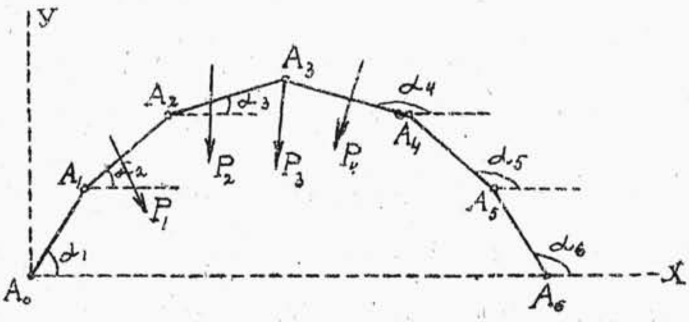
du. Jeżeli dane są P i Q, to z równania /a/ określamy α, a przez to i położenie równowagi układu. Jeżeli przeciwnie α jest dane, to równanie /a/ wyraża warunek dla wielkości sił P i Q. przy którym możliwe jest przyjęte położenie równowagi. Np. przy $\alpha = 90^\circ$ powinien być zachowany warunek $Q=P$; przy $\alpha=45^\circ$, $P=2Q$; przy $\alpha=30^\circ$, $P=Q(1+\sqrt{3})$;przy $\alpha=0$, $Q=0$, P - dowolne. W wypadku, gdy siły P i Q są dane, po wyznaczeniu położenia równowagi z równania /a/, obliczenie reakcyj podporowych i sił osiowych może być uskutecznione, jak dla układów geometrycznie niezmiennych.

Z powyższego rozważania widać, że w układach geometrycznie zmiennych zmiana sił bezpośrednio przyłożonych powoduje zmianę w położeniu równowagi układu, z tego powodu układy takie bezpośrednio nie mogą być stosowane w budowlach.

WIELOBOK PRZEGUBOWY.

§ 47. Rozpatrzmy równowagę układu płaskiego ciał, połączonych każde następne z poprzednim jednym przegubem walcowym. Skrajne ciała mają podpory w postaci punktów nieruchomych. Układ ten tworzy więc łańcuch, którego ogniwami są poszczególne ciała.

Równowaga takiego układu nie zależy od kształtu poszczególnych ciał i przez to dla prostoty będziemy uważali, że ciała te stanowią prostolinijne pręty /rys.62/przytem dana jest odległość $A_0A_6 = l$ i długość prętów $A_0A_1 = a_1, A_1A_2 = a_2, \ldots$ Dany układ jest oczywiście geometrycznie zmienny i położenie



Rys. 62.

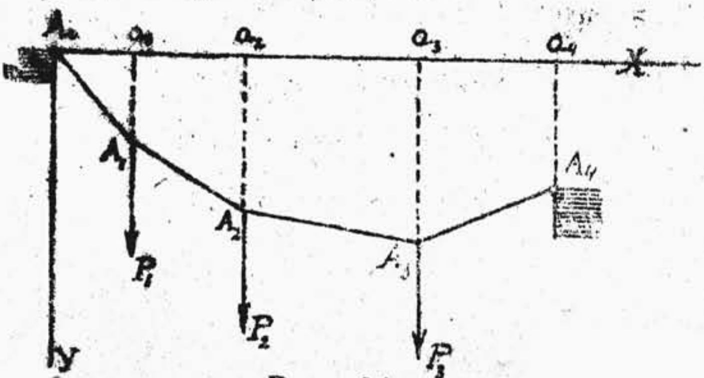
równowagi jego może być określone np. przez kąty α między każdym prętem i osią A_0x. Przy danych długościach prętów, położenie równowagi określa się dostatecznie przez taką ilość kątów α, ile jest prętów bez dwóch t.j. $b-2$, gdzie b ilość prętów, np, w powyższym przykładzie położenie układu wyznacza się przez kąty $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$, gdyż mając położenie punktów $A_0 A_1 A_2 A_3 A_4 \ldots$ oraz A_6 zapomocą promieni a_5 i a_6 z punktów A_4 i A_6 możemy wyznaczyć punkt A_5. W ogólnym wypadku, gdy o

są przyłożone do prętów i do węzłów mamy niewiadomych reakcyj prostych po 4 dla każdego pręta /§43/ i prócz tego 4 sładowe reakcyj podpór, ogółem więc jest niewiadomych: $x=(b-2)+4b+4=5b+2$.
Niewiadome te mogą być wyznaczone z równań równowagi, których można napisać po 3 dla każdego pręta i po 2 dla każdego węzła, co razem wyniesie: $r=3b+2(b+1)=5b+2$, zadanie jest więc określone. Zapomocą metody podanej w §43, powyższy wypadek ogólny możemy sprowadzić do wypadku gdy siły są przyłożone tylko do węzłów, mianowicie siły działające na każdy pręt zastępujemy przez dwie siły, działające na węzły w krańcu do pręta i równoległe do wypadkowej układu sił, działających na pręt, lub postępujemy jak w §46.

Ilość niewiadomych w takiem zadaniu będzie: parametrów geometrycznych α, jak wyżej, $b-2$ sił osiowych w prętach: b, reakcyj podporowych 4, razem niewiadomych $2b+2$; równań będzie dwukrotne ilości węzłów t.j. $2(b+1)$.

