

$\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$ i $\mathcal{L}_2, \mathcal{L}_3$, t.j. nalewo od kratownicy i na zwrot względem punktu C zgodnie z ruchem wskazówki zegara, a więc moment jest dodatni.

Z powyższego równania otrzymujemy ostatecznie

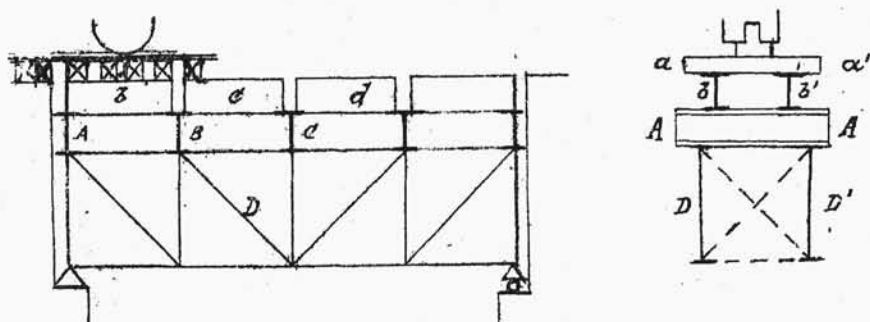
$$S = - \frac{mn \cdot kb}{h}$$

OBCIĄŻENIE POŚREDNIE

§ 121. Rozpatrzone w poprzednich §§ wykresy momentów gnących i sił tnących dla belek dotyczą obciążenia t.zw. bezpośredniego, gdy zakładamy, że wszelki ciężar skupiony lub obciążenie ciągłe są zaczepione bezpośrednio do punktów belki.

W praktyce spotykamy jeszcze inny rodzaj obciążenia. W mostach kratowych np. obciążenie od pociągu przeważnie nie oddaje się bezpośrednio na dźwigary główne, lecz za pośrednictwem jezdni. Rozpatrzmy schemat konstrukcyjny mostu kratowego kolejowego jednotorowego z jezdnią górną /rys. 153/. Koła pociągu wywierają ciśnienia na szyny. Szyna zwykle opiera się na całym szeregu belek drownianych a, a' , t.zw. mostownice. Mostownice spoczywają na belkach podłużnych: b, b' ; c, c' ; d, d' ..., które są podparte przez belki po-

przecne: A, B, C, \dots same zaś belki poprzeczne są podparte w węzłach dźwigarów głównych. Układ szyn, mostownice, balek podłużnych



Rys. 153

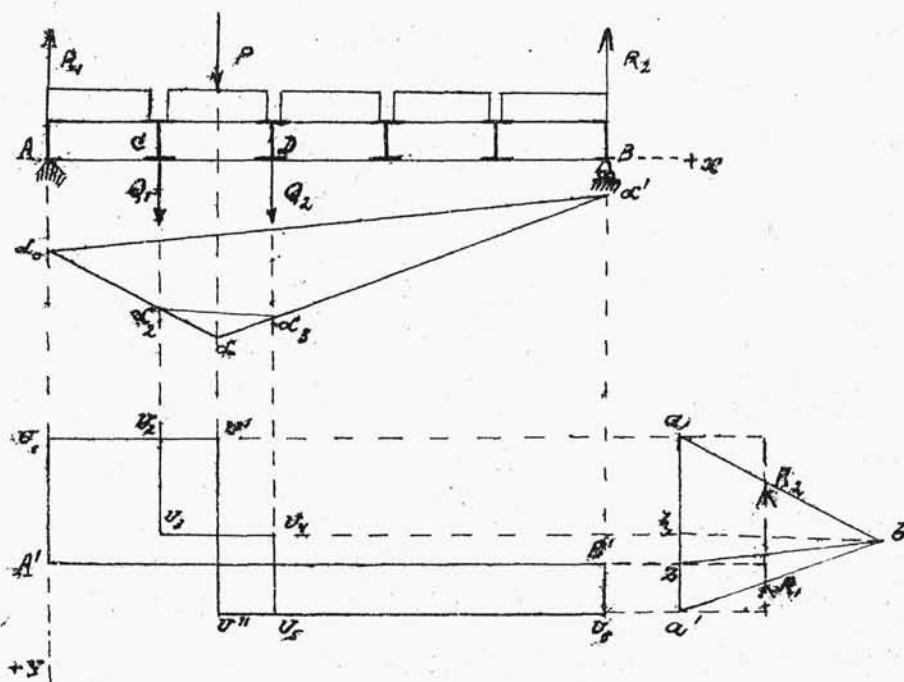
i poprzecznych nazywa się jezdnią. Ponieważ mostownice są to belki rozmiaru ok. 25 cm. i położone są jedna od drugiej z przeswitem ok 20 cm., układ więc mostownic tworzy prawie zwarte środowisko. Wobec tego przy obliczeniach mostów inżynierowie nie uwzględniają właściwego rozkładu ciśnienia koła przez szyny i mostownice na podłużnice, lecz dla prostoty zakładają, że ciężar koła przenosi się jak w ciele sztywnym wzdłuż linii działania aż do podłużnicy. Innymi słowy uważają, że ciśnienia kół stanowią dla balek podłużnych obciążenie bezpośrednie.

