STATYKA BUDOWLI

KURS WYKŁADANY NA III I IV SEMESTRZE
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ
W ROKU 1920/21

przez prof. Stanisława Millera

WARSZAWA 1921.
NAKŁADEM KOMISJI WYDAWNICZEJ BRATNIEJ POMOCY STUDENTÓW POLIT. WARSZ.

CZĘŚĆ I.

ROZDZIAŁ 1. WYZNACZANIE ANALITYCZNE REAKCYJ POŁĄCZEŃ.

§.1. Każda budowla może być rozpatrywana, jako układ ciał, znajdujących się w równowadze pod działaniem przyłożonych do niego sił. Ciała fizyczne, z których składają się budowle, posiadają w mniejszym lub większym stopniu własność sprężystości. Własność ta polega na możności zmiany kształtu ciała pod działaniem przyłożonych sił, czyli na możności odkształcania się. Sprężystość ciała jest zupełna, gdy po usunięciu sił ciało powraca do kształtu pierwotnego.

Z powyższego wynika, że równowagę budowli należy rozpatrywać, jako równowagę ciał odkształcalnych i oprzeć ją na naukach uzupełniających pod tym względem Mechanikę Ogólną, mianowicie na Teorji Sprężystości i Wytrzymałości Materjałów. Tak postąpimy w niniejszym kursie, jednakże z początku, korzystając z tego, że odkształcenia, które dopuszczamy w budowlach, są bardzo nieznaczne, będziemy rozpatrywać ciała wchodzące w skład budowli jako ciała nieodkształcalne li bryły sztywne. Taki punkt widzenia pozwoli nam odrazu zająć się zagadnieniami, które można rozwiązać, korzystając z podstawowych pojęć i twierdzeń statyki brył sztywnych. W następujących kilku §§ zajmiemy się przypomnieniem najważniejszych dla nas pojęć i twierdzeń Mechaniki Ogólnej.

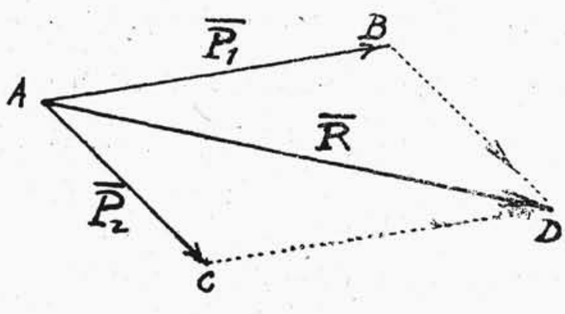
§. 2. Siłę zaczepioną do pewnego punktu ciała przedstawiamy w postaci odcinka, odłożonego od punktu zaczepienia i zaopatrzonego strzałką. Siła posiada następujące cechy: 1/ punkt zaczepienia, 2/ kierunek, czyli linję działania, 3/ zwrot wskazujący, w którą stronę tej linji działa siła i 4/ wielkość.

W statyce brył sztywnych przyjęto następujące 3 zasadnicze sposoby przekształcania sił:

1/ punkt zaczepienia siły działającej na bryłę można przenosić wzdłuż linji działania siły, czyli wzdłuż kierunku siły;

2/ do działających na bryłę sił można przyłączyć lub od niej odrzucić dwie siły równe i wprost przeciwne;

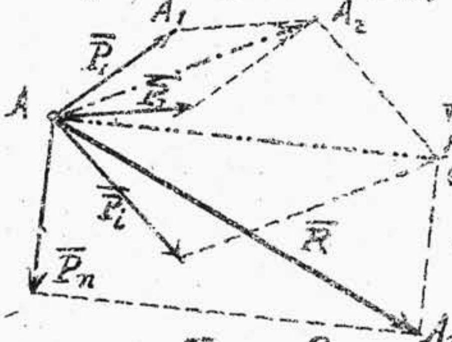
3/ siły przyłożone do jednego i tego samego punktu bryły można składać i rozkładać według prawideł dodawania geometrycznego czyli wektorowego. Przekątna $\overline{R}$ równoległoboku, zbudowanego na siłach $\overline{P_1}$ i $\overline{P_2}$ ze zwrotem od A do D /rys.1/ jest sumą geometryczną tych sił. Działanie to wyrażamy równością:



Rys. 1.

$$\overline{R} = \overline{P_1} + \overline{P_2}$$ /

w której dla odróżnienia od dodawania algebraicznego nad literami oznaczającemi siły, kładziemy kreski. W celu zbudowania wypadkowej, zamiast równoległoboku wystarczy stosować trójkąt ABD, w którym bok BD wyraża siłę $\overline{P_2}$. Suma geometryczna sił $\overline{P_1}$ i $\overline{P_2}$ jest bokiem zamykającym AD ze zwrotem od początku A siły $\overline{P_1}$ do końca D siły $\overline{P_2}$, odłożonej od końca B siły $\overline{P_1}$.



Rys. 2.

