Dodając do siebie równania takie, napisane dla wszystkich węzłów, otrzymamy

$$\sum \sum_i' M_o(S) + \sum (y_i X_i - x_i Y_i) = 0 \; \dots \dots \; (7)$$

czyli, ponieważ pierwsza suma na mocy powiedzianego wyżej równa się zeru,

$$\sum (y_i X_i - x_i Y_i) = 0 \; \dots \dots \dots \; (8)$$

Jest to równanie momentów, wyrażające, że suma momentów względem punktu O wszystkich sił P, bezpośrednio przyłożonych do dźwigara i sił reakcyj podpór równa się zeru; równania /6/ wyrażają, że suma rzutów tych na osie Ox i Oy równa się zeru; równania więc /6/ i /8/ są równaniami równowagi dźwigara, jako całości i jak widać są skutkiem algebraicznym $2n$ równań równowagi węzłów.

Mamy więc $2n$ równań algebraicznych 1-go stopnia względem niewiadomych S i R o ilości $a+b$, zagadnienie więc jest określone, jeżeli $a+b=2n$ i jeżeli równania mają rozwiązanie i posiadają pierwiastki skończone. Jeżeli $a+b>2n$ zagadnienie jest nieokreślone, wypadkiem $a+b<2n$ zajmiemy się później.

§30 /. Równania równowagi węzłów stanowią układ $2n$ równań algebraicznych 1-go stopnia względem $(a+b)$ niewiadomych reakcyj podpór i natężeń prętów. Niewiadome nie wchodzą odrazu we wszystkie równania, lecz tylko w niektóre; prócz tego dla reakcyj pod por mogą być bezpośrednio napisane równania równowagi dla całego dźwigara. Z tego powodu często możemy sobie ułatwić rozwiązanie równań w następujący sposób. W wypadku, gdy $a=3$, należy nasamprzód wyznaczyć reakcje podpór; jeżeli w dźwigarze są węzły, w których się schodzą po 2 pręty, to zawsze możemy zacząć rozwiązywać równania, dotyczące tych węzłów i przechodzić stopniowo do węzłów następnych, w których będziemy mieli do wyznaczenia po 2 niewiadome; rozwiązanie równań sprowadzi się w ten sposób do stopniowego rozwiązywania równań z 2 niewiadomemi.

§ 31/. Każdy pręt dźwigara, do którego niema przyłożonych żadnych sił zewnętrznych, rozpatrywany jako swobodny znajduje się pod działaniem dwóch sił: reakcyj ze strony węzłów. Siły te równe co do wielkości mają kierunek osi pręta; zwroty zaś mają przeciwne. Siły te nazwaliśmy natężeniami pręta. Jeżeli natężenia mają zwroty nazewnątrz od pręta, to pręt jest rozciągany, jeżeli zaś te siły mają zwroty na wewnątrz pręta, to pręt jest ściskany. Wyobraźmy sobie, że pręt A_1A_2 /rys.48/ jest przecięty w punkcie A płaszczyzną ab prostopadłą do osi pręta, w tym

Rysunek 48.

wypadku w końcach A nowych odcinków pręta A_1A i AA_2 musimy przyłożyć naprężenia, których wypadkowa jest równa i wprost przeciwna do siły zaczepionej w końcu danego odcinka. Z Wytrzymałości Materjałów wiemy, że naprężenia te $f = \frac{S}{F}$, gdzie F jest płaszczyzną przekroju pręta.

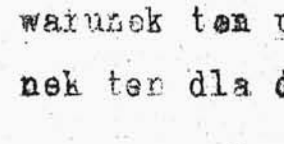
Zauważmy, że równowaga dźwigara nie byłaby naruszona, gdyby pręty rozciągane były zrobione ze sznurów nierozciągliwych. Pod pojęciem sznura swobodnego /czyli nici/ nierozciągliwego i idealnie giętkiego rozumiemy układ punktów materjalnych, rozmieszczonych na pewnej linji, która może przyjmować wszelką postać, bez zmiany długości linji między dowolnemi jej punktami. Odcinki sznura nie mogą okazywać reakcji żadnym siłom, które mogłyby zbliżyć do siebie końce sznura; pod działaniem sił równych i wprost przeciwnych sznur przyjmuje postać prostej - kierunku sił. Siły te nazywamy natężeniami sznura. W amerykańskich konstrukcjach żelaznych pręty rozciągane bardzo często robią z żelaza kwadratowego, lub okrągłego, którego przekrój w stosunku do długości jest bardzo mały. Pręty takie mogą być prędzej upodobnione do sznura, niż do ciała sztywnego.