Podłużnice zwykle są zmcowane z poprzecznkami nitami, dla prostoty jednak przy obliczeniach mostów zwykle przyjmuje się, że podłużnice składają się z oddzielnych samodzielnych belek zwykłych w każdym przęśle między sąsiednimi poprzecznkami t.j. przyjmuje się, że belki b, c, d, \dots są oddzielne i każda z nich końcami opiera się na sąsiednie belki poprzeczne. Ciężar P , działający na podłużnicę, wywołuje w punktach podparcia reakcje Q'_1, Q'_2 i jednocześnie wywiera w punktach podparcia t.j. na poprzecznicę parcia Q_1 i Q_2 , odwrotne do reakcyj Q'_1 i Q'_2 .

Każda z tych sił Q działa na poprzecznice i ze swojej strony u podstawy poprzecznic powstaje reakcja i odpowiednie parcie na dźwigar główny, które jest równe sile Q i jest skierowane na dół.

W ten sposób przy obciążeniu pośrednim pewnej belki zasadniczej za pośrednictwem podłużnic i poprzecznic, każdy ciężar P , działający na podłużnicę przenosi się na belkę zasadniczą w postaci 2 sił Q_1 i Q_2 , zaczepionych w miejscach podparcia sąsiednich belek poprzecznych.

§ 122. Rozpatrzmy belkę zasadniczą AB o obciążeniu pośredniem siłą P i wykażemy ki wpływ ma takie obciążenie na rozkład momentów



Rys. 154

gnących i sił tnących w belce zasadniczej

Gdyby siła P była zaczepiona bezpośrednio do belki AB , to wykres momentów miałby, jak widać z rysunku, postać $\mathcal{L}_0 \mathcal{L} \mathcal{L}'$, a wykres sił tnących - postać $u, u' u'' u_6$.

Ponieważ siła P działa nie bezpośrednio, a za pośrednictwem poprzecznic C i D , nale-

ży siłę P rozłożyć na 2 siły Q_1 i Q_2 , działające bezpośrednio na belkę AB i dla tych sił zbudować wykres momentu i siły tnącej. Zarówno rozkład siły P , jak i budowa wykresów da się uskutecznić przy pomocy gotowych wykresów dla siły P , w razie gdyby ta działała bezpośrednio.

Rozkład siły P wykonamy w następujący sposób. Poszukiwane siły Q_1 i Q_2 równają się ciśnieniom, wywieranym przez siłę P na poprzecznice C i D . Te ciśnienia są odwrotne do reakcyj podłużnicy w C i D .

