ZASADY STATYKI WYKREŚLNEJ.

§ 54. W powyższych wywodach niejednokrotnie korzystaliśmy z metody geometrycznej, opierając się na budowie równoległoboku sił lub wogóle wieloboku sił.

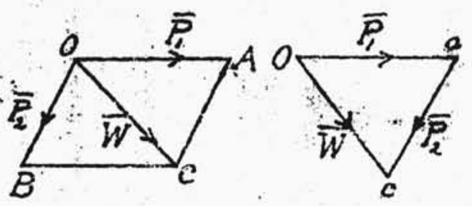
W poprzednich §§, rozważając równowagę wieloboków przegubowego i sznurowego doszliśmy do koncepcji pewnej konstrukcji geometrycznej t.zw. wieloboku sznurowego, zapomocą którego można wykonać redukcję układu sił, przyłożonych do ciała sztywnego i leżących w jednej płaszczyźnie.

Wielobok sił i wielobok sznurowy są zasadniczemi elementami geometrycznemi przy wykreślnem rozwiązywaniu zagadnień statycznych. Rozwiązywanie zagadnień Statyki przez rysunek geometryczny stanowi przedmiot Statyki Wykreślnej.

Dla wielu zagadnień Statyki Budowlanej rozwiązanie wykreślne jest dostatecznie dokładne.

§ 55. Podstawą Statyki Wykreślnej jest wyobrażenie wykreślne siły w postaci odcinka. Sporządzamy rysunek, wyobrażający w pewnej skali długości dane ciało lub układ ciał. Na rysunku tym na linji działania siły, zaczynając od punktu jej zaczepienia w kierunku jej działania rysujemy odcinek, mający tę samą wartość liczbową, co siła t.j. zawierający tyle pewnych jednostek długości, ile siła zawiera jednostek sił. Otrzymujemy w ten sposób odcinek, wyobrażający siłę. Skala sił jest niezależna od skali długości dla wyobrażenia danego układu ciał. Dla każdego rysunku będziemy mieli zawsze dwie skale: skalę długości i skalę sił.

§ 55. Wiadomo, że wypadkową dwóch sił, przyłożonych do punktu O ciała sztywnego jest przekątna równoległoboku. Dla zbudowania tej wypadkowej wystarczy zbudować trójkąt OAC, lub oddzielnie trójkąt oac, którego boki oa i oc wyobrażają w pewnej skali sił, siły $\overline{P_1}$ i $\overline{P_2}$. Bok zamykający wyobraża wielkość wypadkowej

