednio, gdybyśmy prócz tego znali natężenia wszystkich prętów, schodzących się w węźle z wyjątkiem dwóch, których jednak linie działania są zawsze znane, to te dwa natężenia moglibyśmy wyznaczyć wykreślnie z wieloboku wyrażającego równowagę węzła.

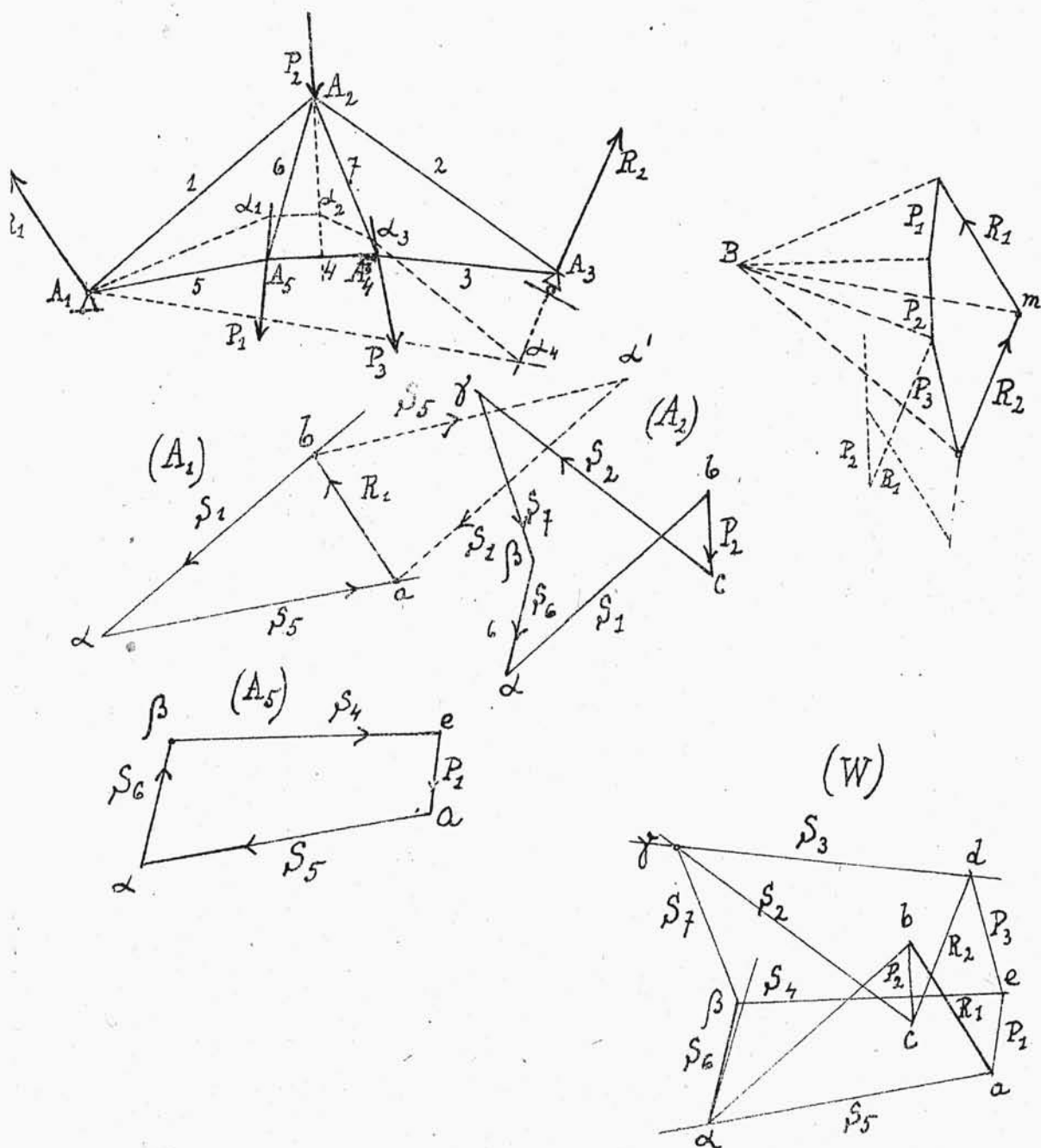
Na tem właśnie polega wykreślny sposób równowagi węzłów.

Aby go zastosować do dźwigara kratowego, wychodzimy z węzła, w którym są nieznane tylko dwa natężenia; wyznaczamy te natężenia jak powiedziano wyżej. Następnie przechodzimy do tego z sąsiednich węzłów, w którym będą tylko dwa natężenia niewiadome .

Jak widać sposobu tego nie będzie można zastosować wtedy, gdy nie można będzie znaleźć węzła, w którym byłyby niewiadome tylko dwa natężenia.

§ 81. Zastosujemy powyższy sposób do dźwigara, wyobrażonego na rys.106.

Nasamprzód znajdujemy reakcje podpór  $R_1$  i  $R_2$  sposobem wskazanym w § 80 t.j. za pomocą wieloboku sznurowego  $A_1\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4$ , którego bok  $A_1\alpha_1$  przechodzi przez punkt  $A_1$  t.j. punkt zaczepienia reakcji  $R_1$ . Łącząc punkt  $A_1$  z punktem  $\alpha_4$  w przecięciu się boku  $\alpha_3\alpha_4$  z kierunkiem reakcji  $R_2$ , otrzymujemy zamykając  $A_1\alpha_4$ .



Rys. 106

Przeprowadzając następnie promień  $Bm \parallel A_1\alpha_4$  do

przecięcia się z kierunkiem  $a_{34}^m$  reakcji  $R_2$ , otrzymany wielkości reakcyj  $R_1$  i  $R_2$ . Znamy więc teraz wszystkie siły zewnętrzne. W celu wyznaczenia sił wewnętrznych, czyli nateżeń prętów, należy zacząć rozwiązanie od węzła  $A_1$  lub od węzła  $A_3$ , gdyż to są węzły, w których niewiadome są tylko po dwa nateżenia.

W węźle  $A_1$  np. niewiadome są nateżenia  $S_1$  i  $S_5$  w prętach 1 i 5, budujemy wielobok sił  $/A_1/$ , w danym wypadku trójkąt z sił  $R_1$ ,  $S_1$  i  $S_5$ . Z punktu  $a$  mianowicie przeprowadzamy prostą  $a\alpha \parallel A_1A_5$  i z punktu  $b$  - prostą  $b\alpha \parallel A_1A_2$ , punkt  $\alpha$  przecięcia tych prostych wyznacza wierzchołek  $\alpha$  wieloboku sił  $ab\alpha$ , przytem boki  $a\alpha$  i  $b\alpha$  dają wielkości nateżeń  $S_1$  i  $S_5$ ; znając zwrot siły  $R_1$ , zwroty sił  $S_1$  i  $S_5$  otrzymujemy z warunku, że wielobok  $/A_1/$  powinien być zamknięty.

Czy dany pręt jest rozciągany, czy ściskany rozpoznajemy to w sposób następujący. Weźmy np. pręt 1, w wieloboku sił  $/A_1/$  widzimy, że reakcja ze strony pręta 1 na węzeł  $A_1$  ma zwrot od punktu  $b$  do  $\alpha$  t.j. na węzeł, a więc reakcja ze strony węzła  $A_1$  na pręt  $A_1A_2$  w punkcie  $A_1$  ma zwrot przeciwny t.j. od punktu  $A_1$  do  $A_2$ . Ponieważ pręt rozpatrywany, jako swobodny, znajduje się w równowadze tylko pod

działaniem dwóch sił reakcyjnych sąsiadnych węzłów, więc w punkcie  $A_2$  na pręt  $A_1A_2$  działa siła równa co do wielkości i ze zwrotem przeciwnym. W danym więc wypadku pręt  $A_1A_2$  rozpatrywany, jako swobodny, znajduje się pod działaniem dwóch sił  $S$ , ściskających pręt. Wi-  
dzimy z tego, że jeżeli na wykresie / wyrażającym zaw-  
sze równowagę węzła / nałożenie ma zwrot, skierowany na  
węzeł, to pręt jest ściskany; podobnie można się przeko-  
nać, że jeżeli nałożenie ma zwrot, skierowany od węzła,  
to pręt jest rozciągany, jak np.  $A_1A_5$ .