Z rys.2 widać, że dodając stopniowo siły $\overline{P_1}, \overline{P_2}, \overline{P_3}, \ldots, \overline{P_n}$, przekonamy się, że sumą geometryczną $\overline{R}$ sił $\overline{P_1}, \overline{P_2}, \ldots, \overline{P_n}$ jest bok zamykający AA_n wieloboku $AA_1A_2 \ldots A_n$ tych sił, odłożonych jedna za drugą, tak że koniec każdej poprzedniej siły jest jednocześnie początkiem następnej siły, przytem zwrot sumy geometrycznej idzie od początku pierwszego boku do końca ostatniego. To dodawanie geometryczne oznaczamy równością:

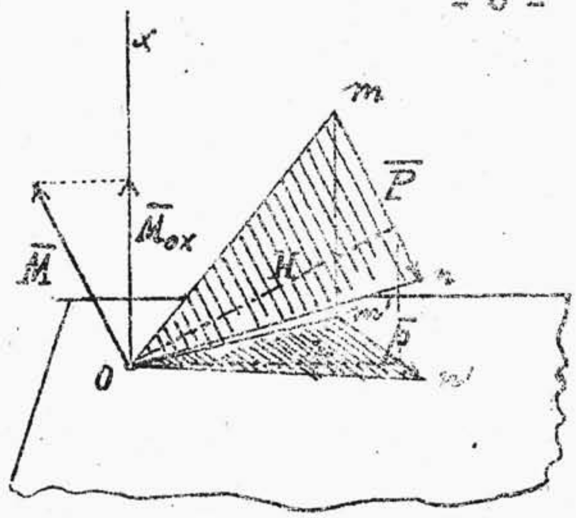
$$\overline{R} = \overline{P_1} + \overline{P_2} + \ldots + \overline{P_n} = \Sigma \overline{P_i},$$

w której dla odróżnienia od dodawania algebraicznego nad literami, oznaczającemi siły, kładziemy kreski.

Każdą wielkość posiadającą kierunek i zwrot możemy przedstawić w postaci odcinka, zaopatrzonego strzałką i nazywamy wektorem. Siła posiada powyższe cechy, jest więc wektorem.

§. 3. Dla scharakteryzowania położenia siły względem dowolnego punktu i przytem tak, aby uwzględnić powyższe sposoby przekształcenia sił, wprowadzono w Mechanice następujące pojęcie momentu siły względem punktu.

Momentem linjowym $\overline{M}$ danej siły $\overline{P}$ /rys.1/ względem



Rys. 3.

punktu O nazywa się odcinek /wektor/, równający się ilościowo iloczynowi $P.H$ z wielkości siły P przez odległość H od punktu O do linji działania siły, czyli równający się ilościowo podwojonej płaszczyźnie trójkąta Omn. Odcinek ten ma kierunek prostopadłej do płaszczyzny tego trójkąta z takim zwrotem, że zwrot danej siły idzie ze strony lewej na prawą /zgodnie z ruchem wskazówki zegara/.

Moment linjowy $\bar{M}$ wypadkowej $\bar{R}$

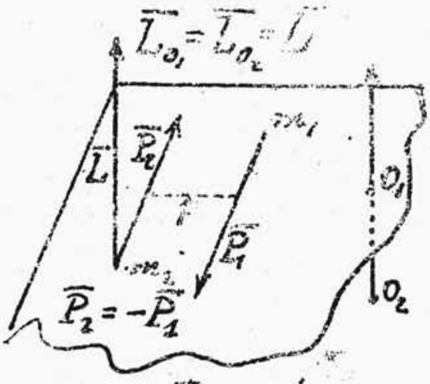
$$\bar{R} = \bar{P}_1 + \bar{P}_2 + \ldots + \bar{P}_n$$

sił $\bar{P}_1, \bar{P}_2 \ldots, \bar{P}_n$, przyłożonych do tego samego punktu bryły względem dowolnego punktu równa się sumie geometrycznej momentów linjowych $\bar{M}_i$ względem tego samego punktu wszystkich sił składowych t.j.

$$\bar{M} = \bar{M}_1 + \bar{M}_2 + \ldots + \bar{M}_n = \Sigma \bar{M}_i$$

Parą sił, przyłożonych do ciała sztywnego, nazywamy dwie siły, przyłożone do ciała, równe co do wielkości, równoległe, lecz mające różne linje działania, a zwroty przeciwne.

Odległość p /rys.4/ pomiędzy kierunkami sił nazywa się ramieniem pary. Moment L siły $\bar{P}_1$ względem punktu m_2,



Rys. 4.

położonego na linji działania drugiej siły jest jednocześnie sumą geometryczną $\overline{M}_1+\overline{M}_2$ momentów sił $\overline{P}_1$ i $\overline{P}_2$ względem punktu m_2, ponieważ moment siły $\overline{P}_2$ względem tego punktu jest zerem. Suma geometryczna $\overline{L}_{O_1}$ momentów sił P_1 i P_2 względem punktu O_1, leżącego w płaszczyźnie pary, równa się także $\overline{L}$. Suma geometryczna momentów tych ~~sił~~ względem punktu O_2 także równa się $\overline{L}$. Z tego powodu sumę geometryczną momentów sił pary względem dowolnego punktu nazywa się momentem linjowym pary.

§4. Korzystając z wymienionych wyżej 3-ch sposobów przekształcania sił, można dany układ sił, przyłożonych do ciała sztywnego, zastąpić innym układem. Takich zastępczych układów jest oczywiście nieskończenie wiele. Przy wszystkich takich przekształceniach pozostaną niezmienne następujące dwie wielkości geometryczne: suma geometryczna sił każdego układu $\overline{V}=\Sigma\overline{P}_i$ i suma geometryczna momentów sił każdego układu $\overline{L}=\Sigma\overline{M}_i$ względem pewnego punktu. Te dwa wektory $\overline{V}$ i $\overline{L}$, nie zmieniające swych wielkości geometrycznych przy wszelkich przekształceniach układu sił, nazywają się niezmiennikami /inwarjantami/ układu sił, przyłożonych do ciała sztywnego.

Otrzymujemy stąd bardzo ważne twierdzenie:

Wszelki układ sił, przyłożonych do ciała sztywnego, możemy zastąpić układem, składającym się z jednej siły, równającej się sumie geometrycznej sił $\overline{V}$, przyłożonej do dowolnego punktu O ciała sztywnego i z pary sił, której moment linjowy równa się sumie geometrycznej $\overline{L}$ momentów wszystkich sił danego układu względem punktu O.

