żone w przybliżeniu, jako suma $J = kb \cdot \Sigma \xi \cdot mn$
Każdy iloczyn $\xi \cdot mn$ jest podwojoną płaszczyzną trójkąta, mającego za wierzchołek α_i i za podstawę odpowiedni odcinek mn, odcięty na prostej $\alpha_0 \alpha_{n+1}$ przez boki $\alpha_{i-1} \alpha_i$ i $\alpha_i \alpha_{i+1}$, np. $\xi_2 \cdot mn = 2 pl. (\alpha_2 mn)$. A zatem

$$J = 2kb \Sigma pl. (\alpha_i mn) =$$

$$= 2kb \cdot pl. (\alpha_0 \alpha_1 \ldots \alpha_n \alpha_{n+1} \alpha_0).$$

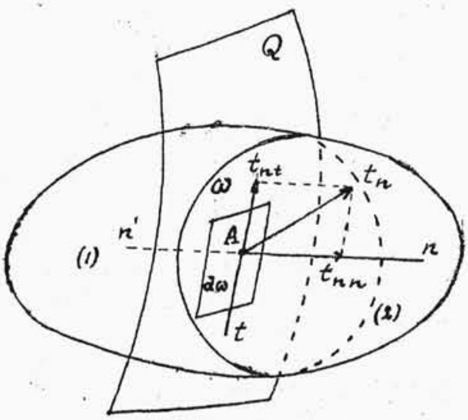
ROZDZIAŁ III.

PARCIE ZIEMI.

PODSTAWY TEORJI NAPRĘŻEŃ W ŚRODOWISKU.

§ 134. Zanim przejdziemy do właściwego zagadnienia, podamy pewne zasadnicze pojęcia z teorji sprężystości. Przedewszystkiem zajmiemy się określeniem "naprężenia". Wyobraźmy sobie dowolne ciało, sztywne lub nie, będące w równowadze pod działaniem sił zewnętrznych i uważajmy je za środowisko ciągłe, Przetnijmy to ciało w myśli dowolną powierzchnią i rozważajmy warunki równowagi jednej z wyodrębnionych w ten sposób części.

Na mocy zasady oswobodzenia od połączeń, musimy dla zachowania równowagi, zniszczone przez przecięcie połączenia zastąpić przez siły. Siły te, przy założeniu ciągłości ośrodka, będą zaczepione w sposób ciągły do powierzchni przecięcia. W punkcie A przecięcia ω rozpatrzmy nieskończenie mały element o powierzchni $d\omega$. Na każdy taki mały element przecięcia działa nieskończenie wiele



Rys. 167

sił różnokierunkowych P, które w sumie zastępują działanie odrzuconej części; siły te, podobnie jak wszelki układ sił, możemy zastąpić przez jedną siłę $\Sigma \overline{P}$ i parę sił. Siła $\Sigma \overline{P}$ będzie nieskończenie mała, jako działająca na nieskończenie mały element; para sił zaś będzie się charakteryzować momentem o wielkości nieskończenie małej drugiego rzędu, ponieważ moment ten równa się iloczynowi nieskończenie małej siły przez nieskończenie małe ramię. A zatem możemy ten moment pominąć wobec siły ΣP, która będzie wtedy wypadkową rozważanego układu.

Dzieląc wielkość wypadkowej ΣP przez pole elementu skończonego $\Delta\omega$ otrzymamy stosunek $\frac{\Sigma P}{\Delta\omega} = t_s$, który nazywamy "naprężeniem średniem" na elemencie $\Delta\omega$.

Zmniejszając pole elementu $\Delta\omega$ do zera otrzymamy graniczną wartość średniego naprężenia:

$$\lim_{\Delta\omega \to 0} \frac{\Sigma P}{\Delta\omega} = \frac{\Sigma P}{d\omega} = t,$$

którą nazywamy "naprężeniem w punkcie A"; jest to wielkość skończona. Wymiar jej jest $\left[\frac{P}{L^2}\right]$ x/. Ażeby z naprężenia otrzymać siłę działającą na nieskończenie małe poletko, trzeba naprężenie t pomnożyć przez odpowiedni element powierzchni $d\omega$, t.j. siła ta będzie $t\,d\omega$. Naprężenie w punkcie jest pojęciem tylko pomyślanem. Możemy je sobie wyobrazić, jako naprężenie średnie, działające na jednostce pola, w przypuszczeniu, że na-

---

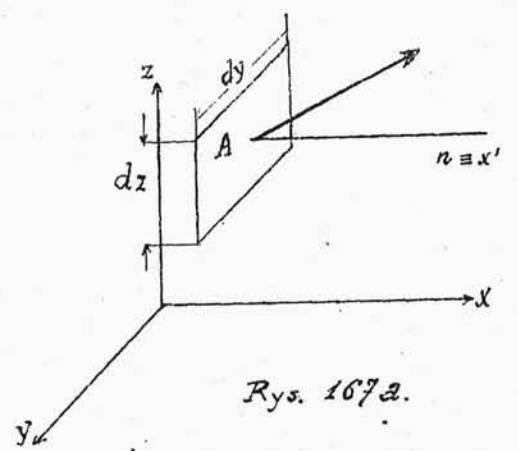
x/ Oczywiście jest tutaj mowa o wymiarach technicznych, używanych w Statyce, a nie o wymiarach w układzie CGS.

