

jakie znaki mają rzuty tych odcinków odpowiednio na osie ξ i ζ . Przy takim znakowaniu odcinków napisana wyżej proporcja jest słuszną i co do znaku. Z tego powodu moment, jako wielkość algebraiczna, może być określony także z wzoru

$$M = mn \cdot kl.$$

W danym wypadku $mn > 0$, $kl > 0$, a więc i $M > 0$. Zauważmy, że przy obranym położeniu osi ξ i ζ , otrzymujemy znak dla momentu $+$, jeżeli siła względem bieguna momentu idzie z lewej strony na prawą i $-$, w wypadku przeciwnym, t.j. otrzymujemy takie znaki, jakie używaliśmy w Rozdz. I i jak przeważnie przyjęto jest w Mechanice Teoretycznej na kontynencie. W angielskich podręcznikach używają znaków przeważnie odwrotnych.

W praktyce można osi ξ i ζ nie wykreślać, wystarczy je sobie oczywiście wyobrazić.

Wypadek wielu sił.

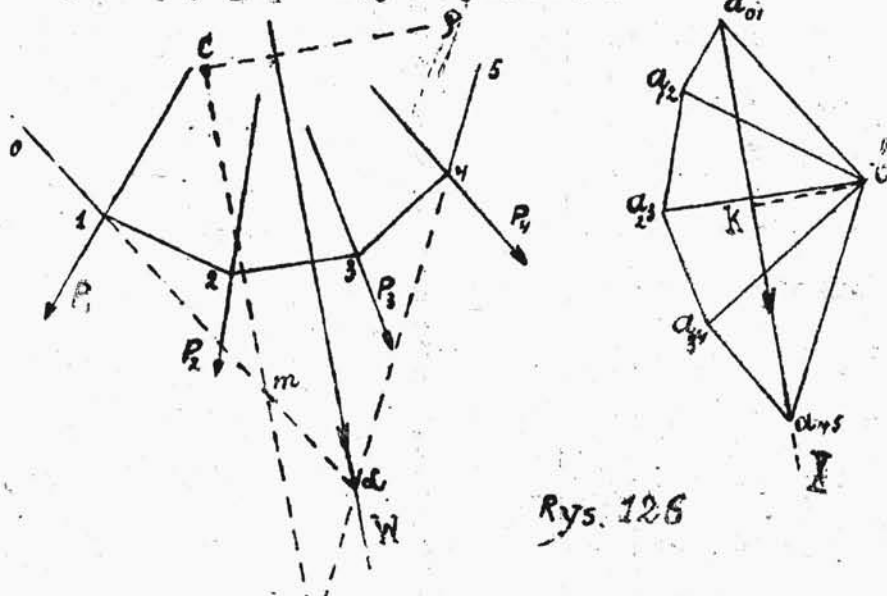
§ 95. Zasadniczo sprowadza się on do poprzedniego. Musimy tu jednak rozpatrzyć osobno 3 rodzaje układów sił:

układy sprowadzające się do wypadkowej,

układy bieżące w równowadze,

3/ układy sprowadzające się do pary sił.

1/ Rozpatrzmy pierwszy /rys.126/.



Układ sił P_1, P_2, P_3 i P_4 jest taki, że sprowadza się do wypadkowej. Jeżeli zbudujemy dla tego układu wielobok sił i wielobok sznurowy, to wiemy, że odcinek a_{45} da nam wartość i kierunek wypadkowej, linia zaś działania tej wypadkowej przejdzie przez punkt przecięcia się ostatniego i pierwszego boku wieloboku sznurowego i będzie równoległa do a_{45} .

Dla takiego to układu chcemy znaleźć moment względem dowolnego punktu C , leżącego w płaszczyźnie działania sił.

Wiemy, że pod momentem takiego układu sił należy

ży rozumieć sumę momentów poszczególnych sił względem jednego i tegoż samego bieguna C .

Z drugiej strony suma momentów poszczególnych sił równa się momentowi wypadkowej W układu.

Wystarczy zatem znaleźć moment tej wypadkowej względem punktu C .

Z rysunku widać, że wektorem wypadkowej w wieloboku sił jest odcinek a_0, a_{45} . Oznaczmy kierunek tego odcinka przez X , odległością biegunową więc w tym wypadku jest prostopadła kb opuszczona z bieguna na prostą X .

Pierwszym i ostatnim bokiem wieloboku sznurowego dla wypadkowej są odpowiednio 01 i 45 . Zatem na mocy reguły, podanej dla momentu jednej siły, moment ten wyrazi się $M = mn \cdot kb$.

Wzór na M ma więc tę samą postać, co dla jednej siły.

2/ Jeżeli układ sił jest w równowadze, to wielobok sił i wielobok sznurowy jest zamknięty. Wtedy punkt $a_{n,n+1}$ zbiega się z punktem a_0 , kierunek prostej X jest nieokreślony, odległość biegunowa kb jest również nieokreślona. Weźmy za prostą X , przechodzącą przez punkty a_0 i $a_{n,n+1}$.