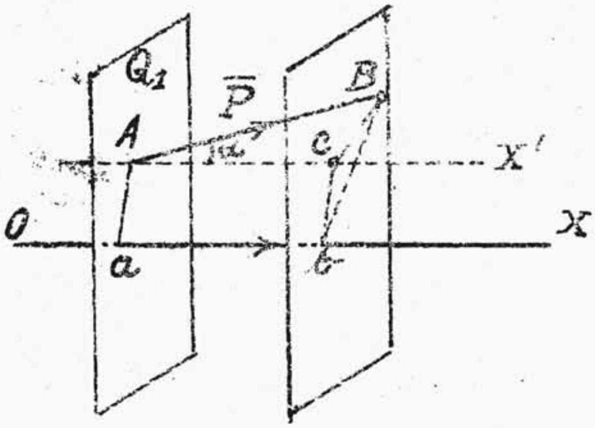
Opierając się na wartościach niezmienników $\overline{V}$ i $\overline{L}$, oraz na położeniu ich względem siebie, można przeprowadzić klasyfikację układów sił, przyłożonych do ciała sztywnego i podać cechy, przy których dany układ sił może być zredukowany do jednego z następujących najprostszych układów: 1/ dwie siły równe i wprost przeciwne czyli siły wzajemnie równoważące się, 2/ para sił, 3/ wypadkowa, 4/ siła i para.

Cechą doprowadzenia danego układu sił do pierwszego wypadku t.j. do dwuch sił równych i wprost przeciwnych jest oczywiście zachowanie warunków:

$$\overline{V} = \Sigma \overline{P_i} = 0 \quad , \quad \overline{L} = \Sigma \overline{M_i} = 0$$

Są dwie metody rozwiązywania zagadnień statycznych: geometryczna i analityczna. Metoda geometryczna polega na bezpośredniem rozważaniu odcinków sił oraz momentów i otrzymaniu rozwiązania zapomocą geometrycznej konstrukcji. Metoda analityczna polega na sprowadzeniu kwestji do wielkości algebraicznych i do równań. Osiągamy to zapomocą wprowadzenia rzutów.

§. 5. Rzutem punktu A na oś Ox nazywa się punkt a,



Rys. 5.

otrzymany w przecięciu się osi Ox z płaszczyzną Q_1, przechodzącej przez punkt A prostopadle do tej osi.

Rzutem $\overline{P}_x$ siły $\overline{P}$ na oś Ox nazywa się odcinek ab, łączący rzuty na tę oś a i b punktów A i B o zwrocie od a do b.

Rzuty $\overline{P}_{1x}, \overline{P}_{2x}, .., \overline{P}_{nx}$ kilku sił $\overline{P}_1, \overline{P}_2, .., \overline{P}_n$ na tę samą oś O_x mają ten sam kierunek /oś Ox / i różnią się tylko zwrotami; dodawanie i odejmowanie tych rzutów sprowadza się do dodawania i odejmowania algebraicznego. Z tego powodu rzuty sił na oś rozpatrujemy często jako wielkości algebraiczne, przypisując im znak /+/, gdy rzuty wektorów mają ten sam zwrot co oś Ox i znak /-/ w wypadku odwrotnym. Z rys.5 otrzymujemy

$$ab = AC = AB\cos\alpha \text{ więc } P_x = P\cos(\overline{P}, x)$$

Korzystając z tego, że każdy wektor określa się przez 3 składowe wektory, obieramy dowolny układ osi spółrzędnych $Oxyz$ zwykle prostokątny i każdą siłę $\overline{P}$ będziemy określali przez 3 rzuty $\overline{P}_x, \overline{P}_y, \overline{P}_z$ tej siły na osi O_x, O_y, O_z. Rzuty $\overline{P}_x, \overline{P}_y, \overline{P}_z$ są składowemi wektorowemi siły $\overline{P}$ i zupełnie ją określają. Dla krótkości często zamiast $\overline{P}_x, \overline{P}_y, \overline{P}_z$

oznaczamy rzuty siły przez $\overline{X,Y,Z}$. Rzuty siły w zupełności określają siłę i jej kierunek, mianowicie:

$$P = \sqrt{X^2+Y^2+Z^2} \qquad \cos(\bar{P},x) = \frac{X}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}$$

$$\cos(\bar{P},y) = \frac{Y}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}} \qquad \cos(\bar{P},z) = \frac{Z}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}$$

W celu sprowadzenia działań geometrycznych między momentami linjowemi sił do działań algebraicznych jest rzeczą pożądaną określić moment $\overline{M}$ siły $\overline{P}$ względem punktu O przez rzuty M_x, M_y, M_z tego wektora na osie O_x, O_y, O_z , a rzuty te wyrazić w funkcji rzutów X, Y, Z siły $\overline{P}$.

Dla możności takiego wyrażenia wprowadzono pojęcie momentu siły $\overline{P}$ względem osi.