Wielobok sił /  $A_1$  / można by zbudować w inny sposób  
mianowicie, jak pokazano na rys. linią punktowaną, t.j.  
z punktu  $a$  przeprowadzić  $a\alpha' \parallel A_1A_2$  i  $b\alpha' \parallel A_1A_5$ .  
Dla jednostajności jednak umówimy się wszystkie wielobo-  
ki budować w następujący sposób.

Przedewszystkiem na rysunku kratownicy wykreślimy  
linje działania sił  $P_1, P_2, P_3, R_1, R_2$  tak, żeby lin-  
je te nie przecinały pola kratownicy  $A_1A_2A_3A_4A_5A_1$ ;  
następnie każdy wielobok sił wyrażający równowagę danego  
węzła będziemy budowali tak, żeby wszystkie siły przy-  
łożone do węzła następowały w porządku w jakim spotkamy  
odpowiednie siły w węźle, obiegając jego w kierunku ru-  
-----

ohu wskazówki zegara t.j. w wieloboku np.  $/A_1/$  siły mają iść w porządku  $R_1, S_1, S_5$ , w wieloboku np.  $/A_5/$  w porządku:  $P_2, S_5, S_6, S_4$ . Mając na względzie tę uwagę, przechodzimy do budowy wieloboku sił węzła, w którym byłyby niewiadome dwa natężenia. Takim węzłem jest  $A_5$ , gdyż niewiadome są natężenia  $S_4$  i  $S_6$ , natężenie  $S_5$  jest znane z wieloboku  $/A_1/$ .

Działanie pręta 5 na węzeł  $A_5$  wyraża się siłą, mającą zwrot przeciwny do zwrotu reakcji pręta na węzeł

$A_1$  t.j. zwrot tej siły będzie od  $\alpha$  do  $\alpha$ . Jak powiedziano wyżej, mamy zbudować wielobok, w którym porządek sił byłby następujący:  $P_1, S_6, S_6, S_4$ . W tym celu odkładamy siły  $P_1$  i  $S_5$  i z punktu  $\alpha$  przeprowadzamy  $\alpha\beta // A_5 A_1$  i z punktu  $e - e\beta // A_5 A_4$ .

Otrzymujemy  $S_4$  - rozciąganie,  $S_6$  - rozciąganie.

Następnie budujemy wielobok sił  $/A_2/$ , w którym niewiadome są tylko natężenia  $S_2$  i  $S_7$ , przytem zachowujemy porządek sił:  $P_2, S_2, S_7, S_6, S_7$  t.j. ten porządek w jakim spotykamy siły obiegając węzeł  $A_2$  w kierunku ruchu wskazówek zegara. Otrzymujemy  $S_2$  - ściskanie,  $S_7$  - rozciąganie.

W podobny sposób budujemy wieloboki  $/A_4/$  i  $/A_3/$ .

Obserwując zbudowane wieloboki sił, widzimy, że odciuki sił zewnętrznych  $P_1, P_2, P_3, R_1, R_2$  na wykresach



tych nie powtarzają się, natomiast odcinki sił wewnętrznych  $S_1, S_2, \dots, S_7$  powtarzają się każdy - dwa razy. Spróbujemy, czy nie da się zbudować wykresu jednego, w którymby takiego powtarzania nie było. W tym celu przystawimy do siebie wykonane wieloboki równymi bokami, które dlatego oznaczono na wykresach jednakowymi literami. W rezultacie otrzymamy jeden wykres  $/W/$ , w którym każdy odcinek czy to sił zewnętrznych, czy wewnętrznych jest wykreślony tylko jeden raz i przytem wykres ten zawiera w sobie wszystkie powyższe wieloboki sił.

§ 82. Rozpatrując wykres  $/W/$ , spostrzegamy następujące jego właściwości. Siły zewnętrzne  $R_1, P_2, R_2, P_3, P_1$  tworzą wielobok zamknięty  $abcdea$  przytem następują po sobie w tym porządku, w jakim spotykamy je, obiegając daną kratownicę podług ruchu wskazówek zegara. Następnie widzimy, że każdemu węzłowi kratownicy odpowiada w wykresie nateżeń odpowiedni wielobok zamknięty, w którym siły następują po sobie w takim porządku, w jakim spotykamy je obiegając węzeł podług ruchu wskazówki zegara, mianowicie:

węzeł $A_1$	wielobok z sił $R_1, S_1, S_5$ czyli	$ab\alpha a$
"- $A_2$	"- $S_6, S_1, P_2, S_2, S_7$ -"	$\beta a b c \gamma \beta$
"- $A_3$	"- $R_2, S_3, S_2$ -"	$c d \gamma c$
"- $A_4$	"- $P_3, S_4, S_7, P_3$ -"	$d e \beta \gamma d$
"- $A_5$	"- $P_1, S_5, S_6, S_4$ -"	$e \alpha \alpha \beta e$



Obserwując na wykresie napięć położenie napięć pasów/węzłów prętów zewnętrznych kratownicy/ widzimy, że każde takie napięcie wychodzi z wierzchołka wieloboku sił zewnętrznych i przytem takiego wierzchołka, w którym schodzą się siły zewnętrzne, działające na węzły, między którymi znajduje się rozważany pręt pasa.

Np. napięcie  $S_5$ , oznaczone przez 5, wychodzi z wierzchołka  $a$ , w którym schodzą się siły  $R_1$  i  $P_1$ , działające na węzły  $A_1$  i  $A_5$ , między którymi znajduje się pręt  $A_1A_5$  czyli 5.

Reguła ta jest ogólna w wypadku kratownic, złożonych z następujących po sobie trójkątów i nie posiadających trójkątów wewnętrznych. Widać to z przytoczonej tablicy, rzeczywiście w wieloboku  $/A_1/$  napięcie  $S_1$  następuje po sile  $R_1$ , w wieloboku  $/A_2/$  napięcie  $S_2$  poprzedza siła  $P_2$ , czyli na wykresie  $/W/$  napięcie  $S_1$  schodzi się z siłami  $R_1$  i  $P_2$  w wierzchołku  $b$ ; następnie w wieloboku  $/A_2/$  napięcie  $S_2$  następuje po sile  $P_2$ , w wieloboku zaś  $/A_3/$  napięcie  $S_2$  poprzedza siłę  $R_2$ , na wykresie  $/W/$  więc  $S_2$  wychodzi z wierzchołka  $c$ , w którym schodzą się siły  $P_2$  i  $R_2$  i t.d.

Może się zdarzyć, że do niektórych węzłów nie ma przyłożonych sił zewnętrznych. Jak modyfikuje się wów-

czas powyższe prawidło?

Wyobraźmy sobie, że do takich węzłów są przyłożone siły nieskończenie małe w granicy równające się zeru. Do takich się zastosuje się też powyższe prawidło i widzimy, że w granicy t.j., gdy siły te równają się zeru to w wieloboku się wierzchołki przysyłanych nieskończenie małych sił zewnętrznych schodzą się z wierzchołkami tych dwóch sił zewnętrznych, między którymi zawierają się na kratownicy węzły bez obciążenia. Widzimy więc, że w tym wypadku z takiego wierzchołka wychodzą kierunki tych wszystkich nateżeń prętów zewnętrznych kratownicy, które zawierają się między powyższymi dwiema siłami.

Co się tyczy połączenia w wykresie odcinków nateżeń kraty t.j.  $S_6$  i  $S_7$ , to widzimy, że odcinki te łączą punkty  $\alpha, \beta, \gamma$ , które nie należą do wierzchołków wieloboku sił zewnętrznych, lecz stanowią dodatkowe wierzchołki wykresu.

W każdym z tych dodatkowych wierzchołków schodzą się nateżenia odpowiadające bokom właściwego trójkąta kratownicy, a więc w wierzchołku  $\alpha$  schodzą się nateżenia  $S_1, S_6, S_5$  odpowiadające bokom trójkąta  $A_1 A_2 A_5$ , w wierzchołku  $\beta$  - nateżenia  $S_4, S_6, S_7$  odpowiadające trójkątowi  $A_5 A_2 A_4$ , w wierzchołku  $\gamma$  - nateżenia

odpowiadające trójkątowi  $A_2 A_3 A_4$ . Że taką odpowiedniość otrzymamy zawsze w wypadku kratownicy, składającej się z następujących po sobie trójkątów, widać z następującego. Rozpatrzmy np. trójkąt kratownicy  $A_5 A_2 A_4$ .