Zadanie może być rozwiązane także zapomocą zasady zesztywnienia w sposób następujący. Należy napisać równania, zawierające tylko niewiadome kąty α i reakcje podporowe; są to 3 równania równania równowagi dla całego układu i równania momentów względem każdego węzła /§36/ wszystkich sił leżących nalewo, lub naprawo od węzła. W równaniach tych będzie 8 niewiadomych: $R_{1x}, R_{1y}, R_{2x}, R_{2y}, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$, równań zaś też 8: $\Sigma X=0$, $\Sigma Y=0$, $\Sigma M=0$, $\sum_0^1 M_1=0$, $\sum_0^2 M_2=0$, $\sum_0^3 M_3=0$, $\sum_0^4 M_4=0$, $\sum_0^5 M_5=0$. Znając już powyższe wielkości, reakcje w węzłach /siły wewnętrzne/ można wyznaczyć, rozpatrując np. równowagę części: $A_0A_1, A_0A_2, A_0A_3, A_0A_4, A_0A_5$.

§ 48. Rozpatrzmy teraz pewne szczególne zagadnienie dotyczące równowagi wieloboku przegubowego, podpartego w dwóch skrajnych punktach, mianowicie, gdy zamiast długości prętów przyjmiemy za wielkości dane zgóry rzuty poziome tych prętów, przytem siły bezpośrednio przyłożone do węzłów są tylko pionowe. W zadaniu tem długości prętów będą więc wielkościami szukanemi; zobaczymy, że zadanie to jest prostsze od zadania, w którem dane są długości prętów.



Rys. 64.

Wyobraźmy sobie wielobok przegubowy $A_0A_1A_2A_3A_4$ /rys. 64/, który jest podparty w punktach nieruchomych A_0 i A_4 dane są wielkości rzutów prętów $A_0A_1, A_1A_2, \ldots\ldots$, mianowicie $A_0a_1, a_1a_2, \ldots$ innemi słowy węzły A_1, A_2, A_3 stale muszą się znajdować na prostych pionowych $a_1A_1, a_2A_2, \ldots$ W węzłach A_1, A_2, A_3 przyłożone są dane siły pionowe: P_1, P_2, P_3.

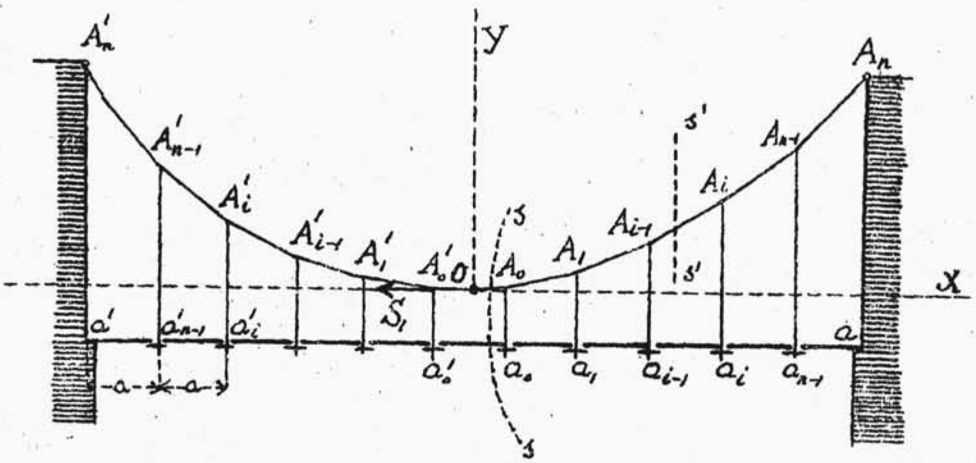
Niewiadomemi zadania są reakcje: $R_{1x}, R_{1y}, R_{2x}, R_{2y}$, — natężenia prętów: S_1, S_2, S_3, S_4 i parametry geometryczne, określające położenie równowagi układu. Rzędne y_1, y_2, y_3 określają położenie układu, przyjmiemy je więc za parametry geometryczne.

Jak wskazano w poprzednim § ilość równań równowagi dla danego zadania będzie $2b+2=2.4+2=10$ Gdybyśmy wszystkie trzy rzędne y_1, y_2, y_3 przyjęli za wielkości niewiadome, to razem niewiadomych byłoby 11 i zadanie byłoby nieokreślone możemy więc jedną z rzędnych np. y_2 przyjąć za dowolną wielkość wiadomą, będziemy wtedy mieli 10 niewiadomych i 10 równań i zadanie będzie określone.

Przytoczony rodzaj zagadnienia na równowagę wieloboku przegubowego ma zastosowanie w mostach wiszących.

MOST WISZACY.

§ 49. Łańcuch mostu wiszącego $A'_n A'_{n-1} \ldots$ $A'_1 A_1 \ldots\ldots A_n$ /rys.65/ składa się z nieparzystej ilości ogniw różnej długości, lecz takich, że ich rzuty poziome są jednakowe i równają się $a_{i-1}a_i = a$. Z przegubami łańcucha są złą-



Rys. 65.

czone przegubowo wieszary pionowe: $A'_{n-1}a'_{n-1}, \ldots$ $A_{n-1}a_{n-1}$, które podtrzymują jezdnię $a'a'_{n-1} \ldots$ $\ldots a_n a$. Ciężar jezdni, lub wogóle wszelki ciężar rozłożony na jezdni jednostajnie, np. $p\ t/m.$ / p ton na metr bieżący/ oddaje się przez konstrukcję jezdni na wieszary, tak że każdy wieszar jest natężony siłą $P = pa$. Działanie więc każdego wieszara na łańcuch może być zastąpiono przez siłę P, przyłożoną w węźle. Jaki powinien być kształt łańcucha i jakie natężenia jego ogniw w położeniu równowagi pod działaniem jednostajnego obciążenia jezdni ? Z poprzedniego § wiemy, że zadanie to jest równoznaczne z wyznaczeniem położenia równowagi wieloboku przegubowego $A_n' \dots A_1' A_1 \dots A_n$ znajdującego się pod działaniem sił pionowych P, przyłożonych do każdego węzła przy warunku, że rzuty prętów $A_{i-1} A_i$ są dane, mianowicie równają się „a"; z poprzedniego § wiemy także, że należy przyjąć z góry położenie jednego z wierzchołków, przyjmiemy np., że różnica poziomów punktów A_0 i A_n równa się h.

