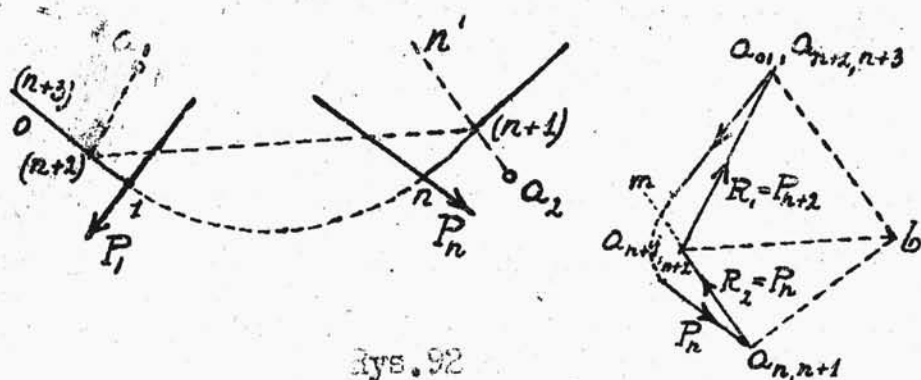


Zrównoważenie danego układu płaskiego sił przez siły o pewnych danych cechach.

§ 68. Przy wyznaczaniu reakcyj podpór lub połączeń ciała nieswobodnego lub układu ciał spotykamy się z kwestją zrównoważenia układu sił, przyłożonych do ciała sztywnego przez nieznane siły - reakcje, co do których pewne cechy są często znane /§ § 11,16/ Zadanie to jest równoznaczne z zadaniem o rozkładzie danego układu sił na siły o pewnych znanych cechach; różnica polega tylko na tem, że zwroty nieznanymi sił będą przeciwnie do zwrotów tych sił w pierwszym zadaniu.

Sformułowane zadanie rozwiązywaliśmy analitycznie na podstawie dwóch warunków równowagi, które dla układów płaskich sprowadzały się do trzech równań równowagi: $\sum X=0, \sum Y=0, \sum M=0$ Rozwiązywanie tych zadań drogą wykreślną musi być więc ogólnie oparte na warunkach wykreślnych równowagi, które, jak wiemy /§ 59/ polegają na tem, że: 1/wielobok wszystkich sił, przyłożonych do ciała sztywnego swobodnego, znajdującego się w równowadze, powinien być zamknięty, 2/dowolny wielobok sznurów tych sił powinien być zamknięty. Rozwiążemy nasamprzód zadania na wyznaczenie reakcyj podpór ciał i belek, podpartych w dwóch punktach, które to zadania w § §.18,19,20 były rozwiązane drogą analityczną. Za-

dania te sprowadzają się do zrównoważenia danego układu sił, przyłożonych do ciała sztywnego, przez dwie siły, z których jedna ma dany punkt zaczepienia a_1 /środek podpory przegubowej nieruchomej/, - druga ma dany punkt zaczepienia a_2 i kierunek $a_2 n'$ t.j. ma daną linię działania /linia normalna do linii ślizgania podpory ruchomej/ /rys.92/ ^{/x/} Przypuśćmy, że dany u-



Rys.92

kład sił, przyłożonych do ciała sztywnego, składa się z sił P_1, P_2, \dots, P_n . Oznaczmy szukaną siłę przechodzącą przez punkt a_2 i mającą za kierunek prostą $a_2 n'$

^{/x/} Aby nie komplikować rysunku nie rysujemy samego ciała sztywnego i podpór. Wszystkie te drugorzędne dla danego zadania części rysunku łatwo sobie wyobrazić na podstawie rysunków umieszczonych poprzednio np. rys.19, 21 i t.d. Podobnie będziemy postępować dalej. Nie rysujemy także wszystkich sił, lecz tylko pierwszą i ostatnią, tak samo nie rysujemy całego wieloboku sznurowego, lecz tylko część.

t.j. reakcję R_2 przez P_{n+1} , szukana siłę, przechodzącą przez punkt a_1 , t.j. reakcję R_1 przez P_{n+2} .

Możemy zawsze zbudować wielobok $a_0, a_{1/2}, \dots, P_{n,n+1}$ danych sił i wielobok sznurowy dla tych sił: $01 \dots n(n+1)$. Wieloboki te stanowią część właściwych całkowitych wieloboków dla wszystkich sił P_1, P_2, \dots, P_{n+2} t.j. wieloboków: $a_0, a_{1/2}, \dots, a_{n+2,n+3}$, $01, \dots, (n+2)(n+3)$. Ponieważ układ wszystkich sił P_1, \dots, P_{n+2} , przyłożonych do ciała sztywnego, jest w równowadze, więc powyższe dwa wieloboki są zamknięte t.j. punkt $a_{n+2,n+3}$ wpada na punkt a_0 , bok $(n+2)(n+3)$ wpada na bok 01 . Wszystkie te pojęcia można wyrazić za pomocą następującej tablicy, w której położenie liter przypomina odpowiednie położenie różnych elementów w wieloboku sił i wieloboku sznurowym.

$P_1 \dots P_n$				P_{n+1}	P_{n+2}
a_0	$a_{1/2}$	\dots	$a_{n,n+1}$	$a_{n+1,n+2}$	$a_{n+2,n+3}$ (czyli a_0)
01	12	\dots	$n(n+1)$	$(n+1)(n+2)$	$(n+2)(n+3)$ (czyli 01)

W wieloboku sił znany wierzchołek $a_0, \dots, a_{n,n+1}$,

prócz tego znany, że $a_{n+2,n+3}$ wpada na a_0 ; nie znamy tylko wierzchołka $a_{n+1,n+2}$, lecz wiemy, że prosta

$2_{n,n+1} // a_2 n$ i dowolnym wieloboku sznurowemu znany wierzchołki:

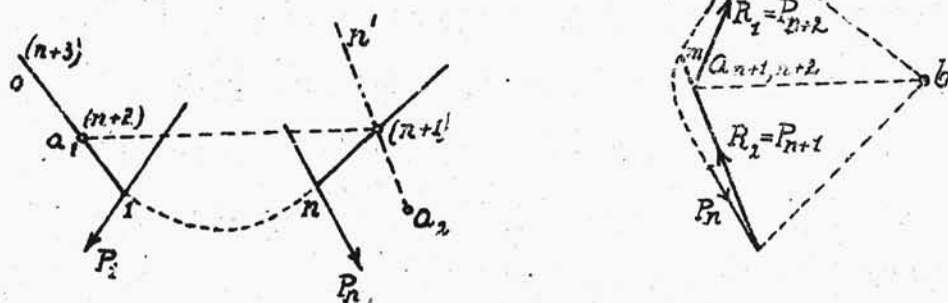
$1, 2, \dots, n$, oraz $(n+1)$ punkt przecięcia boku $n(n+1)$

kierunkiem P_{n+1} , nie znany wierzchołek $(n+2)$. Po-

niważ $a_{n+1,n+2} a_0$ ma być równoległa do $(n+2)n$, ni

znanego kierunku siły T_{n+2} ; więc znalezienie dwóch punktów $a_{n+1, n+2}$ i $(n+2)$ sprowadza się do rozwiązania pewnego zadania geometrycznego, które łatwo już sformułować na podstawie powyższych danych. Możemy jednak zupełnie uniknąć rozwiązania tego zadania geometrycznego, jeżeli wielobok sznurowy $01 \dots (n+1)$ przeprowadzimy nie dowolnie, lecz tak, aby bok 01 przechodził przez punkt a_1 , t.j. przez punkt zaczepienia siły P_{n+2} .

/rys. 93/

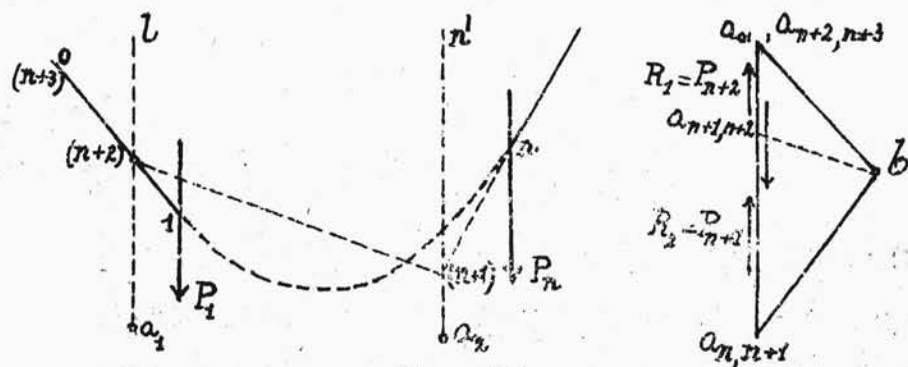


Rys. 93.