Odcinki odpowiednich nateżeń zawierają się,  $S_4 = e\beta$  w wielobokach cząstkowych  $/A_5/i$   $/A_4/$ ,  $S_6 = \alpha\beta$  w wielobokach  $/A_5/i$   $/A_2/$ ,  $S_7 = \beta\gamma$  - w wielobokach  $/A_2/i$   $/A_4/$ . Ponieważ wszystkie punkty oznaczone  $\beta$  na wykresach cząstkowych łączą się w jeden punkt  $\beta$ , gdy dostawiamy do siebie wykresy cząstkowe dla otrzymania wykresu całkowitego, więc w punkcie tym schodzą się nateżenia  $S_4, S_6, S_7$ , odpowiadające bokom trójkąta  $A_5 A_2 A_4$ .

Ta odpowiedniość pozwala wykreślić nateżenia prętów kraty, gdy kierunki nateżeń pasów są już wykreślone.

Na podstawie powyższych odpowiedniości otrzymujemy następujące prawidła dla zbudowania bezpośrednio i szybko wykresu nateżeń w wypadku kratownicy, składającej się z następujących po sobie trójkątów.

1°. Budujemy wielobok sił zewnętrznych / bezpośrednio przyłożonych i reakcyj podpór/ taki, że odcinki sił następują po sobie w tym porządku, w jakim spotykamy je, obiegając kratownicę zgodnie z ruchem wskazówek zegara.

2°. Z każdego wierzchołka wieloboku sił zewnętrz-

nych przeprowadzamy kierunki nateżeń tych prętów zewnętrznych kratownicy, znajdujących się na kratownicy między temi dwiema siłami zewnętrznymi, które schodzą się w danym wierzchołku.

3°. Wierzchołki dodatkowe wykresu, które odpowiadają trójkątom kratownicy otrzymujemy w sposób następujący. Pierwszy wierzchołek  $\alpha$ , odpowiada skrajnemu trójkątowi kratownicy ( $\alpha$ ), który posiada węzeł, gdzie schodzą się tylko dwa pręty zewnętrzne. Ten pierwszy dodatkowy wierzchołek wykresu otrzymamy w przecięciu się dwóch kierunków nateżeń dwóch powyższych prętów zewnętrznych. Następnie wierzchołki  $\beta, \gamma, \delta, \dots$  odpowiadające trójkątom  $|\beta|, |\gamma|, |\delta|, \dots$  otrzymamy, przeprowadzając z pierwszego wierzchołka  $\alpha$  kierunek  $\alpha\beta$  równoległe do pręta kraty, znajdującego się między trójkątami  $|\alpha|$  i  $|\beta|$  do przecięcia się z odpowiednim kierunkiem nateżenia pręta zewnętrznego, należącego do trójkąta  $|\beta|$ ; następnie przeprowadzamy kierunek  $\beta\gamma$  równoległe do pręta kraty między trójkątami  $|\beta|$  i  $|\gamma|$  do przecięcia się z odpowiednim kierunkiem nateżenia pręta zewnętrznego, należącego do trójkąta  $|\gamma|$  i t.d.

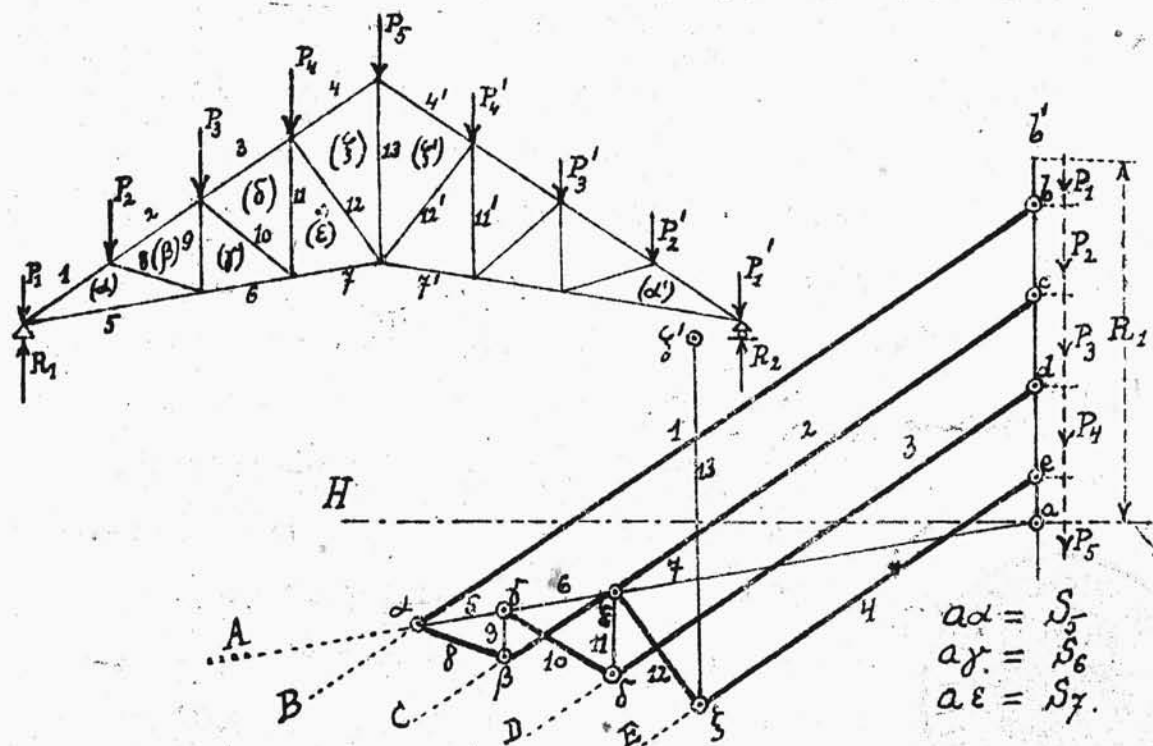
§. 83. Zastosujemy powyższe prawidło do przykładu kratownicy, składającej się z trójkątów, wyobrazonej na rys. 107, przytem  $P_1 = P'_1, P_2 = P'_2$  i t.d. Z powodu sy-

metrji kratownicy i obciążenia  $R_1=R_2=P_1+P_2+P_3+P_4+P_5$  i natężenia symetrycznych prętów są jednakowe, dostateczna więc zbudować wykres natężeń dla połowy kratownicy. Budujemy połowę wieloboku się  $abbcde$ , w którym siły  $R_1, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5$  następują po sobie w porządku, w którym spotykamy je obiegając kratownicę zgodnie z ruchem wskazówki zegara. Z wierzchołka  $b$ , między siłami  $|R_1-P_1|$  i  $P_2$  przeprowadzamy kierunek  $bB$  równoległe do pręta 1, z wierzchołka  $c - cC // 2$  podobnie  $dD // 3$ ,  $eE // 4$ , z wierzchołka  $a$  - między siłami  $|R_1-P_1|$  i  $|R_2-P_1|$  przeprowadzamy kierunki równoległe do prętów 5, 6, 7, 8 czyli prostą  $aA$ . Mamy w ten sposób wyznaczone położenia natężeń prętów pasów. Wykres będzie zakończony, gdy zbudujemy teraz wierzchołki dodatkowe  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \xi$ , odpowiadające trójkątom  $1 \alpha 1, 1 \beta 1, 1 \gamma 1, 1 \delta 1, 1 \epsilon 1, 1 \xi 1$ .

W tym celu wyznaczamy przecięcie  $bB$  z  $aA$ , otrzymujemy wierzchołek  $\alpha$ , przytem  $\alpha b = S_1$ ,  $\alpha a = S_2$ , następnie przeprowadzamy do przecięcia się w punkcie  $\beta$  z kierunkiem natężenia  $S_2$  ( $cC$ ) (na wykresie dla krótkości zamiast  $S_2$  napisano 2) (i wogóle zamiast  $S_n - n$ ), gdyż w punkcie  $\beta$  mają się schodzić natężenia  $S_1, S_2, S_3$ .