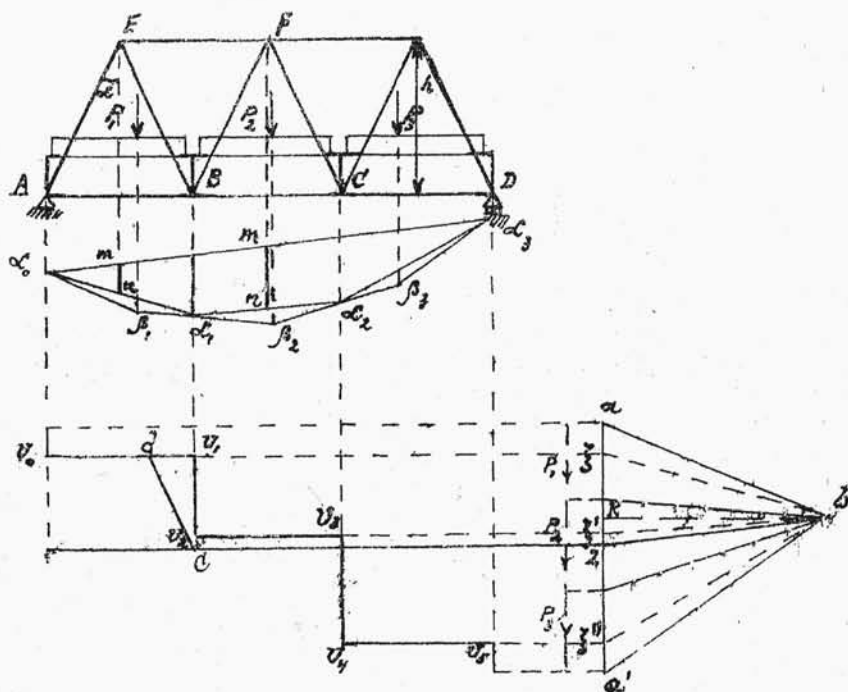
Dla wyznaczenia tych reakcyj skorzystamy z gotowego wieloboku sznurowego siły P . Z punktów C i D prowadzimy pionowe do przecięcia się z bokami $\mathcal{L}_0\mathcal{L}$ i $\mathcal{L}\mathcal{L}'$ odpowiednio w punktach \mathcal{L}_2 i \mathcal{L}_3 . Prosta $\mathcal{L}_2\mathcal{L}_3$ jest zamykającą wieloboku sznurowego sił: P i reakcyj Q_1 i Q_2 . Przeprowadzając z bieguną \mathcal{Z} równoległą doń $\mathcal{Z}\mathcal{Z}$, otrzymamy, że powyższe reakcje równają się odcinkom: $\mathcal{Z}\alpha$ i $\alpha'\mathcal{Z}$. Wobec tego parcia na belkę zasadniczą będą: $Q_1 = \alpha\mathcal{Z}$ i $Q_2 = \mathcal{Z}\alpha'$, t.j. będą one skierowane na dół.

Jeżeli zechcemy teraz zbudować wielobok sznurowy dla sił Q_1 i Q_2 , zachowując punkt początkowy α_0 i biegun δ , to otrzymamy wielobok $\alpha_0 \alpha_2 \alpha_3 \alpha'$. Zamykająca dla całego układu sił pozostaje prosta $\alpha_0 \alpha'$, a zatem wykres momentu jest wielobok $\alpha_0 \alpha_2 \alpha_3 \alpha'$ przy linii odniesienia $\alpha_0 \alpha'$.

Wykres sił tnących dla sił R_1, Q_1, Q_2 i R_2 będzie: $U_1 U_2 U_3 U_4 U_5 U_6$. Porównywając wykresy przy obciążeniu bezpośrednim i pośrednim, widzimy, że wykresy te różnią się tylko na odcinku CD /gdzie działa siła P /, w innych punktach belki wykresy są jednakowe. Jest rzeczą jasną, że zawsze przy obciążeniu pośrednim wykres momentów i wykres sił tnących stanowią wieloboki z bokami prostoliniowymi pod każdą podłużnicą. W poszczególnym wypadku, jak widać na rys. 154, pewne boki mogą tworzyć jedną prostą /np. $\alpha_3 \alpha'$, $U_5 U_6$ /. Rzędne wykresu momentów pod belkami poprzecznymi są takie same, jak przy obciążeniu bezpośrednim. Na tej własności opiera się budowa wykresu momentów przy obciążeniu pośrednim. Wykres siły tnącej buduje się w sposób zwykły, znalazłszy

uprzednio siły Q , t j punkty ζ .