Ponieważ 01 nie wpadać na $(n+2)/(n+3)$, więc przez to otrzymujemy, że punkt a_n jest jednocześnie wierzchołkiem $(n+2)$ wieloboku sznurowego. Znając teraz bok $(n+1)/(n+2)$, przeprowadzony z bieguna b prostą $ba_{n+1, n+2}$ //

$11(n+1)(n+2)$; która w przecięciu z $a_{n,n+1}$ wyznaczy wierzchołek $a_{n+1,n+2}$, a przez to i odcinki się $R_2 = P_{n+1} = a_{n,n+1} a_{n+1,n+2}$ i $R_1 = P_{n+2} = a_{n+1,n+2} a_{0,1}$..

§ 69. Podobnie rozwiązuje się zadanie w wypadku gdy siły P_1, \dots, P_n są równoległe np. w wypadku sił ciężkości i gdy kierunek $a_2 n'$ jest równoległy do kierunku danych sił . Do takiego zadania sprowadza się wyznaczenie reakcyj bolki /§ 19 i § 20/ przy siłach pionowych . Kierunek nieznaną siły $R_1 = P_{n+2}$, przechodzącej przez punkt a_1 , musi być też równoległy do kierunku P_1, P_2, \dots , gdyż w przeciwnym razie wielobok sił nie mógłby być zamknięty . Ponieważ wierzchołek $(n+2)$ znajduje się zawsze na prostej $a, l \parallel P$ i przez tego bok $(n+2)(n+3)$ wpada na bok 01 , więc przez to można przeprowadzić dowolny wielobok sznurowy $01 \dots n(n+1)$ /rys. 94/ i przecięcie boku 01 z prostą $a, l \parallel P$ wyznaczy wierzchołek $(n+2)$ wieloboku sznurowego.

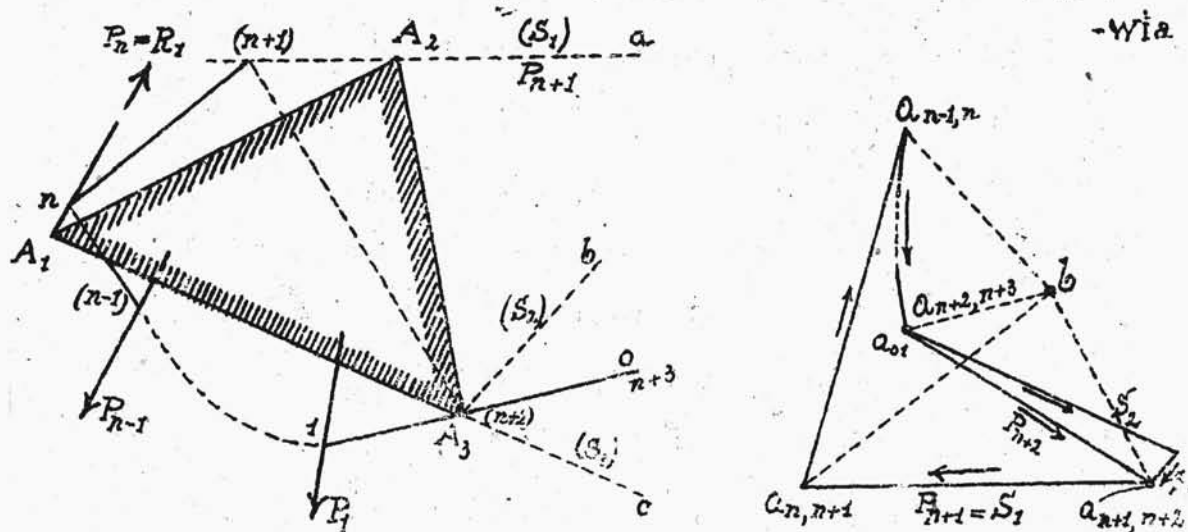


Rys. 94.

Łącząc $(n+2)$ z $(n+1)$ i przeprowadzając $b a_{n+1,n+2}$ //

Wzrosty $1/(n+1)(n+2)$ do przecięcia się z $a_{01} a_{n,n+1}$ otrzymamy $R_2 = P_{n+1} = a_{n,n+1} a_{n+1,n+2}$ i $R_1 = P_{n+2} = a_{n+1,n+2} a_{01}$.

§ 70. Rozwiążmy teraz sposobem wykreślnym zadanie o zrównoważeniu danego układu sił przez trzy siły o danych liniach działania. Z § 40 wiemy, że zadanie to jest określone i z § 41 wiemy, że ma ono zastosowanie przy wyznaczeniu napięć w prętach kratownicy, gdy, stosując sposób odcięcia można wykonać przekrój przez trzy pręty kratownicy. Przypuśćmy /rys. 95/ że A_1, A_2, A_3 przedsta-



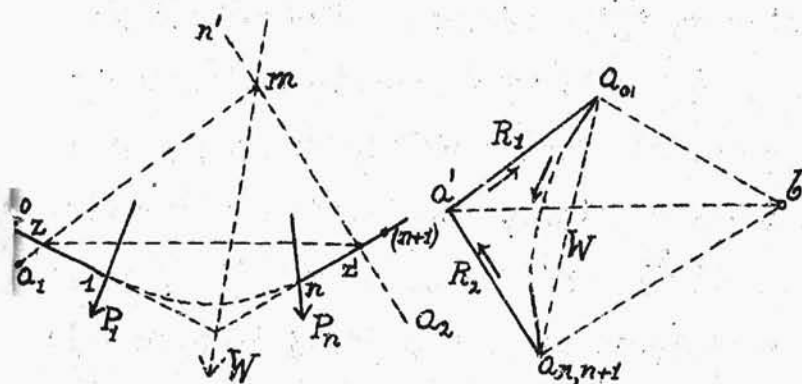
Rys. 95.

odciętą część kratownicy, proste $A_2 a, A_3 b, A_3 c$ przedstawiają osie trzech przeciętych prętów, których napięcia oznaczmy przez S_1, S_2, S_3 . Na odciętą część $A_1 A_2 A_3$ działają siły bezpośrednio przyłożone P_1, P_2, \dots, P_{n-1} oraz $P_n = R_1$ - reakcja podporowa; siły te równoważą się

z siłami S_1, S_2, S_3 z których linje działania znamy. W celu wyznaczenia tych sił znajdziemy uprzednio dwie siły P_{n+1} i P_{n+2} równoważące dany układ sił P_1, \dots, P_n ; przyjmiemy, że siła P_{n+2} za punkt zaczepienia ma A_3 /punkt przecięcia sił S_2 i S_3 /, a siła P_{n+1} ma punkt zaczepienia w A_2 i kierunek A_2a , czyli że $P_{n+1} = S_1$. Wyznaczenie sił P_{n+1} i P_{n+2} sprowadza się więc do zadania § 68, które rozwiązujemy, jak wyżej, t.j. przy dowolnym biegunie b budujemy wielobok sznurowy $01 \dots n/n+1/$ taki, że bok 01 przechodzi przez punkt A_3 i łączymy punkt $n/n+1/$ /t.j. $A_3/$ z punktem $n+1/$ w przecięciu $n/n+1/$ z kierunkiem P_{n+2} i z biegunem b przeprowadzamy $ba_{n+1, n+2} // n/n+1/$ i $n/n+2/$; otrzymujemy w ten sposób siły $P_{n+1} = S_1$ i P_{n+2} . Dla dokonania rozwiązania siłę P_{n+2} , która przechodzi przez punkt A_3 , rozkładamy w wieloboku sił na dwie siły S_2 i S_3 otrzymane w ten sposób siły S_1, S_2, S_3 równoważą układ sił $P_1 \dots P_n$ i są szukanimi natężeniami prętów A_2a, A_3c, A_3c .