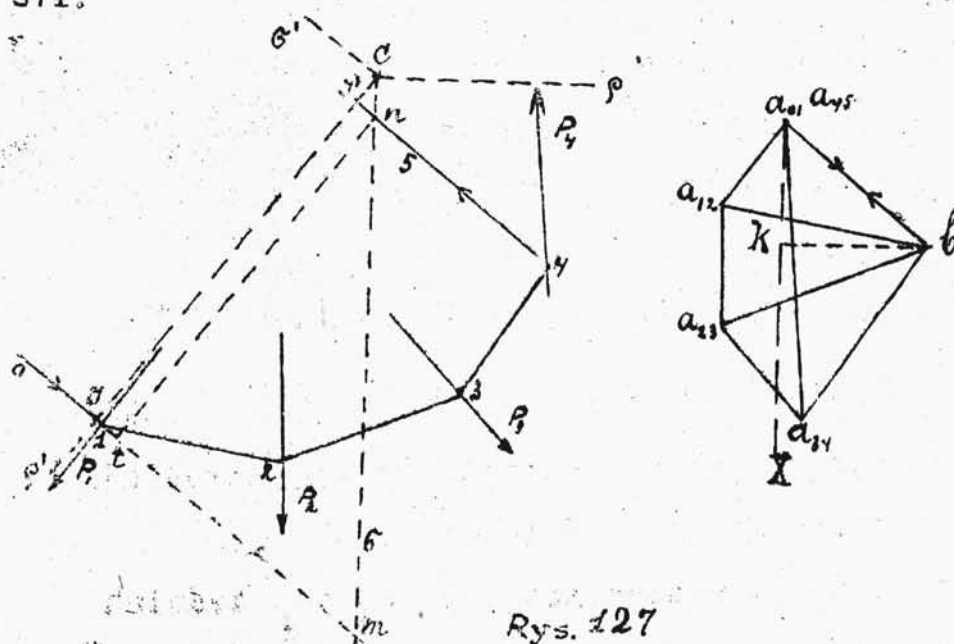
i mającą kierunek dowolny; odległość biegunowa kb zależy od kierunku prostej X zmienia się w granicach od 0 do a_0, b .

Następnie pierwszy i ostatni boki wieloboku sznurowego wpadają na siebie, odcinek mn więc dla jakiejkolwiek prostej równoległej do prostej X , jest równy zero. Wobec czego

$$M = mn \cdot kb = 0 \cdot kb = 0.$$

Wzór na M pozostaje i tutaj ten sam.

3/ Niech wreszcie układ sprowadza się do pary sił.



pary stanowią w wieloboku sił odcinki $a_{0,1}$, b i $b a_{4,5}$; w wieloboku sznurowym są to boki: pierwszy 01 i ostatni 45.

Oczywiście, gdybyśmy obrali inny biegun dla wieloboku sił, to elementy pary zmieniłyby się: innej wielkości i kierunku byłyby odcinki $a_{0,1}$, b i $b a_{4,5}$ i inne byłyby linje działania, choć wartość samej pary by się nie zmieniła.

Dajmy na to, że szukamy momentu danego układu sił, a więc danej pary sił względem dowolnie obra-
nego bieguna C . Dla rzutowania odcinków doty-
żących równoległych sił pary obieramy osie ζ' i η' . Momentem naszej pary sił jest suma momentów jej składowych:

$$M = M_1 + M_2 = a_{0,1} \cdot b \cdot \cos \zeta' + b a_{4,5} \cdot \cos \eta' =$$

$$a_{0,1} \cdot b \cdot \cos \zeta' - a_{0,1} \cdot b \cdot \cos \eta' = a_{0,1} \cdot b \cdot \cos \zeta'.$$

/Znaki odcinków, jak powiedziano wyżej, określają się przez rzuty na osie ζ' i η' /.

Mając wciąż na uwadze analogję do poprzednich wypadków, należałoby teraz przeprowadzić prostą \bar{X} . W danym wypadku jednak wypadkowej niema, punkt $a_{4,5}$ wpada na punkt $a_{0,1}$ i kierunek prostej \bar{X} z tego powodu jest nieokreślony. Przeprowadzamy wobec

tego przez punkt a_0 , dowolną prostą X .

Znów analogicznie do poprzedniego z punktu C poprowadźmy prostą $C6$ równoległą do prostej X i zauważmy punkty przecięcia się tej prostej $C6$ z pierwszym i ostatnim bokiem wieloboku sznurowego - m i n . Oś ramienia odpowiednia do osi będzie 9 .

Z bieguna b opuśćmy prostopadłą kb do prostej X . Z punktu n poprowadźmy równoległą do $C7$. W otrzymanych 2-ch trójkątach $\triangle mnt$ i $\triangle a_0, kb$ boki a_0, b i tm oraz a_0, k i nm są odpowiednio do siebie równoległe, więc kąt $\angle tmn$ i $\angle b a_0, k$ są równe. Ponieważ trójkąty są prostokątne, więc i pozostałe kąty są jednakowe, - trójkąty są podobne.