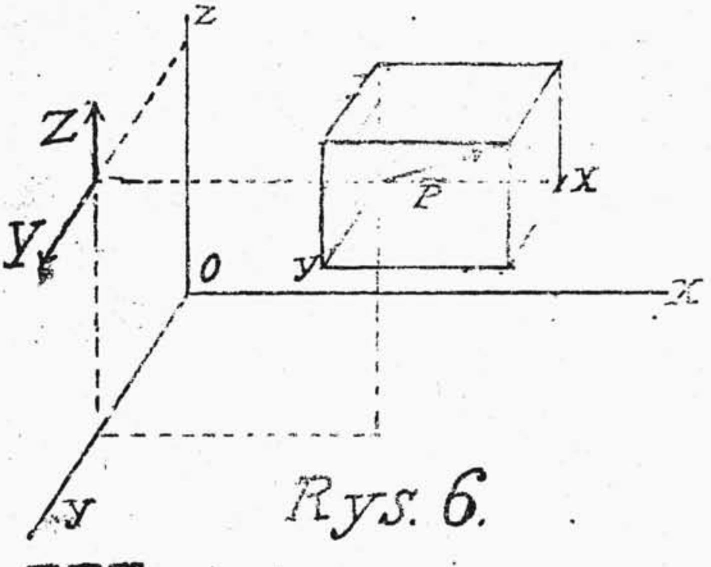
§ 6. Momentem M_{ox} danej siły $\overline{P}$ względem pewnej osi Ox /rys.3/ nazywa się wielkość algebraiczna iloczynu ph z wielkości rzutu $\overline{p}$ danej siły $\overline{P}$ na płaszczyznę prostopadłą do tej osi przez odległość h od punktu przecięcia O osi z tą płaszczyzną do wspomnianego rzutu $\overline{p}$; innemi słowy wzięta ze znakiem $\pm$ podwojona płaszczyzna trójkąta $Om'n'$. dodatnia /+/, gdy kierunek siły idzie z lewej strony na prawą względem kierunku danej osi, ujemna /-/ w wypadku przeciwnym.

Moment siły względem osi wyobrażamy sobie czasem także w postaci odcinka, który odkładamy wzdłuż osi OX w kierunku dodatnim, gdy znak momentu jest dodatni i odwrotnie w wypadku przeciwnym. Odcinek taki nazywamy wtedy momentem linjowym $\overline{M}_{ox}$ siły $\overline{P}$ względem osi OX.

Między momentem siły względem osi i momentem względem punktu istnieje następująca zależność:

Moment M_{ox} siły $\overline{P}$ względem osi OX ze względu na wielkość i na znak równa się rzutowi $\overline{M}_x$ na tę samą oś momentu linjowego $\overline{M}$ danej siły względem jakiegokolwiek punktu tej osi, t.j. $M_{ox} = M_x$.

Mamy także twierdzenie, że moment wypadkowej sił, przyłożonych do tego samego punktu ciała względem dowolnej osi OX równa się sumie algebraicznej momentów sił składowych względem tej osi.



Rys. 6.

Korzystając z określenia momentu siły względem osi i z tego twierdzenia możemy z łatwością wyrazić M_{ox} w funkcji rzutów siły $\overline{P}$. W tym celu /rys.6/ rozkładamy siły $\overline{P}$ na 3 składowe $\overline{X}, \overline{Y}, \overline{Z}$ i rzutujemy te składowe na płaszczyznę Oyz.

Moment M_{ox} siły P względem osi Ox równa się sumie algebraicznej momentów sił X, Y i Z. Moment siły X

równa się zeru. Moment siły $\bar{Z}$ równa się $(+yZ)$, moment siły $\bar{Y}$ równa się $(-zY)$, więc

$$\mathcal{M}_{ox} = yZ - zY$$

Lecz na podstawie przytoczonego wyżej twierdzenia rzut M_x momentu $\bar{M}$ równa się momentowi $\mathcal{M}_{ox}$ siły względem osi, więc

$$M_x = M_{ox} = yZ - zY$$

Podobnie otrzymamy:

$$M_y = M_{oy} = zX - xZ$$

$$M_z = M_{oz} = xY - yX$$

Na podstawie powyższych analitycznych wyrażeń siły i momentu względem punktu możemy sumę geometryczną $\bar{V}$ układu sił i sumę geometryczną $\bar{L}$ momentów tych sił względem punktu O wyrazić analitycznie przez rzuty sił X, Y, Z i rzędne x, y, z punktów zaczepienia sił w sposób następujący:

$$V_x = \Sigma X \qquad L_x = \Sigma M_{ox} = \Sigma(yZ - zY)$$

$$V_y = \Sigma Y \qquad L_y = \Sigma M_{oy} = \Sigma(zX - xZ)$$

$$V_z = \Sigma Z \qquad L_z = \Sigma M_{oz} = \Sigma(xY - yX)$$

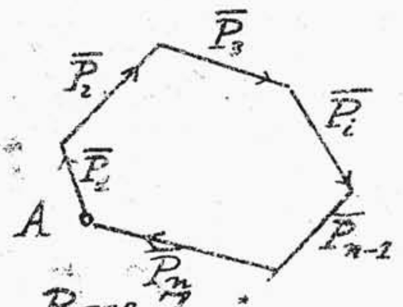
Równowaga ciała swobodnego.

§ 7. Ciałem swobodnem nazywamy ciało, którego przesunięcia nie są ograniczone żadnemi warunkami. Aby ciało swobodne znajdowało się w równowadze, t. j. aby układ sił, przyłożonych do ciała, redukował się do dwuch sił równych i wprost przeciwnych konieczne i dostateczne, żeby dany układ sił spełniał następujące dwa warunki:

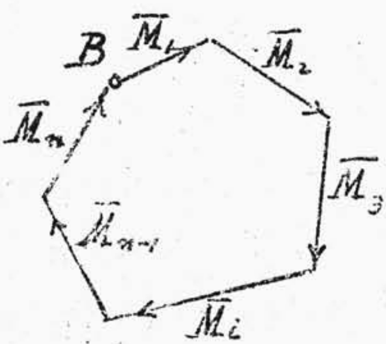
$$1/\ \overline{V} = \sum \overline{P} = 0 \quad \text{i} \quad 2/\ \overline{L} = \sum \overline{M} = 0$$

Warunki te wyrażają, że suma geometryczna wszystkich sił przyłożonych do ciała swobodnego, równa się zeru i że suma geometryczna momentów tych sił względem dowolnego punktu równa się zeru, innemi słowy, że niezmienniki danego układu sił równają się zeru.