§ 71. Zadania w §§ 68, 69 i 70 rozwiązywaliśmy stosując ogólne wykreślne warunki równowagi układu sił w płaszczyźnie. W szczególnych jednak wypadkach zadanie może być uproszczone, niea więc gdy dany układ sił P_1, \dots, P_n /rys. 96/ redukuje się do wypadku: j W .

Powyższe zadania sprowadzają się do zrównoważenia danego układu sił przez dwie siły, z których jedna R_2 ma daną linię działania $a_2 n'$, druga R_1 - dany punkt zaczepienia a_1 . Trzy równoważące się siły: wypadkowa W , siła R_1 , i siła R_2 powinny się przecinać w jednym punkcie.



Rys. 96.

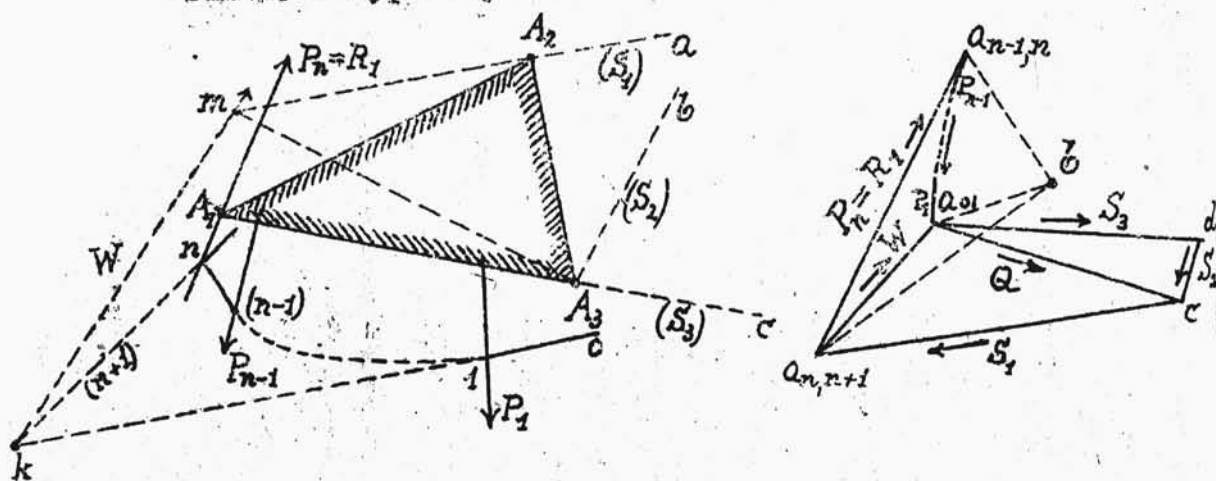
Jeżeli kierunek $a_2 n'$ przecina się z linią działania wypadkowej w granicach rysunku np. w punkcie m , to łącząc punkt m z a_1 , otrzymamy kierunek siły R_1 .

Odcinki sił R_1 i R_2 otrzymany więc, przeprowadzając z b proste $a_1 a' // a_1 m$ i $b a_{n,n+1} // a_2 n'$, zadanie jest więc rozwiązane. Ponieważ siły $P_1, P_2, \dots, P_n, R_1, R_2$ równoważą się, więc wielobok sznurowy tych sił jest zamknięty; wielobok ten otrzymamy łącząc punkty Z i Z' zamykającą ZZ' . Łącząc a' z b powinniśmy otrzymać $a'b // ZZ'$, gdyż $a'b$ jest promień biegunowy odpowiadający bokowi ZZ' . Równoległość tych prostych może służyć dla sprawdzenia prawidłowości rysunku.

Z powyższego widzieliśmy, korzystając z położenia wypadkowej W i punktu m - rozwiązania zadania.

wystarczył jeden tylko warunek równowagi, mianowicie że wielobok sił jest zamknięty. Podobną skoliczność mamy i przy analitycznem rozwiązaniu w wypadku, gdy wszystkie siły przecinają się w jednym punkcie. Wówczas równanie $\Sigma M = 0$ staje się tożsamością i do rozwiązania zadania wystarczą tylko równania $\Sigma X = 0$, $\Sigma Y = 0$.

§ 72. Zadanie § 71, który w gruncie rzeczy sprowadza się do zrównoważenie danego układu sił przez dwie siły, może być także rozwiązane prościej, gdy wypadkowa W sił P_1, \dots, P_n mieści się w granicach rysunku i gdy punkt przecięcia się z wypadkową jednego z kierunków A_2a , A_3b , A_3c mieści się w granicach rysunku. Przypuśćmy



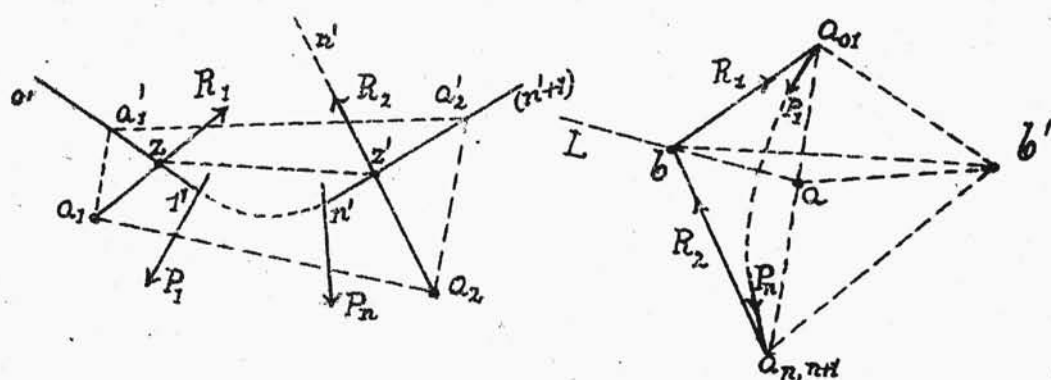
Rys. 97.

np. /rys. 97/ że wypadkowa W sił P_1, \dots, P_n przechodzi przez punkt K znajdujący się w granicach rysunku i że kierunek A_2a jest S_1 przedział W

w punkcie m . Siłę W możemy zrównoważyć przez dwie siły: S_1 o kierunku mA_2 i Q o kierunku mA_3 . W wieloboku siły otrzymujemy te dwie siły, przeprowadzając $a_o, c \parallel mA_3$ i $a_n, n+1 \parallel mA_2$. Pozostaje jeszcze siłę Q , przechodzącą przez punkt A_3 , rozłożyć na dwie siły S_2 i S_3 , co wykonywamy na rysunku wieloboku sił, przeprowadzając $a_o, d \parallel A_3c$ i $cd \parallel A_3b$. Siły S_1, S_2, S_3 równoważą siły P_1, \dots, P_n i są szukanymi natężeniami prętów. Sposób powyższy nazywają sposobem Culmana.

§ 73. Wskażemy jeszcze jeden sposób rozwiązywania interesującego nas zagadnienia, opierając się na twierdzenie udowodnione w § 57, mianowicie, że wszelki układ sił w płaszczyźnie może być zrównoważony przez dwie siły, z których jedna ma za linię działania pierwszy bok wieloboku sznurowego i za odcinek pierwszy promień biegunowy, druga - ma za linię działania ostatni bok wieloboku sznurowego i za odcinek ostatni promień biegunowy; przytem zwroty tych sił są takie, że wielobok z danych sił i z dwóch równoważących sił jest zamknięty. Zależności geometryczne między siłami, zawarte w przytoczonym twierdzeniu zastępują ogólne dwa warunki równowagi /§ 68/ i pozwalają wykonać rozwiązanie wyłącznie zapożyczając tego twierdzenia. Zadania przytoczone wyżej uprowadzają się do zrównoważenia danego układu sił przez dwie siły R_1 i R_2 , z których pierwsza ma dany punkt zaczep-

pienia a_1 ; druga ma dany punkt zaczepienia a_2 i li-
nię działania $a_2 n'$ /rys. 98/. Rzecz oczywista, że



Rys. 98.

