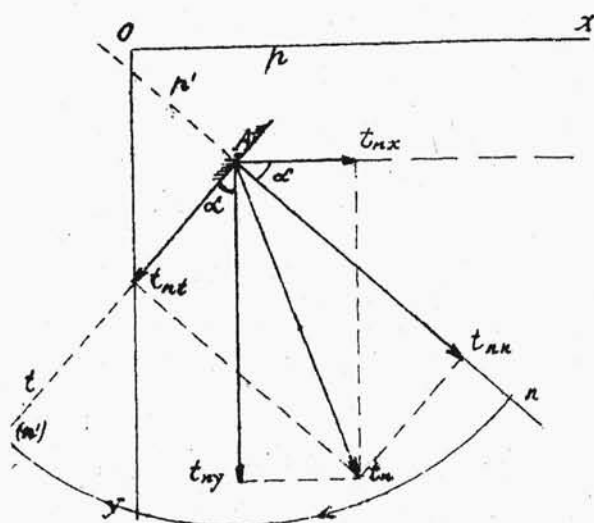


runek ten mamy już uzyskany i zadanie nasze jest określone, t.j. że wyznaczyliśmy niewiadome funkcje N_1 , N_2 i T w zależności od współrzędnych x i y , i zbadamy bliżej pewne własności naprężeń.

NAPRĘŻENIA NORMALNE I STYCZNE NA DOWOLNEM POLETKU.

§ 144. Wzory /3/ i /4/ pozwalają obliczyć naprężenie na dowolnem poletku i jego kierunek, skorzystamy z nich dla wywodu wzorów na składowe normalne i styczne naprężenia na dowolnem poletku w funkcji N_1 , N_2 , T .

Uważajmy we-
wnątrz ciała
elementarne po-
letko o normal-
nej n , przy-
należne do punk-
tu A , na któ-
rem działa na-
prężenie t_n .
Rozłożmy go na



Rys. 177

składowe normalne i styczne t.j. na kierunki A_n i A_t ; składowe te oznaczymy:

t_{nn} i t_{nt} . Kierunki A_n i A_t będziemy zawsze obierać tak, żeby układ osi A_{nt} był lewoskrętny, podobnie, jak O_{xy} , t.j. żeby oś A_n przy obrocie o 90° według ruchu wskazówki zegara wpadła na oś A_t . Składowe t_{nn} i t_{nt} wyrażają rzuty t_n na osie A_n i A_t stąd posiadają odpowiednie znaki $/+/-/$ lub $/-/+$. Dla krótkości jednak rzuty t_{nn} i t_{nt} nazywamy naprężeniami normalnem i stycznem. Widzimy stąd, że naprężenie normalne jest dodatnie jako rozciągające i ujemne jako ściskające.

Rozłożmy następnie naprężenie t_n wzdłuż osi OX i OY na dwie składowe t_{nx} i t_{ny} . Ponieważ $t_n = t_{nx} + t_{ny}$, to rzutując tę równość na kierunki normalnej i stycznej, otrzymamy:

$$t_{nn} = t_{nx} \cos(x, n) + t_{ny} \cos(y, n)$$

$$t_{nt} = t_{nx} \cos(x, t) + t_{ny} \cos(y, t)$$

Oznaczając kąt (x, n) przez α , bę-

dziemy mieli $(\gamma n) = (90 - \alpha)$, a zatem:

$$t_{nn} = t_{nx} \cos \alpha + t_{ny} \sin \alpha$$

$$t_{nt} = t_{nx} \sin \alpha + t_{ny} \cos \alpha ;$$

podstawiając tutaj wartości t_{nx} i t_{ny} z wzorów /3/ i /4/ otrzymamy:

$$t_{nn} = N_1 \cos^2 \alpha + 2T \sin \alpha \cos \alpha + N_2 \sin^2 \alpha$$

$$t_{nt} = (N_2 - N_1) \sin \alpha \cos \alpha + T (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)$$

Zastępując tutaj funkcje trygonometryczne od α przez funkcje od 2α otrzymamy:

$$t_{nn} = \frac{1}{2} (N_1 + N_2) + \frac{1}{2} (N_1 - N_2) \cos 2\alpha + T \sin 2\alpha \dots (7)$$

$$t_{nt} = -\frac{1}{2} (N_1 - N_2) \sin 2\alpha + T \cos 2\alpha \dots (8)$$

Co do naprężeń stycznych zauważymy następującą ich własność.

Wyobraźmy sobie w punkcie A poletko Ap' prostopadłe do Ap , t.j. mające kierunek normalnej An . Normalna An' do tego poletka ma kierunek i przypuśćmy ten sam zwrot co oś At , odpowiednia oś At' dla poletka Ap' ma kierunek i zwrot ujem-

nej oś A_n , t.j. ma zwrot odwrotny od A_n . Niech na poletko A_n' działa naprężenie t_{nt} , którego składowe na osie

A_n' i A_t' oznaczmy przez $t_{n'n'}$ i $t_{n't'}$. Napiszmy na $t_{n't'}$ wyrażenie według wzoru /8/, tutaj nowym kątem α czyli kątem między ξ i A_n' będzie $\alpha' = 90^\circ + \alpha$ gdzie $\alpha = \angle(n, \xi)$. Podstawiając tę wartość zamiast α w wyrażenie /8/ otrzymamy

$$\begin{aligned} t_{n't'} &= -\frac{1}{2} (N_1 - N_2) \sin(180^\circ + 2\alpha) + T \cos(180^\circ + 2\alpha) = \\ &= \frac{1}{2} (N_1 - N_2) \sin 2\alpha - T \cos 2\alpha = -t_{nt}, \end{aligned}$$

a znaczy się

$$|t_{nt}| = |t_{n't'}|$$

t.j. otrzymaliśmy twierdzenie, że naprężenia styczne w danym punkcie na dwóch poletkach do siebie prostopadłych są jednakowe. Rzuty tych naprężeń na odpowiednie osie mają znaki odwrotne, łatwo wywnioskować z rysunku, na podstawie tego, że zwrot jednego z naprężeń t_{nt} i $t_{n't'}$, jest zgodny z ruchem wskazówki zegara, drugiego jest odwrotny.