Znaczenie geometryczne tych warunków jest następujące: Wielobok sił /rys.7/, zbudowany od dowolnego punktu A jest zamknięty, t.j. koniec ostatniej siły $\overline{P_n}$ wieloboku leży też w punkcie A i obieg strzałek idzie w jednym kierunku. Wielobok momentów $\overline{M_i}$ zbudowany od dowolnego punktu B jest także zamknięty /rys.8/.



Rys. 7



Rys. 8.

Otrzymujemy z powyższego następujące oczywiste wnioski:

1/ Jeżeli ciało swobodne znajduje się w równowadze pod działaniem dwuch sił, to siły te powinny być równe, przeciwnie skierowane i działające wzdłuż jednej prostej

2/ Jeżeli ciało swobodne znajduje się w równowadze pod działaniem trzech sił nierównoległych, to siły te powinny leżeć w jednej płaszczyźnie, przechodzić przez punkt wspólny i każda z nich powinna się równać przekątnej równoległoboku, zbudowanego z dwach pozostałych sił.

Sformułowanie warunków równowagi ciała swobodnego może być i inne, niż podane wyżej, np.:

Dla równowagi ciała swobodnego konieczna i dostateczna, żeby momenty linjowe układu sił, przyłożonych do ciała, względem trzech punktów, nie leżących na jednej prostej, równały się zeru.

§ 8. Powyższe dwa warunki geometryczne równowagi ciała swobodnego

$$\sum \overline{P} = 0 \quad \text{i} \quad \sum \overline{M} = 0$$

analitycznie są równoznaczne z 6 równaniami rzutów obu części tych równości geometrycznych na 3 prostokątne osi spółrzędnych, mianowicie:

$$\sum X = 0 \qquad \sum M_{ox} = 0$$
$$\sum Y = 0 \qquad \sum M_{oy} = 0$$
$$\sum Z = 0 \qquad \sum M_{oz} = 0$$

Sześć tych równań nazywamy równaniami równowagi ciała swobodnego.

§ 9. Bardzo ważnym wypadkiem, często spotykanym w Statyce Budowlanej, jest pewne szczególne położenie sił, działających na ciało, mianowicie, gdy wszystkie te siły znajdują się w jednej płaszczyźnie. Przyjąwszy za płaszczyznę Oxy płaszczyznę sił, otrzymamy z powyższych 6 równań równowagi tylko 3:

$$\sum X = 0 \,, \quad \sum Y = 0 \,, \quad \sum M_{oz} = 0$$

pozostałe 3 równania stają się tożsamościami. Ostatnie z wymienionych 3-ch równań równowagi, mianowicie

$$\sum M_{oz} = 0$$

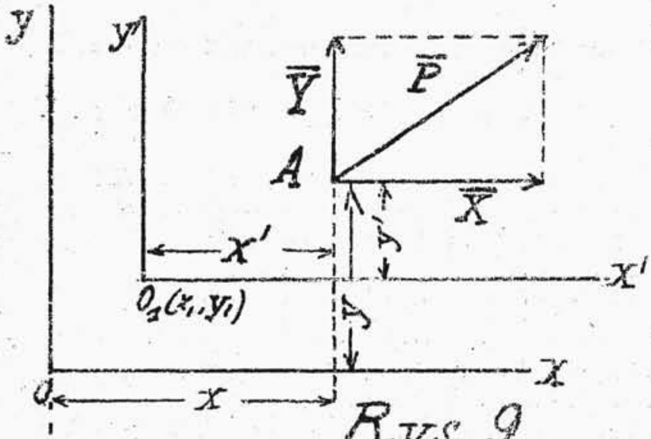
jest równaniem momentów względem osi Oz. Wszystkie momenty są tutaj odcinkami równoległemi do osi Oz, różnią się więc tylko zwrotami: do góry lub na dół. Wobec tego często zamiast pojęcia momentu siły względem osi Oz używają w danym wypadku pojęcia momentu względem punktu O i nadają temu pojęciu znaczenie tylko algebraiczne, mianowicie iloczyn $\pm Pr$ siły P przez odległość /ramię/ r od punktu O do linji działania siły, wzięty ze znakiem /+/, gdy siła względem punktu O idzie z lewej strony na prawą /w kierunku wskazówki zegara/ i ze znakiem /-/ w odwrotnym wypadku. Oczywiście $M_{oz} = \pm Pr$. Zamiast M_{oz} często piszemy M_o lub M. Trzy równania równowagi piszemy więc często w postaci

$$\sum X = 0, \quad \sum Y = 0, \quad \sum M = 0 \ldots (1)$$

Zauważmy, że bardzo często w zadaniach statycznych, gdy wszystkie siły znajdują się w jednej płaszczyźnie, dogodną jest rzeczą sformułowanie warunków równowagi, jak wspominaliśmy wyżej, zapomocą momentów, mianowicie:

$$\sum M = 0, \sum M' = 0, \sum M'' = 0 \qquad \ldots\ldots /2/$$

t.j. dla zachowania równowagi konieczna i dostateczna, żeby algebraiczna suma momentów wszystkich sił, działających na ciało swobodne, względem każdego z trzech punktów O, O_1, O_2, nie leżących na jednej prostej, równała się zeru. Wykażemy teraz, że powyższe warunki, które jednocześnie są i równaniami równowagi, są równoznaczne z równaniami $\Sigma X=0$, $\Sigma Y=0$ i $\Sigma M=0$ i że każdy nowy podobny warunek np. $\Sigma M'''=0$ jest tożsamością. Moment siły $\overline{P}$ względem punktu O jest



Rys. 9

$$M = yX - xY \quad \ldots\ldots /a/$$

gdzie x, y rzędne punktu A

Kładąc tutaj

$$x = x_1 + x'; \quad y = y_1 + y'$$

gdzie x_1, y_1 są rzędne punktu O_1, a x', y' rzędne punktu A w osiach $Ox'y'$ równoległych do Oxy, otrzymamy

$$M = y'X - x'Y + y_1X - x_1Y = M' + y_1X - x_1Y \ldots /b/,$$

gdzie $M' = y'X - x'Y$ jest momentem siły P względem punktu O_1.