Następnie z punktu  $\beta$  przeprowadzamy  $\beta \gamma // 9$  do przecięcia się z kierunkiem  $S_6$  /t.j.  $aA$  / w punk-

cie  $\delta$ . Z punktu  $\delta$  prowadzimy  $\delta\delta' // 10$  do przecięcia się z kierunkiem  $S_3 / \alpha D /$ , z punktu  $\delta$



Rys. 107

prowadzimy  $\delta\epsilon // 11$  do przecięcia się z kierunkiem  $S_7 / \alpha A /$ , z punktu  $\epsilon$  prowadzimy  $\epsilon\zeta // 12$  do przecięcia się z kierunkiem  $S_4 / eE /$ . Z punktu  $\zeta$  przeprowadzamy  $\zeta\zeta' // 13$  i ponieważ wykres powinien być symetryczny względem poziomej linii  $\alpha H$  odkładamy  $\zeta'$  symetrycznie z  $\zeta$ . Wykres natężeń dla połowy kratownicy własnie z prętem 13 jest w ten sposób skończony. Aby się przekonać, które pręty są rozciągane, które ściskane należy rozpatrzyć wielobokisiz, wy



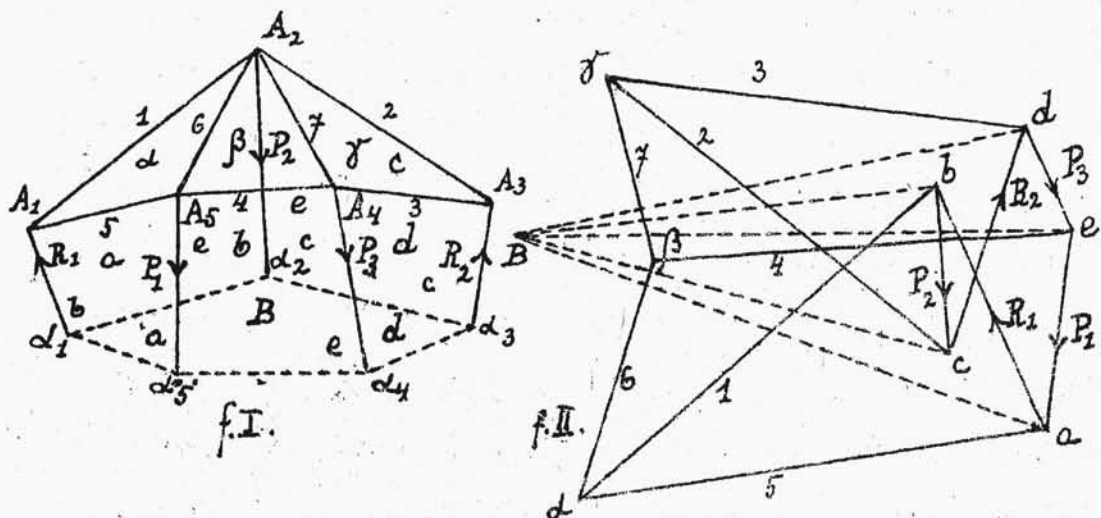
rażające równowagę każdego węzła, mianowicie:  $|R_1 - P|$ ,  $S_1, S_5$  czyli  $a\beta\alpha a$ ;  $S_1, P, S_2, S_8$  czyli  $\alpha\beta c/\beta\alpha$ ;  $S_5, S_8, S_9, S_6$  czyli  $a\alpha\beta\gamma a$  i t.d. Z pierwszego wieloboku np. widać, że  $S_1$  jest ściskane,  $S_5$  - rozciągane. Na wykresie napięcie ściskające oznaczono grubszy liniami, rozciągające - cienkimi.

§.84. W rozpatrzonych wykresach napięć każde z napięć spotyka się tylko jeden raz, każdemu prętowi kratownicy odpowiada na wykresie napięć jedno i tylko jedno napięcie. Do powyższych wykresów doszedł pierwszy technik angielski Taylor i niezależnie od niego znakomity fizyk angielski Maxwell, który podał przytem teorię geometryczną tych wykresów i zbadał warunki, kiedy takie wykresy istnieją. Widzieliśmy wyżej, że jeżeli kratownica składa się z następujących po sobie trójkątów, to istnieje wykres, w którym nie ma powtarzania się napięć. Maxwell podał ogólniejsze warunki istnienia takiego jednoznacznego wykresu; teoria jego opiera się na t. zw. figurach wzajemnych lub odwrotnych /reciprocal/. Figurami wzajemnymi nazywają się dwie figury /wieloboki/, między którymi zachodzi następująca odpowiedniość.

1/ Każdy bok jednej figury odpowiada jednemu bokowi drugiej figury i jest do niego równoległy. 2/ Każdy wierzchołek jednej figury odpowiada zamkniętemu konturowi



w drugiej figurze. Wyobrażone np. na rys. 106 kratowni-  
ca i wykres napięć nie są figurami wzajemnymi. W wypad-  
ku jednak, gdy siły  $P_1, P_2, P_3, R_1, R_2$  przecinają się  
w jednym punkcie  $A$ , to kratownica wraz z linjami  
działania sił czyli figura  $A_1A_2A_3A_4A_5A$  jest fi-  
gurą wzajemną z wykresem napięć  $abcdea\alpha\beta\gamma$ . Rzeczywiście wierzchołek  $A_5$  np. 1 figury, w którym scho-  
dzą się boki  $A_1A_5, A_2A_5, A_4A_5, AA_5$  odpowiada  
konturowi  $ea\alpha\beta e$  2-ej figury; wierzchołek  $A$  od-  
powiada konturowi  $abcdea$ , pozatem odpowiednie bo-  
ki są równoległe np.  $A_1A$  i  $ab$ . W wypadku ogólnym  
działania sił, jak np. na rys.106 otrzymany figury wza-



Rys.108

jemne, uzupełniony rysunek kratownicy wielobokiem sznuro-

wym. a wykres natężeń odpowiednim biegunem i promieniami biegunowymi /rys.108/.

Figura I -  $A_1A_2A_3A_4A_5\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5$  i figura II -  $abcdeB$  są teraz wzajemne, gdyż odpowiednie boki są równoległe np.  $\alpha_2\alpha_3 \parallel BC$  ; każdy wierzchołek jednej figury odpowiada konturowi drugiej, np.  $\alpha_5$  odpowiada  $aBea$ ,  $B$  np. odpowiada  $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4$ .

Własności figur wzajemnych mają związek z własnościami dwóch wielościanów, z których jeden otrzymuje się z drugiego przez przekształcenie za pomocą promieni odwrotnych względem paraboloidy obrotowej<sup>x/</sup>. Spostrzeżenie to doprowadziło Maxwella do rozważania figur wzajemnych, jako rzutów takich wielościanów uogólnionych / w których ściany mogą się przecinać / i wyprowadzeniu następującego twierdzenia. Wszelka figura posiada figurę wzajemną, jeżeli stanowi rzut zamkniętego wielościanu o ścianach płaskich. W zastosowaniu do wykresu natężeń twierdzenie to wskazuje, że kratownica posiada wykres natężeń bez powtarzania się w nim odcinków natężeń. Wtedy, gdy kratownicę, uzupełnioną liniami działania sił zewnętrznych i wielobokiem sznurowym tych sił można rozpatrywać jako rzut zamkniętego wielościana<sup>x/</sup>.

Patrz np. po polsku Routh. Statyka teoretyczna /tłomaczenie prof. Straszewicza./

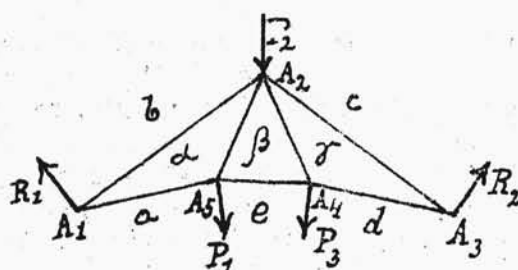
nu o ścianach płaskich.

Teoria Maxwella została później zmodyfikowana przez włoskiego geomeę Cremonę, który związał ją z teorią t. zw. układów zerowych /pewnych układów sił w przestrzeni/. W podręcznikach często wykresy napiężeń nazywają wykresami Cremony, jak widać z większą słusznością można je nazywać wykresami Maxwella.

Teoria figur wzajemnych pozwala uogólnić prawidło bezpośredniego budowania wykresu /§82/ dla wszystkich wypadków, gdy jednoznaczny wykres napiężeń istnieje. W praktyce będziemy więc zawsze próbować zbudować wykres podług powyższego prawidła. Same możność zbudowania takiego wykresu potwierdzi istnienie figury wzajemnej. W wypadku zaś, gdyby wykresu jednoznacznego napiężeń nie można było zbudować to stosowanie powyższego prawidła, jak zobaczymy, może okazać się pożytecznem.