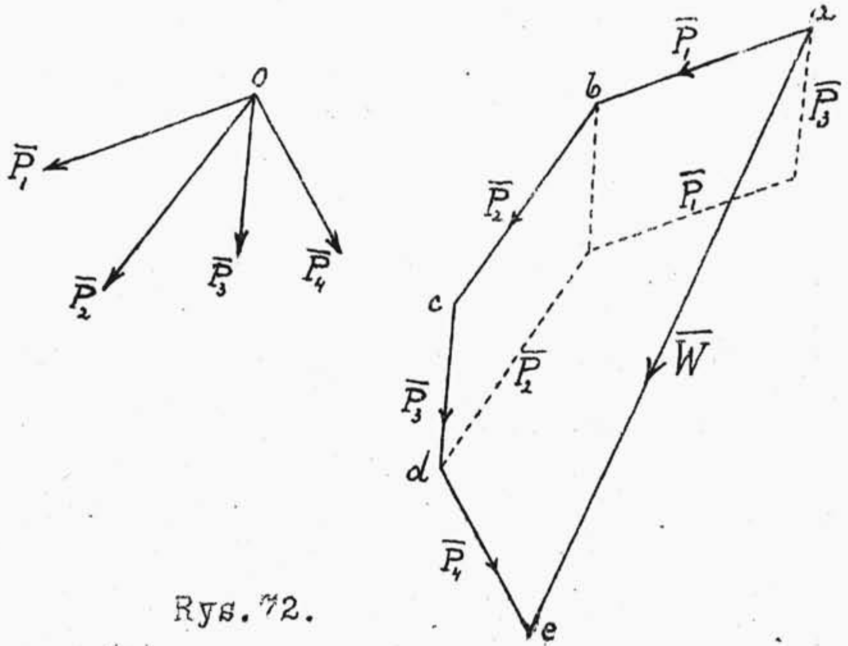


Rys. 71

W. Siły P_1 i P_2 powinny być odłożone tak, żeby przebiegając przez oac, szło się ciągle w kierunku zwrotów sił.

Wektor zamykający oc równający się geometrycznie wypadkowej W, ma zwrot od początku pierwszej siły do końca drugiej siły.

Trójkąt *oac* stanowi szczególny przypadek wieloboku sił, zapomocą którego znajdujemy wypadkową kilku sił, przyłożonych do jednego punktu ciała sztywnego /rys.72/.



Rys.72.

Wielobok *abcde*, którego boki stanowią odcinki sił odłożonych tak, że, przebiegając przez *abcde* od początku pierwszej siły do końca ostatniej siły, idzie się w kierunku działania sił, nazywa się wielobokiem sił. Bok zamykający *ae* równa się geometrycznie wypadkowej W tych sił. Zwrot siły W idzie od początku a wieloboku do końca e. Odcinek zamykający ae-W nazywa się także sumą geometryczną odcinków $\overline{P}_1, \overline{P}_2, \overline{P}_3, \overline{P}_4$. Takie dodawanie oznacza się w sposób następujący.

$$\overline{W} = \overline{P}_1 + \overline{P}_2 + \overline{P}_3 + \overline{P}_4$$

Suma geometryczna nie zależy od porządku następownania składowych odcinków w wieloboku, jako to jest uwidocznione na rys. 72.

WIELOBOK SZNUROWY.

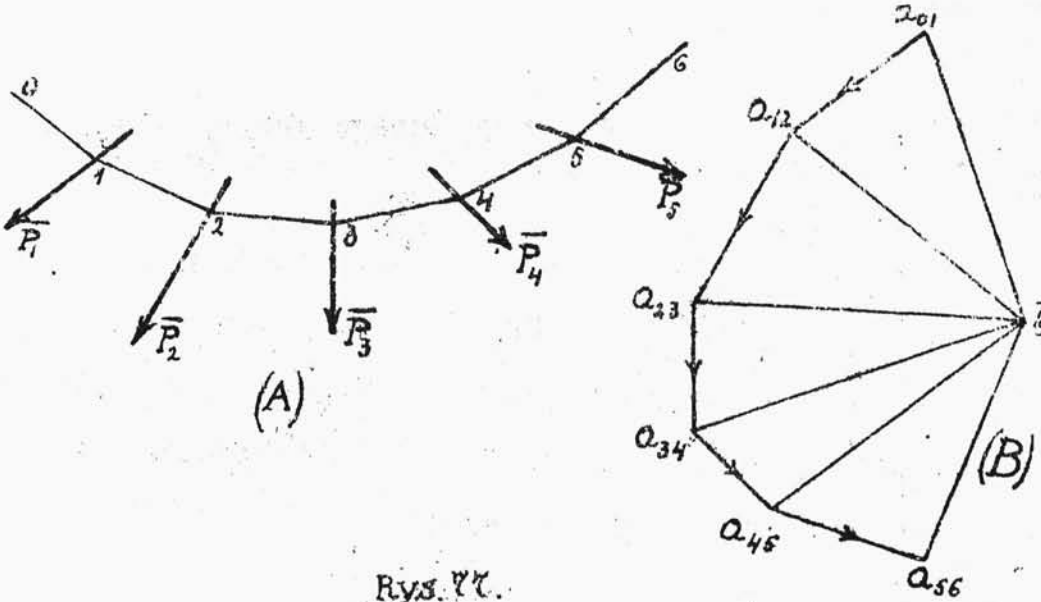
§ 56 W §§ 51 - 53 zauważyliśmy, że w celu składania sił przyłożonych do różnych punktów ciała sztywnego może być użyta konstrukcja geometryczna, którą nazwaliśmy wielobokiem sznurowym.