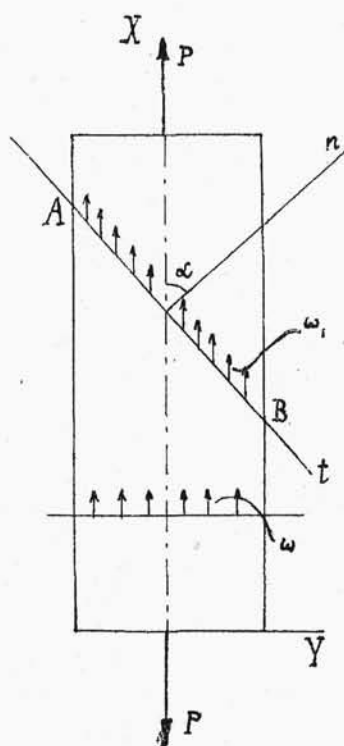
Ćwiczenie 1. Udowodnić, że w danym punkcie $t_{nm} = t_{mn}$, niezależnie od kąta mię-

dzy normalnemi m i n

§ 145. Przykład. Dla ilustracji powyższych wzorów rozpatrzmy pręt nieważki rozciągany siłami P i wyznaczmy dla dowolnego przecięcia AB naprężenia normalne i styczne oraz ich skrajne najmniejsze i największe wartości

Przyjmijemy przytem z Wytrzymałości Materiałów, że $N = \frac{P}{\omega}$ gdzie ω płaszczyzna przecięcia, podczas gdy wszystkie inne naprężenia zasadniczo równają się zeru. Przy takich założeniach mamy układ płaski naprężeń.

Naprężenia



Rys. 178

styczne i normalne na mocy wzorów /7/ i /8/ będą:

$$t_{nn} = \frac{1}{2} N_1 + \frac{1}{2} N_1 \cos 2\alpha = \frac{1}{2} N_1 (1 + \cos 2\alpha) = \frac{P}{2\omega} (1 + \cos 2\alpha)$$

$$t_{nt} = -\frac{1}{2} N_1 \sin 2\alpha = -\frac{P}{2\omega} \sin 2\alpha$$

W celu znalezienia ich skrajnych wartości przyrównajmy do zera pierwsze pochodne naprężeń składowych, mianowicie:

$$\frac{dt_{nn}}{d\alpha} = -\frac{1}{2} N_1 \sin 2\alpha \cdot 2 = -N_1 \sin 2\alpha = 0$$

stąd dla skrajnych wartości t_{nn} mamy:

$$\sin 2\alpha = 0, \quad 2\alpha = 0 \quad \text{lub} \quad 2\alpha = 180^\circ$$

zatem $\alpha = 0$ lub 90° .

Przedstawiając te wartości kąta α do otrzymanego wzoru na naprężenie normalne, mamy:

$$\max t_{nn} = \frac{1}{2} N_1 + \frac{1}{2} N_1 = N_1 = \frac{P}{\omega}$$

$$\min t_{nn} = \frac{1}{2} N_1 - \frac{1}{2} N_1 = 0.$$

Podobnie znajdziemy naprężenia skrajne dla naprężenia stycznego, mianowicie:

$$\frac{dt_{nt}}{d\alpha} = -N_1 \cos 2\alpha = 0$$

stad $\cos 2\alpha = 0$

czyli $2\alpha = \pm 90^\circ$, $\alpha = \pm 45^\circ$.

$$\begin{aligned} \text{Gdy } \alpha = 45^\circ \text{ mamy } t_{nt} &= -\frac{1}{2} N_1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{4} N_1 = -\frac{\sqrt{2}}{4} \frac{P}{\omega} \end{aligned}$$

zaś gdy $\alpha = -45^\circ$

$$t_{nt} = -\frac{1}{2} N_1 \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4} N_1 = \frac{\sqrt{2}}{4} \frac{P}{\omega}.$$

Zatem dla $\alpha = 45^\circ$ mamy *min* t_{nt} , zaś dla $\alpha = -45^\circ$ mamy *max* t_{nt} , dotyczy to jednak rzutu t_{nt} , gdy tymczasem samo naprężenie w obu wypadkach jest bezwzględną wartością, t.j.

$$|t_{nt}| = \frac{\sqrt{2}}{4} \frac{P}{\omega}.$$

Widzimy więc, że przy rozciąganiu pręta wzdłuż osi największe naprężenia styczne działają w płaszczyznach nachylonych pod 45° do osi.

Ćwiczenie 2. Niech stan płaski naprężony stanowi ścinanie t.j. $T \neq 0$, $N_1 = N_2 = 0$. Znaleźć kierunek i wielkość największego ciągnięcia i ściśnienia.

NAPRĘŻENIA GŁÓWNE.

§ 146. Biorąc teraz przypadek zupełnie ogólny ciała i działania sił, lecz pozostając jednak w granicach układu płaskiego naprężeń, możemy znaleźć w sposób podobny do użytego w powyższem zadaniu, kąt $\alpha = \alpha_0$, odpowiadający największemu naprężeniu normalnemu. Różniczkując względem α ogólny wzór /7/ na t_{nn} otrzymamy:

$$\frac{dt_{nn}}{d\alpha} = -(N_1 - N_2) \sin 2\alpha + 2T \cos 2\alpha = 0,$$

skąd znajdujemy α_0 :

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2T}{N_1 - N_2} \dots\dots\dots (9)$$

Wzór ten daje nam dwa rozwiązania:

$$2\alpha_0 \quad \text{i} \quad 2\alpha'_0 = 2\alpha_0 + 180^\circ,$$

istnieją więc dwa pierwiastki .

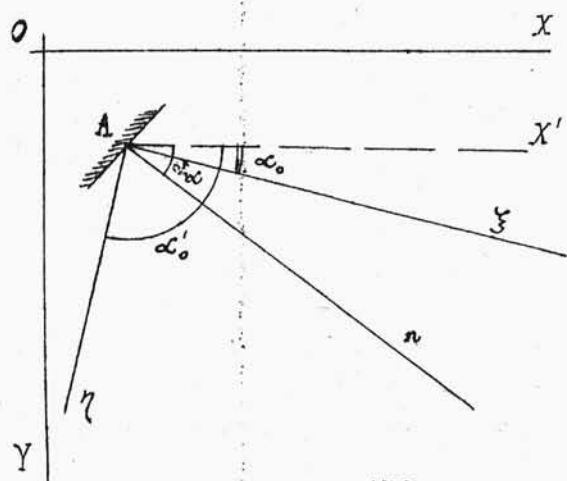
$$\alpha_0 \quad \text{i} \quad \alpha'_0 = \alpha_0 + 90^\circ.$$

Stąd wniosek, że w każdym punkcie A są dwa kierunki normalnej, dla których może być max. lub min. naprężenia normalnego. Kierunki te prostopadłe względem siebie oznaczamy przez ξ i η .