prężenia we wszystkich punktach tej jednostki pola są jednakowe, takie, jak w punkcie A. Położenie $d\omega$ poletka możemy określić w przestrzeni przez kierunek jej normalnej zewnętrznej n w punkcie A, a zatem i naprężenie będzie zależeć od kierunku normalnej. Normalna zewnętrzna ma zwrot w stronę odciętej w myśli części ciała. Na rys.1 normalna zewnętrzna n dla poletka $d\omega$ oznacza, że usunęliśmy w myśli cząstki części /2/ i mamy na myśli naprężenia działające na poletko $d\omega$, przynależne do części /1/. Naprężenie to wyraża działanie części /2/ ciała na część /1/ w poletku $d\omega$. Oznaczmy to naprężenie według Coriolisa, przez t_n, t.zn. naprężenie przynależne do poletka $d\omega$ o normalnej zewnętrznej n. Na mocy zasady działania i przeciwdziałania naprężenie na poletku $d\omega$ o normalnej zewnętrznej n' odwrotnej do n t.j. $t_{n'}$ jest równe i wprost odwrotne do t_n; $t_{n'}$ wyraża działanie w poletku $d\omega$ części /1/ na część /2/. Kierunek t_n wogóle jest różny od kierunku normalnej/. Zależność naprężenia od kierunku normalnej wyrazimy w sposób następujący: $t_n = f_1(\alpha, \beta, \gamma)$, gdzie α, β, γ są kątami kierunkowemi normalnej. Z drugiej strony naprężenie zależy od położenia punktu A w przestrzeni, czyli od jego spółrzędnych x, y, z, co można wyrazić, że $t_n = f_2(x, y, z)$; zatem w ogóle

$t_n = F(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma)$ jest to więc wielkość bardziej złożona niż np. siła, określa ona się przez 6 spółrzędnych. Rzuty t_n na osi spółrzędnych oznaczamy według Coriolisa t_{nx} t_{ny} t_{nz}, każda z tych trzech wielkości jest funkcją tych samych sześciu argumentów.

Normalna n i linja działania naprężenia t_n określa pewną płaszczyznę nAt (rys. ...) przytem At jest styczną do powierzchni przecięcia w punkcie A. Możemy naprężenie t_n rozłożyć na dwie składowe wzdłuż kierunków A_n i A_t. Składowa t_{nn} nazywa się naprężeniem normalnem; ściślej jest to rzut naprężenia t_n na oś n. Składową t_{nx} nazywamy naprężeniem stycznem, jestto też rzut t_n na oś t. W wypadku $t_{nn} > 0$ t.j. gdy składowa t_{nn} ma zwrot normalnej zewnętrznej, naprężenie to nazywa się ciągnieniem; w wypadku odwrotnym $t_{nn} < 0$ - ciśnieniem.

§ 135. W celu uproszczenia rozpatrywań uważajmy nie jakąkolwiek powierzchnię tnącą, lecz płaszczyznę, skierowaną prostopadle do jednej z trzech osi. Biorąc płaszczyznę Q prostopadle do osi X, mamy normalną równoległą do tej osi, na zasadzie powyższych oznaczeń nazwiemy naprężenie w punkcie A na powyższem poletku $t_n \equiv t_x$, a rzuty jego na osie przez t_{xx}, t_{xy}, t_{xz}. Rozpatrywany element płaszczyzny $dy\,dz$ będzie prostopadły do osi Ox.

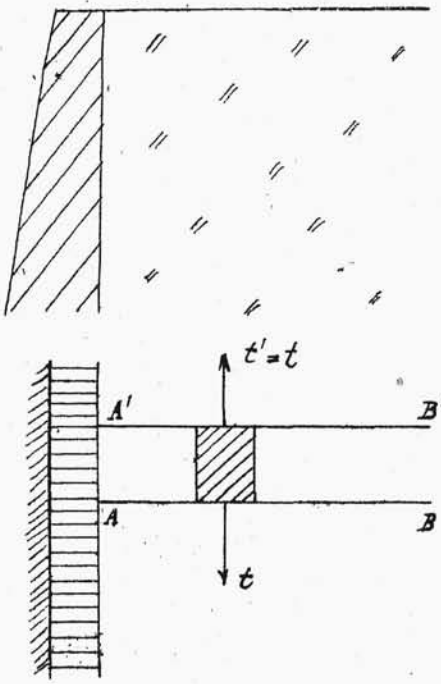


Rys. 167a.

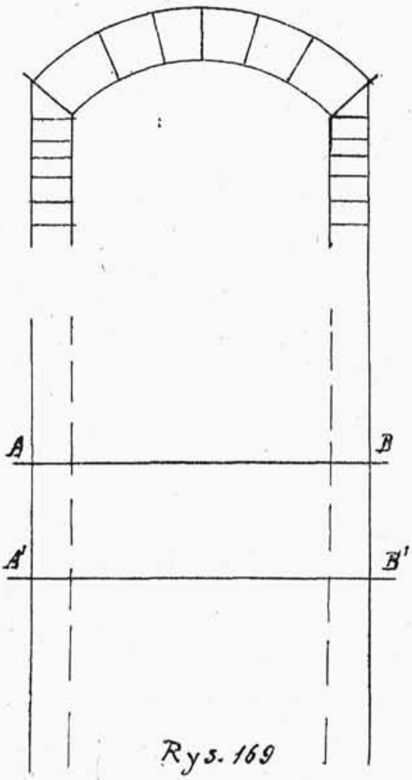
Podobnie biorąc płaszczyznę tnącą prostopadle do Oy, otrzymamy zupełnie tak samo naprężenie t_y i jego rzuty t_{yx} t_{yy} t_{yz}. Wreszcie dla płaszczyzny tnącej, prostopadłej do Oz będziemy mieli naprężenie t_z i jego rzuty t_{zx} t_{zy} t_{zz}. Składowe t_{xx}, t_{yy}, t_{zz} są to naprężenia normalne - ciągnienia lub ciśnienia w zależności od znaku; inne składowe są to naprężenia styczne.