Jak widzieliśmy w §§ 51 i 52 wielobok sznurowy ma realne znaczenie przy rozpatrywaniu równowagi wieloboku przegubowego i sznura idealnego, mianowicie przy działaniu sił na węzły wieloboku przegubowego lub na niektóre punkty sznura, postać równowagi tych mechanizmów tworzy linję łamaną nazwaną wielobokiem sznurowym. Obecnie przystąpimy do określenia wieloboku sznurowego niezależnie od pochodzenia tego pojęcia i następnie do zbadania jego własności.

Rozpatrzmy dla większej określności pięć sił $\overline{P}_1, \overline{P}_2, \overline{P}_3, \overline{P}_4, \overline{P}_5$, —, przyłożonych do ciała sztywnego i leżących w jednej płaszczyźnie.

Budujemy wielobok tych sił $a_{01}\, a_{12}\, a_{23}\, a_{34}\, a_{45}\, a_{56}$,

którym $a_{01}a_{12} = \overline{P}_1$; $a_{12}a_{23} = \overline{P}_2$; $a_{23}a_{34} = \overline{P}_3$; $a_{34}a_{45} = \overline{P}_4$; $a_{45}a_{56} = \overline{P}_5$.



Rys. 77.

Obieramy w płaszczyznie sił dowolny punkt b, który będziemy nazywać biegunem i łączymy ten punkt z wierzchołkami wieloboku sił prostemi

$$ba_{01},\ ba_{12},\ ba_{23},\ ba_{34},\ ba_{45},\ ba_{56},$$

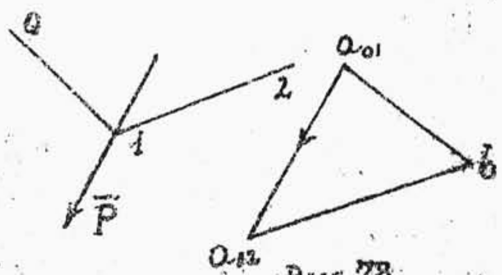
które będziemy nazywać promieniami biegunowemi.

Przeprowadzamy przez dowolny punkt 0 prostą 01 równoległą do pierwszego promienia ba_{01}, do spotkania się z linją działania siły $\overline{P_1}$ w punkcie 1; następnie przeprowadzamy przez punkt 1 prostą 12 równoległą do drugiego promienia ba_{12}, do spotkania się z linją działania siły $\overline{P_2}$ w punkcie 2, i t.d. Nakoniec przez punkt 5 przeprowadzamy prostą 56, równoległą do ostatniego promienia ba_{56}. W ten sposób otrzymamy linje łamaną $01.....6$, której pierwszy i ostatni boki 01 i 56 mają długość nieokreślone. Linji tej nadajemy nazwę wieloboku szmurowego danego układu sił względem punktu b.

Aby powyższa konstrukcja geometryczna udała się, należy, żeby każdy z boków $01, 12, \ldots, 56$ przecinał linję działania siły następnej. W tym celu należy punkt b wybrać tak, żeby on nie leżał na żadnym z boków wieloboku sił lub jego przedłużeniu.

Zwróćmy uwagę, że na rys. 77 B odkładamy wielkości sił $P_1, P_2, \ldots$ w pewnej dobranej skali dla sił, gdy tymczasem na rys. 77 A nie ma potrzeby odkładać wielkości sił, wystarczy wyobrazić tylko ich kierunki / linje działania. /

Rys. 78 pokazuje wielobok sznurowy dla jednej siły. W tym wypadku wielobok sznurowy redukuje się do dwóch boków krańcowych 01 i 12 o długościach nieokreślonych.