szukane siły R_1 i R_2 znajdziemy, przeprowadzwszy dla danego układu sił P_1, \dots, P_n wielobok sznurowy, w którym bok 01 przebiega przez punkt a_1 ; bok $n/n+1$ - przez punkt a_2 i przytem kierunek $n/n+1$ jest równoległy do $a_2 n'$. Zadanie to rozwiązuje się, jak wskazano w § 66; mianowicie budujemy pomocniczy wielobok sznurowy $0'1' \dots n'/n'+1'$ przy dowolnym biegunie b' ; przeprowadzamy proste $a_1 a'_1$ i $a_2 a'_2$, równoległe do $a_{0'1'}$ i $a_{n'n'+1'}$ do przecięcia się odpowiednio z $0'1'$ i $n'/n'+1'$ w punktach a'_1 i a'_2 ; łączymy a'_1 i a'_2 i z bieguną b' przeprowadzamy prostą $b'a$ do przecięcia się z $a_{0'1'}$ i $a_{n'n'+1'}$ w punkcie a ; z punktu a przeprowadzamy prostą L równoległą do $a_1 a_2$; ta prosta jest miejscem geometrycznym biegunów wieloboków sznurowych, których boki 01 i $n/n+1$ przechodzą przez punkty a_1 i a_2 ; biegun tego wieloboku jest szukany.

warunkom i prócz tego posiada bok $n/n+1/$ równoległy do $a_2 n'$ otrzymamy, przeprowadzając $a_{n(n+1)}/b$ równoległe do $a_2 n'$ do przecięcia się z L w punkcie b . Jest to wielobok sznurowy zadośćczyniący postawionym warunkom, a więc szukane siły są to $R_2 = a_{n(n+1)}/b$ i $R_1 = a_0/b$. Linje działania tych sił są to boki $01 // a_0/b$ i $n(n+1) // a_{n(n+1)}/b$.

Warunek zamknięcia się wieloboku sznurowego może służyć dla sprawdzenia prawidłowości rysunku. W tym celu zauważamy punkty Z i Z' przecięcia $01'$ i $n'/n+1/$ odpowiednio z linjami działania R_1 i R_2 ; zamykając linię ZZ' powinna być równoległa do promienia biegunowego bb' .

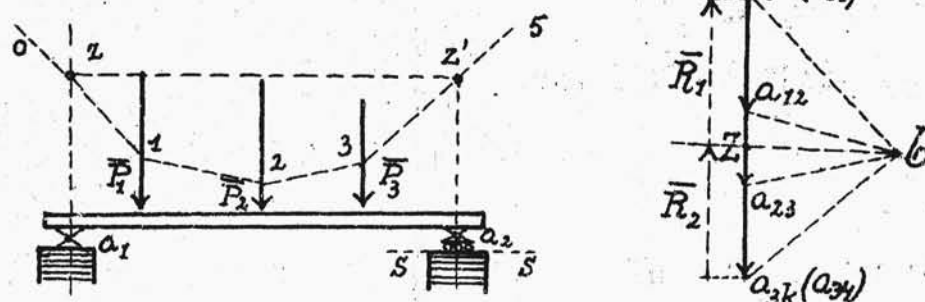
Ponieważ zagadnienie o zrównoważenie danego układu sił przez trzy siły o danych linjach działania sprowadza się /§ 70 i 71/ do poprzedniego zadania, powyższy sposób może więc być zastosowany do zagadnienia o zrównoważeniu danego układu sił przez trzy siły o danych linjach działania.

Przykład na wyznaczenie reakcyj belek.

§ 74. Na podstawie wyłożonych sposobów o zrównoważeniu danego układu sił przez siły o danych cechach można bezpośrednio wyznaczyć wykreślić reakcje belki zwykłej i wspornikowej i wogóle ciała podpartego w 2-ch

punktach, z których jeden punkt nieruchomy, - drugi zaś ma się znajdować na danej linii ślizgania.

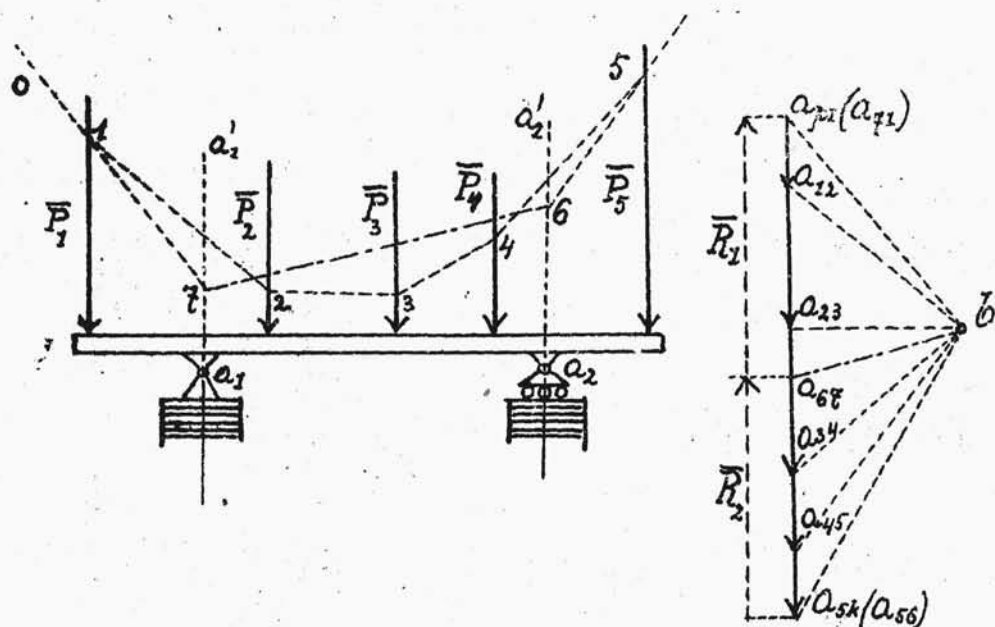
W wypadku, gdy belka leży na 2 podporach, umieszczonych w końcach belki i gdy znajduje się pod działaniem sił równoległych $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3$ /rys.99/ i jeżeli przytem linja ślizgania podpory ruchomej lm jest prostopadka do kierunku sił, wyznaczenie reakcyj sprowadza się do zadania § 69, t.j. wystarczy przeprowadzić w wieloboku sił promień bz



Rys. 99.

równoległy do boku zamykającego $z z'$ w wieloboku sznurkowym przez co otrzymamy wielkości i kierunki \bar{R}_1 i \bar{R}_2 .

Wyznaczenie reakcyj w belce wspornikowej w wypadku sił pionowych /rys.100/, jak widać z § 69, niczem się nie różni od



Rys. 100.

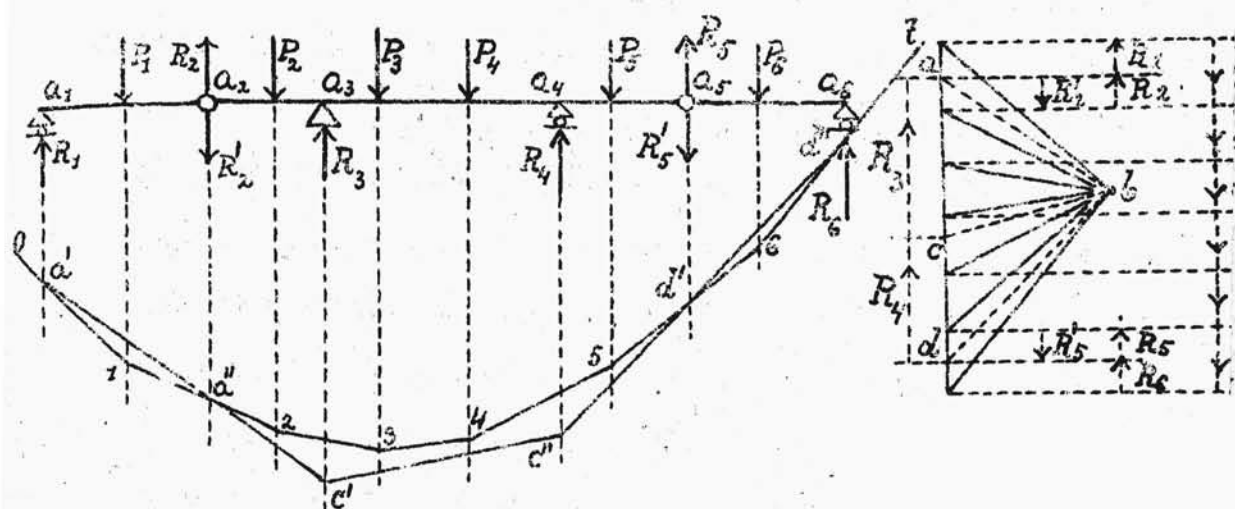
wyznaczenia reakcyj w belce zwyczajnej t.j. tak samo przeprowadzamy bok zamykający 67, łączący punkty 6 i 7 przecięcia boków krańcowych 0 i 56 z linjami działania sił R_1 i R_2 t.j. z prostekami $a_1 a'_1$ i $a_2 a'_2$ równoległymi do danych sił. Następnie w wieloboku sił przeprowadzamy promień $ba_{67} // 67$, przez co otrzymujemy wielkości i kierunki reakcyj R_1 i R_2 .