UKŁADY GEOMETRYCZNIE ZMIENNE.

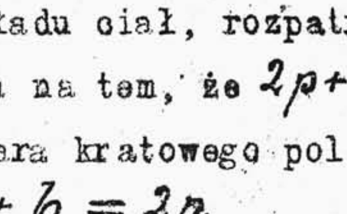
§ 32/. W rozpatrzonych wyżej układach ciał podpory i połączenia były tak urządzone, że zabezpieczały nieruchomość układu przy wszelkich siłach bezpośrednio przyłożonych. Układy ciał sztywnych o takich połączeniach nazywamy układami geometrycznie niezmiennemi. Jak widzieliśmy wyżej, warunek konieczny, lecz niedostateczny niezmienności postaci układu polega na tem, że ilość reakcyj prostych równa się lub jest większa od ilości równań równowagi układu. Mianowicie dla układu ciał, rozpatrzonego w § 26, warunek ten polega na tem, że $2p+s \geqq 3c$; Warunek ten dla dźwigara kratowego polega na tem, że

$$a+b \geqq 2n$$

/§ 29/. Rozpatrzmy teraz wypadek, w którym ilość reakcyj prostych jest mniejszą od ilości równań, t.j. gdy $2p+s<3c$ i $a+b<2n$. Wypadek ten uwidoczniony jest na rys. 49 i 50, w pierwszym $p=4, s=0, c=3; 2p+s=8; 3c=9$ t.j. $2p+s<3c$ w drugim $a=3, b=6, n=5; a+b=9; 2n=10,$ t.j. $a+b<2n$



Rys.49



Rys.50

Widzimy wprost z rysunku, że układy te mogą zmieniać swą postać bez zmiany kształtu ciał, wchodzących w skład układu. Układy takie nazywamy układami geometrycznie zmiennemi. W następujący sposób można dowieść ogólnie, że w wypadku, gdy ilość x reakcyj prostych w układzie ciał jest mniejsza od ilości r równań równowagi dla danego układu, to układ ciał jest geometrycznie zmienny. Rzeczywiście rugując z r równań równowagi x reakcyj, otrzymamy $/r-x/$ równań, zależnych tylko od sił $P_1, P_2, \ldots$, bezpośrednio przyłożonych i elementów geometrycznych $q_1, q_2, \ldots$, określających położenie równowagi układu. Z równań tych, które mają postać $f(P_1, P_2, \ldots q_1, q_2 \ldots) = 0$ można wyznaczyć $/r-x/$ elementów geometrycznych układu, które więc nie mogą być przyjęte dowolnie /np. kąt φ na rys.49 i kąt ψ na rys.50/.

Układ ciał stanowi więc w danym układ geometrycznie zmienny, czyli mechanizm. Jeżeli przyjmiemy postać równowagi za daną tj. przyjmiemy wszystkie elementy geometryczne $q_1, q_2 \ldots$ za wielkości dane, to powyższe $/r-x/$ równań dadzą warunki $f(P_1, P_2, \ldots) = 0$ dla sił $P_1, P_2, \ldots$, przy których zachowaniu jest możliwa przyjęta postać równowagi układu, innemi słowy przyjęte położenie równowagi jest możliwe nie przy wszelkich siłach, lecz tylko przy takich, które zadośćczynią powyższym warunkom.