§ 123. Rozważania poprzedniego § zastosujemy do przykładu, wskazanego na rys. 155. Jest



Rys. 155

to most kratowy z jezdnią dolną. Urządzenie jezdni jest takie same, jak opisane w § 121.

Niech kratownica będzie obciążona siłami P_1, P_2, P_3 , działającymi na podłużnice. Jest to obciążenie pośrednie kratownicy. Wyznamy wykresy momentów i sił tnących. Budujemy początkowo wielobok sznurowy dla układu sił P_1, P_2

i P_3 , tak, jakgdyby siły te działały wprost na kratownicę, jako układ sztywny. Otrzymamy wielobok $\alpha_0 \beta_1 \beta_2 \beta_3 \alpha_3$. Zamykając jest $\alpha_0 \alpha_3$ i reakcjami: $R_1 = Z\alpha$ i $R_2 = \alpha'Z$ ($\bar{O}Z \parallel \alpha_0 \alpha_3$). Oczywiście są to reakcje rzeczywiste, co wypływa z zasady zesztynienia.

Z punktów B i C prowadzimy pionowe do przecięcia się z bokami $\beta_1 \beta_2$ i $\beta_2 \beta_3$ w punktach α_1 i α_2 . Właściwy wielobok sznurowy dla sił, działających w węzłach kratownicy będzie $\alpha_0 \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$. Wielobok ten będzie wykresem momentu przy linii odniesienia $\alpha_0 \alpha_3$.

Po przeprowadzeniu z bieguna \bar{O} promieni $\bar{O}\xi, \bar{O}\xi', \bar{O}\xi''$, równoległych do odpowiednich boków $\alpha_0 \alpha_1, \alpha_1 \alpha_2$ i $\alpha_2 \alpha_3$, otrzymamy równoważny z danym układem układ sił: $Q_1 = \alpha\xi, Q_2 = \xi\xi', Q_3 = \xi'\xi'', Q_4 = \xi''\alpha'$, działających na węzły A, B, C i D . Mając te siły, t.j. punkty: ξ, ξ', ξ'' , możemy w sposób zwykły zbudować wykres siły tnącej $U_0 U_1 U_2 U_3 U_4 U_5$.

Wykresy momentu gnącego i siły tnącej mogą być w danym wypadku wykorzystane do wyznaczenia wykreślnego natężeń w prętach. Rzeczywiście, zgodnie ze sposobem wskazanym w § 120, natężenie

np. w AB jest proporcjonalne do momentu gnącego w punkcie E , t. j. do mn , mianowicie

$$S = \frac{mn \cdot kb}{h}$$

Zgodnie z § 42 i § 97, stosując sposób rzutów, otrzymamy, że natężenie np. w krzyżulcu EB będzie $S' = - \frac{T}{\cos \alpha}$. Wykreślnie natężenie to będzie się równało długości odcinka cd , przeprowadzonego z c równoległe do EB , gdyż $cu_1 = |T|$ i kąt $d c u_1 = \alpha$.

Wyznaczenie maximum maximorum momentu gnącego: wywartego pod wpływem ciężaru stałego i ruchomego w belce zwykłej.

§124. Obok belek kratowych, używanych w dźwigarach mostów o większych przęsłach, stosuje się dla przęsł mniejszych dźwigary z belek o ścianie całkowitej, zwykle o przecięciu dwuteowym i często stałym na całej długości przęsła. Pod belką zwykłą rozumiemy jak dotąd ciało, spoczywające na dwóch podporach, jednej nieruchomej, drugiej ruchomej, o poziomej linii ślizgania.

Do belek powyższego rodzaju można zaliczyć

dźwigary mostów kolejowych i szosowych o rozpiętościach niewielkich i podłużnice jezdni w mostach kratowych /§ 121/. Obliczenie takich belek polega głównie na wyznaczeniu największego naprężenia normalnego /§§ 99 i 119/, a zatem największego momentu gnącego. W powyższych konstrukcjach należy umieć obliczyć największy moment gnący, wywarty pod wpływem ciężaru własnego i obciążenia ruchomego. Obciążenie ruchome spotykamy zwykle w postaci szeregu ciężarów skupionych o stałej odległości między nimi /pociąg lub szereg wozów z końmi/. Czasami w mostach szosowych dochodzi do tego obciążenie równomierne, wywierane przez tłum ludzi, ustawiany przed lub za szeregiem wozów lub z obu stron.