Belki wspornikowe wieloprzęskowe.

§ 75. Wyznaczenie wykresłne reakcyj podpór i połączeń w belce wspornikowej wieloprzęskowej /rys.101/ w wypadku sił pionowych można uskutecznić, jak w poprzednim §, w następującym porządku. Wyznaczyć nasamprzód reakcje w belkach $a_1 a_2$ i $a_5 a_6$, jako w belkach zwykłych, mających jedną podporę nieruchomą, drugą ruchomą. Potem można już wyznaczyć reakcje w belce wspornikowej

jednoprzęskowej $a_2 a_5$, przytamt w przegubach a_2 i a_5 należy przyłożyć siły R_2' i R_5' równe i wprost przeciwnie reakcjom R_2 i R_5 w przegubach ze strony belki $a_2 a_5$. Przy powyższem rozwiązaniu rzeczą jest konieczną budowanie trzech oddzielnych wieloboków sznurowych dla każdego układu sił przyłożonych do każdej z trzech belek. Wieloboki te wogóle mogą być zbudowane każdy względem innego bieguna; dla równowagi każdej belki rozpatrywanej oddzielnie, jako ciało swobodne; wielobok z sił bezpośrednio przyłożonych do belki i właściwych reakcyj podpór i połączeń z sąsiednimi belkami, oraz wieloboki sznurowe dla tych sił powinny być zamknięte.

Przy wykreślnem rozwiązywaniu podobnych zadań jest rzeczą pożądaną wieloboki sił i wieloboki sznurowe budować w ten sposób, żeby wieloboki te wykazywały równowagę każdego ciała oddzielnie oraz całego układu i dowolnej jego części rozpatrywanych, jako ciała sztywne, co, jak wiemy, powinno mieć miejsce na mocy zasady zesztynienia. W danym wypadku można to uskutecznić, budując każdy z omówionych trzech wieloboków sznurowych względem tego samego bieguna, jak to zostało wykonane na rys. 101.



Rys. 101.

Nasamprzód budujemy względem bieguna b wielobok sznurowy 01234567 dla sił bezpośrednio przyłożonych: P_1, P_2, \dots, P_6 .

W wieloboku sznurowym 0 1 2 dla sił P na belce $a_1 a_2$ łączymy punkty przecięć a' i a'' końcowych boków 0 1 i 1 2 z prostymi $a_1 a'$ i $a_2 a''$, będącymi linjami działania reakcyj R_1 i R_2 na belkę $a_1 a_2$ i w wieloboku sił przeprowadzamy $ba \parallel a'a''$ i otrzymamy odcinki reakcyj R_1 i R_2 . Belka $a_1 a_2$ pod działaniem sił P_1, R_1, R_2 jest w równowadze i rzeczywiście wielobok z sił: P_1, R_1, R_2 jest zamknięty i wielobok sznurowy dla tych sił $a'1a''a'$ jest zamknięty. Podobnie znajdziemy reakcje R_5 i R_6 belki $a_5 a_6$ zapożyczając prostą bd równoległą do zamykającej $d'd$ i otrzymamy, że wielobok z sił P_6, R_5, R_6 i wielobok

bok sznurowy $d'6d''d'$ jest zamknięty. Belka a_2a_5 rozpatrywana jako swobodna znajduje się pod działaniem sił znanych $R_2', P_2, P_3, P_4, P_5, R_5'$ i nieznanych R_3, R_4 ; reakcje R_2 i R_5 są znane, gdyż są to siły równe i wprost przeciwne do sił R_2', R_5' .

Znajdujący się już na rysunku wielobok sznurowy $a'a''$ 2 3 4 5 $d'd''$ jest wielobokiem sznurowym dla znanych sił R_2', P_2, \dots, R_5' ; dla wyznaczenia więc reakcji R_3 i R_4 przedłużamy końcowe boki $a'a''$ i $d'd''$ do przecięcia odpowiednio z linjami działania tych reakcji t.j. z prostymi a_3c' i a_4c'' i z bieguna b przeprowadzamy $bc \parallel c'c''$; otrzymujemy w ten sposób odcinki reakcji $dc = R_3, ca = R_4$. Wielobok z sił działających na belkę a_2a_5 , mianowicie $P_2, P_3, P_4, P_5, R_5', R_4, R_3, R_2'$ jest zamknięty i wielobok sznurowy $a''2345d'c'c'a''$ jest zamknięty.

Na wykonanym w powyższy sposób rysunku znajdujemy potwierdzenie zasady zeszytnienia, mianowicie całkowity układ belek $a_1a_2a_3a_4a_5a_6$ rozpatrywany jako jedno ciało sztywne znajduje się w równowadze pod działaniem sił: $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, R_6$;

na rysunku znajdujemy, że wielobok z tych sił jest zamknięty i wielobok sznurowy $a'123456d'c'c'a'$ jest zamknięty. Część układu np. $a_1a_2a_3a_4a_5$ rozpatrywana jako jedno ciało sztywne powinna być w równowadze pod działaniem sił zewnętrznych dla tej części, mianowicie

cie sił $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, R_5', R_4, R_3, R_2'$; na rysunku mamy rzeczywiście, że wielobok z tych sił jest zamknięty i wielobok sznurowy. $a' 1 2 3 4 5 d' c' c' a'$ jest zamknięty.

Powyższy sposób wykonywania rysunków wieloboków sił i wieloboków sznurowych przy rozpatrywaniu równowagi układów jest pożyteczny, dlatego, że nie ma powtarzania na rysunkach linii mających jednakowe znaczenie; prócz tego sposób ten więcej wszechstronnie oświetla równowagę danego układu i przytem daje możliwość kontroli prawidłowości rysunku. Jednakże, jak wiado, przy tym sposobie należy obierać jeden wspólny biegun dla każdego układu sił działający na krótko ośrodek, co przy większej liczbie sił prowadzi do tego, że rysunki wieloboku sił i wieloboku sznurowego zajmą dużo miejsca na rysunku. Niedogodności tej unikamy, stosując pierwszy sposób t.j. obierając dla wieloboków sznurowych sił na każdej oddzielnej belce osobne bieguny.

Łuk trójprzegubowy.

§ 76. Wyznaczenie wykreślne reakcyj podpór oraz przegubu łączącego w łuku trójprzegubowym /rys.102/ kątowo jest uskutecznić oddzielnie tylko od sił P_1, \dots, P_m , przyłożonych do części łuku a, a i oddzielnie tylko od sił P_{m+1}, \dots, P_n przyłożonych do

części łuku $a a_2$. Ostateczne wyniki otrzymamy, sumując geometrycznie reakcje cząstkowe otrzymane od działania powyższych cząstkowych układów oddzielnie. Możliwość takiego postępowania jest widoczna z następującego rozumowania.

Oznaczmy całkowite reakcje prętów a_1 i a_2 przez R_1 i R_2 , reakcję w przegubie a ze strony ciała C_2 na C_1 przez R i odwrotną reakcję ze strony ciała C_1 na C_2 przez R' i przytem $\bar{R}' = -\bar{R}$. Oznaczmy cząstkowe reakcje tych połączeń tylko od działania sił: P_1, \dots, P_m jak następuje: α_1 - reakcja a_1 , α_2 - reakcja a_2 , α - reakcja w punkcie a od C_2 na C_1 i α' - reakcja w punkcie a od C_1 na C_2 i przytem $\bar{\alpha}' = -\bar{\alpha}$. Oznaczmy cząstkowe reakcje połączeń tylko od działania sił

P_{m+1}, \dots, P_n : A_1 - reakcja a_1 , A_2 - reakcja a_2 , A - reakcja w punkcie a od C_2 na C_1 , A' - reakcja w punkcie a od C_1 na C_2 .