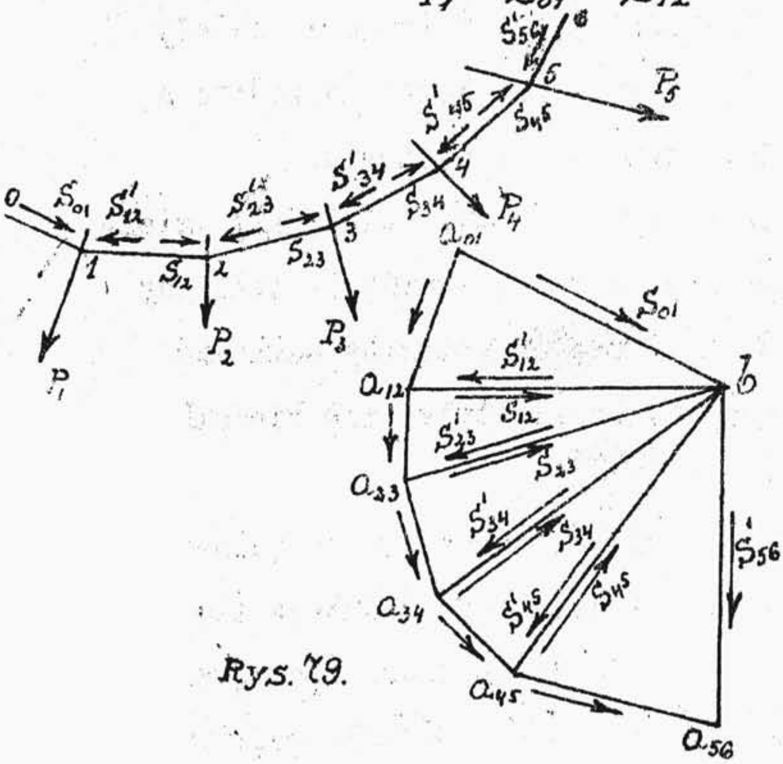
Rys. 78.

Redukcja układu sił przyłożonych do ciała sztywnego i znajdujących się w jednej płaszczyźnie do dwóch sił.

§ 57. Rozpatrzymy rys. 79 Rozłóżmy siłę $\bar{P}_1$ na dwie siły jedną wzdłuż prostej 01, drugą wzdłuż prostej 12. Rozkład ten otrzymamy z wieloboku sił $\overline{P}_1 = a_{01}a_{12} = a_{01}b + ba_{12}$

czyli, oznaczywszy $a_{01}b = \overline{S}_{01}$, $ba_{12} = \overline{S}'_{12}$,

$$\overline{P}_1 = \overline{S}_{01} + \overline{S}'_{12}$$



Rys. 79.

Następnie z tego samego wieloboku otrzymamy rozkład siły $\overline{P}_2$ na kierunki 12 i 23.

$\overline{P}_2 = a_{12}a_{23} = a_{12}b + ba_{23} = \overline{S}_{12} + \overline{S}'_{23}$ przytem $\overline{S}'_{12} = -\overline{S}_{12}$.

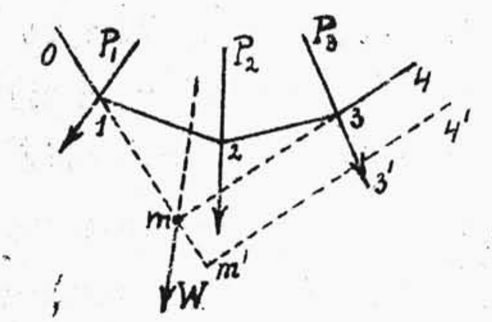
Podobnie rozłożymy siły $\overline{P}_3$, $\overline{P}_4$ i $\overline{P}_5$; otrzymamy w ten sposób zamiast układu sił $\overline{P}_1, \overline{P}_2, \ldots \overline{P}_5$ układ następczy $\overline{S}_{01}, \overline{S}'_{12}, \overline{S}_{12}, \overline{S}'_{23}, \overline{S}_{23}, \ldots \ldots \overline{S}'_{56}$.