Zauważmy, że tylko dla krótkości mówi się, że składowe t_{nn}, t_{nt}, t_{xx}....są "naprężeniami"; wyrażając się ściślej należałoby mówić, że to są rzuty naprężenia na odpowiednie osi. Samo naprężenie, podobnie jak i siła, jest wektorem i znaku nie posiada; rzuty zaś naprężenia są wielkościami algebraicznemi; w tem znaczeniu, jako rzutów, wielkości t_{nn}, t_{nt}, t_{xx}, ... zwane dla krótkości naprężeniami, posiadają znaki.

§ 136. W teorji parcia ziemi nie będziemy mieli potrzeby rozpatrywać rozkładu przestrzennego naprężeń, a możemy się ograniczyć, jak to zaraz pokażemy, do rozkładu płaskiego. Naprzykład rozpatrzmy ścianę podporową bardzo długą /rys.168/. Wycinając pas ziemi o szerokości 1 metra prostopadle do ścianki, możemy zauważyć, że każdy taki pas będzie w jednakowych warunkach, o ile wytniemy go dość daleko od końców ścianki. Jeśli z pasa tego wytniemy sześcian, to naprężenia na jego ściankach AB, $A'B'$, będą jednakowe, niezależnie od miej-

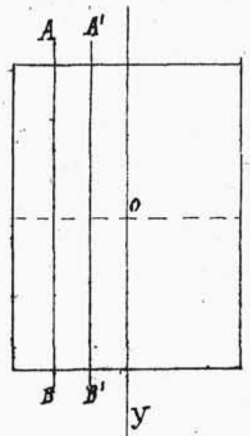


Rys. 168



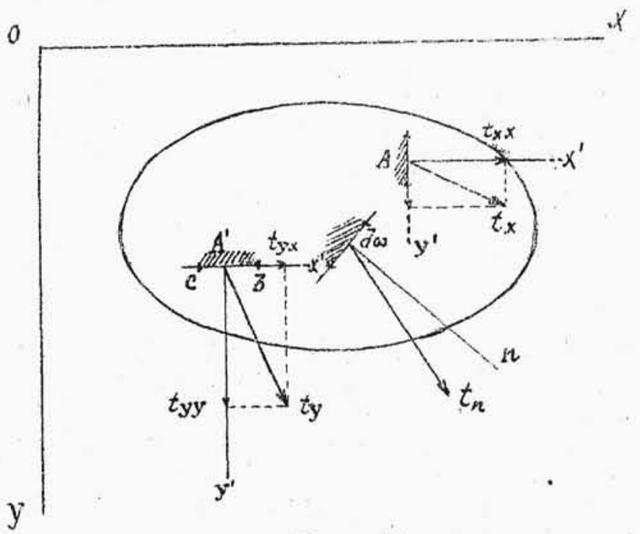
Rys. 169

sca, w którem go wytniemy. Wystarczy zatem rozpatrzeć układ naprężeń na płaszczyzny prostopadłe do AB, t.j. rozpatrzyć układ płaski w płaszczyźnie AB. Podobnie możemy rozpatrywać układ naprężeń w sklepieniu cylindrycznem /rys.169/. Im dalej od brzegu weźmiemy przecięcie prostopadłe do osi sklepienia, tembardziej możemy uważać, że pracuje ono w takich warunkach, jakgdyby brzeg odsunął się do nieskończoności; wystarczy zatem i tu badać płaski układ napreżeń w jednem któremkolwiek przecięciu, np. AB. W wytrzymałości materjałów, ściśle biorąc też nie uwzględnia się właściwie przestrzennego układu naprężeń. Np. w teorji gięcia płaskiego belek stan naprężony charakteryzuje się tylko dwoma naprężeniami normalnem $\sigma = \frac{M y}{J}$ i stycznem $\tau = \frac{T S}{b J}$ /Cz. I. § 99/; w płaszczyznach AB i $A'B'$ /rys. 170/ równoległych do płaszczyzny bezwładności Oy σ i τ są jednakowe, t.j. według tej teorji i stan naprężony jest jednakowy w ścisłej teorji sprężystości uwzględnia się jednak położenie płaszczyzn AB i $A'B'$.



Rys. 170

Z powyższych względów ograniczymy się do rozpatrywania ciała, jako płaskiej płytki o grubości jednostkowej, co znacznie uprości wywody. Biorąc układ płaski redukujemy w ten sposób układ osi spółrzędnych do dwóch: Ox Oy. W danym punkcie A będziemy rozważać zasadnicze naprężenia na poletkach prostopadłych do dwóch osi Ox i Oy



Rys. 171

czyli t_x i t_y ; rzuty zaś ich będą t_{xx} t_{xy}, t_{yx} t_{yy} /Uważane poletka zrzutują się na rysunku jako odcinki proste/. Umawiamy się brać dodatnie kierunki powyższych rzutów w sposób następujący.