Wzór /8/ na naprężenie styczne możemy przeo-

stawić w sposób następujący:

$$t_{nt} = - \frac{\cos 2\alpha (N_1 - N_2)}{2} \left(\tan 2\alpha - \frac{2T}{N_1 - N_2} \right).$$



Rys. 179

Zważając na /9/, widzimy, że przy tych wartościach kąta α' , dla których t_{nn} jest max. lub minimum $t_{nt} = 0$.

Innymi słowy, dla poletek, w danym punkcie A , których normalne są skierowane wzdłuż prostych $A\xi$ i $A\eta$, naprężenia styczne nie istnieją, a występują tylko albo naprężenia ściskające albo rozciągające.

Dwa te kierunki ξ i η nazywamy "osiąmi głównymi" w danym punkcie. Dla każdego punktu ciała osie główne wogóle są różne. Naprężenie odpowiadające osi głównej ξ będzie t_ξ , rzut jego na tę oś czyli $t_{\xi\xi}$ oznaczmy przez N_ξ . Podobnie, naprężenie odpowiadające osi η jest t_η , a rzut je-

go na tę oś: $t_{\eta\eta} = \mathcal{N}_2$. Naprężenia $t_{\xi\xi}$ i $t_{\eta\eta}$ nazywają się naprężeniami głównymi. Często jednak dla krótkości rzuty \mathcal{N}_1 i \mathcal{N}_2 nazywają też naprężeniami głównymi*. Łatwo jest obliczyć naprężenia główne w zależności od zasadniczych naprężeń N_1, N_2, T , orjentowanych wzdłuż osi OX i OY . Wzór dla $\mathcal{N}_1 = t_{\xi\xi}$ otrzymamy, kładąc w /7/ $\alpha = \alpha_0$, mianowicie

$$\mathcal{N}_1 = \frac{1}{2}(N_1 + N_2) + \frac{1}{2}(N_1 - N_2)\cos 2\alpha_0 + T\sin 2\alpha_0;$$

Naprężenie główne $\mathcal{N}_2 = t_{\eta\eta}$ dla którego $\alpha = \alpha'_0 = 90^\circ + \alpha_0$ na podstawie wzoru /7/ odpowiednio będzie:

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_2 &= \frac{1}{2}(N_1 + N_2) + \frac{1}{2}(N_1 - N_2)\cos(2\alpha_0 + 180^\circ) + T\sin(2\alpha_0 + 180^\circ) = \\ &= \frac{1}{2}(N_1 + N_2) - \frac{1}{2}(N_1 - N_2)\cos 2\alpha_0 - T\sin 2\alpha_0.\end{aligned}$$

Wzory te możemy przedstawić w innej postaci, w zależności tylko od naprężeń zasadniczych N_1, N_2, T , rugując z nich α_0 , a mianowicie przyjmując pod uwagę wzór /9/,

skąd na zasadzie przeróbek trygonometrycznych

*W podręcznikach spotyka się czasem wadliwy termin naprężenie „skośne” zamiast główne.

będzie:

$$\cos 2\alpha_0 = \frac{N_1 - N_2}{\sqrt{4T^2 + (N_1 - N_2)^2}}, \quad \sin 2\alpha_0 = \frac{2T}{\sqrt{4T^2 + (N_1 - N_2)^2}}.$$

Podstawiając te wartości w powyższe wzory, otrzymamy:

$$\left. \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2}(N_1 + N_2) \pm \frac{1}{2}\sqrt{4T^2 + (N_1 - N_2)^2}.$$

Jeżeli N_1 , N_2 i T są już funkcjami znanymi x i y , to prawa część równania /9/ wyraża też znaną funkcję $\tilde{F}(x, y)$ i mamy, że $\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \tilde{F}(x, y)$. Poletko główne ds prostopadłe do $A\eta$, t.j. mające kierunek $A\xi$ jest pochylone do osi OX pod kątem α_0 . Powyższe równanie możemy też napisać w postaci:

$$\frac{2 \operatorname{tg} \alpha_0}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha_0} = \tilde{F}(x, y) = \frac{1}{f(x, y)}.$$

skąd

$$\operatorname{tg} \alpha_0 = -f(x, y) \pm \sqrt{1 + f^2(x, y)}.$$

otrzymaliśmy tutaj dwie wartości na α_0 , jedna jest $\alpha_0 = \alpha(\xi, x)$, druga $\alpha'_0 = \alpha(\eta, x)$, rzeczywiście są to kierunki prostopadłe,

gdyż iloczyn powyższych wartości równa się

$[f^2 - (1 - f^2)] = -1$. Kąt \mathcal{L}_0 nachylenia
poletka ds jest więc znaną funkcją x, y .

Możemy wyobrazić sobie to poletko i ściślejsz
łuk ds zbudowane, początek jego jest w
punkcie $A(x, y)$, koniec w pewnym punkcie

A_1 , którego rzędne x_1, y_1 , można obli-
czyć zapomocą wzoru na $\tan \mathcal{L}_0$: od punktu

A_1 w podobny sposób można sobie wyobra-
zić zbudowany drugi łuk ds , i t.d. Punkty

A, A_1, A_2, \dots tworzą pewną krzywą, do której
styczna w dowolnym punkcie jest kierunkiem
osi głównej ξ w tym punkcie. W podobny
sposób można sobie wyobrazić krzywą

A, A', A'_2 , dającą kierunki drugiej osi
głównej η . Krzywe te przecinają się w
punkcie A pod kątem prostym. Można sobie
wyobrazić podobne krzywe w każdym punkcie
ciała, czyli siatkę tych krzywych. Krzywe
te są w punktach przecięcia prostopadłe do
siebie, tworzą więc układ trajektorij ortogo-
nalnych. Krzywe te nazywają się torami naprę-
żeń głównych. Łatwo otrzymać równanie róż-
niczkowe tych krzywych, zastępując w wyraże-

niu na $tg \alpha$, tg przez pochodną $\frac{dy}{dx}$,
 przytem dx i dy oznaczają rzuty na osie
 x i y łuku ds poletka, mamy zatem równanie:

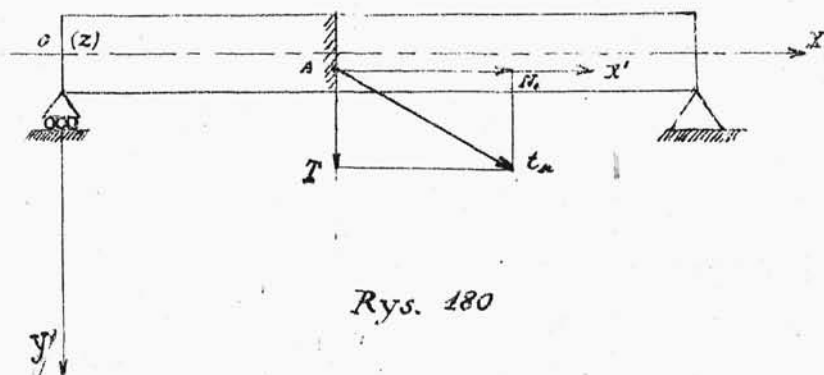
$$\frac{dy}{dx} = -f(x, y) \pm \sqrt{1 + f^2(x, y)},$$

przytem (+) dotyczy toru jednego z głównych naprężeń, (-) drugiego. Ponieważ równanie różniczkowe jest ogólnie nieliniowe, więc kwadratura nie zawsze jest możliwa.

Ćwiczenie 3^x/. Zbudować tory naprężeń głównych dla belki poziomej, zamocowanej jednym końcem i obciążonej na drugim końcu siłą pionową /p. Föppl. Festigkeitslehre, 1914. str. 115/.

§ 147. Przykład. Rozpatrzmy belkę zginaną w płaszczyźnie bezwładności Oxx . Przybliżona teoria Wytrzymałości Materiałów podaje wzory na naprężenia $N, (\sigma)$ i $T(\tau)$, nie określając innych naprężeń, t.j. uważając je za równe 0. Wobec tego mamy układ płaski naprężeń.

x/ Gwiazdką będą oznaczane ćwiczenia trudniejsze.



Rys. 180

Napężenie t_α w punkcie A na poletku prostopadłym do Ox , czyli t_α składa się z naprężeń N i T , na które Wytrzymałość Materiałów podaje wzory:

$$N = \sigma = \frac{M}{J} y ;$$

$$T = \tau = \frac{\tau S}{\delta} ;$$

gdzie M moment gnący, J moment bezwładności względem osi Oz , τ - siła tnąca, S - moment statyczny, przecięcia poniżej prostej poziomej w A względem osi $Az' \parallel Oz$, wreszcie δ - szerokość prze-

cięcia w A .

Stąd na mocy /9/ i /10/ mamy równanie na kierunki osi głównych:

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2\tau}{\sigma} = \frac{2CS}{6M_Y} ;$$

oraz wzory na naprężenia główne:

$$\mathcal{N}_1 = \frac{1}{2}\sigma + \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} ; \quad \mathcal{N}_2 = \frac{1}{2}\sigma - \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}.$$

Jeżeli punkt A znajduje się na osi pręta, to $\sigma = 0$ i $\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \infty$, a zatem $\alpha_0 = 45^\circ$ i $\alpha'_0 = -45^\circ$ t.j. w punktach płaszczyzny obojętnej ($y = 0$) kierunki naprężeń głównych są nachylone pod kątem 45° do tej płaszczyzny.

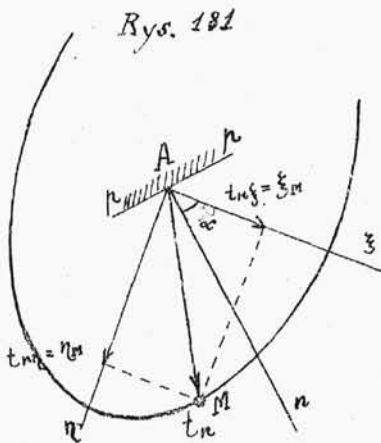
ELIPSA NAPRĘŻEŃ.

§ 148. Ciekawą ilustrację wykreślną naprężeń w danym punkcie A ciała można otrzymać w sposób następujący. Przyjmując zamiast dowolnych osi Ox i Oy osie $A\xi$ i $A\eta$, otrzymamy, że wzory /3/ i /4/ przyjmą postać:

$$\tau_{n\xi} = \mathcal{N}_1 \cos \alpha ; \quad \tau_{n\eta} = \mathcal{N}_2 \sin \alpha \dots\dots (III)$$

Z rysunku widzimy, że $t_{n\xi}$ i $t_{n\eta}$ są rzutami t_n na osie $A\xi\eta$, czyli rzędne-

mi ξ_M i η_M punktu M - końca odcinka t_n , na te osie. Mamy więc



$$\mathcal{N}_1 \cos \alpha = \xi_M \quad ; \quad \mathcal{N}_2 \sin \alpha = \eta_M$$

skąd

$$\cos \alpha = \frac{\xi_M}{\mathcal{N}_1} \quad ; \quad \sin \alpha = \frac{\eta_M}{\mathcal{N}_2} \quad ;$$

a następnie ponieważ $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$ otrzymujemy:

$$\frac{\xi_M^2}{\mathcal{N}_1^2} + \frac{\eta_M^2}{\mathcal{N}_2^2} = 1.$$

jest to równanie elipsy, jeżeli ξ_M i η_M są zmiennymi. Zmieniając kierunek poletka n , otrzymamy każdy raz inne naprężenie t_n , koniec M wektora naprężenia w punkcie A opisuje przytem miejsce geometryczne - elipsę, wyrażoną powyższem równaniem.

W celu wykreślenia takiej elipsy dla danego punktu należy wysnaczyć kierunki główne, odłożyć na nich wielkości naprężeń głównych i odcinki te uważać za półosie elipsy.

Ćwiczenie 4. Zbudować w wypadku ścinania /ćw.2/ w danym punkcie elipsę naprężeń.

NAJWIĘKSZE NAPRĘŻENIE STYCZNE.

