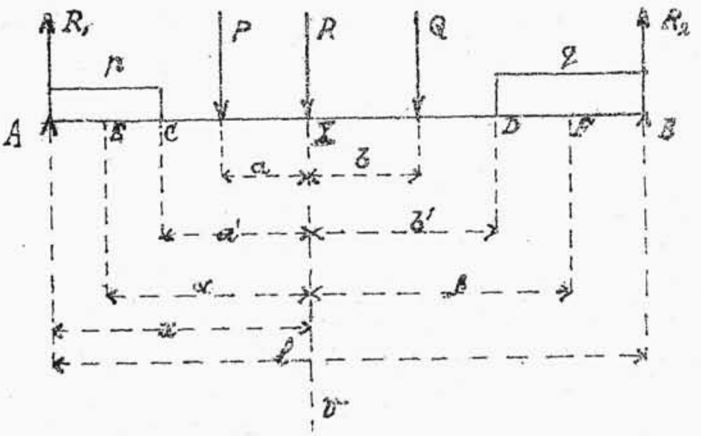
le nie gra roli i $max\ M$ zachodzi tak, jak w wypadku gdyby obciążenia równomiernego nie było, t.j. pod jedną z osi pociągu.

Ponieważ wyłożony sposób jest wystarczający do oznaczenia tej osi pociągu, ogólnie osi obciążenia ruchomego, pod którą zachodzi $max\,max\,M$ to obliczenie można byłoby zakończyć dokładnie, gdybyśmy potrafili analitycznie znaleźć dokładne położenie pociągu t.j. dokładne położenie tej osi, pod którą moment jest max.

Do tego celu posłuży następujące twierdzenie.

TWIERDZENIE O $MAX.\ M$ POD DANĄ OSIĄ OBCIĄŻENIA.

§ 126. Niech na belkę AB /rys.158/ prócz ciężaru własnego g $^{t}/_{m.}$ działa obciążenie ruchome, którego część jest pokazana na rysunku, mianowicie ciśnienie R osi w pewnym punkcie X, odległym o x od punktu A; na lewo od osi R są osie, których ciśnienia oznaczymy przez P, a stałe ich odległości od osi R przez a; naprawo są osie, których ciśnienia oznaczymy przez Q, a stałe ich odległości od osi R - przez b. Przypuśćmy, że prócz tych ciężarów skupionych mamy jeszcze obciążenia ruchome ciągłe i równomierne /np. w moście szosowym tłum ludzi/, pierwsze $p\ t/m$ na odcinku AC w stałej odległości $CX = a'$ od osi R i drugie $q\ t/m$ na odcinku DB w stałej odległości $XD = b'$ od osi R.



Rys. 158

Przy przesuwaniu się pociągu np. od B do A odcinek AC z obciążeniem p zmniejsza się, odcinek zaś DB z obciążeniem q powiększa się i odwrotnie przy przesuwaniu się pociągu naprawo. Całkowite położenie obciążenia określa się przez położenie osi R, czyli przez odległość $AX = x$. Będziemy teraz poszukiwać największej wartości momentu gnącego $\max M$ w przecięciu X pod osią R przy przesuwaniu się pociągu, t.j.

przy zmianie odciętej x . Załóżmy, że będą to tylko takie zmiany, przy których żaden z ciężarów P lub Q nie zejdzie z belki.

Oznaczmy położenie dowolnego punktu E obciążenia p przez bieżącą odległość α od punktu I i odpowiednio przez β odległość dowolnego punktu F obciążenia q. Napiszmy teraz wyrażenie momentu gnącego w przecięciu I :

$$M = R_1 x - \Sigma Pa - \int_{a'}^{x} p\, d\alpha \cdot \alpha - \frac{1}{2} g x^2 \ldots\ldots (1)$$

Wielkość reakcji R_1 określi się z równania:

$$R_1 \cdot l - \Sigma P(l-x+a) - \int_{a'}^{x} p\, d\alpha \cdot (l-x+\alpha) -$$
$$-\Sigma Q(l-x-b) - \int_{b'}^{l-x} q\, d\beta \cdot (l-x-\beta) -$$
$$-R(l-x) - \frac{1}{2} g l^2 = 0.$$