Uwzględniając, że m, n i a_0, b są ujemne $/mn$ - jako rzut na oś 6 , a_0, b - jako rzut na oś $6'$ /, zmieniamy ich znaki, aby w proporcji były wyrazy tylko dodatnie i otrzymujemy:

$$\frac{nt}{kb} = \frac{(-mn)}{(-a_0, b)} \text{ lub/ponieważ } nt = 77. /$$

$$\frac{77}{kb} = \frac{(-mn)}{(a_0, b)} = \frac{mn}{a_0, b}$$

skąd $M = a_0, b \cdot 77 = mn \cdot kb$

Ponieważ w danym wypadku ramię kb jest dodatnie, odcinek mn ujemny i moment wskutek tego jest ujemny.

Na podstawie rozpatrzonych trzech wypadków możemy wypowiedzieć następujące правило dla wyznaczenia wykreślnie momentu układu sił. Przeprowadzamy z punktu a_0 , prostą X , która jest równoległa do wypadkowej, lub o dowolnym kierunku, jeżeli układ wypadkowej nie ma. Przez biegun momentu C przeprowadzamy prostą σ równoległą do X i odpowiednią oś ρ . Przedłużamy pierwszy i ostatni boki wieloboku sznurowego do spotkania się z prostą σ odpowiednio w punktach m i n i zauważamy odcinek mn . Z bieguna b pomocniczego wieloboku opuszczamy prostopadłą na prostą X do przecięcia się w punkcie k i zauważamy odcinek kb . Moment układu $M = mn \cdot kb$, przytem mn i kb posiadają takie znaki, jakie znaki mają rzuty tych odcinków na osie ρ i σ .

§ 96 Przy określaniu liczebnej wartości momentu spotykamy się z zagadnieniem skali, gdyż musimy mnożyć rzeczywistą długość ramienia przez rzeczywistą ilość jednostek siły, gdy tymczasem na rysun-

ku mamy zazwyczaj wszystkie długości zmniejszone, a wartości sił wyrażamy długością odpowiednich wektorów. Np. mówimy /rys.124/ $M = aa' \cdot CJ$, gdzie aa' oznacza siłę, a CJ - ramię, przyczem rysunek jest tak wykonany, że 1 metr na rysunku odpowiada pewnym δ metrów długości naturalnych i 1 mtr. na rysunku odpowiada pewnym δ ton /lub innym miarom/ siły,

. Przez analogję możemy się w-
zióć, że i odcinki sił są wykonane w skali $\frac{1}{\delta}$.
Oczywista, że wtedy rzeczywiste ramię będzie wynosić $CJ_{mtr.} \times \delta$, a siła $= (aa'_{mtr.} \times \delta)$ ton. i ostatecznie $M = CJ \cdot \delta \times aa' : \delta$ tonnometrów, przytem ramię zostało zmierzone w skali długości, a wektor sił w skali sił.

Jeżeli jednak chodzi o wartość liczbową momentu, to można napisać i tak: $M = CJ \cdot \delta \times aa' \cdot \delta$, czyli że wszystko jedno w jakiej skali który odcinek mierzyć, byle tylko jeden w skali długości, drugi w skali sił.

Z powyższego również jest rzeczą widoczną, że jeżeli mierzymy moment iloczynem odcinków mn i kl , to również nie gra roli, który z tych odcinków w jakiej skali mierzyć, gdyż: $M = CJ \cdot aa' \cdot \delta \cdot \delta = mn \cdot kl \cdot \delta \cdot \delta$.

Momenty gnące i siły tnące.

§ 97. Wyznaczenie natężenia w pręcie DE pasa górnego kratownicy, jak na rys. 128 a /sposobem Ryttera/ wykonywaliśmy za pomocą następującego równania momentów:

$$S_S + \sum_0^x m_c = 0.$$

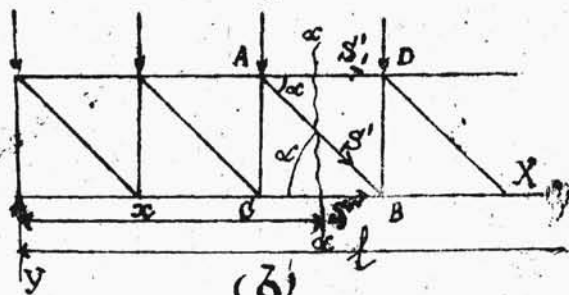
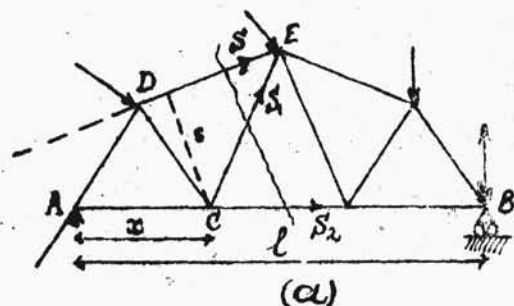
W wypadku, gdy pasy są równoległe /rys. 128 b/ natężenie w krzyżulcu AB kratownicy obliczaliśmy /§ 42/ z równania rzutów na oś Y /rys. 128 b/:

$$S' \cos \alpha + \sum_0^x Y = 0.$$

Z powyższych równań

$$S = -\frac{1}{S} \cdot \sum_0^x m_c$$

$$S' = -\frac{1}{\cos \alpha} \cdot \sum_0^x Y.$$



Rys. 128

Otóż wyrażenie $M = \sum_0^x m_c$ nazywamy momentem gnącym w punkcie C , a wyrażenie $T = \sum_0^x Y$ nazywamy siłą tnącą w przekroju $\alpha-\alpha$. A więc momentem gnącym w jakimś punkcie nazywamy sumę momentów wszystkich sił zewnętrznych /włączając w to i reakcje podpór / zaczę-

pionych na lewo od danego punktu, względem tegoż punktu. Siłę tnącą w pewnym przekroju nazywamy sumę rzutów na oś pionową /oś Y / wszystkich sił zewnętrznych /włączając w to i reakcje podpór/ zaczepionych na lewo od danego przekroju.

Pierwszy z przytoczonych wzorów dla sił osiowych:

$$S_s + \sum_0^x m_c = 0,$$

został wyprowadzony w ten sposób, że stosując metodę odcięć, odrzuciliśmy prawą część wiazara i zastąpiliśmy działanie tej odrzuconej prawej części na lewą siłami S , S_1 i S_2 . Moglibyśmy jednak z jednakową słuszością odrzucić lewą część kratownicy, zastąpić działanie tej odciętej części na prawą - siłami S , S_1 i S_2 /ze zwrotami odwrotnymi do poprzednich sił/ i rozpatrywać równowagę prawej części. Wtedy otrzymalibyśmy:

$$-S_s + \sum_x^l m_c = 0; \quad S_s = \sum_x^l m_c$$

gdy pierwszy wzór daje: $S_s = -\sum_0^x m_c$. Wobec tego:

$$M = \sum_0^x m_c = -\sum_x^l m_c.$$

To znaczy, że za moment gnący w pewnym punkcie można również uważać sumę momentów względem tego punktu wszystkich sił zewnętrznych, zaczepionych na prawo

od danego punktu, wziętą ze znakiem "-".

Rozumując analogicznie znajdziemy:

$$T = \sum_0^x Y = - \sum_x^l Y;$$

to znaczy, że za siłę tnącą w danym przekroju można uważać również sumę rzutów na oś pionową (Y) wszystkich sił zewnętrznych, zaczepionych na prawo od danego przekroju, wziętą ze znakiem "-".

Te podwójne wyrażenia dla momentu gnącego i siły tnącej wynikają i z tego że rozpatrując cały dźwigar, jako ciało swobodne, znajdujące się w równowadze, możemy napisać dlań równania statyki:

$$\sum M_c = 0; \quad \sum Y = 0;$$

$$\sum M_c = \sum_0^x m_c + \sum_x^l m_c = 0;$$

$$\sum Y = \sum_0^x Y + \sum_x^l Y = 0;$$

a stąd:

$$\sum_0^x m_c = - \sum_x^l m_c$$

$$\sum_0^x Y = - \sum_x^l Y.$$

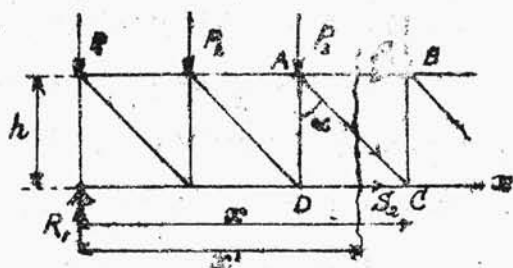
§ 98. Nazwy momentu gnącego i siły tnącej znajdują swoje uzasadnienie przy rozważaniu dźwigarów złożonych z prętów nie absolutnie sztywnych, lecz sprężystych, t.j. takich, z jakimi w rzeczywistości mamy

do czynienia. Rozpatrzmy belkę kratową z pasami równoległymi. Siły S_1 i S_2 określa się jak

wyżej, mianowicie

$$S_1 = - \frac{\sum m_i}{h}$$

$$S_2 = + \frac{\sum m_i}{h}$$



Rys. 129

Ponieważ

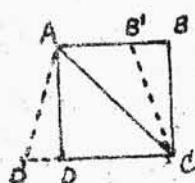
$$\sum m_i > 0,$$

wiec pręt AB

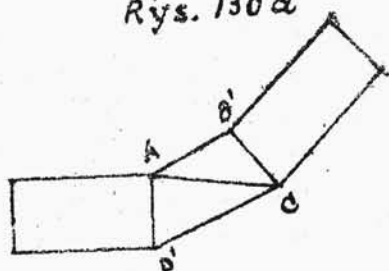
jest ściskany, pręt DC - rozciągany. Pręt DG wydłuży się, pręt AB skróci się. Z wytrzymałości materiałów wiadomo, że zmiana długości prętów z materiałów używanych w budowlach jest

bardzo mała. Przyjmując pozostałe pręty za absolutnie sztywne, otrzymamy, że część kratownicy

ABCD przyjmie w przybliżeniu postać AB'CD', jak rys. 130 a. Cała kratownica uważana za swobodną także zmieni postać. Narysujemy odkształconą postać, przyjmując, że lewa część pozostaje na miejscu, otrzymamy rys. 130 b.