Niech $Ax' \parallel Ox$ /rys.171/ i z takim samym zwrotem będzie normalną zewnętrzną dla poletka ab ; wyobraźmy sobie jeszcze oś $Ay' \parallel Oy$ i z takim samym zwrotem; otóż dodatnie rzuty t_{xx} i t_{xy} będą miały odpowiednie zwroty Ax' i Ay' Podobnie dla poletka bc o normalnej zewnętrznej Ay' za dodatnie rzuty t_{yx} i t_{yy} będziemy liczyli takie, które mają odpowiednie zwroty Ax' i Ay'

Wprowadzimy dla krótkości na składowe naprężeń następujące oznaczenia Lamego. Rzuty t_{xx} i t_{xy} naprężenia t_x, odpowiednio skierowane wzdłuż normalnej i stycznej do danego elementu, oznaczamy przez N_1, czyli naprężenie "normalne" i przez T czyli naprężenie "styczne" /tangentielle/. Podobnież, t_{yx} jako styczne, oznaczamy przez T', t_{yy} zaś jako normalne przez N_2. Innemi słowy wprowadzimy oznaczenia:

$$t_{xx}=N_1, \quad t_{xy}=T, \quad t_{yx}=T', \quad t_{yy}=N_2 .$$

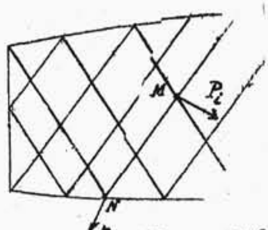
SIŁY POWIERZCHNIOWE I OBJĘTOŚCIOWE.

§ 137. Siły zewnętrzne, przyłożone do powierzchni ciała, będziemy uważali jako naprężenia, według określenia w § 134.

Rozważymy siły ciągłe, a nie skupione, gdyż w naturze nie spotyka się ściśle sił skupionych w tem znaczeniu, w jakiem używaliśmy w poprzednich rozdziałach, czyniliśmy to, jako przybliżenie. Prócz sił powierzchniowych działają jeszcze siły objętościowe F, które są przyłożone do każdego punktu ciała. Rzuty ich na Ox i Oy oznaczamy X, Y, są one funkcjami położenia punktu. Wymiar siły objętościowej P nie jest wymiarem siły, lecz $\left[\frac{P}{L^3}\right]$, ponieważ siłę tę odnosimy do jednostki objętości. Siły powierzchniowe i objętościowe są siłami zewnętrznemi, działającemi na ciało, w przeciwieństwie do nich rozważone powyżej naprężenia wewnątrz ciała są siłami wewnętrznemi.

WARUNKI RÓWNOWAGI MIĘDZY SIŁAMI ZEWNĘTRZNEMI I WEWNĘTRZNEMI.

§ 138. Niech mamy ciało swobodne, na które działają siły zewnętrzne: powierzchniowe p i objętościowe P, i będące w równowadze pod działaniem tych sił. Równowaga ta zachodzi dzięki pośrednictwu sił wewnętrznych. O ile nie chodzi o ujawnienie i obliczenie tych sił wewnętrznych, zadowolniamy się, jak to czyniliśmy dotąd, rozważaniem sił p i P co jest równoznaczne ze stosowaniem zasady zesztywnienia. Jeżeli jednak chcemy podjąć wyznaczenie sił wewnętrznych, powinniśmy je ujawnić w celu napisania odpowiednich równań równowagi. Czynimy to podobnie jak dotąd przy obliczaniu reakcyj połączeń w układach ciał, t.j. stosujemy metodę oswobodzenia od połączeń, czyli w gruncie rzeczy 3 zasadę Newtona o równości działania i przeciwdziałania. Już w poprzednich §§ za pośrednictwem tej metody wykazaliśmy, że rozważanie sił wewnętrznych może być sprowadzone do naprężeń wewnętrznych t. Obecnie więc zadanie nasze będzie polegało na napisaniu odpowiednich równań równowagi między "siłami": p P i t. Jako wskazówka przy tem postępowaniu może nam służyć analogja z kratownicą o bardzo gęstej kracie /rys.172/. Niech tutaj na węzły zewnętrzne działają siły p_i, na wewnętrzne P_i, siłami wewnętrznemi są tutaj natężenia S prętów. Wyrażenia równowagi między siłami p_i P_i i S sprowadza się tutaj do napisania równań równowagi dla węzłów wewnętrznych M i zewnętrznych N t.j. równań:

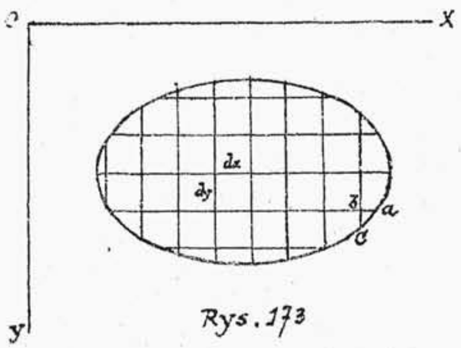


Rys. 172

$$P_{ix} + \sum S\cos(Sx) = 0 \qquad p_{ix} + \sum S\cos(Sx) = 0$$

$$P_{iy} + \sum S\cos(Sy) = 0 \qquad p_{iy} + \sum S\cos(Sy) = 0$$

Ujawnienie naprężeń w ciele ciągłem zależy od powierzchni przecięcia, gdyż uważamy, że ciało jest jednorodne we wszystkich kierunkach. Wobec tej dowolności wyobraźmy sobie, że całe ciało jest rozdzielone siatką spółrzędnych na sześciany; przy tym podziale na obwodzie ciała otrzymamy tylko skrawki sześcianów.



Rys. 173

Przy podziale płaszczyznami leżącemi od siebie nieskończenie blisko, mianowicie o dx i dy, a w kierunku osi Oz o jednostkę długości; zawsze można osiągnąć, że skrawki sześcianów na obwodzie można będzie uważać za graniastosłupy o trzech ścianach płaskich. Równowagę ciała wyrazimy przez napisanie równań równowagi dla dowolnego prostopadłościanu $dx \cdot dy \cdot 1$, uważanego za swobodny i dla dowolnego graniastosłupa zewnętrznego $abc1$. Jako hypotezę o strukturze ciała przyjmiemy hypotezę ciągłości materji.