Mamy więc następujące niewiadome:

natężenia prętów: $S_n', S_{n-1}', \dots, S_1', S_0, S_1, \dots, S_n \dots 2n+1$

składowe reakcji podporowych: $R_{1x}, R_{1y}, R_{2x}, R_{2y} \dots 4$

parametry geometryczne: $Y_{n-1}', Y_{n-2}', \dots Y_1', Y_0, Y_1, Y_2, \dots, Y_{n-1} \dots 2n-1$

razem niewiadomych: $4n+4$

Równań równowagi mamy dwa razy tyle, co węzłów t.j. $2.2.(n+1)=4n+4$, zadanie więc jest określone. Zadanie to można rozwiązać sposobami ogólnemi, wskazanemi w § 47, jednakże z powodu obciążenia symetrycznego względem osi OY można wprowadzić pewne uproszczenia. Zauważmy przedewszystkiem, że pręt $A_0' A_0$ powinien być poziomy. Wykonawszy przekrój SS i rozpatrując równowagę prawej części łańcucha $A_0 A_1 \ldots A_n$, znajdującej się pod działaniem sił: S_0, sił pionowych P, przyłożonych do węzłów $A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}$ i reakcji R podpory A_n możemy napisać równanie momentów względem punktu A_n. Podobne równanie można napisać także względem punktu A_n', rozpatrując równowagę lewej części łańcucha $A_n' \ldots A_0'$. Ponieważ wartość bezwzględna sumy momentów sił P w tych równaniach jest jednakowa, więc aby dla S_0 otrzymać jednakowy rezultat, należy założyć, że ramiona siły S_0 względem punktów A_n i A_n' są jednakowe, co jest możliwe tylko wtedy gdy siła S_0, a znaczy i pręt $A_0' A_0$ są poziome. Ramię siły S_0 względem punktu A_n jest więc h i równanie momentów względem punktu A_n części łańcucha naprawo od SS będzie:

$$S_0 h - P n a - P(n-1)a - \ldots - P 2a - P a = 0.$$

czyli $S_0 h - Pa[1+2+\ldots+(n-1)+n] = 0.$

czyli $S_0 h - Pa \dfrac{n(n+1)}{2} = 0.$

skąd $S_0 = \dfrac{n(n+1)}{2} \dfrac{a}{h} P \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$

Znając S_0 możemy teraz znaleźć rzędną y_i punktu A_i względem osi O_{xy}, oraz natężenie

S_i w pręcie $A_{i-1}A_i$, jeżeli wykonamy przekrój $s's'$ i rozpatrzymy równowagę części łańcucha $A_0A_1 \ldots A_{i-1}$, jako ciała sztywnego, znajdującego się pod działaniem sił: S_0, S_i i sił pionowych P, przyłożonych do węzłów $A_0, A_1, \ldots A_{i-1}$. Równanie momentów względem punktu A_i będzie:

$$S_0 y_i - P \cdot ia - P(i-1)a - \ldots - P \cdot 2a - Pa = 0 \ldots \text{(2)}$$

Równanie rzutów na oś OX będzie: $S_i \cos\alpha_i - S_0 = 0$ (3)

Z równania /2/ znajdziemy y_i, z równania /3/ - S_i. Mamy

$$y_i = \frac{i(i+1)}{2} \frac{P}{S_0} a \ldots \ldots \text{(4)}$$

czyli, podstawiając znaczenie S_0 z wzoru /1/, otrzymamy

$$y_i = \frac{i(i+1)}{n(n+1)} h \ldots \ldots \text{(5)}$$

Z wzoru tego dla każdej wartości $i = 0, 1, \ldots n$, otrzymujemy y_i, mianowicie:

$$y_0 = 0, \; y_1 = 2\frac{h}{n(n-1)}, \ldots, y_n = h.$$

Z równania /3/ otrzymujemy natężenie S_i

$$S_i = \frac{S_1}{\cos\alpha_i}$$

gdzie

$$\cos\alpha_i = \frac{a}{A_{i-1}A_i} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + (y_i - y_{i-1})^2}}$$

Z wzoru zaś /4/ mamy

$$y_i - y_{i-1} = \frac{i(i+1)}{2} \frac{P}{S_0} a - \frac{(i-1)i}{2} \frac{P}{S_0} a = i \frac{P}{S_0} a.$$

więc:

$$\cos\alpha_i = \frac{a}{\sqrt{a^2+i^2\frac{P^2}{S_0^2}a^2}} = \frac{S_0}{\sqrt{S_0^2+i^2P^2}},$$

a natężenie S_i wyraża się wzorem:

$$S_i = \sqrt{S_0^2+i^2P^2} \quad \ldots\ldots\ldots (6)$$

Co się tyczy wielkości reakcyj R_1 i R_2 w punktach podporowych A_n i A_n' to z równowagi węzła A_n, na który działają tylko dwie siły S_n i R_1, wypływa że siły te powinny być równe i wprost przeciwne, a więc wielkość $R_1 = S_n$.

Zadanie jest więc rozwiązane w granicach wytkniętych wyżej t.j. dla równomiernego obciążenia mostu; można jeszcze wykazać, że wierzchołki łańcucha leżą na paraboli. W tym celu napiszemy wzór na odciętą x_i w funkcji od i, oczywiście

$$x_i = \frac{a}{2} + ia = \frac{2i+1}{2}a \quad \ldots\ldots\ldots (7)$$

Wzory /5/ i /7/ wyrażają rzędne x_i i y_i wierzchołków A_i w funkcji od wielkości zmiennej „i", która przybiera wartości liczb całkowitych: $0, 1, 2, \ldots, n$.