Mamy więc następujące równoważące się grupy sił:

Z tablicy ~~193~~ widać, że całkowite reakcje R_1, R, R', R_2 będą sumami geometrycznymi reakcyj cząstkowych, mianowicie

$$\bar{R}_1 = \bar{\alpha}_1 + \bar{A}_1, \quad \bar{R} = \bar{\alpha} + \bar{A}, \quad \bar{R}' = \bar{\alpha}' + \bar{A}', \\ \bar{R}_2 = \bar{\alpha}_2 + \bar{A}_2 \quad \text{przytem} \quad \bar{R}' = -\bar{R}.$$

	ciało C_1 ZNAJDUJE SIĘ W RÓWNOWADZE POD DZIAŁANIEM SIŁ	ciało C_2 ZNAJDUJE SIĘ W RÓWNOWADZE POD DZIAŁANIEM SIŁ	CAŁY UKŁAD C_1, C_2 ZNAJDUJE SIĘ W RÓW- NOWADZE POD DZIAŁA- NIEM SIŁ
1) DO UKŁADU Λ PRZY- ŁOŻONE TYLKO SIŁY: P_1, \dots, P_m	$P_1, \dots, P_m,$ α_1, α	$0,$ α', α_2 <small>A WIĘC</small> $\alpha_2 = -\alpha' = \alpha$	$P_1, \dots, P_m,$ $\alpha_1, \alpha, \alpha', \alpha_2$
2) DO UKŁADU Λ PRZY- ŁOŻONE TYLKO SIŁY: P_{m+1}, \dots, P_n	$0,$ $A_1, A,$ <small>A WIĘC</small> $\bar{A}_1 = -\bar{A} = \bar{A}'$	P_{m+1}, \dots, P_n A', A_2	P_{m+1}, \dots, P_n A_1, A, A', A_2
3) DO UKŁADU Λ PRZY- ŁOŻONE WSZYSTKIE SIŁY $P_1, \dots, P_m,$ P_{m+1}, \dots, P_n	$P_1, \dots, P_m,$ $\alpha_1, A_1, \alpha, A_2$	$P_{m+1}, \dots, P_n,$ $\alpha', A', \alpha_2, A_2$	$P_1, \dots, P_m,$ P_{m+1}, \dots, P_n $\alpha_1, A_1, \alpha, A,$ $\alpha', A', \alpha_2, A_2$

i jak widać z tablicy reakcje R_1 i R równoważą się z siłami P_1, P_2, \dots, P_m , reakcje R', R_2 — z siłami P_{m+1}, \dots, P_{n-k} a wszystkie reakcje R_1, R, R', R_2 równoważą się ze wszystkimi siłami $P_1, \dots, P_m, P_{m+1}, \dots, P_n$.

Z przytoczonego rozbioru widać, że we wszelkim układzie ciał nieruchomym możemy reakcje podpór i połączeń obliczać oddzielnie od pewnych grup sił, na które możemy dowolnie podzielić siły bezpośrednio przyłożone. Otrzymane reakcje można nazwać reakcjami cząstko-

wemi. Całkowite reakcje otrzymane sumując geometrycznie reakcje cząstkowe. Stosując ten sposób do łuku trójpierścieniowego /rys.102/ przypuścimy na chwilę, że działają tylko siły na lewą część łuku /t.j. siły wymienione w tabelicy pod p.1/

prostą aa_2 .

Rozpatrując teraz ciało C_1 , jako swobodne, mamy następujące zadanie: siły P_1, \dots, P_m równoważą się przez nieznane siły — reakcje: α_1 , mające za punkt zaczepienia a_1 , α , mający za punkt zaczepienia a oraz za linię działania prostą aa_2 , znaleźć siły α_1 i α . Jest to zadanie rozpatrzone w §§ 68 i 71. Rozwiązujemy je, jak w § 71, korzystając z położenia wypadkowej W_1 , sił P_1, \dots, P_m . W tym celu budujemy wielobok sił aa' , następnie względem dowolnego bieguna b budujemy wielobok sznurowy $01 \dots m(m+1)$, przez przecięcia 01 i $m(m+1)$ w punkcie x przechodzi wypadkowa $W_1 \parallel aa'$. Siły W_1, α_1, α przecinają się w jednym punkcie y na przecięciu się W_1 i aa_2 , otrzymujemy w ten sposób kierunek α i na wieloboku sił przeprowadzamy z punktu a' prostą $\parallel ay$ i z punktu a prostą $\parallel a_1y$, otrzymamy szukane siły α i α_1 . Kierunek siły α przeprowadzamy z punktu a' , a nie z p. a , dlatego, aby otrzymać wielobok sił $P_1 \dots P_m \alpha \alpha_1$ w takim porządku w jakim spotykamy te siły obiegając te siły na rys. ciała C_1 zgodnie z ruchem wskazówki zegara.

Taki porządek następowania po sobie sił dostarczą

wykresy bardziej związane i pozwalające sprawdzić je za pomocą zasady zeszczywnienia. Reakcja $\bar{\alpha}' = -\bar{\alpha}$, reakcje zaś $\bar{\alpha}_2 = -\bar{\alpha} = \bar{\alpha}'$.

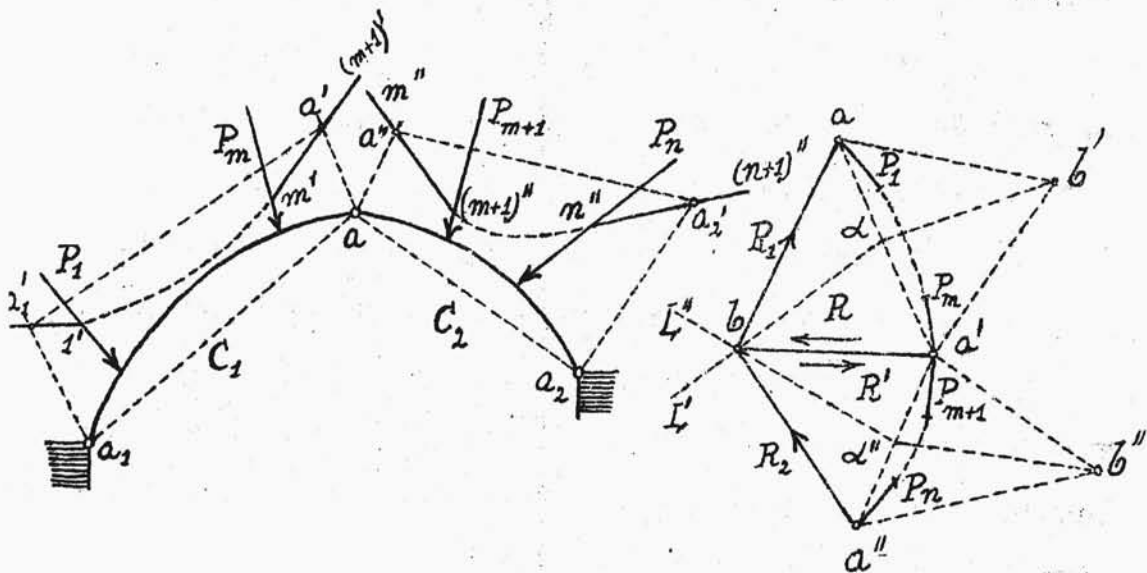
Podobnie postąpimy przy wyznaczeniu reakcyj cząstkowych A_1, A, A', A_2 tylko od działania sił P_{m+1}, \dots, P_n , zaczepionych do prawej części łuku. Na część C_1 łuku działają tylko reakcje A_1 i A , mające za linie działania $a_1 a$. Na część C_2 łuku działają siły P_{m+1}, \dots, P_n i reakcje A' , mające za linie działania prostą $a_1 a$ i reakcję A_2 , mającą punkt zaczepienia w a_2 . Zadanie sprowadza się do wyznaczenia sił A' i A_2 . Gdyby kierunek $a_1 a$ nie przecinał się w granicach rysunku z wypadkową sił P_{m+1}, \dots, P_n należy użyć sposobu, wskazanego w § 68.