§ 149. Chcąc znaleźć w ogólnym przypadku w danym punkcie A kierunek poletka, przy którym występuje maximum naprężenia stycznego, skorzystamy z wzoru /8/, przyjmując osie główne $A\xi$ i $A\eta$ za osie współrzędnych, wzór /8/ przyjmie wówczas postać:

$$t_{nt} = -\frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_2) \sin 2\alpha$$

przytem $\alpha = \angle (n, \xi)$.

Z wzoru tego widać, że $\text{extr. } t_{nt}$ będzie przy $\sin 2\alpha = \pm 1$ skąd $2\alpha = \pm 90^\circ, \pm 270^\circ$, a zatem $\alpha = \pm 45^\circ, \pm 135^\circ$; t.j. normalna An jest nachylona do osi $A\xi$ pod 45° z jednej lub drugiej strony, a zatem $\text{extr. } t_{nt}$ zachodzi w dwóch poletkach, nachylonych po 45° do osi

głównej.

W przykładzie /§ 147/ mamy np., że dla punktów na osi Ox max. t_{nt} działa na poletko pionowe, nachylone po 45° do osi głównej.

KOŁO NAPRĘŻEN.

§ 150. Rozkład naprężeń w danym punkcie ciała może być również przedstawiony za pomocą pewnej konstrukcji geometrycznej, podanej przez Rankine'a i Mohra. Biorąc znowu osie główne za osie współrzędnych, napiszemy równanie /7/ i /8/ w postaci:

$$t_{nn} = \frac{1}{2}(\mathcal{N}_1 + \mathcal{N}_2) - \frac{1}{2}(\mathcal{N}_2 - \mathcal{N}_1) \cos 2\alpha \dots (12)$$

$$t_{nt} = \frac{1}{2}(\mathcal{N}_2 - \mathcal{N}_1) \sin 2\alpha \dots (13)$$

Z wzorów tych widać, że wyrazy zależne od α mogą być wyrażone, jako rzędne koła o promieniu $\pm \frac{1}{2}(\mathcal{N}_1 - \mathcal{N}_2)$. Założmy, że $0 < \mathcal{N}_1 < \mathcal{N}_2$, wówczas będzie $t_{nn} > 0$ i $t_{nt} > 0$, za promień koła przyjmijemy: $\rho = \frac{1}{2}(\mathcal{N}_2 - \mathcal{N}_1)$ i opiszemy okrąg od dowolnego punktu C , prócz tego ze względu na wzór /12/ odłożymy

$OC = \frac{1}{2}(N_1 + N_2)$. Wówczas $t_{nn} = OC - \rho \cos 2\alpha$,
gdyż nawet przy $\cos 2\alpha = 1$, $t_{nn} = N_1$; odpowiada
to lewemu punktowi N_2 przecięcia koła z
prostą OC ; $t_{nn} = \rho \sin 2\alpha$ może być $>$ lub < 0
zależnie od tego, czy $2\alpha < 180^\circ$, czy też

$2\alpha > 180^\circ$. Przypuśćmy np. że $0 < 2\alpha < 90^\circ$
wtedy $t_{nn} > 0$, $\rho \cos 2\alpha > 0$, $t_{nn} > 0$ i jest rze-
czą jasną, że możemy przyjąć za ρ promień

CR , za kąt 2α kąt OCR , wtedy bę-
dzie: $t_{nn} = OC - CP > 0$ i $t_{nt} = PR > 0$

Łatwo zauważyć, że jeżeli przyjmiemy osie

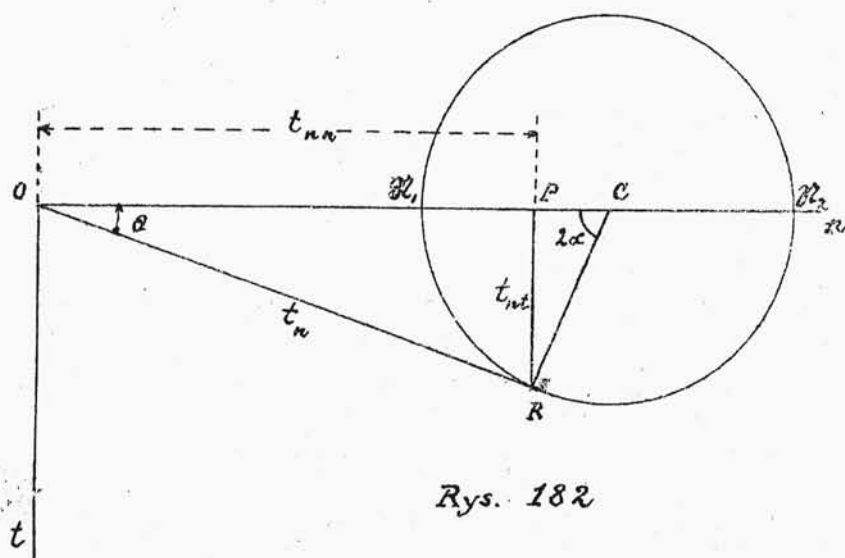
Ont , wskazane na rysunku, to otrzymamy
ogólnie t_{nn} i t_{nt} jako odcięta i rzędną
takiego punktu na okręgu koła, że kąt OCR ,
odkładany odwrotnie do ruchu wskazówki zegara
równa się 2α , przytem $\alpha = \angle(n, \xi)$. Przy
 $\alpha = 0$ otrzymujemy $t_{nn} = N_1 = ON_1$, $t_{nt} = 0$; przy
 $2\alpha = 180^\circ$, $t_{nn} = N_2 = ON_2$, $t_{nt} = 0$; przy $0 < 2\alpha < 180^\circ$
 $t_{nt} > 0$ i punkt R leży na dolnym pół-
okręgu, przy $2\alpha > 180^\circ$, $t_{nt} < 0$ i punkt R
leży na górnym półokręgu.