Ponieważ siły $\overline{S}_{ij}$ i $\overline{S}'_{ij}$ są równe i o kierunkach przeciwnych, więc się równoważą; pozostają dwie siły $\overline{S}_{01}$ i $\overline{S}_{56}$. Otrzymujemy więc twierdzenie. Układ sił w płaszczyźnie redukuje się do dwóch sił: jedna ma za linję działania pierwszy bok wieloboku sznurowego i za odcinek pierwszy promień biegunowy ze zwrotem od początku wieloboku sił do bieguna, druga ma za linję działania ostatni bok wieloboku sznurowego i za odcinek ostatni promień biegunowy z kierunkiem od bieguna do końca wieloboku sił.

Powyższa redukcja może być wykonana na nieskończenie wiele sposobów, ponieważ biegun $б$ oraz punkt O, przez który przechodzi pierwszy bok 01 wieloboku sznurowego można obierać dowolnie. Wybrawszy dowolnie te elementy, innemi słowy, obrawszy dowolnie siłę S_{01} i jej punkt zaczepienia, dla drugiej siły otrzymujemy zupełnie określoną wielkość i punkt zaczepienia.

Rozpatrując siły S_{01}' i S_{56} równe i wprost przeciwne siłom S_{01} i S_{56}' otrzymujemy wniosek wypowiedziany już w § 52 i 53, mianowicie, że wszelki układ sił w płaszczyźnie może być zrównoważony przez dwie siły, z których jedna ma za linję działania pierwszy bok wieloboku sznurowego i za odcinek pierwszy promień biegunowy, druga - ma za linję działania ostatni bok wieloboku sznurowego i za odcinek ostatni promień biegunowy; zwroty tych sił są takie, że wielobok danych sił i dwóch omawianych sił jest zamknięty.

§ 58. Wynik poprzedniego § daje możność wypowiedzieć następujące uwagi. Przypuśćmy, że dla pewnego układu sił zbudowaliśmy wielobok sznurowy przy pewnym biegunie „$б$" i punkcie początkowym „O". Zmieńmy teraz porządek ponumerowania sił i zbudujemy drugi wielobok sznurowy przy tych samych warunkach początkowych t.j. biegunie b i punkcie O. Otrzymamy inny wielobok sznurowy, którego jednak pierwszy i ostatni bok będą te same. Wyobraźmy sobie, że dany układ sił przekształciliśmy na inny i zbudowaliśmy dla takiego przekształconego układu wielobok sznurowy o tym samym biegunie b i punkcie początkowym, co i dla pierwotnego układu. Krańcowe boki takich dwóch wieloboków sznurowych będą te same. Wnioski powyższe są skutkiem tego, że dany układ sił może być zastąpiony przez dwie siły, których linje działania są identyczne z pierwszym i ostatnim bokiem wieloboku sznurowego. Na tej samej podstawie możemy twierdzić, że jeżeli zbudujemy /rys.80/ wielobok sznurowy $Om4$ dla wypadkowej W układu sił np. P_1, P_2, P_3 to przeprowadziwszy wielobok $O1234$ dla danego układu sił przy tym samym biegunie i punkcie początkowym O, otrzymamy, że bok 34 wpadnie na bok $m4$. Musimy otrzymać ten wynik dlatego, że w przeciwnym razie bok $3'4'$, będąc zawsze równoległym do $m4$, w przecięciu z $O1$ wyznaczyłby inny punkt zaczepienia m' wypadkowej niż m, co jest



Rys. 80.

niemożliwe.

<u>Cechy wykreślne warunków redukcji układu płaskiego sił do układów najprostszych.</u>

W § 4 wspominaliśmy o możliwości redukcji wszelkiego układu sił w przestrzeni do jednego z układów czterech najprostszych: 1/ dwie siły równe i wprost przeciwne, czyli siły wzajemnie równoważące się 2/para sił, 3/wypadkowa, 4/siła i para. Dla układu płaskiego sił układ 4-ty można sprowadzić do 3-go. Rzeczywiście, mając np. układ z siły P /rys. 81 / i pary z momentu M, możemy tę parę przedstawić sobie w postaci 2-ch sił P' i P'' lecz równych co do wielkości i kierunku sile P i z momentem $P'AB = AB$. Siły P i P'' równoważą się i dany układ jest więc zredukowany do jednej siły P', czyli do wypadkowej.