W tym celu względem dowolnego bieguna b' dla sił P_{m+1}, \dots, P_n budujemy wielobok siłowy $C(m+1) \dots n a_2$, taki, że końcowy bok $n a_2$ przechodzi przez punkt a_2 . Bok zamykający, czyli bok między siłami A' i A_2 jest $c a_2$, przeprowadzamy więc z b' promień $b'd$ do przecięcia się z kierunkiem siły A' t.j. z $a'd \parallel a_1 a$. Reakcja $\bar{A} = -\bar{A}'$, reakcja $\bar{A}_2 = -\bar{A} = \bar{A}'$.

Mamy więc wszystkie reakcje cząstkowe. Całkowite reakcje otrzymamy, budując równoległobok $a'efd$,

w którym $df = e = \alpha_2$, $fe = da' = A_1$. Reakcja $\bar{R}_1 = \bar{A}_1 + \bar{\alpha}_1$, reakcja $\bar{R}_2 = \bar{A}_2 + \bar{\alpha}_2$. Reakcja R w punkcie a ze strony ciała C_2 na C_1 będzie $\bar{R} = \bar{\alpha} + \bar{A} = a'f$ i na koniec $\bar{R}' = \bar{\alpha}' + \bar{A}' = fa'$, co widać także z tego, że siły R_1, P_1, \dots, P_m równoważą się z R , a więc w wieloboku sił $faa'f$, $a'f = \bar{R}$; podobnie i w wieloboku $a'a''fa'$, $fa' = \bar{R}'$. Na mocy zasady zeszywnienia siły $P_1, \dots, P_m, P_{m+1}, \dots, P_n$ równoważą się z reakcjami R_1 i R_2 i rzeczywiście wielobok $aa'a''fa$ jest zamknięty.

§ 77. Reakcje w łuku trójprzegubowym można wyznaczyć jeszcze i innym sposobem, opartym na następującym rozważaniu.



Rys.103

W części C_1 , rozważanej jako swobodnej, siły P_1, \dots, P_m są zrównoważone przez reakcje R_1 i R .

Na mocy § 57 i § 73 istnieje pewien wielobok sznurowy dla sił P_1, \dots, P_m , którego boki 01 i $m(m+1)$ przechodzą odpowiednio przez punkty a_1 i a , są odpowiednio równoległe do kierunków R_1 i R i przytem krańcowe promienie biegunowe są odcinkami tych reakcyj. Biegunem takiego wieloboku sznurowego będzie punkt b /rys.103/ na przecięciu odcinków $\overline{a'b} = \overline{R}$ i $\overline{ba} = \overline{R_1}$.

W części C_2 siły P_{m+1}, \dots, P_n są zrównoważone przez siły R' ($\overline{R'} = -\overline{R}$) i R_2 . Podobnie więc istnieje pewien wielobok sznurowy, którego bok $m_1(m_1+1)$ przechodzi przez punkt a , bok $n(n+1)$ przez punkt

a_2 i boki te są odpowiednio równoległe do R' i R_2 a zatem i do R oraz do R_2 i przytem krańcowe promienie są odcinkami tych reakcyj. Ponieważ wielkość odcinka R równa się wielkości odcinka R' , więc za biegun takiego wieloboku sznurowego można przyjąć punkt

b /rys.103/, a wielobok sił P_{m+1}, \dots, P_n zbudować od punktu a' . Wówczas $\overline{ba'} = \overline{R'}$ i $\overline{a'b} = \overline{R_2}$.

Ponieważ bok $m_1(m_1+1)$ drugiego wielob. sznur. jest równoległy do $\overline{ba'}$, tak samo jak bok $m(m+1)$ pierwszego wieloboku sznurowego i oba przechodzą przez punkt

a , jeden jest więc przedłużeniem drugiego i można

przyjąć punkt m_1 w m , a (m_1+1) oznaczyć przez $(m+1)$.
 Widzimy więc, że oba wieloboki sznurowe $01...m(m+1)$ i
 $m_1(m_1+1)...(n+1)$ stanowią jeden wielobok sznurowy
 $01...m(m+1)...(n+1)$ dla wszystkich sił $P_1, P_m, P_{m+1}, \dots, P_n$,
 zbudowany względem bieguna b , dla którego promienie
 równają się $a''b = R_2$, $ba = R_1$ i $a'b' = R$.
 Wszystkie reakcje znajdziemy więc, jeżeli będzie znale-
 ziony biegun powyższego wieloboku sznurowego, którego
 budowa warunkuje się tem, że boki $01, m(m+1), n(n+1)$
 przechodzą odpowiednio przez punkty a_1, a, a_2 .
 Na podstawie § 65 i § 66 biegun b znajdziemy na prze-
 cięciu miejsc geometrycznych L' i L'' biegunów dwóch
 wieloboków sznurowych przechodzących końcowymi bokami
 odpowiednio przez punkta a_1 i a oraz a i a_2 .

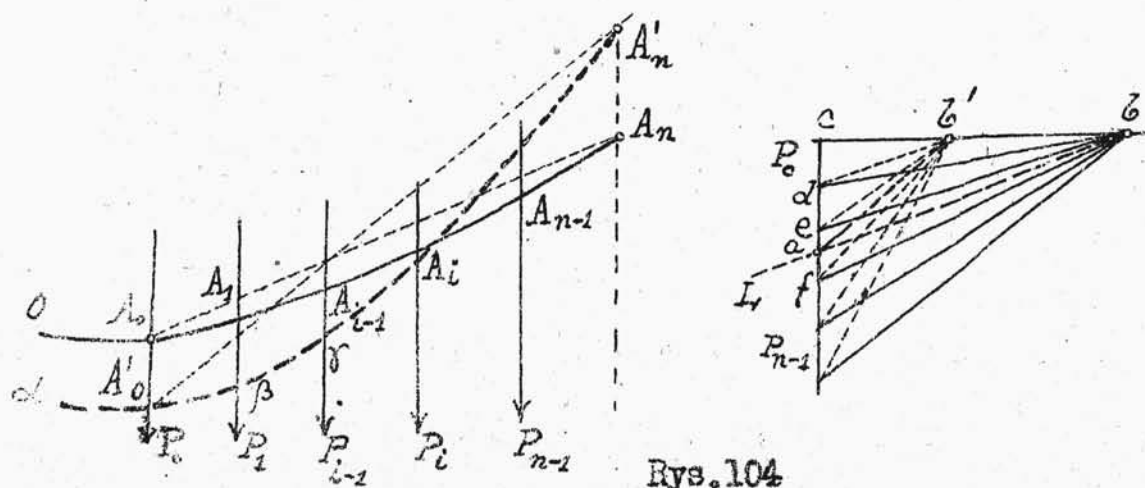
Na rys. 103 budowa ta jest wykonana i jasne jest
 z samego rysunku.

Zasada zeszytnienia potwierdza się tutaj przez to,
 że R_1 i R_2 oraz dane siły tworzą wielobok sił zamknię-
 ty i że R_1 i R_2 mają kierunki końcowych boków wielo-
 boku sznurowego przechodzącego przez punkty a_1 i a_2 .

Znając powyższe sposoby wyznaczania reakcyj w bel-
 kach i łukach trójpřzegubowych, wyznaczania reakcyj w
 układach z łuków trójpřzegubowych i belek, rozpatrho-
 nych w § 26, nie przedstawia już żadnych trudności.

§ 78. Rozwiązanie wykreślne zadania o równowadze mostu wiszącego zostało już podane w § 51. Wskażemy tutaj jeszcze inny sposób. Wiemy mianowicie, że wielobok przegubowy, a więc i łańcuch mostu wiszącego w położeniu równowagi przybiera postać wieloboku sznurowego dla sił działających na przeguby.

Wielobok ten określa się /§ 49, rys.65/ przez trzy dane punkty A_n , A_o , A'_n . Dla przykładu wskazane-go na rys. 65, z powodu symetrii średni bok $A_o A'_o$ jest poziomy. Wystarczy więc zbudować wielobok sznurowy dla sił pionowych P_o, P_1, \dots, P_{n-1} i równych P , których linie działania znajdują się w jednakowych odstępach, wielobok sznurowy, którego bok $A'_o A_o$ jest poziomy i przechodzi przez punkt A_o i bok $A_{n-1} A_n$ przechodzi przez punkt A_n . Zadanie to rozwiązuje się na podstawie § 66 p.n.b.