Stąd

$$R_1 = \frac{l-x}{l} \Sigma P + \frac{1}{l} \Sigma Pa + \frac{l-x}{l} \int_{a'}^{x} p\, d\alpha + \frac{1}{l} \int_{a'}^{x} p\, d\alpha \cdot \alpha +$$
$$+ \frac{l-x}{l} \Sigma Q - \frac{1}{l} \Sigma Qb + \frac{l-x}{l} \int_{b'}^{l-x} q\, d\beta - \frac{1}{l} \int_{b'}^{l-x} q\, d\beta \cdot \beta +$$
$$+ \frac{l-x}{l} R + \frac{1}{2} g l =$$

$$= \frac{l-x}{l}\left[\Sigma P + \Sigma Q + R + p(x-a') + q(l-x-b')\right] +$$

$$+ \frac{1}{l}\left(\Sigma Pa + \int_{a'}^{x} p\, d\alpha \cdot \alpha\right) - \frac{1}{l}\left(\Sigma Qb + \int_{b'}^{l-x} q\, d\beta \cdot \beta\right) +$$

$$+ \frac{1}{2} q l \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

Wprowadźmy dla krótkości następujące oznaczenia: Wielkość wypadkowej wszystkich sił, działających na belkę oznaczmy przez W :

$$W = \Sigma P + \Sigma Q + R + p(x-a') + q(l-x-b') + ql$$

Oznaczmy następnie przez L i N następujące sumy:

$$L = -\Sigma Pa - \int_{a'}^{x} p\, d\alpha \cdot \alpha = -\Sigma Pa - \frac{1}{2} \cdot p(x^2 - a'^2).$$

$$N = \Sigma Qb + \int_{b'}^{l-x} q\, d\beta \cdot \beta = \Sigma Qb + \frac{1}{2} q\left[(l-x)^2 - b'^2\right].$$

Jest rzeczą jasną, że L i N co do wielkości i znaku oznaczają odpowiednio sumę momentów względem $\overline{X}$ sił: P i p oraz Q i q. Przy tych oznaczeniach wyrażenia /1/ i /2/ przyjmą postać:

$$M = R_l x + L - \frac{1}{2} q x^2 \quad \ldots \ldots \quad (1')$$

$$R_r = (W - ql)\frac{l-x}{l} - \frac{1}{l}(L + N) + \frac{1}{2} q l \ldots (2')$$

Podstawiając wyrażenie $(2')$ w $(1')$ otrzymamy

$$M=(W-gl)\frac{(l-x)x}{l}-(L+N)\frac{x}{l}+\frac{1}{2}glx+L-\frac{1}{2}gx^2=$$

$$=(W-gl)\frac{(l-x)x}{l}-L\left(\frac{x}{l}-1\right)-N\frac{x}{l}+\frac{1}{2}g(l-x)x.$$

A zatem ostatecznie otrzymamy wyrażenie na M w postaci:

$$M=(W-\tfrac{1}{2}gl)\frac{(l-x)x}{l}-L\left(\frac{x}{l}-1\right)-N\frac{x}{l}\;.\;.\;.\;.\;(3)$$

Chcąc znaleźć położenie osi I t.j. odciętą jej $x=x_0$, przy której M jest max, przyrównamy $\frac{dM}{dx}$ do zera, przytem otrzymamy po skróceniu przez l następujące równanie:

$$(W-\tfrac{1}{2}gl)(l-2x)-L-N+(l-x)x\cdot\frac{dW}{dx}+(l-x)\frac{dL}{dx}-x\frac{dN}{dx}=0$$

Z wyrażeń na W, L i N otrzymujemy:

$$\frac{dW}{dx}=p-q\;;\;\frac{dL}{dx}=-px\;;\;\frac{dN}{dx}=-q(l-x).$$

Ostatnie trzy wyrazy powyższego równania będą więc

$$(l-x)x(p-q)-(l-x)xp+x(l-x)q=0,$$

a zatem równanie do wyznaczenia $x=x_0$ będzie następujące:

$$(W-\tfrac{1}{2}ql)(l-2x)=L+N \ldots\ldots (4)$$

Ponieważ W jest funkcją pierwszego stopnia od x, L i N - drugiego, a więc jest to równanie kwadratowe względem x. Jeżeli $p=q=0$ to W, L i N są stałe i równanie jest pierwszego stopnia. Podstawiając w równanie /4/ jeden z pierwiastków x_0, otrzymamy:

$$(W_0-\tfrac{1}{2}ql)(l-2x_0)=L_0+N_0 \ldots\ldots (5)$$

gdzie W_0, L_0, N_0 oznaczają W, L i N po podstawieniu $x=x_0$

Równość /5/ ma pewne znaczenie mechaniczne, które wyjaśnimy w sposób następujący:

Suma L_0+N_0 może być >0, lub <0 odpowiednio $l-2x_0$ może być >0 lub <0 t.j. mogą być 2 wypadki: $x_0<\frac{l}{2}$ i $x_0>\frac{l}{2}$ Zakładając, że $x_0<\frac{l}{2}$, napiszemy równanie /5/ w postaci:

$$W_0(l-2x_0)=L_0+N_0+ql(\tfrac{l}{2}-x_0).$$

Prawa część tej równości oznacza sumę momentów wszystkich sił bezpośrednio przyłożonych względem punktu $\overline{X}$, a zatem lewa część oznacza moment wypadkowej W_0 tych sił, z tego powodu $l-2x_0$ jest to ramię siły W_0 względem X. Przytem według umowy $l-2x_0>0$. Oznaczmy odciętą wypadkowej W_0 przez ξ, a więc ramię W_0 możemy wyrazić także wzorem $\xi-x_0$, przytem powinno być także $\xi-x_0>0$. Mamy więc równość:

$$l-2x_0=\xi-x_0,$$

skąd

$$\frac{l}{2}-x_0=\xi-\frac{l}{2},$$

t.j. w tym wypadku, gdy pod osią X zachodzi $max\,M$; oś X i wypadkowa W_0 są położone symetrycznie względem środka belki.

Oczywiście to samo otrzymamy w wypadku $x_0>\frac{l}{2}$, ogólnie będzie:

$$\frac{x_0+\xi}{2}=\frac{l}{2}.$$

Jest to uogólnienie znanego twierdzenia Culmanna, które otrzymamy kładąc w powyższych wzorach $p=q=0$ t.j. nie rozpatrując ruchomych obciążeń ciągłych. Przy dokładniejszem rozpatrzeniu się w powyższych wywodach nastręczają się jeszcze następujące uwagi:

a/ Teoretycznie możnaby otrzymać podobne wyniki i przy h i q zmiennem, nie ma to jednak praktycznego znaczenia,

b/ możnaby wprowadzić w obciążeniu ruchomem oddzielne odcinki z równomiernemi /lub wogóle ciągłemi/ obciążeniami między punktami C i D. Wpływ takich obciążeń łatwo uwzględnić na podstawie powyższych wzorów. Wyobraźmy sobie np., że z lewej strony od R mamy pewien odcinek GH obciążenia równomiernego r t/m. Niech $XH=a_0$, $XG=A_0$, przytem $A_0 > a_0$. Dodamy w powyższych wzorach do sił P /z lewej strony od R / nieskończenie wiele sił: $r\,d\alpha$ w odległości α od X, ogółem $\int_{a_0}^{A_0} r\,d\alpha$ sił. Wówczas w wyrażeniu W doda się wyraz $r(A_0 - a_0)$, w wyrażeniu zaś L wyraz:

$$-\int_{a_0}^{A_0} r\,d\alpha \cdot \alpha = -\frac{1}{2} r (A_0^2 - a_0^2),$$

t.j. moment sił r względem X.

Wyrażenie N nie zmieni się. Podobnie możemy uwzględnić wpływ obciążeń naprawo od R.

c/ Jeżeli obciążenie ruchome równomierne jest tylko z jednej strony od ciężarów skupionych, to należy położyć $p=0$, lub $q=0$.

d/ Obliczenie położenia niekorzystnego osi R t.j. odciętej x_0 w ogólnym wypadku można dokonać z równania kwadratowego /4/, lub wprost na podstawie cechy, że R i W są symetryczne względem środka belki.