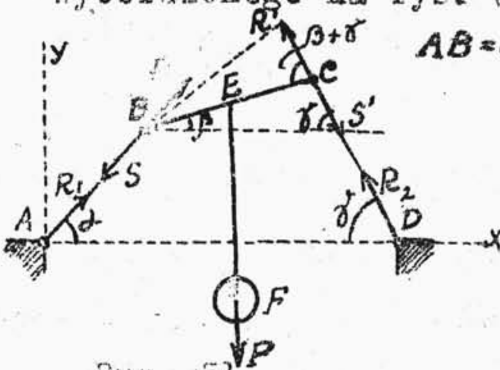
Z powiedzianego wyżej jest rzeczą jasną, że ...

gadnienie równowagi dla układów geometrycznie zmiennych polega na wyznaczeniu reakcyj połączeń i parametrów geometrycznych, określających położenie równowagi. Wielkości te możemy wyznaczyć z równań równowagi, napisanych dla każdego ciała układu, które to równania otrzymamy, stosując metodę oswobodzenia od połączeń.

Zastosujemy powyższe rozważanie do przykładu, wyobrażonego na rys. 51. Dane są długości $AD = l$, $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $BE = e$; ciężar kuli F zawieszony na sznurku EF Y. Pomiędzy kątami α, β, γ mamy dwie zależności

$$a\cos\alpha + b\cos\beta - c\cos\gamma = l \quad \ldots (1)$$

$$a\sin\alpha + b\sin\beta - c\sin\gamma = 0 \quad \ldots (2)$$



Rys. 51.

Jeden więc z kątów, np. α określa położenie układu, dwa inne kąty otrzymamy z powyższych równań. Na ciała AB i CD nie działają żadne siły bezpośrednio przyłożone, reakcja więc R_1 podpory A i reakcja S przeguba B na ciało AB są równe i wprost przeciwne: $\bar{S} = -\bar{R}_1$, podobnie $\bar{S}' = -\bar{R}_2$. Rozpatrując ciało BC, jako swobodne, widzimy, że znajduje się ono pod działaniem sił P, $\bar{R} = -\bar{S} = +\bar{R}_1$, $\bar{R}' = -\bar{S}' = +\bar{R}_2$, równania równowagi będą

/3/ $R\cos\alpha - R'\cos\gamma = 0$

/4/ $R\sin\alpha + R'\sin\gamma - P = 0$

/5/ $-R'b\sin(\beta+\gamma)+Pe\cos\beta=0$ /Równ. mom. względem p. B/.

Z równania /5/: $R'=-\frac{e\cos\beta}{b\sin(\beta+\gamma)}P$, z równania /3/ $R=\frac{\cos\gamma}{\cos\alpha}R'=-\frac{e\cos\beta\cos\gamma}{b\cos\alpha\sin(\beta+\gamma)}P$ podstawiając te wyrażenia w równanie /4/, otrzymamy

$$e\cos\beta(\tan\alpha\cos\gamma+\sin\gamma)+b\sin(\beta+\gamma)=0 \ldots\ldots (6)$$

Z równań /1/, /2/ i /6/ możemy wyznaczyć α, β i γ tj. znaleźć położenie równowagi, następnie z równań /3/ i /5/ możemy wyznaczyć reakcje R' i R, a więc i reakcje S, S', R_1, R_2

Zauważmy, że jeżeli w układach geometrycznie niezmiennych, jak w łuku trójprzegubowym, w układzie łuków lub układzie belek wspornikowych, zastąpimy działanie podpór przez reakcje, to układ możemy rozpatrywać, jako swobodny. Jak widać taki swobodny układ ciał jest geometrycznie zmienny, gdyż każde następne ciało jest połączone z poprzednim tylko jednym przegubem, około którego ma możność obrotu.

ZASADA ZESZTYWNIENIA.

§33. Wróćmy do rozpatrzenia równowagi łuku trójprzegubowego /§ 23/ i dodajmy do siebie równania /1/ i /4/ oraz /2/ i /5/, otrzymamy

$$R_{1x}+R_{2x}+\sum P_x=0 \ldots\ldots (a)$$

$$R_{1y}+R_{2y}+\sum P_y=0 \ldots\ldots (b)$$

gdzie znak Σ oznacza, że sumowanie rozciąga się na cały łuk: $\Sigma = \Sigma' + \Sigma''$ Równania /a/ i /b/ mają znaczenie równań równowagi dla całego łuku, jak gdyby on składał się nie z dwóch ciał $a_1 a$ i $a a_2$, lecz z jednego ciała sztywnego $a_1 a a_2$. Aby otrzymać równanie momentów, podobne do równań /a/ i /b/ należy dodać do siebie równania momentów dla części $a_1 a$ i $a a_2$, napisanych względem tego samego punktu. W tym celu napiszemy równanie momentów dla części $a a_2$ względem punktu a_1, mianowicie