§ 139. Z hypotezy ciągłości materji i ciągłości sił zewnętrznych wypływają pewne konsekwencje co do ciągłości naprężeń. Mianowicie niech t_n będzie naprężenie w punkcie $A(x,y,z)$ na poletku o normalnej n o kątach kierunkowych α,β,γ, widzieliśmy, że $t_n = f(x,y,z,\alpha,\beta,\gamma)$. Niech $t'_{n'}$ będzie naprężenie w punkcie $x+dx$, $y+dy$, $z+dz$ na poletku o normalnej n', posiadającej kąty kierunkowe $\alpha+d\alpha, \beta+d\beta, \gamma+d\gamma$. Wobec ciągłości materji i sił zewnętrznych przyjmujemy, że i naprężenia są funkcjami ciągłemi, a zatem będziemy mieli

$$t'_{n'} = t_n + dt_n = f(x+dx, y+dy, \ldots, \gamma+d\gamma) = f(x,y,\ldots) +$$

$$+ \frac{\partial f}{\partial x} dx + \ldots + \frac{\partial f}{\partial \gamma} d\gamma = t_n + \frac{\partial t_n}{\partial x} dx + \ldots\ldots + \frac{\partial t_n}{\partial \gamma} d\gamma$$

W podobny sposób np. dla składowej $t_{xx} = N_1$ naprężenia t_x, uwzględniając przytem, że $N_1 = f(x,y,z)$, będziemy mieli:

$$N_1 + dN_1 = N_1 + \frac{\partial N_1}{\partial x} dx + \frac{\partial N_1}{\partial y} dy + \frac{\partial N_1}{\partial z} dz$$

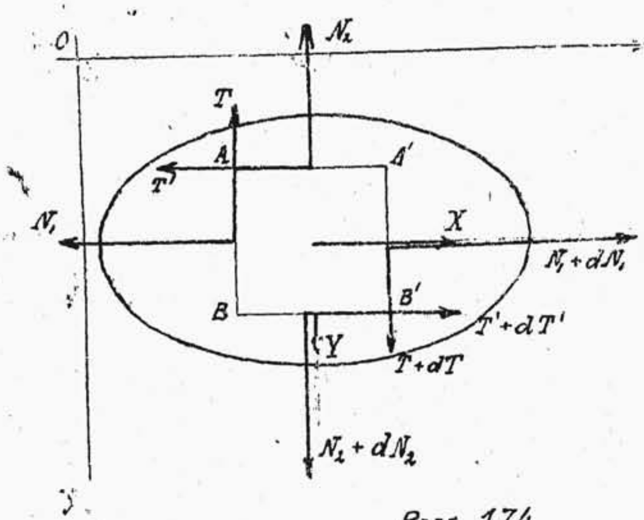
Dla układu płaskiego wyraz z dz równa się zeru. Jeżeli np. zmienia się tylko dx, a y pozostaje dawne, to $dN_1 = \frac{\partial N_1}{\partial x} dx$.

RÓWNOWAGA PROSTOPADŁOŚCIANU ELEMENTARNEGO.

§ 140. Wracając do § 138, zajmiemy się teraz wywodem równań równowagi wyodrębnionego prostopadłościanu $dx \cdot dy \cdot 1$, znajdującego się przy punkcie $A(x, y)$ /rys. 174/. Rozważany prostopadłościan znajduje się w równowadze pod działaniem reakcyj na ścianki/ę t.j. naprężeń oraz siły objętościowej. Siła objętościowa jest zaczepiona do środka ciężkości prostopadłościanu i równa się $P dx.dy.1$ rzuty jej na osie Ox i Oy będą $X dx dy \cdot 1$ i $Y dx\, dy \cdot 1$.

Naprężenie t_x przynależne do poletka AB o normalnej zewnętrznej w kierunku osi

Ox t.j. przy odcięciu cząstek z prawej strony daje składowe N_1 i T, naprężenie t_y przynależne do poletka AA' o normalnej zewnętrznej w kierunku osi Oy t.j. przy odcięciu cząstek ciała nadół od BB', daje składowe N_2 i T'. Naprężenia na ścianki AB i AA' prostopadłościanu na mocy zasady działania i przeciwdziałania będą miały te same wielkości, lecz zwroty przeciwne, a więc rzuty tych naprężeń będą na ściankę: AB : $(-N_1)$ i $(-T)$, na ściankę: $AA'(-N_2)$ i $(-T')$. Rzuty na osie Ox i Oy odpowiednich sił, działających na ścianki będą: na ściankę AB : $-N_1 \cdot dy \cdot 1$ i $-T \cdot dy \cdot 1$ na ściankę



Rys. 174

AA' : $-T' \cdot dx \cdot 1$ i $-N_2 \cdot dx \cdot 1$. Naprężenia na ściankach przeciwległych będą nieco różne od naprężeń t_x i t_y . na ściance $A'B'$ mianowicie będzie działało naprężenie $t'_x = t_x + dt_x$, które da składowe $N_1 + dN_1$ oraz $T + dT$. Wreszcie na ściance BB' będziemy mieli naprężenie $t'y = ty + dty$, a jego składowe będą $N_2 + dN_2$ i $T' + dT'$.