Jeżeli jednak wielkość „i" będziemy rozpatrywać, jako wielkość, zmieniającą się na sposób ciągły od $i=0$ do $i=+\infty$, to wzory /5/ i /7/ w których x_i i y_i zastąpimy przez x i y będą równaniem w postaci parametrycznej pewnej krzywej przytem parametrem zmiennym jest wielkość „i". Przy wartościach „i", równających się powyższym liczbom całkowitym otrzymujemy wierzchołki $A_0, A_1, \ldots A_n$, jako punkty powyższej krzywej, wielobok więc $A_0 \ldots$ $\ldots A_n$ jest wpisany w tę krzywą.

Aby otrzymać równanie krzywej w postaci $f(x,y)=0$, lub $y=\varphi(x)$ z równań /5/ i /7/ rugujemy zmienny parametr „i". Z równania /7/ mamy:

$$i = -\frac{1}{2} + \frac{x}{a}.$$

Podstawiając tę wielkość we wzór /5/ otrzymamy

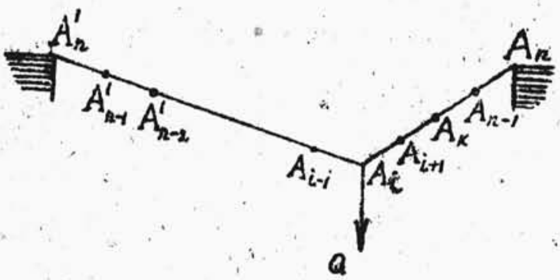
$$y = \frac{h}{n(n-1)}\left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{1}{4}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots (8).$$

Jest to równanie paraboli.

Zauważmy, że powyższa analiza dotyczy równowagi łańcucha mostu wiszącego tylko dla szczególnego rodzaju obciążenia, mianowicie dla równomiernego obciążenia jezdni, wyrażającego się przez jednakowe natężenie wszystkich wieszarów.

Dla zdania sobie sprawy z równowagi łańcucha przy innym obciążeniu, wyobraźmy sobie, że most jest nieważki i działa tylko jeden ciężar skupiony Q w punkcie a_i, czyli, że tylko jeden wieszar $A_i a_i$ ma natężenie Q, natężenia zaś innych wieszarów równają się zeru. Jaka byłaby wtedy postać równowagi łańcucha o długościach ogniw już przyjętych np. obliczonych, jak wyżej dla obciążenia równomiernego ? Z warunku równowagi jakiegokolwiek węzła, prócz A_i, np. A_k wypływa, że znajduje się on w równowadze pod działaniem dwóch sił S_k i S_{k+1} - natężeń prętów $A_{k-1}A_k$ i A_kA_{k+1}, dla równowagi jest więc rzeczą konieczną, żeby siły S_k i S_{k+1} były równe i wprost przeciwne.

Wypływa stąd, że postać równowagi łańcucha tworzyłaby linję łamaną $A_n'A_iA_n$ /rys.66/, której boki $A_n'A_i$ i A_iA_n mają długości, równające się odpowiednio sumom:



Rys. 66.

$$A_n'A_i = A_n'A_{n-1}' + \dots + A_{i-1}A_i$$

$$A_iA_n = A_iA_{i+1} + \dots + A_{n-1}A_n$$

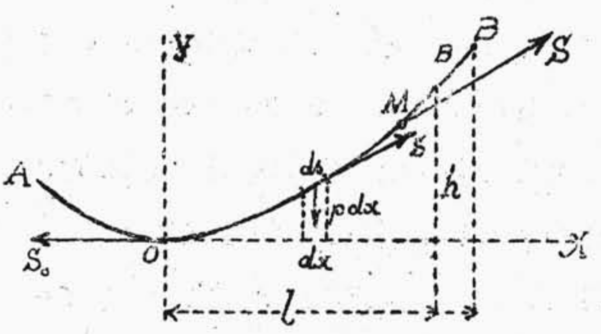
Natężenia zaś prętów od A_n' do A_i i od A_i do A_n byłyby odpowiednio jednakowe

$$S_n' = S_{n-1}' = \dots = S_i \,;\; S_i = S_{i+1} = \dots = S_n$$

Wyobraźmy sobie, że uwzględniamy ciężar własny mostu, jako obciążenie równomierne jezdni i jeden ciężar skupiony Q w punkcie a_i. Postać równowagi łańcucha, przyjęta tylko przy uwzględnieniu obciążenia równomiernego, oczywiście zmieni się.

Jeżeli ciężar skupiony Q jest mały w porównaniu z obciążeniem własnem, to postać równowagi łańcucha zmieni się mało i wierzchołki $A'_n A'_{n+1} \ldots A_{n+1} A_n$ będą leżeć blisko pierwotnego kształtu t.j. paraboli; w wypadku zaś, gdy Q jest znaczne w porównaniu z obciążeniem własnem, to postać równowagi łańcucha mogłaby się zmienić znacznie i zbliżyć się do linji łamanej /rys.66/, czyli całkowicie zniekształcić most. W Cz. II zaznajomimy się ze środkami przeciwdziałającemi podobnemu zniekształceniu mostu wiszącego.