Rys.104

Względem dowolnego bieguna b' /rys.103/, /który tutaj został obrany, przyjmując pierwszy promień poziomym, co nie jest konieczne/ budujemy wielobok sznurowy $\alpha A'_0 \beta \gamma \dots A'_n$. Z punktu b' przeprowadzamy prostą $b'a \parallel A'_0 A'_n$ i z punktu a prostą $L \parallel A_0 A_n$ na przecięciu L i promieniu poziomego eb otrzymamy biegun b . Wielobok sznurowy $OA_0 A_1 \dots A_{n-1} A_n$ zbudowany względem tego bieguna będzie położeniem równowagi łańcucha mostu, a promienie biegunowe cb, db, eb, \dots będą wyrażać /§ 51/ wielkości napięć rozciągających odpowiednie pręty łańcucha.

§ 79. Jak wiemy, most wiszący o konstrukcji opisanej w § 49 należy do układów geometrycznie zmiennych. Przy rozwiązywaniu zagadnień na równowagę takich układów wyznaczanie reakcyj jest związane z jednoczesnem wyznaczaniem parametrów geometrycznych określających położenie równowagi układu /§ 32/.

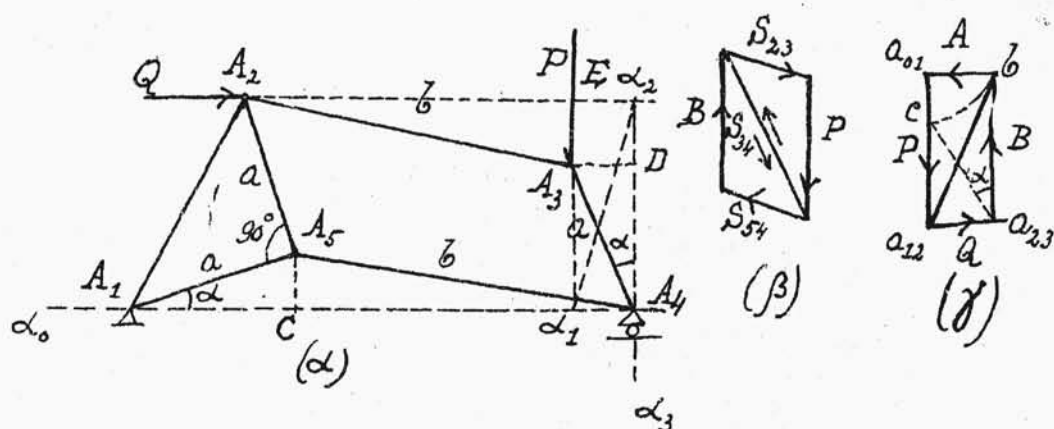
Okoliczność ta komplikuje rozwiązanie zagadnienia w porównaniu z wypadkiem, gdy układ jest nieruchomy. Komplikacja występuje w szczególności przy wykreślnem rozwiązywaniu zadania. Rozpatrując np. zadanie o wieloboku przegubowym przy danej długości boków /§ 47, rys.62/ widzieliśmy, że napisanie równań równowagi, z których można obliczyć reakcje i niewiadome parametry geometryczne nie przedstawia żadnej trudności; trudność zawiera

się tylko w ich rozwiązaniu. Inaczej się jednak ma rzecz, jeżeli chcielibyśmy zadanie to rozwiązać drogą wykreślną. Na podstawie § 52 widzimy wprawdzie, że kształt równowagi wieloboku przegubowego jest wielobokiem sznurowym, którego krańcowe boki przechodzą przez dwa dane punkty nieruchome /podpory/, jednakże spostrzeżenie to nie przybliży nas jeszcze do rozwiązania zadania, ponieważ brak nam dodatkowych danych do wyznaczenia tego wieloboku sznurowego, tembardziej, że linje działania sił przyłożonych do węzłów nie zajmują stałego miejsca w przestrzeni, lecz zależą od położenia węzłów.

Istnieje jednak pewien rodzaj zagadnienia o równowadze wieloboku przegubowego, które rozwiązuje się natychmiast na mocy powyższej uwagi. Mianowicie jeżeli przyjmujemy jako dane wielkości - nie długości prętów wieloboku, lecz ich rzuty poziome i nadto gdy siły bezpośrednio przyłożone są pionowe. Jest to zadanie o równowadze mostu wiszącego, którego rozwiązanie podano w poprzednim §, a innym sposobem § 49. Łatwość rozwiązania tego zadania w porównaniu z wypadkiem, gdy długości prętów są wielkościami danymi polega na tem, że w zadaniu tem linje działania sił zajmują stałe miejsce w przestrzeni niezależne od położenia równowagi układu.

W charakterze przykładu na rozwiązanie wykreślne

zadania na równowagę układu geometrycznie zmiennego wskażemy tutaj rozwiązanie zadania, podanego w § 47, przytem postawimy sobie za zadanie wyznaczenie położenia równowagi układu.



Rys.105

Przypuśćmy, że zadanie jest rozwiązane i że położenie wskazane na rys.105 jest położeniem równowagi układu

Zauważymy przedewszystkiem, że reakcja B podpory A_4 jest równa i wprost odwrotna do siły P , co jest widoczne z równowagi węzła A_3 i A_4 /rys.105/β/.

Ponieważ wielobok sił P, Q, \vec{B}, A powinien być zamknięty, więc jest rzeczą jasną, że $\vec{A} = -\vec{Q}$.

Następnie, wiedząc o tem /§ 73/, że reakcje A i B mają kierunek krańcowych boków wieloboku siłowego dla sił P i Q , którego boki $\alpha_0\alpha_1$ i $\alpha_2\alpha_3$

przechodzą przez punkty A_1 i A_4 przytem $\alpha_2 \alpha_3$ ma kierunek pionowy i promień $\bar{c} a_{23} = B = P$, budujemy ten wielobok $\alpha_0 \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$. Bok $\alpha_1 \alpha_2$ jest równoległy do promienia $\bar{c} a_{12}$, a więc trójkąty $\alpha_1 \alpha_2 A_4$ i $a_{12} \bar{c} a_{23}$, oraz czworokąty $\alpha_1 \bar{E} \alpha_2 A_4$ i $a_{12} a_{01} \bar{c} a_{23}$ są podobne. Ponieważ $A_5 C = A_3 D = \bar{E} \alpha_2$ i $A_5 C = A_3 \bar{E}$ /gdyż $A_1 A_5 = A_3 A_4 = a$ i $A_5 A_4 = A_2 A_3 = \bar{c}$ / zbudujemy więc kąt α odkładając $a_{01} C = a_{01} \bar{c}$ i łącząc C z a_{23} , kąt $\bar{c} a_{23} \bar{c} = A_3 A_4 \alpha_2 = \alpha$.

Wzór /a/ § 47 otrzymamy z trójkąta $\bar{c} a_{23} a_{12}$
 $a_{12} a_{23} = \bar{c} a_{12} \operatorname{tg} \alpha$, lecz $a_{12} a_{23} = Q$
 $\bar{c} a_{12} = P - Q$, więc

$$Q = (P - Q) \operatorname{tg} \alpha$$

czyli $Q(\sin \alpha + \cos \alpha) - P \sin \alpha = 0$

WYKRESY NATĘŻEŃ. /sił osiowych/.

§.80. W § 28 zapoznaliśmy się z pewnym ogólnym sposobem wyznaczania drogą analityczną natężeń w prętach kratownicy, który to sposób nazywaliśmy sposobem równowagi węzłów. Zajmiemy się teraz zastosowaniem tego sposobu do rozwiązania zagadnienia drogą wykreślną. Przypuśćmy, że mamy dźwigar kratowy, t.j. niezmienny układ przegubowy, znajdujący się w równowadze pod działaniem sił bezpośrednio przyłożonych wyłącznie do przegubów czyli węzłów; pozatem zakładamy, że podpory dźwigara znajdują się też w węzłach. Przy takim działaniu sił zewnętrznych,