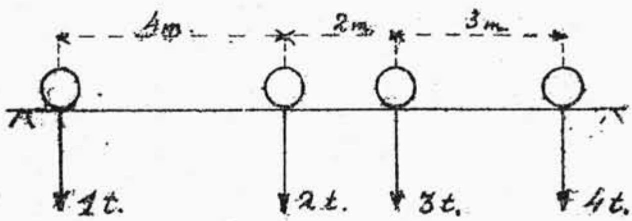
e/ Oczywista, że w wypadku $p=q=0$ można do obliczenia x_0 użyć jeden z tych 2-ch sposobów, przytem równanie /4/ staje się równaniem 1^{go} stopnia, z którego wprost mamy:

$$x_0 = \frac{l}{2} - \frac{L+N}{2(W-\frac{1}{2}gl)} \quad \ldots . (6)$$

§ 127. Twierdzenie wyłożone w poprzednim § może być zastosowane do wyznaczenia $max\, max\, M$ w sposób następujący: Ponieważ odszukanie $max\, M$ pod daną osią nie daje rękojmi, że gdy niektóre z ciężarów zejdą z belki i inne wejdą $max\, M$ pod inną osią będzie większy, mówiąc więc teoretycznie należałoby po kolei znajdować $max\, M$ pod każdą z osi pociągu i z otrzymanych wyników wybrać $max\, M$ największy, ta wielkość będzie $max\, max\, M$. Praktycznie jednak rzadko zajdzie potrzeba tak wielu prób; zwykle z góry można wskazać jedną lub kilka osi, pod którą prawdopodobnie zajdzie max max M. Można całkowicie obejść się bez prób, należy tylko uprzednio znaleźć sposobem wykreślnym /§ 125/ tę oś, pod którą zachodzi max max M i zastosować powyższe twierdzenie jedynie do ścisłego wyznaczenia niekorzystnego położenia tej osi i co za tem idzie i max max M.

PRZYKŁADY:

§ 128. Znaleźć max max M dla belki o rozpiętości 10 m. przy obciążeniu pociągiem, wskazanym na rys. 159 x/.

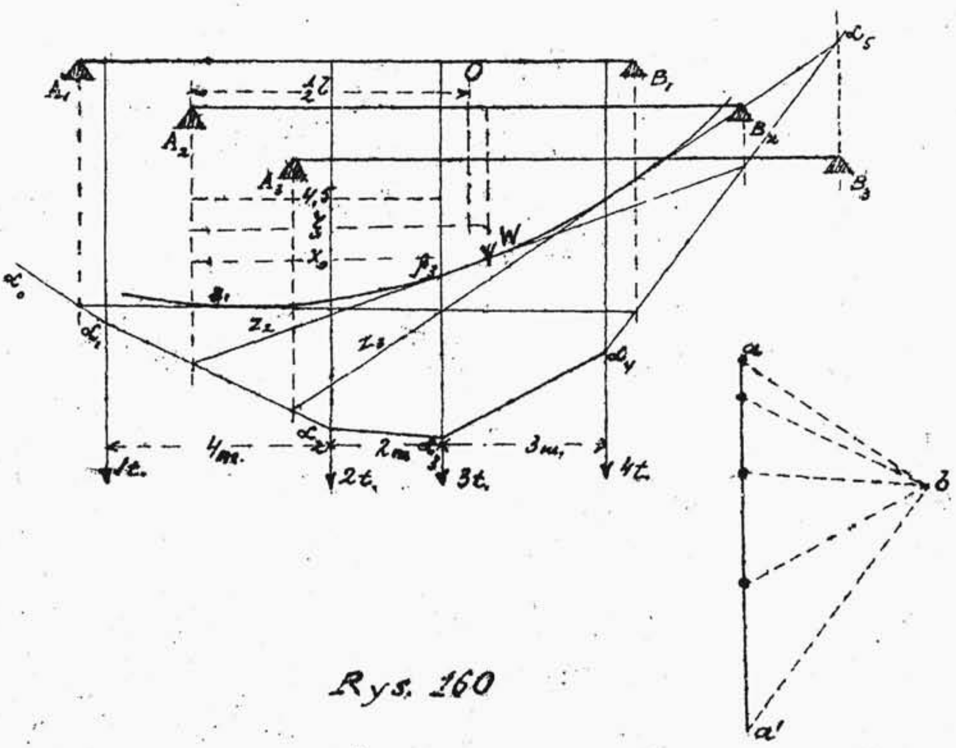


Rys. 159

---

x/ Przykład ten wzięty jest z Kursu "Mostów" Nicolai /po ros./ str. 378, gdzie przykład ten jest rozwiązany metodą paraboloid obrotowych.

Aby uniknąć prób zastosujemy nasamprzód sposób wieloboku sznurowego /rys.160/.