§. 85. Powyższe rozważania doprowadzają do pewnych skrótowych oznaczeń w wykresach napiężeń, wogóle w figurach wzajemnych. Rozpatrując mianowicie wielościan zamknięty, widzimy, że oznaczwszy każdą ścianę osobną literą, możemy każdą krawędź oznaczyć przez dwie litery np. przez  $ab$ , jeżeli przez  $a$  i  $b$  są oznaczone ściany przecinające się na tej krawędzi. Ponieważ figura złożona z kratownicy, linii działania sił zamknięta

nych i boków wieloboku sznurowego jest rzutem odpowiednich krawędzi wielościanu, a wszystkie kontury tej figury są rzutami odpowiednich ścian, to wystarczy oznaczyć przez litery kontury tej figury, wtedy każdy bok figury może być oznaczony przez dwie litery. Np. w kratownicy, wyobrażonej na rys. 108 wszystkie kontury już są oznaczone literami:  $a, b, c, d, e, \alpha, \beta, \gamma$ ; oznaczenia te możemy także wykonać jak pokazano na rys. 109, przytem zachowujemy правило podane w § 81, żeby linje działania sił zewnętrznych nie



Rys.109

przez  $\alpha b$ , siła  $P_1$  przez  $ae$  i t.p. Oznaczenia te posiadają następującą własność przy figurach wzajemnych t.j. wtedy jeżeli istnieje wykres napięć, w którym niema powtarzania odcinków, napięć. Każdy kontur  $a, b, \dots, \alpha, \beta$  odpowiada w wykresie napięć wierzchołkowi

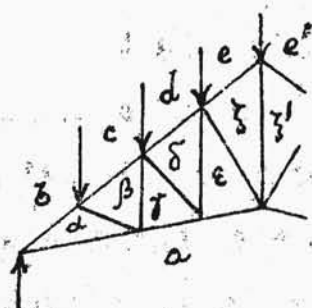
$a, b, \dots, \alpha, \beta, \dots$

Każdy wierzchołek np.  $A_2$  czyli  $bc\gamma\beta\alpha$  odpowiada w wykresie napięć konturowi, którego wierz-

nia sił zewnętrznych nie przecinały pola kratownicy. Przy takim oznaczeniu pręty kratownicy i siły zewnętrzne mogą być oznaczone przez dwie litery, np. pręt  $A_1A_2$

choćki są  $b, c, \delta, \beta, \alpha$  przytem  $bc \parallel P_2$ ,  $c\delta \parallel A_2A_3$ ,  $\delta\beta \parallel A_3A_4$ ,... a więc odcinki  $bc, c\delta, \delta\beta$ ,... oznaczają odpowiednio wielkość siły  $P_2$  czyli  $bc$ , natężenie w przecie  $c\delta, \delta\beta$ ,....

Na przykładzie wskazanym na rys. 107 wystarczyłyby oznaczenia, jak pokazano na rys.110. Odpowiednie ozna-



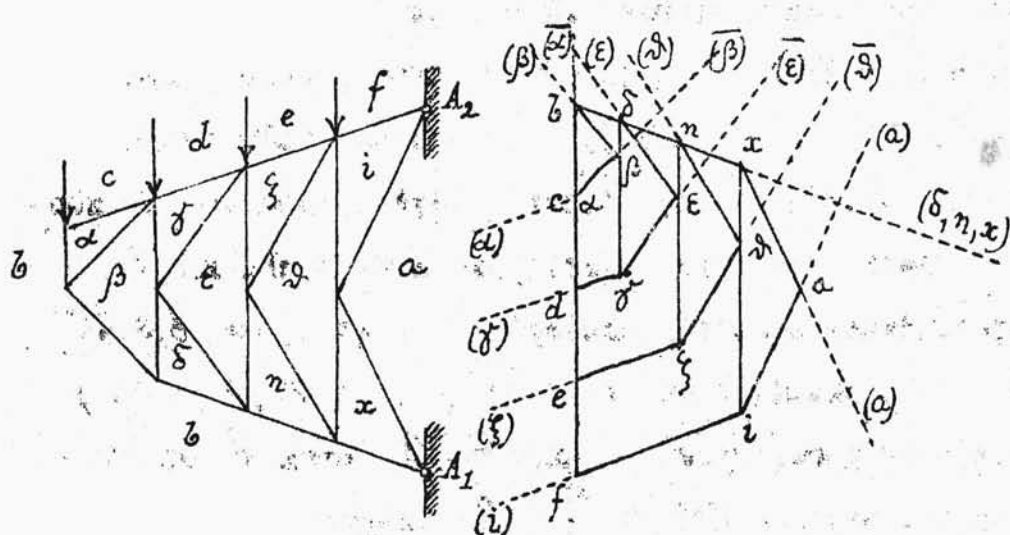
Rys. 110

czenia na wykresie natężeń są pokazane na rys.107, a więc np.

$\alpha a$  oznacza wielkość natężenia w przecie  $\alpha a$ .

Oznaczenia powyższe podał Bow.

§. 66. Jako przykład na zastosowanie pravidła bez-



rys. 111

pośredniego budowania wykresu natężeń w wypadku ogól-

niejszym, rozpatrzmy wykres napięć dla kratownicy, uwi-  
doczniony na rys.111.

W punktach podporowych  $A_1$  i  $A_2$  są umieszczone  
przeguby nieruchome, reakcje będą siłami przechodzącymi  
przez te punkty, jednak uprzednie wyznaczyć ich nie moż-  
na.

W każdym razie, wiedząc że reakcje są to siły, prze-  
chodzące przez punkty  $A_1$  i  $A_2$ , można bezpośrednio  
się przekonać, że kratownica uzupełniona może być rzutem  
wielościannu o ścianach płaskich, a więc figura wzajemna  
z nią istnieje. Jak wspominaliśmy w praktyce można się  
obejść bez tego badania, próbując zbudować wykres  
napięć na podstawie powyższego prawidła. Budujemy więc  
przede wszystkim wielobok sił zewnętrznych, w danym, jed-  
nak wypadku odkładamy tylko siły bezpośrednio przyłożone:  
 $bc, cd, de, ef$ ; reakcyj, które będą miały oznaczenia  
 $ab$  i  $af$  nie możemy dokonać, gdyż uprzednie ich zbu-  
dowanie jest niemożliwe. Następnie z wierzchołka  $b$   
przeprowadzamy proste równoległe do prętów  $b\alpha, b\beta, b\delta,$   
 $b\eta, b\epsilon$  t.j. proste  $/\alpha/, / \beta /$  i  $/\delta\eta, \epsilon/$ . W ten  
są miejscem geometrycznym punktów  $\beta$  oraz  $\delta, \eta, \epsilon$ ;  
podobnie z wierzchołków  $c, d, e, f$  przeprowadzamy proste  
 $/\alpha/, / \gamma /$  i  $/ \delta /$  i  $/ \epsilon /$ , równoległe do prętów  
do prętów  $c\alpha, d\gamma, e\delta, f\epsilon$ . Połączenie więc odcinków napię-