Sumując wyrażenia /a/ i /b/ dla wszystkich sił, otrzymamy

$$\Sigma M = \Sigma(yX - xY)$$

$$\Sigma M = \Sigma M' + y_1 \Sigma X - x_1 \Sigma Y,$$

czyli

$$\Sigma M' = \Sigma M - y_1 \Sigma X + x_1 \Sigma Y \ldots\ldots\ldots /c/$$

Podobnie otrzymamy dla punktu O_2

$$\Sigma M'' = \Sigma M - y_2 \Sigma X + x_2 \Sigma Y$$

Przyjmując równania równowagi w postaci /2/, otrzymamy równanie /1/ jako skutek z nich i odwrotnie. Korzystając ze wzoru /c/, równaniu momentów względem nowego punktu O_3 możemy nadać postać

$$\Sigma M''' = \Sigma M - x_3 \Sigma Y + y_3 \Sigma X = 0,$$

z której widać, że wszelkie podobne równanie równowagi, poza trzema równaniami równowagi w postaci /1/ lub /2/ jest już nie równaniem, lecz tożsamością.

Równowaga ciała nieswobodnego.

§. 10. Ciało nazywa się nieswobodnem, gdy przesunięcia jego są ograniczone pewnemi warunkami. Np. ciało mające niektóre punkty stałe, albo które się opiera na ciała nieruchome, nie posiada możności poruszania się dowolnie, jest więc ciałem nieswobodnem.

Jeżeli ciało nieswobodne znajduje się w równowadze pod działaniem układu sił: $\overline{P}_1, \overline{P}_2, \overline{P}_3, \ldots \overline{P}_n$, którego niezmienniki są $\overline{V} = \Sigma \overline{P}$ i $\overline{L} = \Sigma \overline{M}(\overline{P})$, to zawsze można dobrać nowy układ sił $\overline{R}_1, \overline{R}_2, \ldots \overline{R}_k$, zastępujących działanie podpór i przytem taki, że ciało pod działaniem obu tych układów sił pozostanie w równowadze, będąc swobodnem. Dla tego jest rzeczą konieczną i dostateczną zachowanie warunków:

$$\Sigma \overline{P} + \Sigma \overline{R} = 0 \; ; \quad \Sigma \overline{M}(\overline{P}) + \Sigma \overline{M}(\overline{R}) = 0$$

Siły $\overline{R}$, zastępujące działanie podpór i wyrażające sprzeciwy tych podpór siłom działającym $\overline{P}$, nazywamy odporami lub reakcjami podpór.

Z powyższych dwuch warunków równowagi - pierwszy wyraża, że suma geometryczna wszystkich sił przyłożonych do ciała, włącznie z reakcjami, równa się zeru. Warunek drugi wyraża, że suma geometryczna momentów tych sił względem dowolnego punktu równa się zeru. Na mocy zasady równości działania i przeciwdziałania ciało ze swojej strony wywiera na podpory działanie, które wyraża się siłami równemi i wprost przeciwnemi do reakcyj. W punkcie gdzie ze strony podpory działa na ciało odpór $\overline{R}$, ze strony ciała na podporę działa parcie /ciśnienie/ $\overline{D} = -\overline{R}$. Odpór czyli reakcja jest zaczepiona do ciała, parcie jest zaczepione do podpory.

Dla odróżnienia sił $\overline{P}$ od $\overline{R}$ nazywamy często siły działające na ciało z wyjątkiem reakcyj /t.j. siły $\overline{P}$/ siłami bezpośrednio przyłożonemi. Bardzo obrazowe terminy dla powyższych sił użył F.Jasiński, mianowicie dla układu $\overline{P}$ siły czynne /aktywne/, dla układu $\overline{R}$ siły bierne /passywne/.

Wyłożoną metodę rozważania równowagi ciała nieswobodnego nazywają czasem metodą oswobodzenia od połączeń. Pod połączeniem rozumiemy wszelki warunek, ograniczający ruch ciała. Podpora jest szczególnym wypadkiem połączenia, gdy powyższy warunek uskutecznia się zapomocą przymocowania pewnego punktu ciała do innego ciała nieruchomego, lub zapomocą urządzenia stałego zetknięcia pewnego punktu ciała z powierzchnią nieruchomą, lub linją nieruchomą i t.p. Zapomocą metody oswobodzenia od połączeń ujawniamy reakcje połączeń i wprowadzamy je do równań.

Rodzaje podpór.

§ 11. Reakcja danego połączenia /w szczeg. wypadku podpory/ wyraża się wogóle przez pewien układ sił o niewiadomych niezmiernikach $\overline{V_r}$ i $\overline{L_r}$, wywierający na ciało to samo działanie co połączenie.

W wypadkach szczególnych układ $\overline{V_r}, \overline{L_r}$ może się sprowadzać do jednej siły $\overline{R}$. Np. podpora w postaci punktu stałego może, zawdzięczając swojej wytrzymałości, przyjąć na siebie działanie siły, przechodzącej przez ten punkt w dowolnym kierunku. Odwrotnie, ze strony podpory, t.j. punktu nieruchomego, powstaje przyłożony do ciała odpór o kierunku przeciwnym. W tym wypadku więc odporem czyli reakcją jest jedna siła $\overline{R}$, co do której znamy tylko punkt zaczepienia, niewiadomemi są wielkość, kierunek i zwrot siły, które te elementy określają się przez rzuty reakcji $\overline{R}$ na 3 osie współrzędnych: R_x, R_y, R_z lub wogóle 3 rzuty na 3 dowolne osie, nie leżące w jednej płaszczyźnie.