Rys. 160

Z rysunku tego widać, że $max\ max \equiv \alpha_3 \beta_3$ t.j. $max\ max\ M$ zachodzi pod ciężarem trzecim o $3t.$, gdy ciężar ten stoi w odległości ok. 4,5 m. od początku A_2 belki $A_2 B_2$, t.j. gdy pierwszy ciężar $1t.$ już zeszedł z belki. W celu ściślejszego obliczenia położenia pociągu i $max\ max\ M$ zastosujemy teraz do obciążenia $1-3-4\ t.$ twierdzenie o *max* M pod ciężarem $3\,t$. Odległość $(\xi - x_0)$ wypadkowej $W = 2+3+4 = 9\,t$. od ciężaru $3\,t$. określi się z równania:

$$W \cdot (\xi - x_0) = 4.3 - 2.2 = 8$$

$$\xi - x_0 = \frac{8}{W} = \frac{8}{9}\,m.$$

Na podstawie twierdzenia o *max* M ciężar $3\,t.$ i wypadkowa W są symetryczne względem osi belki t.j.

$$\frac{1}{2}l - x_0 = \xi - \frac{1}{2}l$$

Stąd

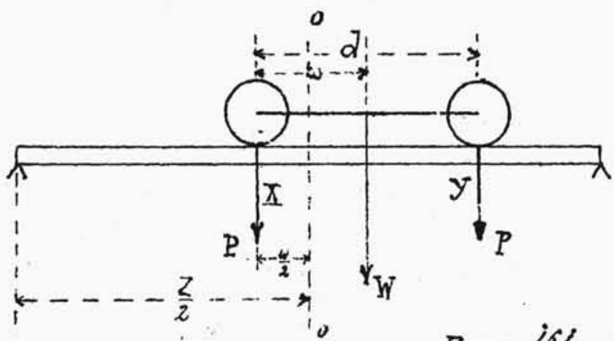
$$l - 2x_0 = \xi - x_0 = \frac{8}{9}.$$

t.j.

$$x_0 = \frac{l}{2} - \frac{8}{18} = 5 - \frac{4}{9} = 4\frac{5}{9}\,m. = 4{,}55\,m.$$

Mając x_0 łatwo już obliczyć moment gnący pod ciężarem $3\,t$, który będzie *max max* M. Zamiast użytego sposobu możnaby x_0 obliczyć wprost ze wzoru /6/ § 126.

§ 129. Belka o rozpiętości $l\ m.$ o wadze własnej $g\ t/m.$ znajduje się pod działaniem pociągu z dwóch kół o jednakowych ciśnieniach $P\ t.$ o odległości między osiami $d\ m.$ Znaleźć niekorzystne położenie pociągu.



Rys. 161

Oczywiście max max M zajdzie pod jedną z osi.

Zastosujemy twierdzenie o max M poddaną osią że przy obciążeniu niekorzystnem wypadkowa W sił. P, P i gl oraz oś X są rozłożone symetrycznie względem środka belki.

Odległość w linji działania W od X obliczymy z równania:

$$Ww = Pd + gl \cdot \frac{w}{2}$$

$$W = 2P + gl\ ,$$

Stąd

$$(W-\tfrac{1}{2}gl)\,\omega = Pd$$

$$\omega = \frac{Pd}{2P+\frac{1}{2}gl} = \frac{2P}{4P+gl}\,d.$$

Odległość niekorzystna od osi OO belki koła X wyniesie zatem:

$$\frac{1}{2}\omega = \frac{P}{4P+gl}\,d \;\ldots\ldots\; (1)$$

Otóż przy tem położeniu osi X zajdzie pod nią $max\ M$ przy warunku oczywiście, że przy tej wartości ω obie osie mieszczą się na belce.

Należy zbadać ten warunek.

Otóż, przy pewnej wartości ω, oś Y nie zejdzie z belki, jeżeli będzie:

$$d < \tfrac{1}{2}\omega + \tfrac{1}{2}l\,.$$

Należy jednak przytem odróżnić dwa wypadki:

1/ $d < \frac{1}{2}l$ i 2/ $d \geq \frac{1}{2}l$

W pierwszym wypadku przy wszelkiej wartości ω i przy wartości $\omega = 0$ na belce mieszczą się zawsze obie osie. W drugim wypadku przy pewnych małych wartościach ω i przy $\omega = 0$ t.j. gdy oś $\overline{X}$ stoi pośrodku belki, druga oś Y schodzi z belki. Z tego widać, że w drugim wypadku należy uwzględnić możliwość powstania największego momentu, prócz w powyższem ustawieniu jeszcze przy ustawieniu, gdy oś Y zejdzie z belki i pozostanie oś $\overline{X}$, którą należy oczywiście umieścić pośrodku belki.