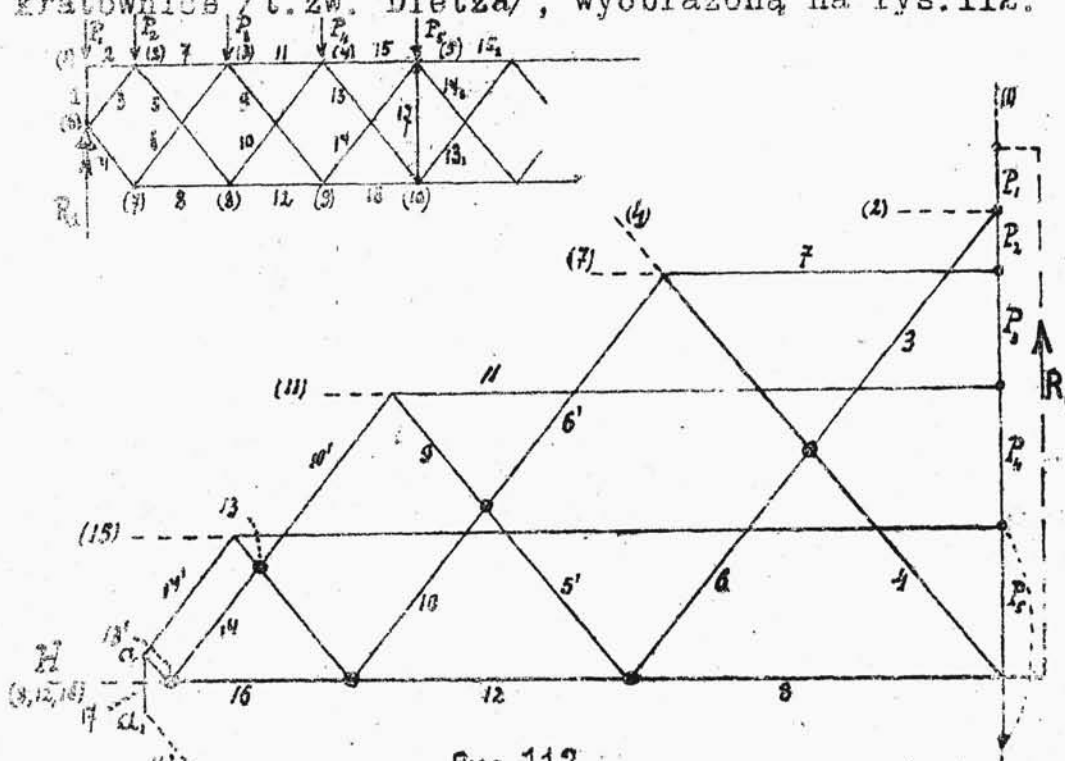


zeń prętów zewnętrznych jest ustalone, z wyjątkiem nateżeń prętów  $a x_i$  i  $a i$ , ponieważ reakcyj podporowych nie znamy. Dalsza budowa wykresu /jeżeli wykres jednoznaczny istnieje/ polega na wyznaczeniu wierzchołków dodatkowych  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ , odpowiadających konturom wewnętrznym kratownicy  $(\alpha), (\beta), \dots$ . Zaczynamy tę budowę od węzła  $b c \alpha$ , w którym schodzą się 2 pręty. Wyznaczamy mianowicie na wykresie punkt  $\alpha$  przecięcia się prostych  $b \alpha$  i  $c \alpha$  /punkt  $\alpha$  wpada na  $c$  /. Następnie z punktu  $\alpha$  /czyli  $c$  / na wykresie przeprowadzamy  $\alpha \beta$  równoległe do pręta  $\alpha \beta$  i zauważamy punkt  $\beta$  przecięcia się prostych  $\alpha \beta$  i  $b \beta$ . Następnie przeprowadzamy na wykresie  $\beta \gamma$  równoległe do  $\beta \gamma$  w kratownicy i zauważamy punkt  $\gamma$  w przecięciu się  $\beta \gamma$  z  $a \gamma$ . Postępując podobnie dalej, otrzymamy w końcu wierzchołek  $a$  i w ten sposób wykres będzie zakończony. Pozostaje tylko określić rodzaj nateżenia prętów rozciągające, czy ściskające. Zbudowanie wierzchołka  $a$ , rozstrzyga jednocześnie kwestję reakcyj podporowych; są to odcinki  $f a$  /w punkcie  $A_2$  /; -  $a b$  /w punkcie  $A_1$  / /na rys. odcinki te nie są wykreślone/. Reakcja np.  $a b$  równoważy się z nateżeniami  $b x$  i  $x a$ .

Jako drugi przykład bezpośredniego budowania wy-



kresu nateżeń w wypadku ogólniejszym rozpatrzmy kratownicę /t.zw. Dietza/, wyobrażoną na rys.112.



Rys.112

W miejscach przecięć krzyżuleców przegubów niema. Kratownica i obciążenie jest symetryczne. Zastosujemy pierwszą część prawidła, podanego w § 82 i do tego wypadku, t.j. przeprowadzamy proste /1/, /2/, /7/, /11/..... i t.d. Następnie budujemy wieloboki zamknięte sił, wyrażających równowagę węzłów: /1/, /6/, /2/, /7/, /3/, /8/ i t.d. Otrzymamy wykres wskazany na rys.112, przytem okaże się, że nateżenia w krzyżulcach powtarzają się dwa razy 5 i 5', 6 i 6', 9 i 9', 10 i 10', 13 i 13', 14 i 14'. Otrzymany wykres nateżeń nie jest wykresem jednoznacznym, jednak jest moż-

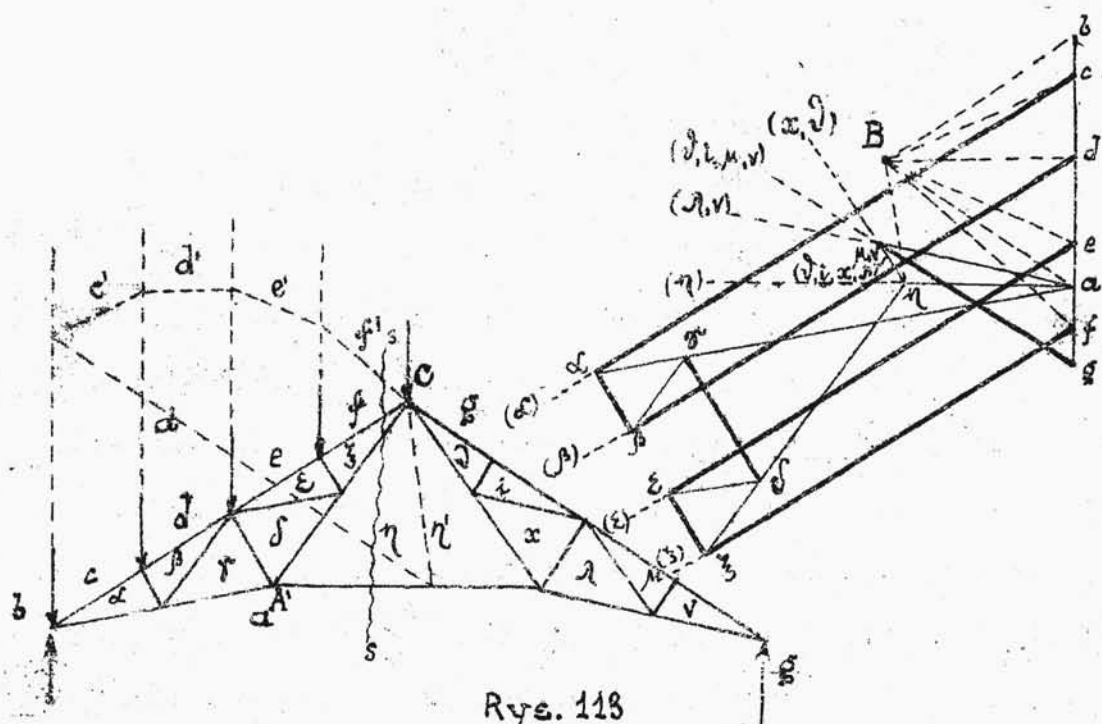
liwie związłym. Gdyby w miejscach przecięć się krzyżulców były przeguby w wykresie nie byłoby powtarzania się nateżeń, to znaczy, że wykres byłby w tym wypadku jednoznaczny.

§ 87. Przytoczone w § 84 twierdzenie Maxwella wskazuje, kiedy istnieje jednoznaczny wykres nateżeń, nie wskazuje jednak jak go zbudować. Jak wspominaliśmy teoria Maxwella daje sposób otrzymania figury wzajemnej zapomocą pewnego przekształcenia przestrzennego. Otrzymanie wykresu nateżeń sposobem elementarnym opiera się głównie na stosowaniu warunku równowagi dla każdego węzła t.j. wieloboku zamkniętego sił. W ten właśnie sposób otrzymywaliśmy wykresy nateżeń w poprzednich §§.

Może jednak się zdarzyć, że dla danej kratownicy istnieje wykres nateżeń i przytem jednoznaczny, a jednak nie można go zbudować tylko z warunków równowagi węzłów.

Zdarza się to wówczas, gdy przy stopniowem budowaniu wieloboków sił dla każdego węzła spotkamy się z węzłem, w którym niewiadomych nateżeń będzie więcej niż dwa, np. węzły  $A$  i  $A'$  w kratownicy, wyobrażonej na rys. 113 t.zw. kratownicy Polonezowej.