Rys. 81.

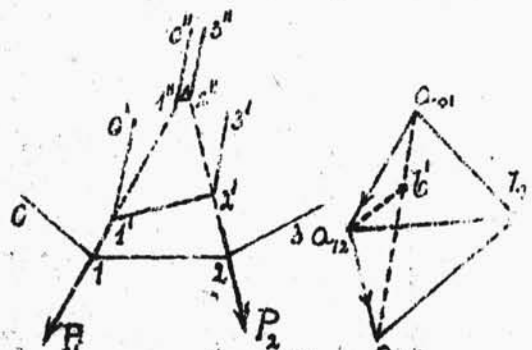
Widzimy więc, że wszelki układ płaski sił przyłożonych do ciała sztywnego może być zastąpiony przez jeden z trzech prostszych układów: 1/ dwie siły równoważące się 2/ para sił 3/wypadkowa.

§ 59. W poprzednim § dowiedliśmy, że dany układ sił w płaszczyźnie można zastąpić przez układ dwóch sił $\overline{S}_{01}$ i $\overline{S}'_{n,n+1}$/n-numer ostatniej siły/.

W pierwszym wypadku redukcji sił suma geometryczna sił danego układu powinna się równać zeru $\sum_1^n \overline{P}_i = 0$ t.j. wielobok sił powinien być zamknięty, punkt a_{01} wieloboku sił wpada więc na punkt $a_{n,n+1}$. Prócz tego wielobok sznurowy powinien być też zamknięty t.j. boki krańcowe 01 i $n,n+1$ schodzą się w jedną prostą $1n$, gdyż układ zastępczy $\overline{S}_{01}, \overline{S}'_{n,n+1}$ powinien stanowić dwie siły równe i wprost przeciwne. Prosta $1n$ nazywa się w tym wypadku linją zamykającą.

W drugim wypadku siły $\overline{S}_{01}$ i $\overline{S}'_{n,n+1}$ powinny formować parę, a więc wielobok sił jest zamknięty, lecz wielobok sznurowy jest otwarty i ma krańcowe boki równoległe.

Nakoniec w trzecim wypadku wielobok sił jest otwarty, siły $\overline{S}_{01}$ i $\overline{S}'_{n,n+1}$ przecinają się, albo są równoległe lub mają wspólną linję działania, nie będąc jednak wprost przeciwne; wielobok sznurowy może więc być otwarty i krańcowe boki mogą się przecinać lub być równoległe, lub też wielobok sznurowy może być zamknięty. Dla oświetlenia tych wypadków rozpatrzmy przykład dwóch sił przecinających się w jednym punkcie.



Rys. 82.

Biorąc biegun b otrzymujemy boki 01 i 23 przecinające się. Biorąc biegun b' na prostej $a_{01} a_{23}$ otrzymujemy $0'1'$ i $2'3'$ równoległe. Budując przytem pierwszy bok $0''1''$ w punkcie przecięcia sił otrzymamy w dodatku boki $0''1''$ i $2''3''$ na jedne prostej.

Rezultaty powyższe można zreasumować w następującej tablicy:

	Wielobok sił . .	Wielobok sznurowy
Równowaga . .	zamknięty . .	zamknięty . . . . .
Para.	zamknięty. . .	otwarty . . . . .
Wypadkowa . .	otwarty	otwarty lub zamknięty

§ 50. Z poprzedniego § widać, że warunki wykreślne równowagi ciała swobodnego w wypadku gdy siły przyłożone do ciała stanowią układ płaski są następujące: 1/wielobok sił ma być zamknięty, 2/wielobok sznurowy względem dowolnego bieguna i dowolnego początkowego punktu ma być zamknięty.