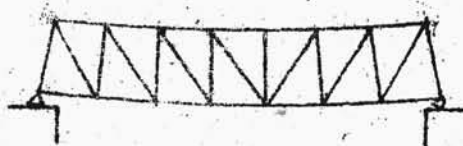


Rys. 130a



Rys. 130b.

kratownica odkształci się, jak w przybliżeniu pokazuje rys.131, czyli wygnie się.



Rys. 131

$\sum m$, sumę tę nazwano momentem gnącym.

§ 99. Rozpatrzmy teraz odkształcenie kratownicy z pasami równoległymi, wywołane zmianą długości krzyżulca AB /rys.128 b/. Obliczyliśmy, że natężenie w krzyżulcu jest

$$S' = -\frac{1}{\cos \alpha} \sum Y = -\frac{1}{\cos \alpha} T.$$

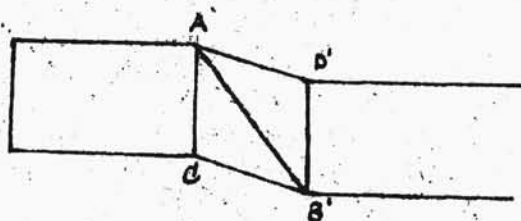
Przypuśćmy, że $S' > 0$ t.j. pręt AB jest

Ponieważ wszystkie pręty pasa górnego w danym wypadku skrócą się, a pręty pasa dolnego wydłużą się, przytem jeden z punktów podporowych pozostanie na miejscu, drugi poruszy się wzdłuż linii ślizgania, ostatecznie cała

To gięcie jest więc skutkiem działania sił S , a że siły te są proporcjonalne do

rozciągany. Załóżmy, że wszystkie pręty kratownicy, prócz rozpatrywanego krzyżulca, są absolutnie sztywne, a sam krzyżulec sprężysty. Pod wpływem siły S' krzyżulec wydłuży się. Prostokąt $ABCD$ zmieni się w równoległobok $AD'B'C$; Przyjmując, że kratownica jest swobodna i lewa część pozostanie na miejscu, otrzymamy, że kratownica odkształci się, jak pokazuje rys.

132. Znajdzie tu przesunięcie się prawej części



Rys. 132

kratownicy

względem lewej,

które nosi naz-

wę ślizgania

lub ścinania.

Odkształcenie

to spowodowane jest działaniem siły S' proporcjonalnej do $T = \sum \mathbf{Y}$, i z tego powodu suma ta nazywa się siłą tnącą.

Dla kratownicy moment gnący M i siła tnąca T mają znaczenie fizyczne dla przekrojów nieskończenie bliskich do węzłów pasa. Wielkości więc M i T są to liczby w odosobnionych punktach ^{t.j. w węzłach} Wyobraźmy sobie kratownicę, w której krata staje się coraz gęstsza, punkty odosobnione dla których M i T mają powyż-

sze znaczenie, będą wtedy coraz bliższe do siebie. Wyobraźmy sobie, że mamy do czynienia z belką z materiału ciągłego. Wtedy dla każdego przekroju belki można zgodnie z powyższymi określeniami napisać wyrażenie dla M i T i obliczyć ich wartości. Wielkości M i T , otrzymane w ten sposób dla każdego przekroju między podporami mają zawsze znaczenie fizyczne momentu gnącego i siły tnącej w znaczeniu wyjaśnionem poprzednio.

Rzeczywiście, z Wytrzymałości Materiałów wiadomo, że przy gięciu płaskim belki, gdy siły znajdują się w jednej z płaszczyzn bezwładności, dla naprężenia σ normalnego do przekroju, wykreślonego prostopadle do osi i dla naprężenia τ stycznego do tej płaszczyzny w punkcie x, y , mamy następujące wzory:

$$\sigma = \frac{My}{J}, \quad \tau = \frac{T S}{b J} \quad x/$$

Naprężenie σ /proporcjonalne do M / po-

$x/$ Oś współrzędnych A_x jest jednocześnie osią belki, oś A_y prostopad. do A_x , J - moment bezwładności względem A_x prostopadł

woduje wydłużenie, względnie skrócenie włókien; naprężenia τ /proporcjonal. do T / powodują przesunięcie jednego przekroju względem drugiego, czyli ślizganie. Widzimy więc, że przy gięciu belki kratowej i belki z materiału ciągłego zachodzą zasadniczo zjawiska podobne i w obu wypadkach wielkości M i T mają jednakowe znaczenie fizyczne.