Przypuśćmy, że obciążenie kratownicy stanowią si-



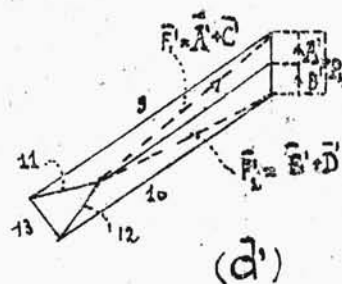
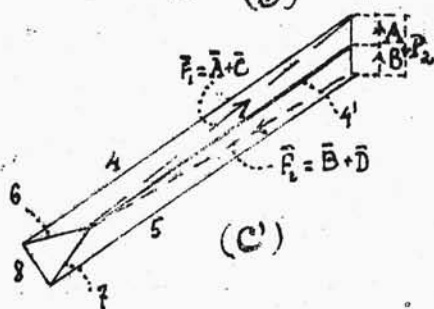
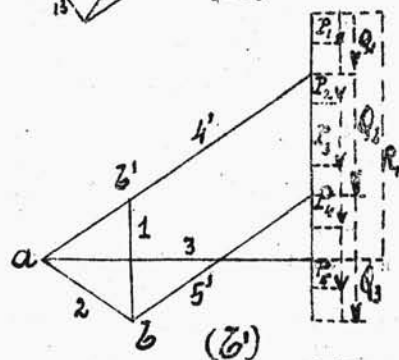
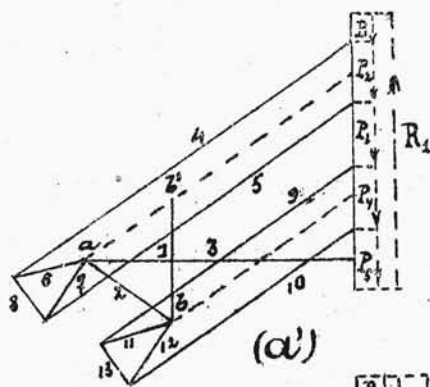
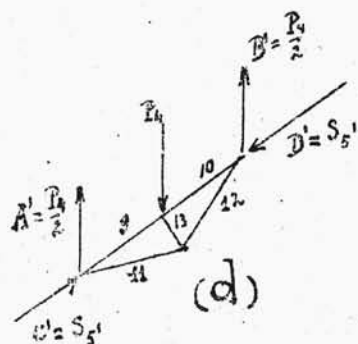
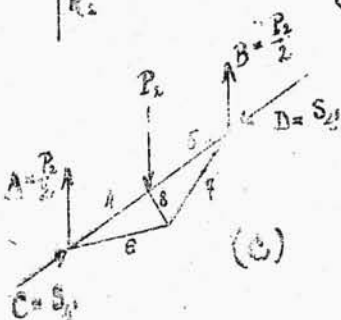
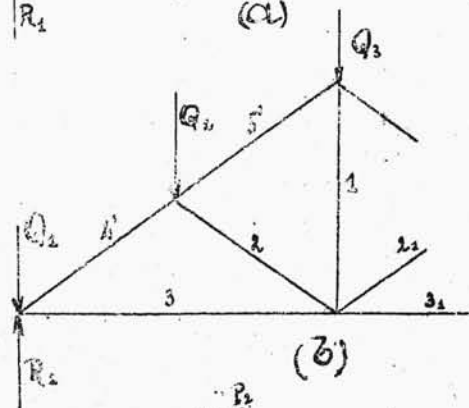
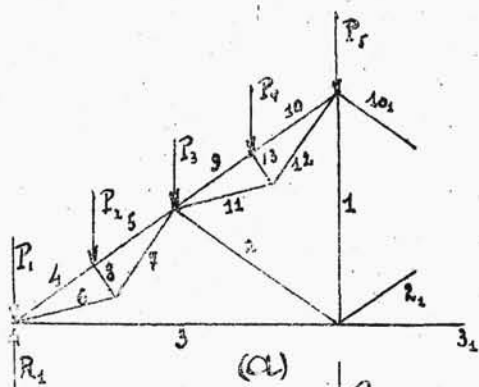
Rys. 113

ły pionowe  $bc, cd, de, ef$ , i  $fg$  i że odpowiednie reakcje są  $ga$  i  $ab$ . Jeżeli znajdziemy napięcie w przecie  $a\eta$ , to wykres napięć będziemy mogli zbudować sposobem, podanym w § 82. Rzeczywiście, zastępując działania pręta  $a\eta$  na węzły siłami, otrzymamy, że pozostała część kratownicy będzie się składać z następujących po sobie trójkątów. Napięcie  $a\eta$  otrzymamy, wykonując przekrój  $ss$ ; napięcia  $a\eta, \eta\zeta, \zeta\phi$  równoważą siły  $ab, bc, cd, de, ef$ . Aby znaleźć siłę  $a\eta$  postępujemy, jak wskazano w § 70, przeprowadzając mianowicie względem dowolnego bieguna  $B$  wielobok

sznurowy  $f', e', d', c', a'$ , taki, że bok  $f'$  przechodzi przez punkt  $C$ . Otrzymamy bok zamykający  $\eta'$  i przeprowadzając z  $B$  promień  $B\eta$  równoległy do  $\eta'$  otrzymamy wielkość napięcia  $\alpha\eta$ . Następnie budujemy wykres napięć na podstawie prawidła. Otrzymany wykres napięć jest jednoznaczny.

Rozpatrzmy drugi przykład /rys.114/, dla którego sposób równowagi jest także niedostateczny dla zbudowania wykresu napięć. Przypuśćmy, że kratownica i obciążenie jest symetryczne i że reakcje podporowe są pionowe, a więc jednakowe.

Na daną kratownicę możemy się zapatrywać, jako na układ przegubowy, składający się z prętów: 1, 2, 3, 2<sub>1</sub>, 3<sub>1</sub> oraz brył /4,5,6,7,8/, /9,10,11,12,13/,..... na które to bryły działają odpowiednio siły  $P_2, P_4, \dots$ . Napięcia w prętach 1,2,3, i reakcje ze strony przegubów na powyższe bryły możemy otrzymać sposobem, wskazanym w § 43. Reakcje ze strony krańcowych węzłów np. na bryłę /4,5,6,7,8/ określają się przez składowe  $A$  i  $C$  oraz  $B$  i  $D$  /rys.c /, przytem  $A = \frac{1}{2} P_2$ ,  $B = \frac{1}{2} P_2$ , składowe zaś  $C$  i  $D$  równają się napięciom  $S_4$ ; pewnej pomyślanej kratownicy, wyobrażonej na rys. b, na którą działają siły  $Q_1, Q_2, Q_3, \dots$ , przytem  $Q_1 = P_1 + \frac{1}{2} P_2$ ,  $Q_2 = P_3 + \frac{1}{2} P_2 + \frac{1}{2} P_4$ ,  $Q_3 = P_5 + \frac{1}{2} P_4 + \frac{1}{2} P_6, \dots$



Wykres nateżeń dla kratownicy ( $b$ ) jest ( $b'$ ) .  
 Otrzymujemy z niego nateżenia w prętach 1,2,3,...  
 oraz nateżenia  $S_4$  i  $S_5$  , które równają się odpowiednim składowym reakcyj  $C$  i  $D$  /rys.  $c$  / oraz  $C'$  i  $D'$  /rys.  $d$  / dla dwóch powyższych brył. Mając te składowe, a więc i całkowite reakcje, gdyż składowe  $A, B, A', B'$  są znane, rozpatrujemy bryły /4,5....8/ i /9,....13/ jako oddzielne kratownice swobodne. Pierwsza np. kratownica znajduje się pod działaniem sił  $\bar{F}_1 = \bar{A} + \bar{C}$ ,  $P_2$  i  $\bar{F}_2 = \bar{B} + \bar{D}$  . Odpowiedni wykres nateżeń jest ( $c'$ ) . Podobnie i dla drugiej kratownicy zbudowany wykres nateżeń ( $d'$ ) . Jak wiadać, wykresy ( $b'$ ), ( $c'$ ), ( $d'$ ) można wykonać na jednym rysunku, mianowicie ( $a'$ ) . W tym wykresie każdemu prętowi kratownicy ( $a$ ) odpowiada tylko jeden odcinek odpowiedniego nateżenia, a więc wykres jest jednoznaczny. Ponieważ wykres jest symetryczny względem poziomej linii, zbudowana została tylko połowa wykresu.

§ 88. Wykresy nateżeń mogą być stosowane nie tylko do kratownic niezmiennych, lecz i do kratownic geometrycznie zmiennych. Dla przykładu rozwiążemy zadanie, przytoczone w § 47 i § 79, zapomocą wykresu nateżeń.