Porównywując naprężenia, działające na ściankach przeciwległych AB i $A'B'$ i uważając każde z tych naprężeń wzdłuż ścianki za stałe, widzimy, że naprężenia na ściance AB odpowiadają spółrzędnym x i y , podczas tego gdy naprężenia na ściance $A'B'$ odpowiadają spółrzędnym $x + dx$ i y .

Wobec tego przyrost dN_1 i dT naprężeń na ściankę $A'B'$ zależeć będzie tylko od dx i na mocy § 139 otrzymamy przynależne do ścianki $A'B'$ naprężenie normalne następujące:

$$N_1 + dN_1 = N_1 + \frac{\partial N_1}{\partial x} dx$$

oraz naprężenie styczne:

$$T + dT = T + \frac{\partial T}{\partial x} dx$$

Podobnie otrzymamy następujące naprężenia na ściance BB', zależne od przyrostu dy:

$$N_2 + dN_2 = N_2 + \frac{\partial N_2}{\partial y} dy ;$$

$$T' + dT' = T' + \frac{\partial T'}{\partial y} dy.$$

Rzuty na osie Ox i Oy odpowiednich sił, działających na ścianki będą:

Na ściankę $A'B'$:

$$\left(N_1 + \frac{\partial N_1}{\partial x} dx\right) \cdot dy \cdot 1 \quad \text{i}$$

$$\left(T + \frac{\partial T}{\partial x} dx\right) \cdot dy \cdot 1 ;$$

Na ściankę BB':

$$\left(N_2 + \frac{\partial N_2}{\partial y} dy\right) \cdot dx \cdot 1 \quad \text{i} \quad \left(T' + \frac{\partial T'}{\partial y} dy\right) \cdot dx \cdot 1$$

$$T \cdot dy \cdot 1 \cdot dx - T' dx \cdot 1 \cdot dy - N_1 dy \cdot 1 \cdot \frac{dy}{2} +$$

$$+ N_2 dx \cdot 1 \frac{dx}{2} + \left(N_1 + \frac{\partial N_1}{\partial x} dx\right) dy \cdot 1 \cdot \frac{dy}{2} -$$

$$-\left(N_2 + \frac{\partial N_2}{\partial y} dy\right) dx \cdot 1 \frac{dx}{2} + X dx\, dy \cdot 1 \frac{dy}{2} -$$

$$- Y dx \cdot dy \cdot 1 \frac{dx}{2} = 0;$$

po otwarciu nawiasów i skróceniu otrzymamy:

$$T\,dx\,dy - T'\,dx\,dy + dN_1\,dy\cdot\frac{dy}{2} - dN_2\,dx\cdot\frac{dx}{2} +$$

$$+ X\,dx\,dy\,\frac{dy}{2} - Y\,dx\,dy\,\frac{dx}{2} = 0;$$

pomijając momenty sił objętościowych i naprężeń normalnych, jako nieskończenie małe trzeciego rzędu wobec drugiego, napiszemy:

$$T\,dx\,dy - T'\,dx\,dy = 0,$$

skąd $T' = T$.

Następnie napiszemy równanie rzutów na OX:

$$\left(N_1 + \frac{\partial N_1}{\partial x}\,dx\right)dy\cdot 1 - N_1\,dy\cdot 1 - T'\,dx\cdot 1 +$$

$$+\left(T' + \frac{\partial T'}{\partial y}\,dy\right)dx\cdot 1 + X\,dx\,dy\cdot 1 = 0.$$

Ale ponieważ $T' = T$, zatem

$$\frac{\partial N_1}{\partial x}\,dx\cdot dy + \frac{\partial T}{\partial y}\,dx\,dy + X\,dx\,dy = 0,$$

czyli

$$\frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial y} + X = 0 \;\ldots\ldots\; (1)$$

Równanie rzutów na oś Oy będzie:

$$-T\,dy\cdot 1+\left(T+\frac{\partial T}{\partial x}dx\right)dy\cdot 1-N_2\,dx\cdot 1+$$

$$+\left(N_2+\frac{\partial N_2}{\partial y}dy\right)dx\cdot 1+Y\,dx\,dy\cdot 1=0$$

$$\frac{\partial T}{\partial x}dx\,dy+\frac{\partial N_2}{\partial y}dx\,dx+Y\,dx\,dy=0$$

$$\frac{\partial T}{\partial x}+\frac{\partial N_2}{\partial y}+Y=0\;.\;.\;.\;.\;.\;(2)$$

Te dwa równania /1/ i /2/ określają równowagę w każdym punkcie prostopadłościanu elementarnego $dx\cdot dy\cdot 1$, dążącego w granicy do zera. Ponieważ $T'=T$ początkowe, więc cztery funkcje od x i y, N_1, N_2, T i T' redukują się do trzech N_1, N_2, T.

§ 141. Zauważmy tutaj, iż gdybyśmy rozpatrywali prostopadłościan $dx\cdot dy\cdot dz$, nie jako układ płaski, lecz przestrzenny, to mielibyśmy do rozważania 9 naprężeń zasadniczych /§ 135/:

$$
\begin{matrix}
t_{xx}, & t_{xy}, & t_{xz} \\
t_{yx}, & t_{yy}, & t_{yz} \\
t_{zx}, & t_{zy}, & t_{zz}
\end{matrix}
$$

Z równań momentów względem krawędzi sześcianu przekonalibyśmy się, jak w poprzednim §, że $t_{xy} = t_{yx}$, $t_{xz} = t_{zx}$, $t_{yz} = t_{zy}$ t.j. 9 zasadniczych naprężeń sprowadzi się w przestrzeni do 6.