Pierwszy wypadek zachodzi przy warunku:

$$d < \frac{1}{2} l \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad I$$

Drugi wypadek mamy w razie istnienia nierówności:

$$\frac{1}{2} l \leq d < \frac{1}{2} \omega + \frac{1}{2} l .$$

Druga część tej nierówności wyraża się warunkiem:

$$d < \frac{P}{4P + gl} d + \frac{1}{2} l ,$$

czyli:

$$d < \frac{4P + gl}{3P + gl} \times \frac{l}{2}$$

t.j. drugi wypadek zachodzi wtedy, gdy odległość d zadośćczyni warunkom:

$$\frac{1}{2}l \leqslant d < \frac{4P+gl}{3P+gl} \cdot \frac{l}{2} \ldots\ldots (II)$$

Z powyższego widzimy, że w wypadku /I/ mamy do czynienia tylko z jednym ustawieniem pociągu, gdy obie osie są na belce i $max\ max\ M$ zachodzi pod osią $\overline{X}$ przy ustawieniu jej według wzoru /1/.

W wypadku II należy rozpatrzeć dwa ustawienia pociągu: 1/ Jak w wypadku I przy 2 osiach i podobnie należy obliczyć $max\ M$ pod osią $\overline{X}$ przy ustawieniu według wzoru /1/. 2/ Gdy na belce stoi jedna oś $\overline{X}$ pośrodku. $Max\ M$ będzie też pośrodku belki i wyniesie

$$max\ M = \frac{1}{8} gl^2 + \frac{1}{4} Pl \ldots\ldots (2)$$

Większy z tych dwóch $max\ M$ będzie $max\ max\ M$.

Nakoniec należy rozpatrzeć wypadek trzeci, gdy przy wszelkiej wartości w oś Y schodzi z belki. Będzie to wówczas, gdy:

$$d \geqslant \frac{1}{2} w + \frac{1}{2} l$$

czyli, gdy spełnia się warunek:

$$d \geqslant \frac{4P+gl}{3P+gl} \cdot \frac{l}{2} \quad \ldots\ldots \quad (III)$$

W tym wypadku niekorzystne ustawienie pociągu jest tylko jedno, gdy oś I stoi pośrodku. Max max M oblicza się ze wzoru /2/.

Co do sposobu otrzymania wzoru /1/ zauważymy, że zamiast korzystać z twierdzenia o max M w wyłożony powyżej sposób, możnaby skorzystać bezpośrednio z wzorów § 126.

Mianowicie dla naszego przykładu będziemy mieli:

$$W = 2P + gl; \qquad L = 0$$

$$N = Pd$$

Ponieważ W, L i N są stałe, a więc ze wzoru /6/ odległość x_0 osi I od początku belki będzie:

$$x_0 = \frac{l}{2} - \frac{Pd}{2(W - \frac{1}{2}gl)} = \frac{l}{2} - \frac{Pd}{2(2P + \frac{1}{2}gl)}$$

$$= \frac{l}{2} - \frac{Pd}{4P + gl}.$$

Zgadza się to ze wzorem /1/, gdyż

$$\frac{l}{2} - x_0 = \frac{w}{2}.$$

W podobny do powyższego sposób można przeprowadzić badanie $\max\max M$ w wypadku większej liczby osi przy jednakowych odstępach między nimi.

Zauważymy przytem, że w razie nieparzystej liczby osi niekorzystnem położeniem pociągu będzie to, gdy oś środkowa stoi nad środkiem belki.

W wypadku, gdy ciężar własny jest nieznaczny można go opuścić w porównaniu do sił skupionych, co znacznie uprości obliczenia.

Dla wypadku dwóch osi, przy $g=0$ z wzoru /1/ otrzymamy odstęp osi od środka belki

$$\frac{1}{2}w = \frac{d}{4}$$

kładąc $g=0$, otrzymamy także i tutaj 3 wypadki:

$$(I) \qquad d < \frac{1}{2}l$$

$$(II) \qquad \frac{1}{2}l \leq d < \frac{2}{3}l$$

$$(III) \qquad d \geq \frac{2}{3}l.$$