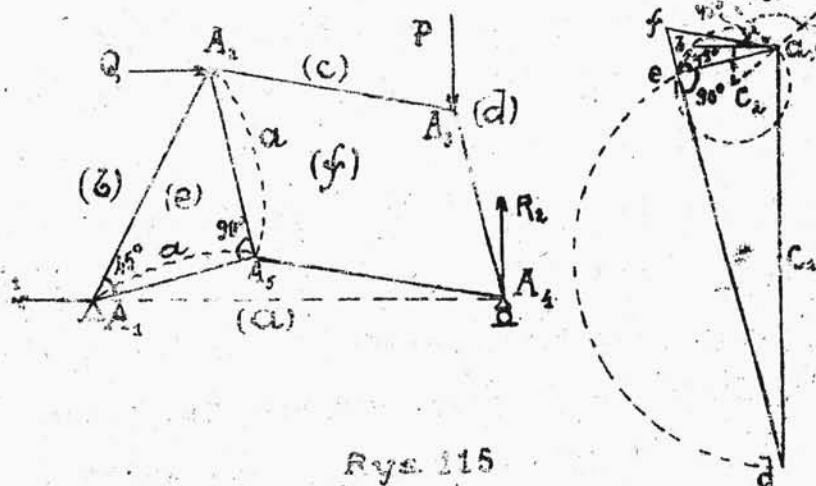
Przypuśćmy, że położenie układu, wskazane na rys.

114 jest położeniem równowagi. Wiedząc o tem /§ 79/, że  $\bar{R}_2 = -\bar{P}$ ,  $\bar{R}_1 = -\bar{Q}_1$ , rysujemy wielobok sił zewnętrznych  $Q, P, R_2, R_1$ , czyli, korzystając z oznaczeń Bow'a:  $abcdai$  budujemy wykres nateżeń według

ogólnego  
prawidła

/rys. 115/.

Na wykresie zauważamy, że kąt  $aed = 90^\circ$  /ponieważ  $ae \parallel A_1A_5$  i  $fd \parallel A_1A_4 \parallel A_2A_5$ .



Rys. 115

i kąt  $bed = 45^\circ$  /ponieważ  $eb \parallel A_1A_2$  i  $ea \parallel A_2A_5$ /.

Znając te kąty i mając zbudowany wielobok sił zewnętrznych  $abcdai$ , możemy wyznaczyć punkt  $e$  w przecięciu się dwóch kół, będących miejscem geometrycznym punktu  $e$ . Znając punkt  $e$  łatwo zakończyć cały wykres. Wzór (a) § 47 możemy otrzymać z trójkąta  $eba$ .

Wzajemność własności figur wzajemnych jest nie tylko geometryczna, lecz i mechaniczna, jak to już zauważył Maxwell. Rzeczywiście, w figurach wzajem-

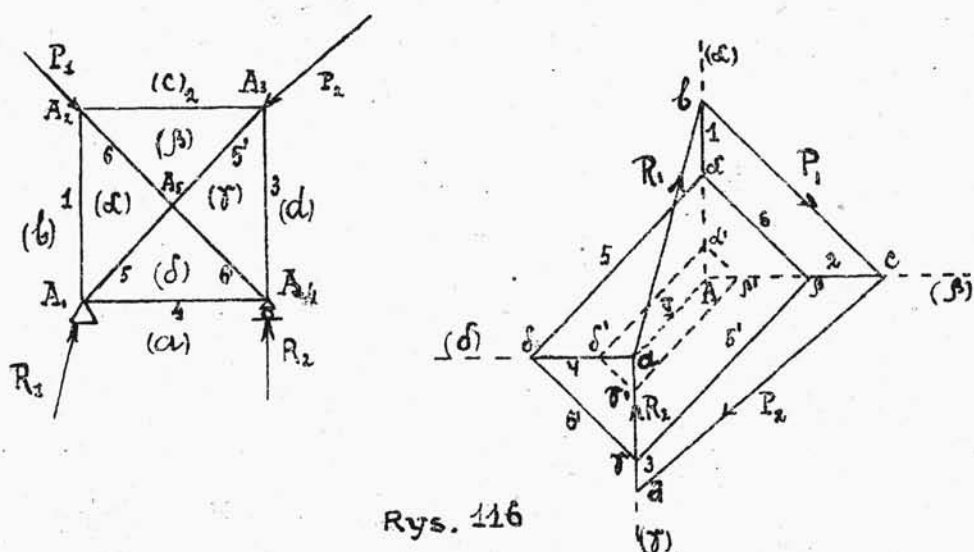


nym każdemu węzłowi jednej figury odpowiada w drugiej figurze kontur zamknięty z boków, odpowiadających prętom schodzącym się w wierzchołku pierwszej figury i równoległym do nich. Możemy więc wykres nateżeń rozpatrywać jako kratownicę, a kratownicę jako wykres nateżeń tak pomyślanej kratownicy.

Można np. uważać /rys.108/ figurę  $Babcde\alpha\beta\gamma$  za kratownicę, w której niektóre nateżenia są zgóry znane, a figurę  $A_1A_2\dots\alpha_4\alpha_5$  za wykres nateżeń tej kratownicy. Można byłoby także uważać za kratownicę tylko figurę  $abcde$ , na którą działają siły zewnętrzne, schodzące się w punkcie  $B$  i mające za linję działania  $Ba, Bb, Bc, Bd, Be$ . Figura  $A_1A_2\dots\alpha_5$  byłaby wtedy także wykresem nateżeń, przytem wielobok  $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5\alpha_1$  byłby wielobokiem zamkniętym sił zewnętrznych. Kratownica  $abcde$  byłaby wtedy geometrycznie zmienną, gdyż węzłów  $n$  byłoby 8, prętów  $b = 12$ , a więc  $2n-3=2\cdot 8-3=13>12$  /§ 32/.

Rozpatrywane wyżej wykresy nateżeń dotyczą kratownic geometrycznie niezmiennych lub zmiennych, lecz w każdym razie takich, w których zadanie z punktu widzenia statyki ciał sztywnych jest określone, t.j. gdy w każdym razie  $a+b \leq 2n$ . Powstaje kwestja, czy istnieje wykres nateżeń dla kratow-

nicy w wypadku zadania nieokreślonego t.j. gdy  $a+b > 2n$ . Rozpatrzmy w tym celu przykład, uwi-  
doczniony na rys.116.



Rys. 116

Jeżeli punkt  $A$  nie jest węzłem kratownicy,  
to nie istnieje figura wzajemna z daną kratownicą.  
Jeżeli zaś w punkcie  $A_5$  jest węzeł, to kratownica  
wraz z uzupełniającymi kierunkami sił zewnętrznych  
i wielobokiem sznurowym może być rzutem wielościana  
zamkniętego o ścianach płaskich, a więc na pod-  
stawie twierdzenia Maxwella figura wzajemna istnieje.  
Jak zbudować taką figurę, t.j. wykres napiężeń  
twierdzenie Maxwella nie wskazuje i zadanie to,  
jak wiemy, jest nieokreślone przy hipotezie ciał  
absolutnie sztywnych. Możemy to sprawdzić, budując wykres napiężeń

Przyjmując np. w przecie 1 dla natężenia dowolną wielkość  $\mathcal{L}$  i przyjmując, że jest ściskające, możemy cały wykres wykonać, jak pokazano na rys. 116.

Jak widać, może być nieskończenie wiele takich wykresów w zależności od dowolnego natężenia w jednym z prętów np.  $\mathcal{L}$  /na rys. 116 pokazane są inne wykresy  $a b c d, \mathcal{L}' \beta' \gamma' \delta'$  i  $a b c d a A$ /. Zadanie jest więc nieokreślone: geometryczne miejsce wierzchołków  $\mathcal{L}$  jest to prosta ( $\mathcal{L}$ ), wierzchołków  $\beta - (\beta)$ ,  $-\gamma - (\gamma)$ ,  $-\delta - (\delta)$ , jednak wykres natężeń, jako figura wzajemna, istnieje. Zadanie dopiero stanie się określone, jeżeli, jak wspominaliśmy w § 21, przyjmiemy pod uwagę przyrodę materiału, z którego są wykonane pręty, mianowicie ich sprężystość. Zbadanie zadania z tego punktu widzenia określi, który z prostokątów  $\mathcal{L} \beta \gamma \delta$  wykresu odpowiada założeniom zadania. Kwestją tą zajmiemy się w Cz. II Kursu.

### Krzywe sznurowe.

§ 89. Wśród rozmaitych rodzajów obciążeń, z którymi można się spotkać przy rozwiązywaniu zagadnień ze statyki budowlanej, zasługuje na uwagę wypadek, kiedy na ciało działają siły nie skupione o wartości skończonej, a przeciwnie rozłożone na sposób ciągły wzdłuż krzywej /ogólnie  $Y = f(x)$  /