Porównywając warunki wykreślne równowagi z warunkami sformułowanemi w §§ 7 i 9, widzimy, że warunek zamknięcia się wieloboku sił odpowiada równości geometrycznej $\Sigma \overline{P} = 0$, czyli dwóm równaniom algebraicznym $\Sigma X = 0, \Sigma Y = 0$. Warunek zamknięcia się dowolnego wieloboku sznurowego odpowiada równaniu $\Sigma M = 0$ t.j. że suma momentów względem dowolnego punktu równa się zeru. Odpowiedniość ta widoczna jest z tego, że w razie nie zachowania tego warunku, przy zachowaniu pierwszego warunku, układ sił redukowałby się do pary, czyli moment układu względem dowolnego punktu równałby się momentowi pary $S_{01} \cdot p$; - gdzie p odległość pomiędzy 01 i $n, n+1$. Dopiero przy $p = 0$ t.j. gdy wielobok sznurowy jest zamknięty moment tej pary; czyli moment danego układu sił równa się zeru.

Układy cząstkowe.

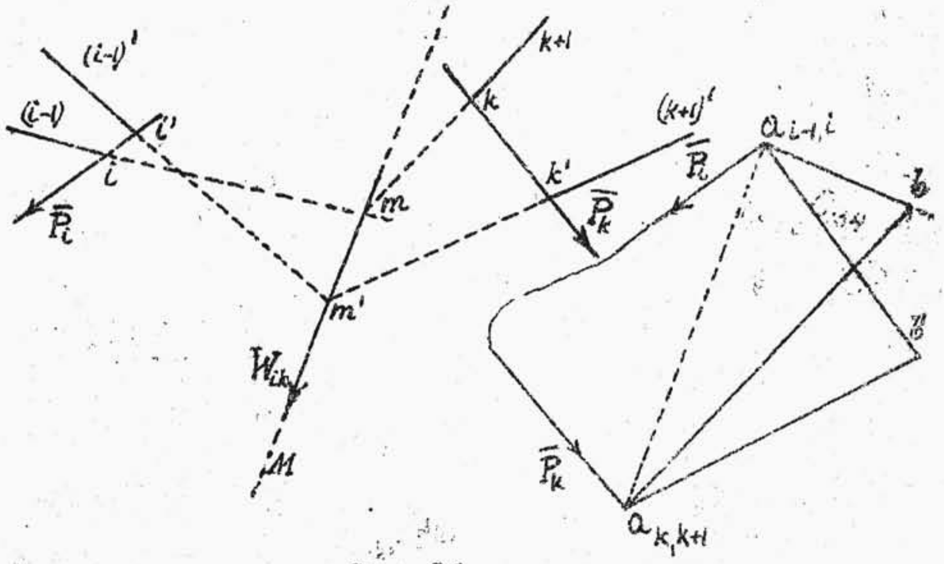
§ 61. Wyodrębniając z danego układu sił część sił następujących jedna po drugiej, otrzymujemy układ, który nazywamy układem cząstkowym.

Gdy dla pewnego układu sił $\overline{P}_1, \overline{P}_2, \dots, \overline{P}_n$ mamy zbudowany wielobok sznurowy $01 2 \dots i \dots n$, to przez to samo posiadamy już wielobok sznurowy dla każdego układu cząstkowego np. dla układu cząstkowego $\overline{P}_i, \overline{P}_{i+1}, \dots, \overline{P}_k$ wielobokiem sznurowym jest część $i-1, i, \dots, k, k+1$ wieloboku sznurowego całkowitego. Na podstawie więc twierdzenia § 57 , siły $\overline{P}_3, \overline{P}_4, \dots, \overline{P}_k$ mogą być zastąpione przez dwie siły, mające za linję działania $i-1, i$, oraz $k, k+1$, a za odcinki $a_{i-1,i}$ b i $ba_{k,k+1}$.