Jeżeli byłoby $N_1 > N_2$, to oznaczając
przez ρ wielkość $\frac{1}{2}(N_1 - N_2)$ mielibyśmy:

$$t_{nn} = OC + \rho \cos 2\alpha, \quad t_{nt} = -\rho \sin 2\alpha;$$

łatwo zauważyć, że należy wtedy odkładać kąt 2α też od CN_1 odwrotnie do wskazówki zegara, w tym wypadku $ON_2 < ON_1$ t.j. punkty N_1 i N_2 zajmowałyby ^{wzajemnie} odwrotne miejsce niż na rys.182. Jednak wypadek ten może być sprowadzony do poprzedniego przez zmianę nazwy osi ξ na η' , i $(-\eta)$ na ξ' ; rzeczywiście wówczas N_2 zmieni się na N'_1 , a N_1 na N'_2 i będziemy mieli $N'_1 < N'_2$; prócz tego będziemy mieli $\alpha' = 90^\circ + \alpha$, $2\alpha' = 180^\circ + 2\alpha$, a zatem kąt 2α odłożony od CN_1 / nowa nazwa CN'_2 / wyznaczy promień CR , kąt $2\alpha' = 180^\circ + 2\alpha$ zaś odłożony od CN'_1 /dawna nazwa CN_2 / wyznaczy ten sam promień.

Zauważmy, że na powyższym rysunku ^{boki} trójkąta OPR , wyrażającego, że $\bar{t}_n = \bar{t}_{nn} + \bar{t}_{nt}$, mają względem siebie takie same położenie, jak naprężenie t_n oraz składowe t_{nn}, t_{nt} mają w danym punkcie ciała, co jasnym jest z porównania z rys.183, jedynie kierunki na rys.182 nie są rzeczywiste, lecz takie, jak gdyby poletko Ap wraz z naprężeniami ob-



Rys. 182

rócić do położenia pionowego. Rys.182 daje więc także kąt θ między kierunkiem t_n a normalną n

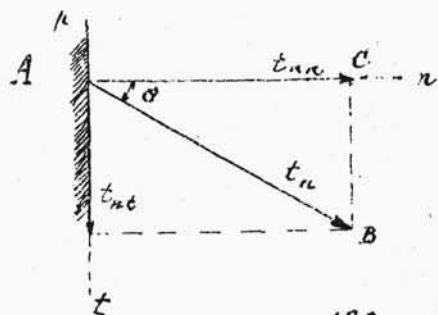
jest to na tym rys.kąt nOR , liczony tak jak i na rys.183 w kierunku ruchu wskazówki zegara.

Wykres potwierdza więc także wzory:

$$t_{nn} = t_n \cos \theta ; \quad t_{nt} = t_n \sin \theta .$$

Widzimy, że wykres na rys.182 zawiera w sobie wszystkie wielkości, wchodzące we wzory

naprężeń dla wszelkich poletek w danym punkcie ciała.



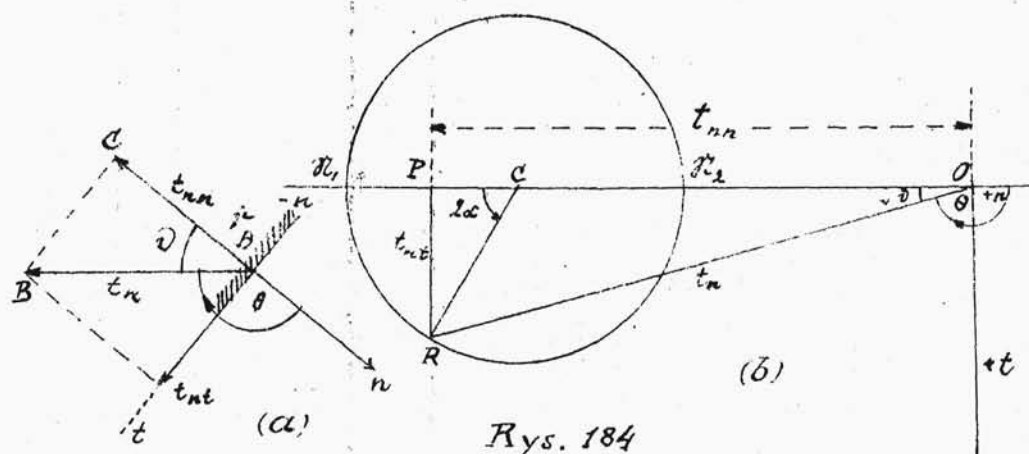
Rys. 183

W teorii parcia ziemi wykres ten ma również zastosowanie z pewną tylko różnicą, ponieważ tam naprężenia normalne są wyłącznie ściskające, t.j. ujemne,

jak np. wystawiono na rys. 184 a, gdzie składowa t_{nn} ma zwrot odwrotny do zwrotu normalnej zewnętrznej An do poletka An ; z rys. tego widać, że kąt ϕ , liczony zawsze od An w kierunku ruchu wskazówki zegara jest w danym wypadku większy od 90° ; składowa t_{nt} oczywiście może być dodatnia lub ujemna. Naprężenia \mathcal{N}_1 i \mathcal{N}_2 , jako składowe normalne, są zatem ujemne i przy zachowaniu tych samych kierunków osi On i Ot należy je odłożyć nalewo od punktu O /rys. 184 b/. Założmy przytem, że $\mathcal{N}_1 < \mathcal{N}_2$ t.j.

$|\mathcal{N}_1| > \mathcal{N}_2$. Łatwo sprawdzić, że sposób liczenia kąta $2\mathcal{L}$ na wykresie pozostanie

tutaj taki sam, jak na rys.183, gdzie też $\mathcal{N}_1 < \mathcal{N}_2$, mianowicie kąt ten należy liczyć od $C\mathcal{N}_1$ w kierunku ruchu odwrotnym do wskazówki zegara. Przypuśćmy, że w danym wypadku $2\mathcal{L} < 90^\circ$; wtedy z wzoru /12/ widać, że