Zauważmy, że dla belki dźwigającej obciążenie ruchome moment gnący w pewnym przecięciu będzie przybierał rozmaite wartości, zależne od położenia tego obciążenia na belce. Wszelka taka zmiana wpływa na zmianę momentu gnącego w przecięciu, innymi słowy, podczas przechodzenia pociągu wzdłuż belki w omawianym przecięciu moment gnący posiada

WARTOŚĆ ZMIENNA, t.j. moment jest funkcją położenia pociągu. Największą z tych wartości jest $\max M$ w danym przecięciu. W każdym przecięciu $\max M$ może być inne t.j. moment a także $\max M$ jest też funkcją położenia przecięcia. Największa z tych wartości nazywa się maximum maximorum momentu gącego / $\max \max M$ /.

Z powyższego widać, że $\max \max$ momentu zależy od odciętej x nieznanego przecięcia belki i pewnej odciętej y , określającej położenie pociągu, np. odciętej jednej z osi. Oznaczając $\max \max M$ przez Z otrzymamy, że przy danym składzie pociągu będzie:

$$Z = F(x, y).$$

Zadanie nasze polega na wyznaczeniu dwóch zmiennych x i y z warunku $\max Z$, a w następstwie i \max wartości funkcji Z , t.j. $\max \max M$. W celu odszukania $\max Z$, przy porównywaniu różnych wartości Z , spotkamy się z okolicznością, że niektóre z kolejnych ciężarów pociągu mogą zejść z belki, natomiast inne mogą wejść. Wtedy funkcja Z

będzie zależeć od innych niż poprzednio ciężarów pociągu. Stąd widać, że postać funkcji $F(x, y)$ zmienia się w zależności od obecności na belce tych lub innych kolejnych ciężarów pociągu. Z tego powodu sposoby podane w rachunku różniczkowym do odszukania max funkcji kilku zmiennych są tutaj niewystarczające. Odpowiedni sposób wyznaczenia w danym wypadku max Z podał inżynier belgijski Leman. Sposób ten polega na wyobrażeniu funkcji Z , jako powierzchni, której równanie przy osiach $Oxyz$ wyobraża powyższa funkcja i badaniu tych powierzchni /paraboloid hyperbolicznych/. Inż. Leman wykonał to badanie sposobem geometrycznym zapomocą Geometrii wykreślnej^{x/}.

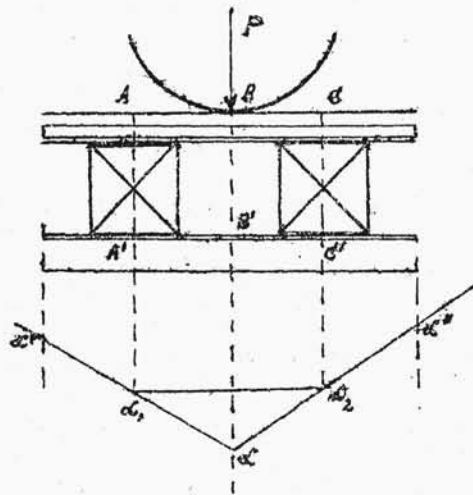
Rozwiązanie to przerobiono później na sposób analityczny^{xx/}. Sposób Lemański nazywają także sposobem paraboloid hyperbolicznych. Z powodu braku czasu nie będziemy zajmować się tą piękną metodą, jednak dość skomplikowaną.

x/ ROUCHE Eléments de Statique graphique,

xx/ NICOLAI Mosty, Petersburg Str. 374/po ros. /

Zauważymy przytem, że złożoność tej metody nie odpowiada jednak tej niewielkiej dokładności, jaką możnaby zadowolnić się ze względu na dokonane przybliżenia przy rozważaniu konstrukcji.

Rozpatrzmy dla przykładu most kolejowy i przeno-



szenie się ciśnienia P koła przez szynę i mostownicę /rys. 156/ na belkę, t.j. na podłużnicę, ew. dźwigar główny.