§ 50. Wyobraźmy sobie, że w powyższem zadaniu wielkość „a"-rzut poziomy ogniwa, jest nieskończenie mała; w granicy gdy „a" dąży do zera, łańcuch można rozpatrywać, jako sznur giętki i nierozciągliwy według określenia, podanego w § 31. Widzimy więc, że postać równowagi sznura, znajdującego się pod działaniem sił pdx na element sznura ds, przytem $p = const$, jest parabolą. Równanie tej paraboli oraz natężenie sznura można otrzymać z powyższych wzorów przy $\lim a = 0$, zbadamy jednak daną kwestję bezpośrednio. Wobraźmy sobie sznur AOB zawieszony w punktach A i B /rys.67/ każdy nieskończenie mały element sznura ds znajduje się pod działaniem pionowych sił pdx przytem $p = const.$ Sznur ten przybierze pewien kształt równowagi w postaci



Rys. 67.

krzywej AOB, posiadającej pewien punkt O, w którym styczna jest pozioma. Umieśćmy w tym punkcie początek osi Oxy i oznaczmy rzędne punktu B przez l i h. Oznaczmy natężenie sznura w punkcie O przez S_o, w punkcie M o rzędnych x i y, przez S. Na mocy zasady zesztywnienia, możemy część sznura OM rozpatrywać jako ciało sztywne, znajdujące się w równowadze pod działaniem sił S_o, S i sił pdx, których wypadkowa px przechodzi w odległości $\frac{x}{2}$ od punktu O. Równanie momentów względem punktu M będzie:

$$S_0 \cdot y - px \cdot \frac{x}{2} = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1)$$

skąd: $$y = \frac{px^2}{2S_0} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (2)$$

Jest to równanie paraboli. Pisząc równanie momentów, analogiczne do równania /1/, względem punktu B, otrzymamy:

$$S_0 \cdot h - pl \cdot \frac{l}{2} = 0$$

t.j. $$S_0 = \frac{pl^2}{2h}$$

Równanie więc /2/ możemy także przedstawić w postaci

$$y = \frac{h}{l} x^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (3)$$

Pisząc równanie rzutów na oś OX dla części sznura OM otrzymamy:

$$-S_0 + S\cos\alpha = 0,$$

skąd $$S = \frac{S_0}{\cos\alpha} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (4)$$

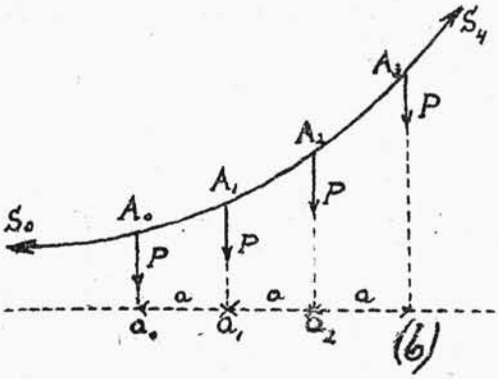
Lecz $\cos\alpha = \frac{dx}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}$, z równiania zaś /2/ $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{px}{S_0}$, więc $\cos\alpha = \frac{S_0}{\sqrt{S_0^2 + p^2x^2}}$

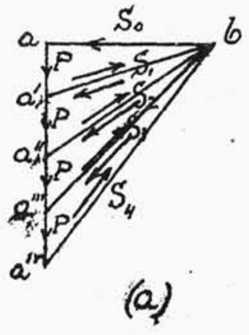
Podstawiając to wyrażenie w /4/, otrzymamy:

$$S = \sqrt{S_0 + p^2x^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (5)$$

Zauważmy, że przytoczony sposób rozważania równowagi nici oparty na zasadzie zesztywnienia nie jest ogólny, doprowadził on do celu dla rozpatrywanego bardzo prostego przypadku sił działających na sznur. W Mechanice Teoretycznej kwestja równowagi nici jest ogólnie rozwiązana zapomocą równań różniczkowych, w Cz. II powrócimy jeszcze do rozważanej kwestji i z tego ogólniejszego punktu widzenia.

§ 51. Wróćmy do kwestji równowagi łańcucha mostu wiszącego przy działaniu równomiernego obciążenia mostu /§49/. Zauważmy, że skoro zostało znalezione podług wzoru /1/ natężenie S_0 środkowego pręta, to dalsze rozwiązanie, mianowicie wyznaczenie kształtu równowagi łańcucha i natężeń w prętach, może być wykonane niezmiernie prosto i poglądowo drogą czysto geometryczną. Rzeczywiście rozpatrując węzeł A_0 rys. 60/, widzimy, że znajduje się on w równowadze pod działaniem znanych sił S_0 i P i nieznanej S_1 - natężenia pręta A_0A_1, możemy więc S_1 zbudować jako bok zamykający $a'b$ trójkąta baa' /rys. 68a, którego drugie dwa boki ab i aa' będą wyobrazać siły S_0 i P /rys. 68a/. Kierunek boku $a'b$ jest kierunkiem natężenia S_1, a więc i kierunkiem pręta A_1A_2 w położeniu równowagi, możemy więc zbudować położenie pręta $A_1A_2 \parallel a'b$ /rys. 68b/; odkładając dany rzut $a_1a_2 = a$ pręta i przeprowadzając prostą piodową a_2A_2 otrzymamy punkt





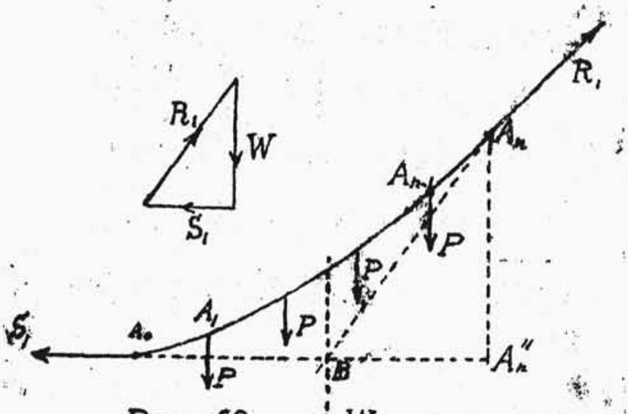
Rys. 68

A_2. Rozpatrując teraz węzeł A_1, widzimy, że znajduje się on w równowadze pod działaniem znanych sił S_1 i P i nieznanej S_2. Zwrot siły S_1, jako przyłożonej do węzła A_2 będzie przeciwny do zwrotu siły S_1, rozpatrywanej poprzednio, jako przyłożonej do węzła A_1. Nieznana siła S_2 jest więc bokiem zamykającym $a''b$ trójkąta $ba'a''$, w którym $ba' = S_1$, $a'a'' = P$. Przeprowadzając na rys. 68b $A_2A_3 \parallel a''b$ zapomocą rzutu $a_2a_3 = a$ znajdujemy, jak wyżej, punkt A_3.