Rys. 184

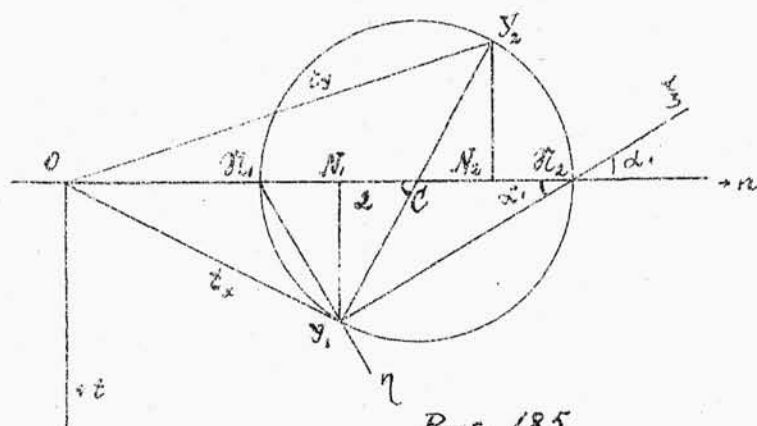
$t_{nn} = OC + CP$, przytem $OC < 0$ i $CP = CR \cos 2\mathcal{L}$. j. położenie punktu P odpowiada położeniu R, gdyż założyliśmy, że $2\mathcal{L} < 90^\circ$. Następnie z wzoru /13/ widać, że $t_{nt} < 0$ i przytem $t_{nt} = PR = CR \sin \mathcal{L}$. Jak i w powyższym wykresie i tutaj OR wyobraża t_n , kąt $nOR = \theta$, trójkąt OPR na rys./b/ odpowiada trójkątowi na rys./a/, tak samo zgodne jest położenie osi Ont i

Ant względem tych trójkątów. Zauważmy jeszcze, że kąt ϑ - ostry /rys.a/ między t_n a linią normalnej n , odpowiada na rys.b kątowi $\mathcal{N}_2 O R = \vartheta$. W sposób powyższy może być zbudowane koło naprężeń w wypadku, gdy \mathcal{N}_1 i \mathcal{N}_2 są różnych znaków, wówczas punkt O będzie się znajdował wewnątrz koła. Zauważmy, że jeżeli punkt O znajduje się zewnątrz koła co bywa przy naprężeniach głównych o jednakowych znakach, to istnieje $\max \vartheta$ - kąta między naprężeniem a normalną dla poletek w danym punkcie ciała; jeżeli zaś punkt O znajduje się wewnątrz koła, to kąt ϑ może przybierać wszelkie wartości od 0 do 360° .

§ 151. W poprzednim § zakładaliśmy, że budując koło naprężeń znamy naprężenia główne \mathcal{N}_1 i \mathcal{N}_2 czyli dwa punkty koła \mathcal{N}_1 i \mathcal{N}_2 . Oczywiście, że koło naprężeń dla danego punktu ciała możemy zbudować zapomocą i innych danych np. składowych dwóch naprężeń $t_n = OR$ i $t_{n'} = OR'$ na dwóch dowolnych poletkach Ap i Ap' o normalnych An i An' , ponieważ znamy wtedy dwa punkty koła R i R' i wiemy,

że środek jego leży na danej prostej On .
W poszczególnym wypadku mogą być wykorzystane poletka prostopadłe do osi współrzędnych Ox i Oy t.j. naprężenia t_x i t_y , których składowe wzdłuż kierunków osi współrzędnych są to naprężenia: N_1 , N_2 i T . Założmy przytem że naprężenia te są dodatnie. Należy zwrócić tutaj uwagę, iż w kole naprężeń rzędne OP i PR /rys.182/ przedstawiają naprężenia normalne i styczne /ściślej ich rzuty/ na danym poletku, orjentowane względem osi An , At określonych w ten sposób, że układ Ant jest lewoskrętny /§ 144/. Mając to na uwadze rozpatrzmy skład ^{owe} naprężenia t_x , są to $N_1 = t_{xx}$ i $T = t_{xy}$, liczone jako dodatnie na osie $Ax'y'$ /rys.171/, z rys. tego widzimy, że układ $Ax'y'$ jest też lewoskrętny, a więc możemy odłożyć /rys.185/ $t_{xx} = N_1 = ON_1 > 0$ i $t_{xy} = T = N_1 Y_1 > 0$. Odcinek OY_1 będzie przedstawiał naprężenie t_x . Rozpatrzmy teraz składowe naprężenia t_y , są to $t_{yy} = N_2$ i $t_{yx} = T$ /rys.171/, lecz składowe te są liczone na osie $A'y'x'$, przytem oś Ay' jest normalną, odpowiadającą osi n ; widać z rys.

że układ ten jest prawoskrętny; układ lewoskrętny otrzymamy, jeżeli zamiast osi $A'x'$



Rys. 185

wprowadzić oś $A't'$ ze zwrotem przeciwnym, wówczas rzut t_y na taką oś będzie:

$t_{y'c} = -t_{yx} = -T < 0$. Mamy więc dla naprężenia t_y składową normalną $t_{xy} = N_2 = ON_2 > 0$ i składową styczną $t_{y'c} = -T = N_2 Y_2 < 0$. Ponieważ $P_1 Y_1 = P_2 Y_2$ środek C koła leży pośrodku średnicy $Y_1 Y_2$. Przy budowie powyższej konstrukcji otrzymaliśmy wielkości naprężeń głównych - są to odcięte punktów przecięcia koła z osią On . Oczywiście jest rzeczą obojętną, które z tych naprężeń nazwać przez N_1 , lub N_2 , zachowując dla odpowiednich osi nazwy ξ i η . Należy tylko pamiętać podaną w poprzednim § regułę odkła-

dania kąta 2α - zawsze od odcinka CM ,
w kierunku odwrotnym do ruchu wskazówki zegara. Przyjmując np. $N_1 < N_2$ należy oznaczyć punkt przecięcia koła z osią n bliższy do O przez N_1 dalszy przez N_2 , jak na rys. 185. Wówczas $\angle N_1 C Y_1 = 2\alpha_1$, gdzie $\alpha_1 = \angle(\xi, x)$, $\angle N_1 Y_1 N_2 Y_2 = 2\alpha_2$, gdzie $\alpha_2 = \angle(\xi, y)$, należy przytem pamiętać, że ^{by rzeczywiście} kąty α liczymy od osi ξ w kierunku ruchu wskazówki zegara. Oczywiście, że kąt $\alpha_0 = \angle(x, \xi)$ /§ 146/ równa się co do wartości bezwzględnej kątowi α_1 ponieważ jednak jest liczony w kierunku ruchu wskazówki zegara od osi x do ξ , zatem $\alpha_1 = -\alpha_0$. Podobnie można zauważyć, że $\alpha_2 = 90^\circ + (90^\circ - \alpha'_0) = 180^\circ - \alpha'_0$, gdzie $\alpha'_0 = \angle(x, \eta)$. Z wykresu otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 2\alpha_1 &= \frac{N_1 Y_1}{N_1 C} = \frac{T}{\frac{1}{2}(N_2 - N_1)} = -\frac{2T}{N_1 - N_2} = -\operatorname{tg} 2\alpha_0 \\ \operatorname{tg} 2\alpha_2 &= -\frac{N_2 Y_2}{N_2 C} = -\frac{(-T)}{\frac{1}{2}(N_2 - N_1)} = -\frac{2T}{N_1 - N_2} = -\operatorname{tg} 2\alpha'_0 \end{aligned}$$

t. j. otrzymaliśmy potwierdzenie wzoru /9/.