Z powyższego widać, że wielkości M i T dla belki z materiału ciągłego mają znaczenie dla każdego przekroju belki. Położenie przekroju wyznacza się przez odległości x od lewej podpory A , czyli odciętej w układzie A_{xy} . Możemy więc wielkości M i T rozpatrywać, jako funkcje zmiennej x , t.j.

$$M = f_1(x), \quad T = f_2(x),$$

gdy x zmienia się na sposób ciągły od $x=0$ do $x=l$.

Wielkości M i T w wypadku kratownicy mają znaczenie tylko w punktach odosobnionych;

do A_{xy} ; b szerokość belki w danym punkcie i

S moment statyczny części przekroju od danego punktu do bliższego brzegu.

w tym więc wypadku wielkości M i T nie są funkcjami x . Jeżeli jednak wyobrazić sobie belkę z materiału ciągłego obciążoną tak, jak dana kratownica, to dla takiej belki można wyznaczyć M i T , jako funkcje x . Wartości M i T w punktach odosobnionych /węzłach/ kratownicy będą poszczególnymi wartościami tych funkcji dla $x = x_i$, gdzie x_i jest odcięta węzła.

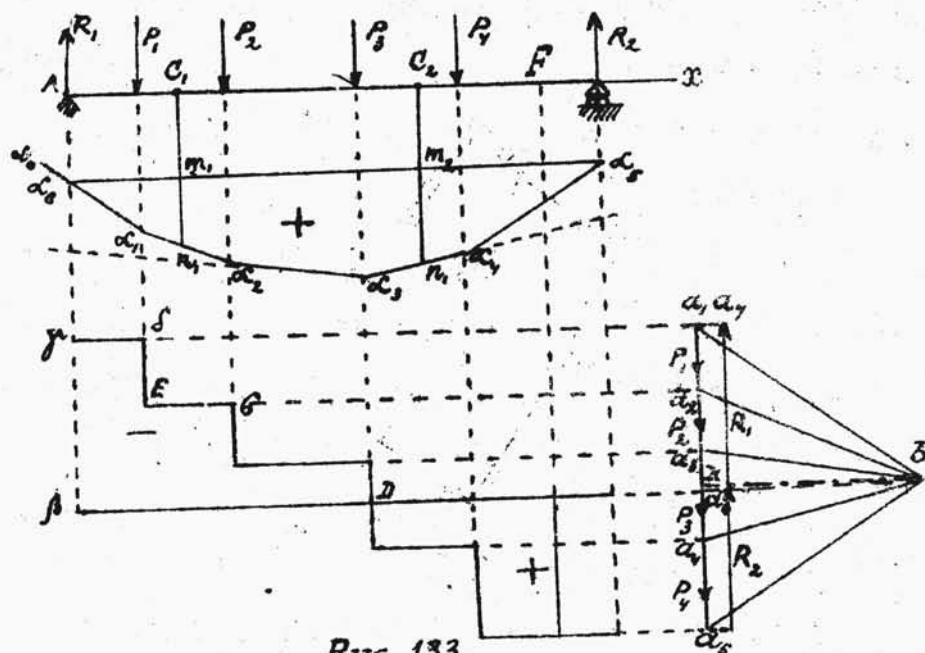
Z tego powodu dalej zajmiemy się badaniem wielkości M i T jako funkcji x , co będzie miało znaczenie zarówno dla belek z materiału ciągłego, jak i dla kratownic.

WYKRESY MOMENTÓW GNĄCYCH I SIŁ TNĄCYCH.

§ 100. Rozpatrując moment gnący i siłę tnącą jako funkcje odciętej x , ogólnie $y = f(x)$, przystąpimy teraz do zbudowania krzywych lub wieloboków wyrażających te funkcje. Te krzywe lub wieloboki będziemy nazywali wykresami momentów gnących lub sił tnących. Wykresy te będą wyrażać prawo zmienności rozważanej funkcji dla poszczególnych punktów belki.

Wykażemy, jak się przedstawiają wykresy mo-

mentów gnących i sił tnących dla belki AB
/rys.133/, obciążonej pionowymi siłami skupio-
nemi $P_1, P_2, P_3 \dots$



Rys.133

Określmy moment gnący w dowolnym punkcie belki np. w punkcie C_1 . Moment ten jest równy sumie momentów sił, leżących na lewo od punktu C_1 , a więc sił R_1 i P_1 .

Upřednio budujemy dla danego układu sił wielobok sił $a, a_2 \dots a_5$ i wielobok sznurowy $d_0, d_1, d_2, d_3, d_4, d_5$ wyznaczamy reakcje R_1 i R_2 ($ba_5 \parallel d_5 d_6$, $R_1 = a_1 a_6$, $R_2 = a_2 a_5$) uzupełniamy wielobok sznurowy zamykając $d_5 d_6$.
Dla dwóch sił R_1 i P_1 wielobokiem sznurowym jest część d_1, d_2, d_3, d_4 całego wieloboku

snurowego, wielobokiem sił - część $\alpha_6, \alpha_7, \alpha_8$ całego wieloboku sił. Widzimy z tego ostatniego, że siły R_1 i P_1 sprowadzają się do wypadkowej, równej odcinkowi $\alpha_2 \alpha_7$. Dla wyznaczenia momentu układu R_1 i P_1 , sprowadzającego się tutaj do wypadkowej, wiemy, /§ 95/, że z punktu C_1 należy przeprowadzić równoległą $C_1 n_1$ do tej wypadkowej i zauważyć punkty m_1 i n_1 przecięcia się tej prostej z pierwszym i ostatnim bokiem wieloboku sznurowego.