Rys. 156

Z powodu po-

średnictwa szyny i mostownicy obciążenie belki jest w rzeczywistości pośrednie, a zatem gdy np. jedna z osi stoi w B między A i C , część wieloboku sznurowego czyli wykresu momentów nie będzie $\alpha' \alpha \alpha''$, lecz $\alpha' \alpha_1 \alpha_2 \alpha''$. Tej okoliczności nie uwzględnia przyjęte założenie, że siły przenoszą się na belkę według pionu, t.j. np. z B w B' , jest to słuszne dla punk-

tów w rodzaju A i C . Z drugiej jednak strony wysokość szyny /ok.12 cm./ i prześwit między belkami /ok.20 cm./ są bliskie do siebie, a więc nie można uważać, żeby tu zachodziło zwykłe gięcie szyny, w rzeczywistości zachodzi tutaj odkształcenie więcej skomplikowane i oddziaływanie siły P przez szynę i mostownicę na belkę nie da się w prosty sposób ująć ściśle. Z tego powodu zupełnie ściśle odzyskanie położenia pociągu dla otrzymania $\max \max M$ nie posiada ważnego praktycznego znaczenia, pewne przybliżenie o kilka cm. wydaje się dopuszczalne. Przy takim zapatrywaniu się na rzecz wystarczyłby do wyznaczenia niekorzystnego położenia pociągu sposób przybliżony wykreślny. Taki sposób istnieje, jest to sposób Culmanna, oparty na budowie wieloboku sznurowego. Sposób ten może wystarczyć w niektórych wypadkach. Nie mniej jednak, mając na uwadze wypadki, gdzie chodzi o większą dokładność, podamy także pewien sposób analityczny ściśły, choć znacznie mniej skomplikowa-

ny, niż cytowany powyżej sposób paraboloid hyperbolicznych.

Przybliżony sposób wyznaczenia $\max \max M$ zapomocą wieloboku sznurowego.

§ 125. Wiemy, że możemy wyrazić wykreślnie moment gnący dla wszystkich punktów belki przy stałym obciążeniu zapomocą wykresu momentów, budując dla danego obciążenia wielobok sznurowy. Pionowe odcinki η między zamykającą a wielobokiem sznurowym są proporcjonalne do momentu gnącego ($M = k \cdot \eta$). Przy danym położeniu pociągu (π_i) niech będzie zbudowany wykres momentów W_i i największy odcinek η niech będzie tutaj η_i . Przy drugim położeniu pociągu (π_2) wykres niech będzie W_2 , a największy odcinek $\max. \eta = \eta_2$ i t.d. dla pewnego położenia pociągu (π_i) mamy wykres W_i i $\max. \eta = \eta_i$. Budując kilka lub kilkanaście wykresów W_i dla różnych położzeń pociągu (π_i) na belce, możemy z wybranych każdy raz $\max. \eta = \eta_i$ wybrać $\max. \eta_i$ t.j. $\max \max \eta$, będzie to wielkość proporcjonalna do $\max \max M$ i odpowiednie położenie pociągu (π) i miej-

sce odcinka *max* η_i będzie określało niekorzystne położenie pociągu i to przecięcie, gdzie zachodzi *max* *max* M .