$$R_{2x} h_2 - R_{2y} l - (R_x h_1 - R_y a) + \Sigma'' M_1 (P) = 0 \ldots (6')$$

Dodając to równanie do równania /6/, otrzymamy

$$R_{2x} h_2 - R_{2y} l + \Sigma M_1 (P) = 0 \ldots\ldots (c)$$

Równania /a/, /b/, /c/ wyrażają równowagę łuku trójprzegubowego, jak gdyby on stanowił jedno ciało sztywne $a_1 a a_2$, posiadające podpory a_1 i a_2. Podobnie dowiedliśmy w § 29, że równania równowagi dźwigara, jako całości są skutkiem algebraicznym równań równowagi węzłów. Dowód ten pozostaje w sile w wypadku, gdy wszystkie pręty rozciągane będą zrobione ze sznurów nierozciągliwych, tj. gdy dany układ jest układem geometrycznie zmiennym.

Równania równowagi $\Sigma X = 0, \Sigma Y = 0, \Sigma M = 0$ dla

---

całego układu, wyrażają równowagę tego układu, jak gdyby stanowił on jedno ciało sztywne. Jak widzieliśmy, wniosek ten jest skutkiem algebraicznym równań równowagi oddzielnych części układu F jest szczególnym wypadkiem pewnego ogólnego twierdzenia Mechaniki, nazywanego zasadą zesztywnienia.

§34. Aby sformułować ogólnie to twierdzenie wprowadzimy pewne określenia.

Układ ciał/lub punktów materjalnych/ jakkolwiek ze sobą połączonych, lecz nie połączonych z układem nieruchomym zewnętrznym, będziemy nazywać układem swobodnym.

Układ ciał połączonych z układem nieruchomym /tj.posiadający podpory/ nazywamy nieswobodnym. Zastępując działanie podpór przez reakcje podpór na każdy układ nieswobodny możemy się zapatrywać, jako na swobodny. Na tej samej podstawie na każde ciało, wchodzące w skład układu, można się zapatrywać jako na swobodne, jeżeli działanie połączeń z innemi ciałami układu zastąpimy przez reakcje. Na mocy zasady działania i przeciwdziałania reakcja połączenia, wyrażającego działanie ciała A na ciało B, jest równa i wprost przeciwna do reakcji tego połączenia, wyrażającego działanie ciała B na ciało A.

Wszelką siłę, przyłożoną do danego układu, będziemy nazywać wewnętrzną, jeżeli w układzie istnieje druga siła, równa powyższej i wprost przeciwna.

Wszelką siłę nie wewnętrzną będziemy nazywali zewnętrzną.

Wszystkie siły, działające na dany układ, możemy więc podzielić na siły zewnętrzne i wewnętrzne. Siły bezpośrednio przyłożone i reakcje podpór są siłami zewnętrznemi, reakcje połączeń ciał/lub punktów/ między sobą są siłami wewnętrznemi.

Przytoczone wyżej dowody algebraiczne zasady zesztywnienia dla łuku trójprzegubowego i dźwigara kratowego polegały na wyrugowaniu z równań równowagi sił wewnętrznych: reakcji w przegubie środkowym, natężeń prętów. Ogólny dowód algebraiczny zasady zesztywnienia jest zupełnie analogiczny do przytoczonego w §29, można go jednak zastąpić następującym.

Przypuśćmy, że mamy układ swobodny ciał /lub punktów materjalnych/, jakkolwiek ze sobą połączonych, znajdujących się pod działaniem sił zewnętrznych $P_{1z}, P_{2z}, \ldots$ w spoczynku; równowaga tego układu nie będzie naruszona, jeżeli my wprowadzimy nowe połączenia, któreby zmieniły dany układ na niezmienny; wtedy siły $P_{z1}, P_{z2}, \ldots$, powinny zadośćuczynić dwom warunkom równowagi /§ 7/,