Pierwszy bok naszego cząstkowego wieloboku sznurowego jest bok $\alpha_5 \alpha_6$, ostatni - $\alpha_1 \alpha_2$. Odległością biegunową jest odcinek $k\bar{b}$. Na mocy §§ 94 i 95 moment M_{C_1} co do wielkości i znaku jest to iloczyn $M_{C_1} = m_1 n_1 \cdot k\bar{b}$, przytem $k\bar{b}$ jest rzutem odcinka $\bar{k}\bar{b}$ /zwrot od k do \bar{b} / na oś ramion A_x , $m_1 n_1$ jest rzutem odcinka $\overline{m_1 n_1}$ /zwrot od m_1 do n_1 / na oś sił A_y . Oczywiście znak momentu jest tutaj widoczny bezpośrednio, gdyż wypadkowa sił R_1 i P_1 leży na przecięciu się promieni $\alpha_5 \alpha_6$ i $\alpha_1 \alpha_2$ i ma zwrot do góry, M_{C_1} więc jest dodatni. Podobnie dla innego dowolnego punktu np. C_2 $M_{C_2} = m_2 n_2 \cdot k\bar{b}$.

W ten sposób oczywiście, że moment znany w dowolnym punkcie belki $M = m n \cdot k\bar{b}$ gdzie m i

jest odpowiedni pionowy odcinek wykresu momentów.

Ponieważ mnożnik $k b$ jest stały, zmienność więc odcinka $m n$ charakteryzuje zmienność momentu gnącego. Wielobok sznurowy zamknięty dla sił zewnętrznych P i R jest więc wykresem momentów gnących. Zauważmy, że w naszym wypadku wszystkie odcinki $m n$ są dodatnie, $k b$ - również i M we wszystkich punktach belki jest dodatni /na wykresie oznaczyliśmy to znakiem „+” /.

Z wykresu widać, że największy moment może być tylko pod jednym z wierzchołków wieloboku sznurowego, czyli pod jedną z sił. W wierzchołku tym (\mathcal{L}_3) przecinające się boki przecinają linię zamykającą $\mathcal{L}_5, \mathcal{L}_6$ jeden z lewej strony, drugi - z prawej.

§ 101. Przechodząc do wykresu sił tnących przypomnimy /§ 97/, że siłą tnącą dla danego przekroju belki nazywamy sumę rzutów na oś A , wszystkich sił zewnętrznych, działających na część belki na lewo od rozważanego przekroju.

Dla punktu belki, nieskończenie bliskiego od podpory A mamy, że na lewo działa tylko

reakcja R_1 . Siła tnąca T będzie rzutem R_1 na oś A_y czyli będzie $(-R_1)$. Przyjmując w wykresie dla T za kierunek dodatni kierunek osi A_y , odłożymy wartość $(-R_1)$ w pewnej skali od jakiejkolwiek prostej, np. od βa_6 do góry. Na naszym rysunku 133 prosta początkowa $\alpha_6\beta$ nie jest jakakolwiek, a równoległa do belki i przeprowadzona przez punkt α_6 wieloboku sił, gdzie się kończy reakcja R_2 , a zaczyna R_1 . Skala dla sił tnących wzięta taka sama, jak dla wieloboku sił. Odkładanie sił tnących wtedy uskutecznia się przez przeprowadzanie równoległych od punktów $\alpha_1, \alpha_2, \dots$.

W ten sposób odcinek $\beta\gamma$ przedstawia siłę tnącą w punkcie A . Posuwając się dalej wzdłuż belki aż do siły P_1 , widzimy, że na lewo wciąż pozostaje tylko reakcja R_1 , t.j. siła tnąca nie zmienia się. Na wykresie uwidoczniono to, przeprowadzając prostą $\gamma\delta$ równoległą do βa_6 .

Dla punktu belki nieskończenie bliskiego od punktu zaczepienia siły P_1 i wziętego z prawej strony, mamy na lewo od tego punktu dwie siły. Rzut tych sił na oś A_y wyraża się

odcinkiem $a_6 a_2$ /od a_6 do a_2 / także ujemnym. Rzut ten wyraża siłę tnącą w omawianym punkcie; odkładamy ją na wykresie w postaci odcinka $\int E$ /przez poprowadzenie równoległej do βa_6 z punktu a_2 /.

Widzimy, że w punkcie zaczepienia siły P_1 wykres wykazuje przerwę ciągłości funkcji T na wielkość P_1 .

W powyższy sposób można wykonać wykres T do końca belki.