Mając zbudowany wielobok sznurowy $i-1, i, \dots k, k+1$ dla układu cząstkowego, możemy z łatwością zakończyć budowę jego dla układu całkowitego, gdyż kierunki promieni biegunowych są znane, możemy więc zbudować części wieloboku sznurowego $i, i-1, \ldots, 2, 1, 0$ i $k, k+1, \ldots$ $n, n+1$ oddzielnie korzystając z punktów „i” i „k”.

Miejsce geometryczne przecięcia dwóch boków danego rzędu wieloboków sznurowych w ilości nieskończonej.

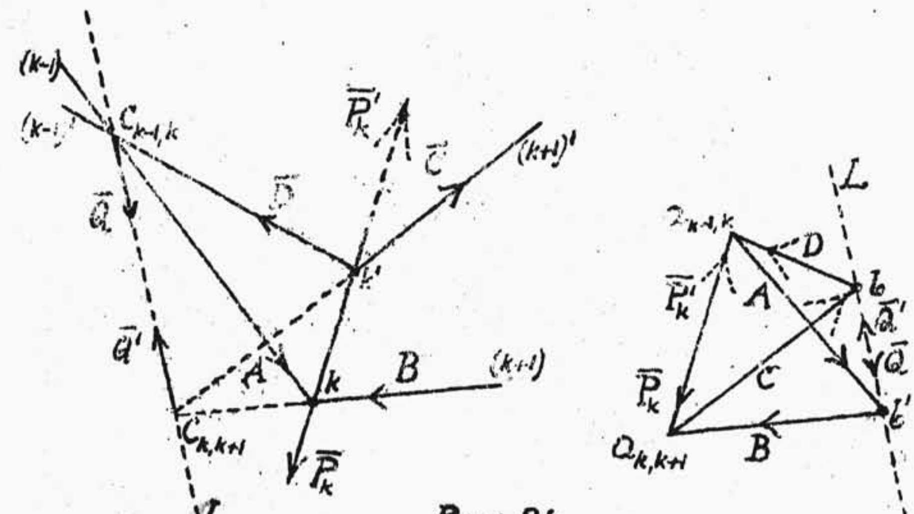
§ 62. Rozpatrzmy punkt m przecięcia się boków rzędu $(i-1)i$ oraz $k(k+1)$ i szukajmy miejsca geometrycznego punktów m dla nieskończonej ilości wieloboków sznurowych zbudowanych dla danego układu sił przy do-



Rys. 83.

wolnym biegunie i początkowym punkcie. Punkt m leży na linji działania wypadkowej sił, znajdujących się między temi bokami, t.j. sił $\overline{P}_i, \overline{P}_{i+1}, \ldots, \overline{P}_k$. Wypadkowa tych sił $\overline{W_{ik}}$ jest równoległa do odcinka łączącego w wieloboku sił wierzchołek $a_{i-1,i}$ z wierzchołkiem $a_{k,k+1}$ t.j. do prostej $a_{i-1,i}a_{k,k+1}$. Ponieważ linja działania siły $\overline{R_{i,k}}$ zajmuje stałe położenie, więc szukane miejsce geometryczne jest prostą M identyczną z linją działania wypadkowej $\overline{W_{i,k}} \parallel a_{i-1,i}a_{k,k+1}$. Jeżeli $\overline{W_{i,k}}=0$, to właściwego miejsca geometrycznego nie ma, wtedy $(i-1)i \parallel k(k+1)$ oraz $(i-1)'i' \parallel k'(k+1)'$ i prosta M leży w nieskończoności.

Otrzymujemy więc następujące twierdzenie. Jeżeli w każdym z wieloboków sznurowych /w ilości nieskończonej/ z tego samego układu sił weźmiemy punkt przecięcia boku $(i-1)i$ i boku $k(k+1)$, to miejsce geometryczne tych punktów jest prostą, równoległą do cięciwy $a_{i-1,i}a_{k,k+1}$ która w wieloboku sił łączy początek i koniec odcinków sił $P_i, \dots P_k$, zawierających się między rozważonemi



Rys. 84.

dwoma bokami wieloboku sznurowego.