$$\Sigma \bar{P}_z = 0 \quad i \quad \Sigma \bar{M}(\bar{P}_z) = 0$$

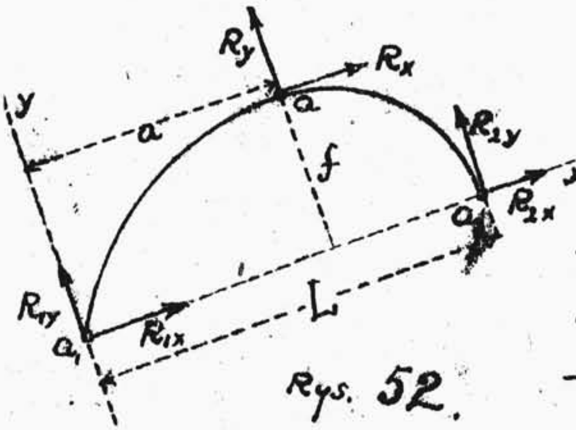
t.j. suma geometryczna wszystkich sił zewnętrznych, przyłożonych do układu, znajdującego się w spoczynku, oraz suma geometryczna momentów tych sił względem dowolnego punktu powinny się równać zeru. Z przytoczonego dowodu wynika, że powyższe dwa warunki równowagi sił zewnętrznych są konieczne lecz niedostateczne dla równowagi układu.

Dla układu płaskiego powyższe warunki są równoznaczne z trzema równaniami równowagi.

Dla łuku trójprzegubowego mamy ogółem 6 równań równowagi, dla układu C ciał, połączonych ze sobą, mamy ogółem $3C$ równań równowagi, zasada zesztywnienia daje dla wszelkiego układu płaskiego tylko 3 równania. Równania te można rozpatrywać jako skutek wyrugowania z powyższych równań sił wewnętrznych, zasada zesztywnienia pozwala napisać je bezpośrednio

Zastosowanie zasady zesztywnienia do łuku trójprzegubowego i innych układów.

§35. Mamy łuk trójprzegubowy A, O, B, rys.52/; reakcje podpór oznaczmy przez R_1 i R_2, reakcję ze strony ciała $a_2 a$ na ciało $a_1 a$ w przegubie oznaczmy przez R. Stosując zasadę zesztywnienia tj. rozpatrując układ $a_1 a a_2$ jako jedno ciało, możemy napisać następujące trzy równania tego ciała:



Rys. 52.

$$\Sigma X=0, \quad \Sigma M_{a_1}=0, \quad \Sigma M_{a_2}=0,$$

mianowicie

$$R_{1x}+R_{2x}+\Sigma P_x=0 \ldots\ldots (1)$$

$$R_{1y}L+\Sigma M_2(P)=0 \ldots\ldots (2)$$

$$-R_{2y}L+\Sigma M_1(P)=0 \ldots\ldots (3)$$

Z równań /2/ i /3/, otrzymujemy

$$R_{1y}=-\frac{1}{L}\Sigma M_2(P), \quad R_{2y}=\frac{1}{L}\Sigma M_1(P).$$

Dla dokończenia rozwiązania rozpatrujemy część $a_1 a$ jako ciało swobodne i pisząc równanie /x/ $\Sigma' M_a=0$, otrzymamy $-R_{1x}\cdot f+R_{1y}\cdot a+\Sigma' M_a(P)=0$

skąd $R_{1x}=R_{1y}\cdot\frac{a}{f}+\frac{1}{f}\Sigma' M_a(P)=-\frac{a}{f}\cdot\frac{1}{L}\Sigma M_2(P)+\frac{1}{f}\Sigma' M_a(P)$

pisząc jeszcze równanie $\Sigma' X=0$ i $\Sigma' Y=0$ otrzymamy

$$R_{1x}+R_x+\Sigma' X=0, \quad R_{1y}+R_y+\Sigma' Y=0,$$

skąd znajdziemy R_x i R_y i ostatecznie z równania /1/ R_{2x}.

Zastosowanie zasady zesztywnienia pozwoliło więc wyznaczyć bezpośrednio R_{1y} i R_{2y}, a następnie i inne

---

Znak Σ' /jak w §23/ wskazuje, że sumowanie dotyczy sił działających tylko na lewą część łuku.

niewiadome.