Przytoczymy tutaj ważniejsze z używanych oznaczeń na zasadnicze naprężenia:

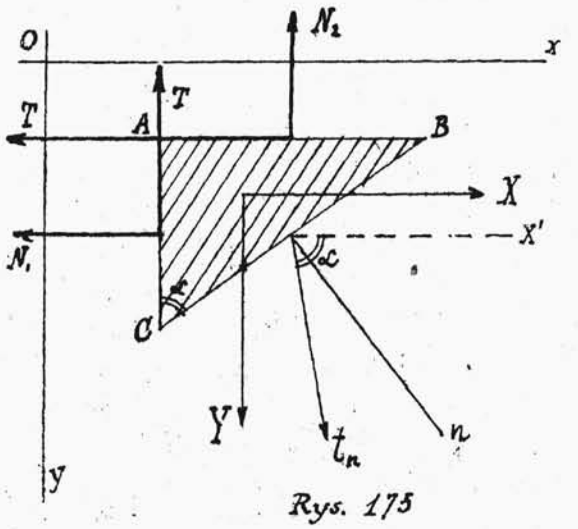
t_{xx}	N_1	X_x	σ_x
t_{yy}	N_2	Y_y	σ_y
t_{zz}	N_3	Z_z	σ_z
t_{yz}	T_1	Y_z	τ_{yz} (τ_x)
t_{zx}	T_2	Z_x	τ_{zx} (τ_y)
t_{xy}	T_3	X_y	τ_{xy} (τ_z)

W pierwszej kolumnie przyto-zone są oznaczenia Coriolisa, - w drugiej Lame'go, używane przeważnie przez francuskich autorów, - w trzeciej oznaczenia używane często przez angielskich autorów, w czwartej - przez niemieckich.

RÓWNOWAGA GRANIASTOSŁUPA ELEMENTARNEGO.

§ 142. Rozpatrzmy teraz równowagę graniastosłupa elementarnego, o którym mówiliśmy w § 138. Możemy sobie wyobrazić, że taki graniastosłup o przecięciu trójkątnem i nieskończenie małych długościach krawędzi $AB = dx$ i $AC = dy$ /rys.175/ pochodzi nietylko od podziału opisanego w § 138, lecz że jest wyodrębniony w myśli w dowolnem miejscu ciała przy punkcie A o spółrzędnych (x,y) .

Rozpatrzenie równowagi takiego graniastosłupa, wyciętego z wnętrza ciała, będzie przydatne do zbadania naprężenia, działającego na ściance $BC = ds$,



Rys. 175

nachylonej pod dowolnym kątem do osi Ox, Oy. Położenie pelotka BC określamy przez $\sphericalangle\alpha$ normalnej z osią OX. W myśl powyższych rozważań otrzymamy rzuty naprężeń na osie Ox i Oy:

na ściance AC: $(-N_1)$ i $(-T)$

" " AB: $(-N_2)$ i $(-T)$

" " BC: $t_n \cos(t_n,x)$ i $t_n \cos(t_n,y)$.

Równania rzutów na osie Ox i Oy będą:

$$t_n\, ds \cdot 1 \cdot \cos(t_n,x) - N_1\, dy \cdot 1 - T dx \cdot 1 + X \cdot \frac{1}{2}\, dx\, dy \cdot 1 = 0$$

$$t_n\, ds \cdot 1 \cos(t_n,y) - N_2\, dx \cdot 1 - T dy \cdot 1 + Y \cdot \frac{1}{2}\, dx\, dy \cdot 1 = 0$$

Ponieważ siły objętościowe są tu różniczkami drugiego rzędu, możemy je pominąć wobec różniczek pierwszego rzędu i otrzymamy:

$$t_n\, ds \cos(t_n, x) = N_1\, dy + T dx$$

$$t_n\, ds \cos(t_n, y) = N_2\, dx + T dy$$

dzieląc przez ds i podstawiając $\frac{dy}{ds} = \cos\alpha$ $\frac{dx}{ds} = \sin\alpha$ otrzymamy:

$$t_n \cos(t_n, x) = N_1 \cos\alpha + T \sin\alpha$$

$$t_n \cos(t_n, y) = N_2 \sin\alpha + T \cos\alpha$$

lub

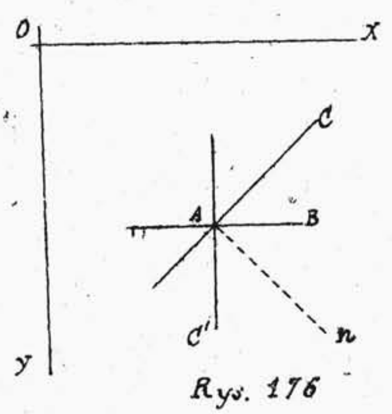
$$t_{nx} = N_1 \cos\alpha + T \sin\alpha \quad \ldots \quad (3)$$

$$t_{ny} = N_2 \sin\alpha + T \cos\alpha \quad \ldots \quad (4)$$

gdzie t_{nx}, t_{ny} oznaczają rzuty naprężeń, działających na dowolnie skierowanem poletku wewnętrznem.

Pozostaje jeszcze zrobić uwagę co do rozumienia równań /1/, /2/, /3/ i /4/. Są to równania równowagi nieskończenie małej cząstki prostopadłościanu i graniastosłupa o podstawie trójkątnej. Długości krawędzi tych cząstek wyrażają się różniczkami, czyli w granicy dążą do zera t.j. równania powyższe stosują się do prostopadłościanu i graniastosłupa, których objętość jest zero.