Z rys. widać, że $\angle N_1 N_2 Y_1 = \alpha_1 = \angle(\xi, x)$, jeżeli więc oś On jest wykreślona równolegle do osi x to prosta YN_1 jest rze-

czywistym kierunkiem osi ξ , a zatem \mathcal{N}, \mathcal{Y} - kierunkiem η .

PRZYKŁAD. Zbudować koło naprężeń w punkcie A dla przykładu podanego w § 147. Mamy

$$N_1 = \frac{M_1}{T}, \quad N_2 = 0$$

$$T = \frac{\mathcal{C}S}{\delta J}, \quad \text{a zatem } OP_1 = N_1,$$

$$P_1 Y_1 = T,$$

i otrzymamy punkt

Y_1 , oraz naprężenie

$t_x = OY_1$. Następnie

$OP_2 = N_2 = 0$ t.j.

punkt P_2 wpada na 0

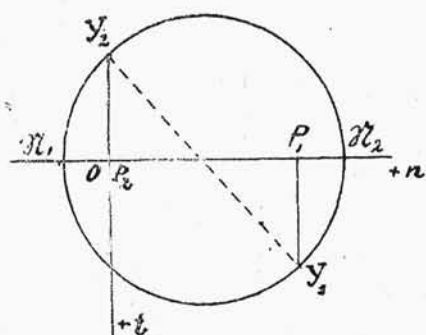
i $OY_2 = -T$ jest jedno-

cześnie naprężenie t_y . Z wykresu tego widać, że $\mathcal{N}_1 = O\mathcal{N}_1 < 0$, a $\mathcal{N}_2 = O\mathcal{N}_2 > 0$, o ile $M > 0$ i $\mathcal{C} > 0$.

Ćwiczenie 5. Zbudować koło naprężeń dla włókna obojętnego w wypadku gięcia płaskiego /§ 147/.

Ćwiczenie 6. Znaleźć wykreślnie w wypadku gięcia płaskiego kierunki osi głównych w dowolnym punkcie A zapomocą koła naprężeń.

Ćwiczenie 7. W wypadku ogólnym płaskiego układu naprężeń znaleźć zapomocą koła naprę-



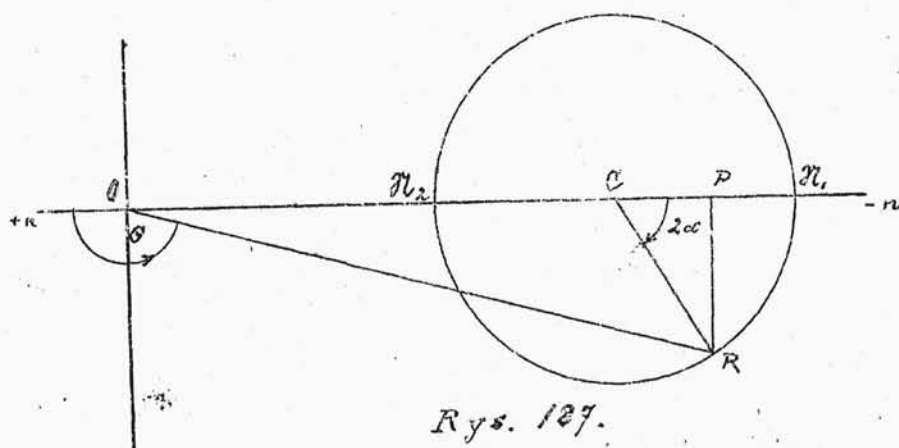
Rys. 136

zeń zależność

$$\mathcal{N}_1 - \mathcal{N}_2 = \sqrt{4T^2 + (\mathcal{N}_1 - \mathcal{N}_2)^2}.$$

Ćwiczenie 8. Udowodnić /wzór /9/ za pomocą koła naprężeń w wypadku $\mathcal{N}_1 > \mathcal{N}_2$.

§ 152. Czasem ze względów rysunkowych przy wyznaczaniu parcia ziemi dogodniej wy-



kres dla naprężeń ściskających obrócić około osi Ot o 180° ; wówczas dodatni kierunek osi On jest zwrócony nalewo, - ujemny na-prawo; oczywiście że kąty 2α i θ należy wtedy liczyć w kierunku odwrotnym t.j. 2α też od CN_1 według ruchu wskazówki zegara, θ - odwrotnie. Wykres na rys.184 przedsta-

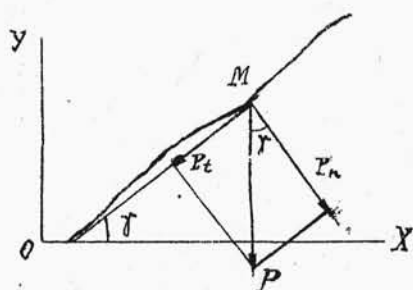
wi się wtedy jak na rys. 187.

Warunki wpływające z rozpatrywania ziemi,
jako środowiska sypkiego lub spoistego.

STOK NATURALNY.

§ 153. Po tych wstępnych rozważaniach co do środowiska ciągłego wogóle, przechodzimy do właściwej teorii parcia ziemi. Ziemia jest środowiskiem bardzo niejednorodnym. Dla uproszczenia weźmy pod uwagę suchy piasek.

Wiemy z doświadczenia, że piasek, swobodnie nasypany, nie może utworzyć powierzchni pionowej, lecz utworzy płaszczyznę pochyłą, nachyloną do poziomu pod pewnym kątem. Linję prostą, wskazującą to nachylenie, nazywamy "stokiem naturalnym".



Rys. 188

Tworzenie się sto-
ku naturalnego mo-
żemy objaśnić w ten
sposób: niech na
cząstkę M piasku
na powierzchni dzia-
ła ciężar P , któ-