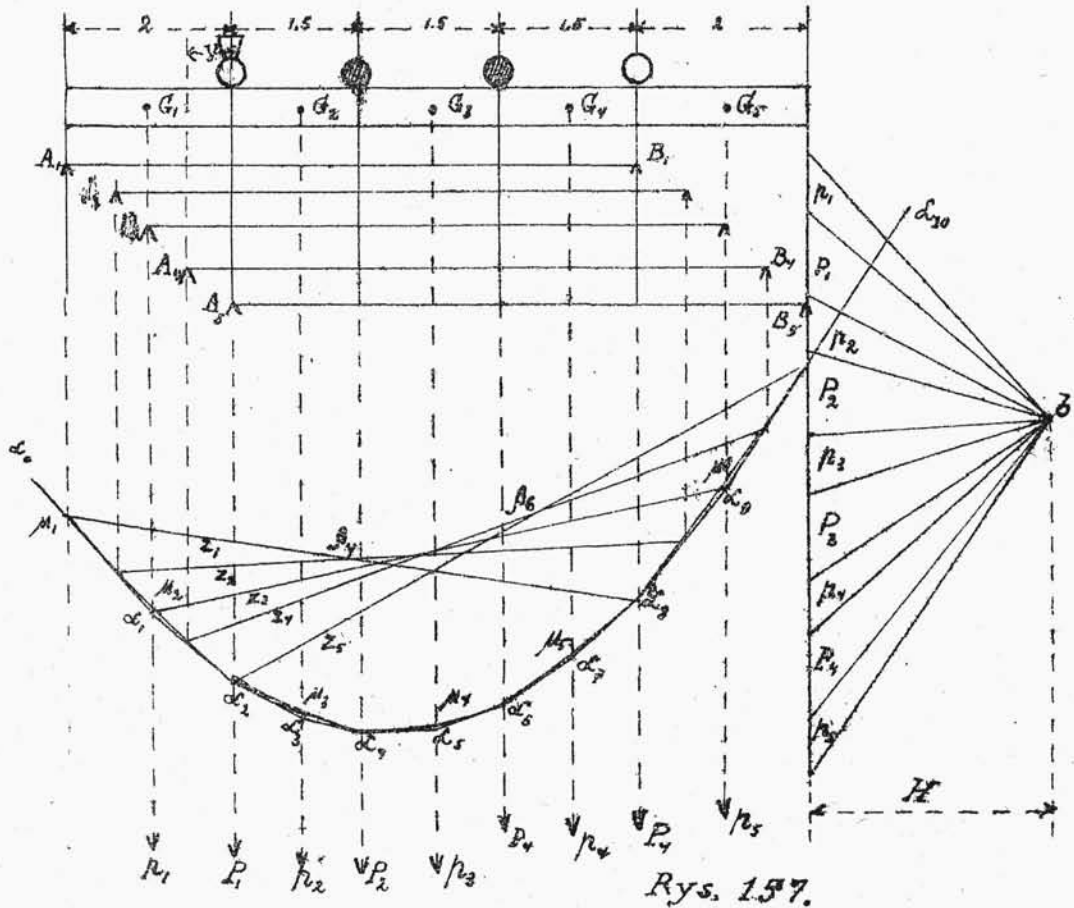
Przypuśćmy, że kolejne wykresy momentów: W_1, W_2, \dots zostały zbudowane w ten sposób, że pociąg zostaje stopniowo nasuwany z prawej strony na lewą tak, że o ile pewne ciężary schodzą z belki z lewej strony, to odpowiednio z prawej strony wchodzi na belkę nowe.

Przy tym sposobie kolejne wieloboki sznurowe: W_1, W_2, \dots mają wspólne części, tak że jeżeli zbudować jeden wielobok sznurowy W dla całego obciążenia, którego używamy do badania, to wieloboki: W_1, W_2, \dots są kolejnymi częściami wieloboku W .

Skąd widać, że zamiast budować wieloboki:

W_1, W_2, \dots przy różnych ustawieniach pociągu, dogodniej zbudować jeden wielobok sznurowy W dla całego obciążenia i przesuwać pod tym obciążeniem belkę, ustawiając ją kolejno co pewien odstęp. Każdy raz przeprowadzimy odpowiednią zamykającą i w ten sposób otrzymamy podobne wykresy: W_1, W_2, \dots .