§ 36. Rozpatrzmy układ ciał połączonych ze sobą przegubami nieruchomemi lub ruchomemi /§22/, w ten sposób, że każde ciało następne z poprzednim połączone jest jednym przegubem, tak że układ ciał tworzy łańcuch, którego ogniwami są poszczególne ciała układu: poszczególne ciała układu mogą mieć podpory lub ich nie mieć. Takim właśnie układem ciał jest układ belek wspornikowych /§24/, układ łuków trójprzegubowych i układ łuków i belek /§26/. Wszelka podpora ruchoma na wsporniku może być rozpatrywana, jako przegub ruchomy o danej linji ślizgania.

Wszelki układ ciał po oswobodzeniu w myśli od podpór, może być rozpatrywany, jako swobodny. Powyższy układ po oswobodzeniu od podpór staje się układem geometrycznie zmiennym.

Na mocy jednak zasady zesztywniania, dla powyższego układu swobodnego możemy napisać trzy równania równowagi

$$\Sigma X=0\ ,\ \Sigma Y=0,\ \Sigma M=0 \ldots\ldots\ldots\ldots /1/,$$

w które to równania wejdą tylko siły zewnętrzne P_z, mianowicie siły bezpośrednio przyłożone P i reakcje podpór $R(X=R_x, Y=R_y)$

Wyobraźmy sobie, że w jakimkolwiek przegubie łączącym G_k rozdzieliliśmy w myśli powyższy układ na dwie części; działanie każdej oddzielonej części układu na drugą - musimy zastąpić przez reakcję R. Zgodnie z §22, dla przegubu nieruchomego reakcja ta jest siłą przechodzącą przez oś przegubu; dla przegubu ruchomego /lub podpory ruchomej na wsporniku/ reakcja ta jest siłą przechodzącą przez oś przegubu i prostopadłą do linji ślizgania SS.

Oddzielona część układu /np. lewa/ znajduje się w równowadze pod działaniem sił zewnętrznych P_k i powyższej reakcji R. Napiszmy takie równania równowagi tej części, w którejby nie weszła reakcja R, a więc

$$\sum^{n} M_n = 0 \qquad\qquad /2/,$$

t.j. równanie momentów względem środka przegubu w wypadku przegubu nieruchomego i

$$\sum_{0}^{n} M_n = 0 \ \ i \ \ \sum_{0}^{n} P_k \cos(P_k, ss) = 0 \qquad\qquad /3/$$

t.j. równanie momentów i równanie rzutów na oś SS w wypadku przegubu ruchomego. Oznaczmy ilość przegubów łączących nieruchomych przez p', ilość przegubów łączących ruchomych przez s'; widzimy, że prócz równań /1/ możemy dla każdego przegubu pierwszego rodzaju napisać jedno równanie typu /2/, dla każdego przegubu drugiego rodzaju dwa równania typu /3/. Mamy więc ogółem $(3+p'+2s')$ równań dla sił zewnętrznych t.j. równań dla wyznaczenia reakcyj podpór.

Oznaczymy przez a ilość reakcyj prostych podpór, otrzymamy, że warunek konieczny dla możności ich wyznaczenia jest następujący:

$$a = 3 + p' + 2s',$$

W §§25 i 26 wyraziliśmy ten warunek przez równanie $2p + s = 3c$

Oczywiście oba te warunki powinny dać rezultat identyczny.

Wyłożony tutaj sposób, oparty na zasadzie zesztywnienia, pozwala wyznaczać reakcje podpór układu bezpośrednio bez wprowadzenia do równań sił wewnętrznych t.j. reakcyj przegubów łączących.

Jeżeli w celu wyznaczenia reakcyj podpór i połączeń stosujemy sposób, wskazany w §§24 - 26, to równania /1/, /2/ i /3/ mogą służyć do sprawdzenia prawidłowości rozwiązania.

Metoda odcięć.

§37. W §31 mówiliśmy, że przecinając pręt A_1A_2 w punkcie A płaszczyzną prostopadłą do osi, musimy, dla zachowania tego samego stanu równowagi w jakim się pręt poprzednio znajdował, do wszystkich punktów płaszczyzny przekroju przyłożyć pewien zespół sił. Taki zespół sił odniesiony do jednostki powierzchni nazywa