Postępując podobnie dalej, możemy znaleźć geometrycznie natężenia S_1, S_2, S_3, ... /rys. 68a/ oraz postać równowagi łańcucha $A_0A_1A_2$..../rys. 68b/. Na rys. tym zostały wykreślone siły i część łańcucha A_0.....A_3.

Rys. 68a, wykreślony w pewnej skali sił danam wielkości natężeń, rys. 68b, wykreślony w pewnej skali długości daje nam postać równowagi wieloboku przegubowego.

Zauważmy, że chcąc otrzymać całkowite rozwiązanie zadania drogą tylko geometryczną należałoby jeszcze wskazać, jak otrzymać natężenie S_o geometrycznie. Na mocy zasady zesztywnienia możemy część łańcucha $A_oA_1 \ldots A_n$ /rys. 65/ rozpatrywać, jako jedno ciało swobodne, znajdujące się pod działaniem sił: S_o, R_1 i sił pionowych P, przyłożonych w węzłach $A_o, A_1, \ldots, A_{n-1}$. Rzuty łańcucha są znane: $A_nA_n'' = h$, $A_oA_n'' = n.a$. Wypadkowa W sił P przechodzi w odległości $A_1B = \frac{A_1A_n''}{2}$; trzy siły S_o; W i R_1 będąc w równowadze powinny się przeciąć w punkcie B na przecięciu się S_o z W, otrzymujemy stąd kierunek reakcji R_1, a z trójkąta sił W, S, R_1 otrzymamy wielkości S_o, a zarazem i R_1



Rys. 69

Jeżeli chcielibyśmy otrzymać wzory na wielkości natężeń i rzędnych wierzchołków wieloboku, takie jak zostały drogą analityczną wyprowadzone w §49, to przytoczona wyżej budowa geometryczna pozwala wyprowadzić te wzory z rysunku. Np. wzór /6/ otrzymamy z trójkąta prostokątnego, analogicznego do baa'' /rys. 68a/, z którego:

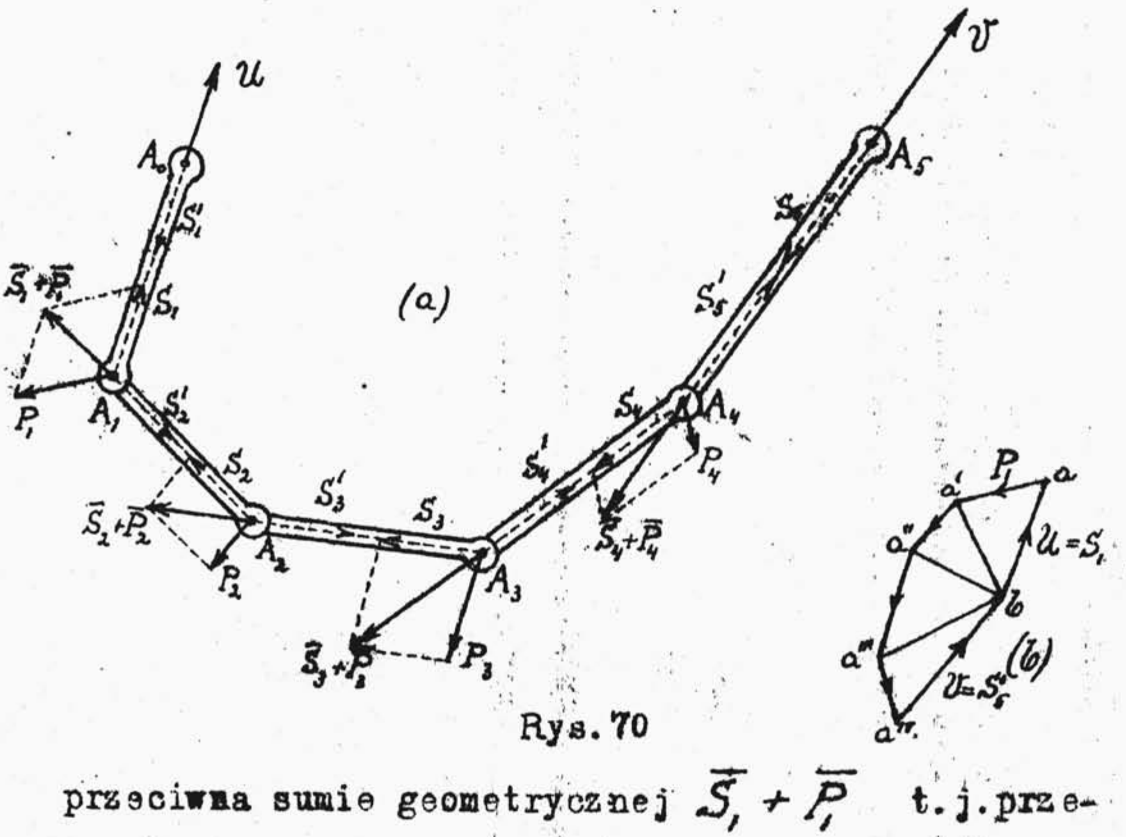
$$S_4 = \sqrt{S_0^2 + (4P)^2},$$

a wogóle $S_i = \sqrt{S_0^2 + (iP)^2}$.