Na rys.157 jest to uskutecznione dla belki, wystawionej na działanie ciężaru własnego i pociągu. Rozpiętość belki AB wynosi 6,5 m.,



ciężar własny $q = 2 \frac{t}{m}$, obciążenie ruchome parowóz 100 t. Ponieważ na belce nie zmieści się więcej osi pociągu, tylko osie jednego parowozu, tworzymy obciążenie z 4-ech ciężarów

$P_1 = P_2 = P_3 = P_4 = 10 t.$ i obciążenia równomiernego $2 t/m.$ na długości pod parowozem i nieco /po 2 m./ przed i za parowozem. Zastępujemy obciążenie ciągle przez ciężary skupione:

$\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5$ i dla wszystkich sił: $\mu_1, P_1, \mu_2, P_2, \dots$ budujemy wielobok sznurowy $\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_9 \alpha_{10}$ a następnie i krzywą sznurową $\alpha_0 \mu_1 \mu_2 \alpha_2 \mu_3 \alpha_4 \dots \mu_5 \alpha_{10}$. Krzywa ta składa się z odcinków parabol: $\mu_1 \mu_2 \alpha_2,$

$\alpha_2 \mu_3 \alpha_4, \dots$, przecinających się w punktach: $\alpha_2, \alpha_4, \dots$ t.j. pod ciężarami skupionymi. Ustawiamy teraz belkę w kilku kolejnych położeniach $A_1 B_1, A_2 B_2, \dots A_5 B_5$ i każdy raz znajdujemy zamykającą: $Z_1, Z_2, \dots Z_5$. Mamy więc odpowiednio 5 wykresów momentów. Dla porównania odcinków η i wybrania $\max \max \eta$, budujemy obwiednię do prostych zamykających. Teraz widać, że $\max \max \eta$ jest $\beta_4 \alpha_4$ lub $\beta_6 \alpha_6$ gdyż odcinki te są jednakowe ze względu na symetrię ciężarów. Przyjawszy, że $\max \max = \beta_6 \alpha_6$ zauważamy, że w punkcie β_6 do obwiedniej jest styczna zamykająca Z_4 , odpowiadająca położeniu belki $A_4 B_4$, czyli odwrotnie położenie pociągu w odległości y od początku A_4

belki. Jak widać $\max \max \eta$ czyli M zachodzi pod drugim lub trzecim kołem i równa się $\beta_s L_c \cdot H$, gdzie H odległość biegunowa.

Z powyższego widać, że dokładność wyłożonego sposobu jest niezbyt znaczna, gdyż w rozwiązaniu dwa razy przeprowadza się krzywe linje na podstawie oddzielnych punktów, następnie największy odcinek η mierzy się cyrklem. W każdym razie sposób ten jest jednak dość dokładny do określenia pod którym punktem obciążenia zachodzi $\max \max M$. Należy zauważyć, że w wypadku obciążenia, złożonego jedynie z ciężarów skupionych, wykres momentów jest wielobokiem i $\max M$ zachodzi pod jednym z wierzchołków, czyli pod jednym z ciężarów. Jeżeli prócz ciężarów skupionych uwzględnia się jeszcze obciążenie równomierne, np. ciężar własny, to wykres momentów staje się wielobokiem o bokach krzywych - parabolicznych i wogóle mówiąc $\max M$ może zajść w dowolnym punkcie tego wieloboku. Ponieważ jednak ciężar własny jest nieznaczny w stosunku do ciężarów skupionych, to w praktyce krzywizna boków wieloboku sznurowego /właściwie krzywej sznurowej/ zwyk-

le nie gra roli i $\max M$ zachodzi tak, jak w wypadku gdyby obciążenia równomiernego nie było, t.j. pod jedną z osi pociągu.

Ponieważ wyłożony sposób jest wystarczający do oznaczenia tej osi pociągu, ogólnie osi obciążenia ruchomego, pod którą zachodzi $\max \max M$ to obliczenie można byłoby zakończyć dokładnie, gdybyśmy potrafili analitycznie znaleźć dokładne położenie pociągu t.j. dokładne położenie tej osi, pod którą moment jest \max .

Do tego celu posłuży następujące twierdzenie.

TWIERDZENIE O $\max M$ POD DANĄ OSIĄ OBCIĄŻENIA.

§ 126. Niech na belkę AB /rys.158/ prócz ciężaru własnego g t/m. działa obciążenie ruchome, którego część jest pokazana na rysunku, mianowicie ciśnienie R osi w pewnym punkcie

X , odległym o x od punktu A ; na lewo od osi R są osie, których ciśnienia oznaczmy przez P , a stałe ich odległości od osi R przez a ; naprawo są osie, których ciśnienia oznaczmy przez Q , a stałe ich odległości