Niech w punkcie A /rys.176/ na poletko AC o normalnej n działa naprężenie t_n. Rzuty t_{nx} i t_{ny} naprężenia t_n na poletku AC wyrażają się



Rys. 176

wzorami /3/ i /4/, gdzie N_1 i T naprężenia normalne i styczne na poletku AC', N_2 i T zaś - na poletku AB

W graniastosłupie wyciętym na powierzchni ciała, zależność naprężeń na ściance zewnętrznej skośnej od naprężeń na ściankach wewnętrznych równoległych do osi będzie oczywiście taka sama. Dla odróżnienia tylko oznaczymy naprężenia ścianki powłokowej przez p, normalę zewnętrzną do niej przez ν, a więc rzuty naprężenia przez $p_{\nu x}$ i $p_{\nu y}$

Będziemy zatem mieli następujące równania dla wszystkich cząsteczek powłoki ciała:

$$p_{\nu x} = N_1 \cos\alpha + T \sin\alpha \quad \ldots \quad /5/$$

$$p_{\nu y} = T \cos\alpha + N_2 \sin\alpha \quad \ldots \quad /6/$$

§ 143. Otrzymaliśmy zatem szukane równania równowagi, o których mówiliśmy w § 138. Równowagę cząstki w punkcie wewnętrznym określają równania /1/ i /2/, cząstki zaś w punkcie zewnętrznym t.j. na powłoce - równania /5/ i /6/. Równania /1/ i /2/ dla punktów wewnętrznych są równaniami różniczkowemi linjowemi o pochodnych cząstkowych, równania zaś /5/ i /6/ są zwykłemi równaniami linjowemi algebraicznemi. Występuje tu analogja z równaniami równowagi dla węzłów wewnętrznych i zewnętrznych kratownicy, gdzie równania równowagi względem niewiadomych są też linjowe.

Wiadomo, że równowaga każdego węzła wewnętrznego wyraża się dwoma równaniami linjowemi algebraicznemi pierwszego stopnia. Jeżeli zaś kratownica jest bardzo gęsta i może być upodobniona do ciała ciągłego, to węzłów takich mamy nieskończenie wiele, więc i równań także nieskończenie wiele.

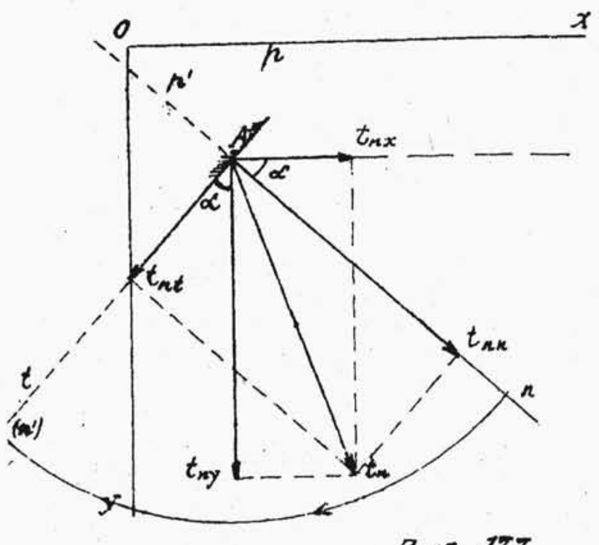
W rozważanem zagadnieniu o równowadze ciała ciągłego otrzymaliśmy natomiast równania o pochodnych cząstkowych. Można było to przewidzieć, ponieważ szukane naprężenia N_1, N_2 i T są funkcjami dwu zmiennych x i y. Wiemy z Matematyki, że w wypadku równań różniczkowych zwyczajnych występują w rozwiązaniu t.zw. stałe całkowania, w wypadku zaś równań w pochodnych cząstkowych -

- funkcje dowolne. Aby zagadnienie fizyczne było kompletnie rozwiązane, należy powyższe stałe lub funkcje dowolne wyznaczyć w sposób określony. Do tego celu w naszem zagadnieniu służą równania /5/ i /6/ na powierzchni ciała, w których p_{vx} i p_{vy} są funkcjami danemi. Stąd widać, że zadanie nasze sprowadza się do scałkowania równań /1/ i /2/ wewnątrz ciała przy uwzględnianiu równości /5/ i /6/ na powierzchni.

Widzimy jednak, że dwa równania /1/ i /2/ zawierają trzy niewiadome funkcje N_1, N_2 i T, a więc zadanie jest narazie nieokreślone, brakuje jeszcze jednego równania lub warunku. Ten dodatkowy warunek uzyskamy z rozważania fizycznych własności danego środowiska, których dotychczas nie braliśmy pod uwagę. Gdy przejdziemy do rozważania równowagi ciał sypkich warunek ten otrzymamy z własności tych ciał. W Teorji Sprężystości dodatkowe warunki dla ciał sprężystych otrzymuje się z własności odkształceń ciała. Narazie przyjmijmy, że warunek ten mamy już uzyskany i zadanie nasze jest określone, t.j. że wyznaczyliśmy niewiadome funkcje N_1, N_2 i T w zależności od spółrzędnych x i y, i zbadamy bliżej pewne własności naprężeń.

NAPRĘŻENIA NORMALNE I STYCZNE NA DOWOLNEM POLETKU.

§ 144. Wzory /3/ i /4/ pozwalają obliczyć naprężenie na dowolnem poletku i jego kierunek, skorzystamy z nich dla wywodu wzorów na składowe normalne i styczne naprężenia na dowolnem poletku w funkcji N_1, N_2, T.



Rys. 177

Uważajmy wewnątrz ciała elementarne poletko o normalnej n, przynależne do punktu A, na którem działa naprężenie t_n. Rozłóżmy go na