§ 52. Rozpatrzmy teraz równowagę swobodnego /t.j. nie podpartego/ wieloboku przegubowego np. $A_0 A_1 A_2 A_3 A_4 A_5$ o danych długościach prętów $A_0A_1, A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_5$ przy następujących warunkach: dane są siły: U, P_1, P_2, P_3, P_4, działające na punkty A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, należy wyznaczyć postać równowagi wieloboku przegubowego oraz siłę V, jaką należy przyłożyć dla zachowania równowagi w punkcie A_5 pręta A_4A_5. Zadanie to może być rozwiązane analitycznie np. sposobem, wskazanym w końcu § 47. Zadanie to może być także łatwo rozwiązane geometrycznie, podobnie, jak w poprzednim § zadanie o kształcie łańcucha mostu wiszącego.

Ponieważ na koniec pręta A_0A_1 działa siła U, pomiędzy punktami zaś A_0 i A_1 niema żadnej siły bezpośrednio przyłożonej, siła więc

U musi równoważyć się z natężeniem S_1' pręta A_0A_1, a więc pręt A_0A_1 powinien mieć kierunek siły U. Wobec tego /rys.70a/od punktu A_0 odkładamy A_0A_1 na przedłużeniu siły, otrzymujemy położenie punktu A_1. Na węzeł A_1 działają znane siły: P_1 i $S_1(\bar{S}_1 = -\bar{S}_1')$ i nieznana siła S_2' - natężenie pręta A_1A_2. Te trzy siły równoważą się, siła więc S_2' jest równa i wprost



Rys. 70

przeciwna sumie geometrycznej $\bar{S}_1 + \bar{P}_1$ t.j.przekątnej równoległoboku, zbudowanego z sił S_1 i P_1. Kierunek więc pręta A_1A_2 otrzymujemy na przedłużeniu tej przekątnej, odkładając na tej prostej długość A_1A_2, otrzymujemy punkt A_2. Postępując w ten sposób dalej otrzymamy położenie punktu A_5 i natężenie S_5' pręta A_4A_5. Dla zachowania równowagi musimy w punkcie A_5 przyłożyć siłę V, która powinna się równać natężeniu S_5'. Te same rezultaty t.j. zbudowanie położenia równowagi wieloboku przegubowego, wyznaczenie siły V i natężeń w prętach możemy uskutecznić zapomocą zbudowania pewnego pomocniczego wieloboku, analogicznego do wieloboku rys. 68a. Mianowicie od dowolnego punktu b /rys. 70b./ odkładamy w pewnej skali wielobok $baa'a''a'''a^{IV}$ z danych sił U, P_1, P_2, P_3, P_4. Łącząc punkt b z a', a'', a''' i a^{IV}, otrzymamy, że skrajne boki ba, $a^{IV}b$ i przekątne ba'. ba'', ba''' będą wyobrażać natężenia prętów.

Rzeczywiście

$$\overline{ba} = \overline{U} = -\overline{S_1'} = \overline{S_1}\,;\quad \overline{ba'} = \overline{S_1} + \overline{P_1} = -\overline{S_2'} = \overline{S_2}\,;$$

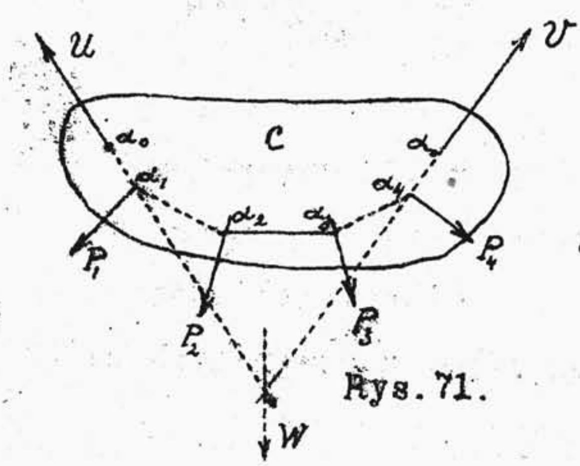
$$\overline{ba''} = \overline{ba'} + \overline{a'a''} = \overline{S_2} + \overline{P_2} = -\overline{S_3'} = \overline{S_3} \quad i.t.d.$$

Widzimy więc, że położenie równowagi wieloboku $A_0A_1 \ldots A_5$ możemy zbudować, korzystając z pomocniczego wieloboku $baa'a'' \ldots a^{IV}b$. Wystarczy w tym celu zbudować ten pomocniczy wielobok /rys. 70b/; następnie od punktu A_0 przeprowadzić

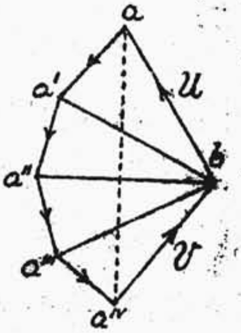
$A_0A_1 \parallel ab$ i na tej prostej odłożyć A_0A_1, z punktu A_1 przeprowadzić $A_1A_2 \parallel a'b$, zbudować punkt A_2, przeprowadzić $A_2A_3 \parallel a''b$, $A_3A_4 \parallel a'''b$, $A_4A_5 \parallel a^{IV}b$; otrzymamy w ten sposób położenie równowagi całego wieloboku.