Zauważmy, że do punktu D siły tnące są ujemne, odkładamy je więc do góry. Od punktu D odkładamy je na dół, gdyż są dodatnie. Na rysunku oznaczono to znakiem „+” i „-”. Np. dla punktu F siłami, działającymi na lewo od tego punktu, są siły R_1, P_1, P_2, P_3 i P_4 ; rzut ich sumy geometrycznej na oś A_y znajdziemy z wieloboku sił, jako odcinek $a_6 a_5$, skierowany na dół; rzut jest dodatni, a więc i siła tnąca dodatnia.

Zauważmy, że koniec a_6 promienia βa_6 równoległ. do linii zamykającej $\alpha_5 \alpha_6$, określa punkt D , w którym siła tnąca z wielkości ujemnej $(-a_3 a_6)$ przechodzi odrazu w wielkość dodatnią $(+a_6 a_4)$, czyli w tym punkcie siła

tnąca zmienia znak. Zwróćmy uwagę, że w tym punkcie moment M osiąga wartość największą, gdyż a_0 musi się znajdować między punktami a_3 i a_4 , ponieważ $a_3 b \parallel \alpha_3 \alpha_4$ i $a_4 b \parallel \alpha_4 \alpha_3$. Wnioskujemy stąd, że tutaj moment gnący osiąga wartość największą tam, gdzie siła tnąca zmienia znak.

5102. Rozpatrzmy belkę AB /rys. 133/ i oznaczmy odcięte punktów zaczepienia sił P_1, P_2, \dots przez a_1, a_2, \dots .

Moment gnący w dowolnym punkcie C_2 w odległości x od podpory A wyrazi się:

$$M = R_1 x - P_1(x-a_1) - P_2(x-a_2) - P_3(x-a_3).$$

Siła tnąca zaś w tym samym punkcie jest

$$T = -R_1 + P_1 + P_2 + P_3.$$

Weźmy pochodną od wyrażenia momentu M względem x

$$\frac{dM}{dx} = R_1 - P_1 - P_2 - P_3.$$

Z porównania tej pochodnej z wyrażeniem siły tnącej T wynika, że

$$T = -\frac{dM}{dx}.$$

Siła tnąca w pewnym punkcie belki jest więc równa pochodnej od momentu gnącego w tymże punk-

cie względem x , wziętej z odwrotnym znakiem. Z wyvodu widać, że znak $/-$ zależy od przyjętego położenia osi współrzędnych.

Na podstawie teorii max i min, najwyższa wartość M będzie tam, gdzie $\frac{dM}{dx} = 0$, czyli $T = 0$. W naszym przykładzie jednak /rys.133/ w punkcie D siła tnąca nie jest zerem, lecz zmienia znak raptownie z $-$ na $+$, w tym punkcie mamy przerwę ciągłości funkcji $T = f_1(x)$. Stosując jednak metodę użytą w teorii max i min. t.j. rozpatrując M łatwo okazać, że i w takim wypadku funkcja M osiąga max.

§ 103. Wiadomo, że dla otrzymania liczbowej wartości momentu, wyrażonego jako iloczyn z wartości 2-ch odcinków mn i kb , trzeba jeden z tych odcinków odmierzyć w skali długości, a drugi w skali sił. Wtedy $M = mn \cdot kb \cdot \delta$. Wielkości b i δ mają znaczenia takie, jak przyjęto w § 96.

Otóż można zbudować specjalną skalę dla momentów gnących, tak, że odcinek mn , zmierzony w tej skali, odrazu może dawać wartość momentu w kgrmtr!-ach, czy w tonmtr!ach. Skala ta może być z góry przyjęta, np. 1 metrowi skali me

odpowiadać μ tonnometrów; przez analogję ze skalą długości możemy taką skalę momentów nazywać $\frac{1}{\mu}$.

Mamy wtedy:

$$mn \cdot kb \cdot \delta = mn \cdot \mu$$

czyli $kb = \frac{\mu}{\delta}$ mtr., to znaczy, że wtedy odległość biegunowa kb nie jest dowolną, a uzależnioną od μ , δ i δ . Jeżeli wielkości δ i δ już zostały ustalone, obieramy μ ; odległość biegunową określamy z wzoru

$kb = \frac{\mu}{\delta}$ mtr. Przy tak obranej odległości biegunowej odcinki mn z wykresu wieloboku sznurowego dają odrazu moment w skali $1:\mu$ w znaczeniu powyższem.

OBCIĄŻENIE CIĄGŁE PIONOWE.

§ 104. W najogólniejszym wypadku możemy mieć obciążenie ciągłe niejednostajne, a zmieniające się według pewnego prawa wraz ze zmianą odległości x od podpory A /rys.134/, czyli $p = f(x)$. Wiemy już, że dla takiego obciążenia, wielobok sznurowy przejdzie w krzywą sznurową $\alpha, n\alpha_2$.

Figura zamknięta $\alpha, n\alpha_2, m\alpha_1$ przedstawia więc wykres momentów.