Natężenia w prętach wieloboku przegubowego mogą być rozciągające albo ściskające. W § 31 wyjaśniliśmy, że w układzie przegubowym pręty rozciągane można bez naruszenia równowagi układu zamienić przez sznury nierozciągliwe. W wypadku więc gdy wszystkie natężenia prętów są rozciągające, jak np. na rys. 69, można wszystkie pręty A_0A_1, A_1A_2,... zamienić przez sznury A_0A_1, A_1A_2,..., związane w węzłach, czyli przez jeden sznur $A_0A_1A_2$...., na którego punkty A_0, A_1, A_2,... działają siły U, P_1, P_2,.... Postać równowagi sznura pod działaniem takich sił, wyznacza się więc dosłownie, jak wskazano wyżej, zapomocą wieloboku pomocniczego /rys. 70b/.

§ 53. Wielobok przegubowy $A_0A_1 \ldots A_5$ /rys. 70/, lub też wielobok sznurowy /gdy składa się ze sznura/, znajduje się w równowadze pod działaniem sił U, P_1, P_2, P_3, P_4, V, jeżeli postać jego oraz siła $\mathcal{V}$ zostały wyznaczone, jak wskazano w poprzednim §, t. j. gdy boki $A_0A_1, A_2A_3, \ldots$ są równoległe do $ba, ba', \ldots$ i gdy siła $\mathcal{V}$ zamyka wielobok sił $baa' \ldots a^{IV}$. Taki wielobok przegubowy lub sznurowy jest układem geometrycznie zmiennym, jednakże na mocy zasady zesztywnienia wiemy, że jeżeli by taki układ był jednym ciałem sztywnem, to ciało to znajdowałoby się pod działaniem powyższych sił w równowadze; innemi słowy siły P_1, P_2, P_3, P_4 równoważyłyby się z siłami $\mathcal{U}$ i $\mathcal{V}$. Jeżeli zaś zamiast sił $\mathcal{U}$ i $\mathcal{V}$ rozpatrzyć siły $\mathcal{U}'$ i $\mathcal{V}'$, równe siłom $\mathcal{U}$ i $\mathcal{V}$ i wprost przeciwne t. j. $\overline{\mathcal{U}'} = -\overline{\mathcal{U}}$, $\overline{\mathcal{V}'} = -\overline{\mathcal{U}}$, to siły P_1, P_2, P_3, P_4 przyłożone do powyższego ciała sztywnego możnaby było zastąpić przez dwie siły $\mathcal{U}'$ i $\mathcal{V}'$. Rozpatrzmy teraz dowolne ciało sztywne C, do którego przyłożone są pewne siły P_1, P_2, P_3, P_4 /rys. 71/. Jeżeli z tych sił zbudujemy wielobok sił $aa'a''a'''a^{IV}$



Rys. 71.



i następnie dowolny punkt b połączymy z wierzchołkami $a, a', a'' \dots$ to otrzymamy pomocniczy wielobok $baa' \dots a^{IV}b$ analogiczny do użytego wyżej przy rozważaniu równowagi wieloboku przegubowego lub sznurowego.

W dowolnym punkcie α_0 ciała przyłóżmy siłę U, równającą się odcinkowi ba i zbudujemy wielobok $\alpha_0\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_5$ w następujący sposób. Przeprowadzimy prostą $\alpha_0\alpha_1 \parallel ab$ do przecięcia się z kierunkiem siły P_1 w punkcie α_1. Z punktu α_1 przeprowadzimy prostą $\alpha_1\alpha_2 \parallel a'b$ do przecięcia się w punkcie α_2 z kierunkiem siły P_2 i t.d. Następnie w dowolnym punkcie α_5 prostej $\alpha_4\alpha_5$ przyłożymy siłę V, równającą się odcinkowi a_4b. Z powyższego wiemy, że jeżeli wielobok $\alpha_0\alpha_1 \dots \alpha_5$ byłby materjalnym wielobokiem przegubowym lub sznurowym to wielobok ten byłby w równowadze pod działaniem sił U, P_1, P_2, P_3, P_4, V, gdyż między temi siłami istnieje żądana dla równowagi zależność geometryczna. Wielobok przegubowy, na mocy zasady zesztywnienia byłby w równowadze i będąc sztywnym, a więc sztywne ciało C niezmiennie związane z tym wielobokiem pod działaniem powyższych sił będzie także w równowadze. Siły więc P_1, P_2, P_3, P_4, jako równoważące się z siłami U i V, mogą więc być zastąpione przez siły U' i V' równe i wprost przeciwne siłom U i V. Otrzymujemy więc wykreślny sposób redukcji układu płaskiego sił $P_1 P_2, \ldots\ldots$, przyłożonych do ciała sztywnego do dwóch sił U' i V', z których jedna U' ma dowolnie obraną wielkość ab i przechodzi przez dowolnie obrany punkt α_0. W szczególnym wypadku, jak np. na rys. 10, gdy siły U' i V' przecinają się, możemy otrzymać położenie wypadkowej sił $P_1, P_2, P_3, \ldots$ wielkość zaś tej wypadkowej równa się $a a_4$. Wyłożony tutaj sposób wykreślny redukcji układu płaskiego sił do dwóch sił, a w szczególnym wypadku do wypadkowej opiera się na budowie pomocniczego wieloboku $a\,b\,a\,a'a''\ldots$ i pomocniczego wieloboku $\alpha_0 \alpha_1 \alpha_2 \ldots\ldots$ Ten pomocniczy wielobok $\alpha_0 \alpha_1 \alpha_2 \ldots$ jest konstrukcją geometryczną, przez analogię jednak z wielobokiem materjalnym przegubowym lub sznurowym, nazywa się także wielobokiem sznurowym.

Ta konstrukcja geometryczna, nazwana wielobokiem sznurowym, jest podstawą do rozwiązań zagadnień statyki drogą wykreślną.