Jeżeli ciało opiera się jednym punktem na powierzchnię nieruchomą, to każda siła przechodząca przez ten punkt i wyrażająca parcie ze strony ciała na powierzchnię, może być rozłożona na 2 składowe: normalną do powierzchni i styczną do powierzchni. Rozważana podpora, t.j. powierzchnia nieruchema, jeżeli jest idealnie gładka, nie może unicestwić żadnej siły stycznej do powierzchni, a więc może okazać sprzeciw tylko sile normalnej. Wobec tego odpór powierzchni na ciało jest w danym wypadku siłą $\overline{R}$, przechodzącą przez punkt zetknięcia i normalną do powierzchni; niewiadomemi są więc tylko wielkości tej siły i zwrot; elementy te wyznaczają się przez jedną wielkość algebraiczną, mianowicie rzut $\overline{R}_n$ siły $\overline{R}$ na oś normalną do powierzchni w rozważanym punkcie z dowolnym zwrotem.

Ciała rzeczywiste posiadają powierzchnie w większym lub mniejszym stopniu chropawe. Z tego powodu powierzchnie w podporach i wogóle połączeniach mogą okazywać także sprzeciwy styczne do powierzchni. Wprowadzenie do rachunku tych sił stycznych należy oprzeć na teorji tarcia.

W następstwie jednak, jeżeli tylko nie uczynimy specjalnego omówienia, to wszelkie połączenia będziemy uważali za pozbawione tarcia. Innemi słowy, będziemy rozważali t.zw. w Mechanice połączenia idealne.

Zauważmy jeszcze, że rozumowanie powyższe co do reakcji powierzchni można powtórzyć w wypadku, gdy powierzchnia /idealnie gładka/ ciała opiera się o nieruchomy punkt, należący do podpory. Reakcją tego punktu jest siła normalna do powierzchni ciała i przechodząca przez nieruchomy punkt podpory.

Z powyższego widać, że istnieje zasadnicza różnica pomiędzy reakcją punktu stałego a reakcją powierzchni, w pierwszym wypadku reakcja $\overline{R}$ wyznacza się przez trzy wielkości algebraiczne R_x, R_y, R_z, w drugim wypadku, tylko przez jedną R_n.

Wszelkie połączenie wywierające reakcję, określającą się przez jedną wielkość algebraiczną, np. przez rzut siły na pewną oś lub przez moment siły względem pewnej osi, będziemy nazywać połączeniem prostem i odpowiednią reakcję - reakcją prostą. Podparcie punktu ciała przez powierzchnię nieruchomą jest więc połączeniem prostem /lub podporą prostą/, wywierającem reakcję prostą. Punkt stały zaś jest połączeniem równoznacznem z trzema połączeniami prostemi; rzeczywiście punkt stały może być zastąpiony podparciem punktu ciała przez 3 płaszczyzny nieruchome, przechodzące przez dany punkt i równoległe do płaszczyzn spółrzędnych; reakcje R_x, R_y, R_z tych płaszczyzn są niczem innem, jak składowemi reakcji $\overline{R}$ punktu stałego na osie spółrzędnych.

Rozpatrzmy jeszcze jeden rodzaj podpory, polegający na tem, że dany punkt ciała może poruszać się tylko wzdłuż danej nieruchomej linji /krzywej lub prostej/. Rozumując, jak wyżej, przekonamy się, że linja nieruchoma idealnie gładka nie może okazać sprzeciwu sile stycznej do linji, a więc reakcją jest siła normalna do linji i jako taka wyznacza się przez dwie wielkości algebraiczne, np. przez rzuty na dwie dowolne osie, przechodzące w płaszczyźnie prostopadłe do linji w danym punkcie zetknięcia.

W zależności od ilości reakcyj prostych, określających reakcję podpory, powierzchnię nieruchomą nazywamy czasem podporą 1 kategorji, linję nieruchomą - podporą 2 kategorji, punkt nieruchomy - podporą 3 kategorji. W praktyce wyznaczenie reakcyj podpór, a więc zarazem i parć na podpory, jest potrzebne w celu obliczenia wytrzymałości podpór.

Równania równowagi ciała nieswobodnego.

§ 12. Jak wiemy, każda równość geometryczna jest równoznaczna z trzema równościami rzutów obu części takiej równości na trzy wzajemnie do siebie prostopadłe osie spółrzędnych. Z tego powodu dwa warunki równowagi ciała nieswobodnego / § 10/ są równoznaczne z 6-ma równościami rzutów tych dwuch równości geometrycznych na osie spółrzędnych $Oxyz$:

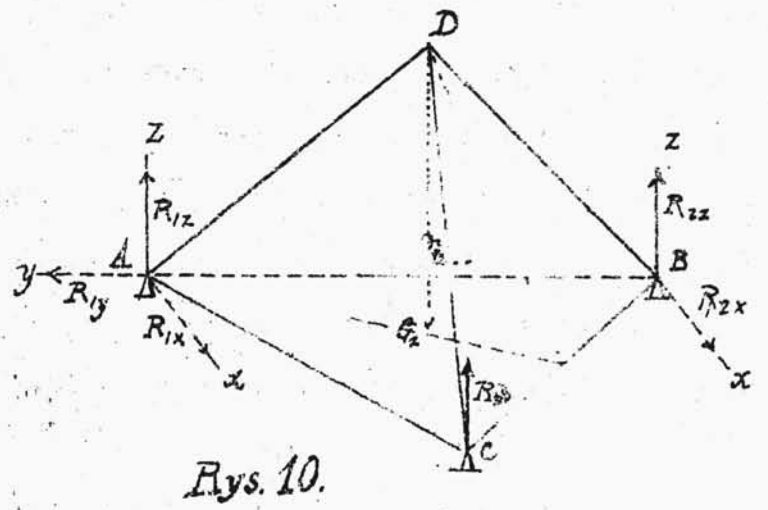
$$\Sigma X + \Sigma R_x = 0 \qquad \Sigma M_{ox}(P) + \Sigma M_{ox}(R) = 0$$
$$\Sigma Y + \Sigma R_y = 0 \qquad \Sigma M_{oy}(P) + \Sigma M_{oy}(R) = 0$$
$$\Sigma Z + \Sigma R_z = 0 \qquad \Sigma M_{oz}(P) + \Sigma M_{oz}(R) = 0$$

W równości te wchodzą następujące wielkości algebraiczne: rzuty sił bezpośrednio przyłożonych X, Y, Z i rzędne punktów zaczepienia tych sił x, y, z ; rzuty reakcyj R_x, R_y, R_z oraz rzędne punktów ich zaczepienia x y z

Równości te nazywają się równaniami równowagi ciała nieswobodnego. Równania te służą do wyznaczenia niewiadomych rzutów reakcyj: R_x, R_y, R_z oraz - w wypadku, gdy podpory nie czynią ciała całkowicie nieruchomem - do wyznaczenia położenia równowagi ciała t.j. niektórych rzędnych punktów ciała, lub wielkości geometrycznych, określających położenie ciała.

Ze względów, wspomnianych w § 9, posiadamy tylko sześć równań równowagi jednego ciała sztywnego i nieswobodnego. Każde podobne równanie napisane względem innych osi będzie skutkiem tych 6 równań.

§ 14. Przykład. Znaleźć reakcje podpór ostrosłupa prawidłowego /rys. 10./, posiadającego następujące podpory:



Rys. 10.

1/ punkt nieruchomy A, 2/ punkt B, mogący się poruszać po prostej AB, 3/ punkt C, mogący się poruszać w poziomej płaszczyźnie ABC.

Jak wiadomo z Mechaniki Ogólnej środek ciężkości ostrosłupa prawidłowego leży na prostej DG, łączącej wierzchołek D ze środkiem ciężkości G_1, podstawy ABC. Siła bezpośrednio przyłożona jest więc tylko jedna, mianowicie siła ciężkości $\overline{P}$, działająca wzdłuż pionowej prostej DG_2. Obierzmy osie spółrzędnych tak, żeby początkiem osi był punkt B, oś Bz skierujemy pionowo, By wzdłuż prostej BA. Z powodu istnienia podpór A, B, C dany ostrosłup jest ciałem nieswobodnem. Aby więc rozpatrywać ostrosłup, jako znajdującą się w równowadze bryłę swobodną, musimy zgodnie z § 11 zastąpić działanie podpór przez siły odporowe - reakcje. Reakcją nieruchomego punktu A będzie siła $\overline{R_1}$, przechodząca przez punkt A, lecz o niewiadomych kierunku i zwrocie, oraz wielkości. Wszystkie te cechy staną się znane, jeżeli wyznaczymy trzy niewiadome: R_{1x}, R_{1y}, R_{1z} t.j. rzuty siły $\overline{R_1}$ na osie spółrzędnych.

Podpora B polega na tem, że punkt B może się przesuwać po prostej AB, działanie więc tej podpory można zastąpić siłą $\overline{R_2}$, przechodzącą przez punkt B, prostopadle do prostej AB, lecz o niewiadomych kierunku i zwrocie. Siła ta leży więc w płaszczyźnie Bxz i będzie wiadoma, jeżeli będziemy znali rzuty R_{2x} i R_{2z} tej siły na osi Ox i Oz.

Podpora C tworzy punkt, mogący poruszać się w płaszczyźnie Bxy, a więc reakcja tej opory $\overline{R_3}$ jest siłą prostopadłą do płaszczyzny Bxy. Siła ta określa się w zupełności jednym rzutem R_{3z}; mamy więc ogółem 6 niewiadonych reakcyj prostych: $R_{1x}, R_{1y}, R_{1z}, R_{2x}, R_{2z}, R_{3z}$. Zastąpiwszy działanie podpór reakcjami możemy teraz dane ciało uważać za swobodne i znajdujące się w równowadze pod działaniem sił: $\overline{P}, \overline{R_1}, \overline{R_2}, \overline{R_3}$. Możemy więc napisać 6 równań, wyrażających równowagę tego ciała.

Mamy wszystkie dane do napisania pierwszych 3-ch równań, wyrażających, że suma rzutów wszystkich sił, przyłożonych do ciała, rozpatrywanego jako swobodne, na 3 osie równa się zeru, mianowicie:

$$R_{1x} + R_{2x} = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots /1/$$

$$R_{1y} = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots /2/$$

$$R_{1z} + R_{2z} + R_{3z} + P = 0 \ldots\ldots\ldots /3/$$

Pozostałe 3 równania równowagi wyrażają, że suma momentów wszystkich sił przyłożonych do ciała, rozpatrywanego jako swobodne, względem każdej z osi Ox, Oy, Oz równa się zeru. Dla napisania tych równań skorzystamy bezpośrednio z określenia momentu względem osi, jako wielkości algebraicznej /§ 9 /. Z określenia tego wypływa, że dla napisania momentów sił, np. względem osi Bx trzeba znać rzuty sił na płaszczyznę Byz, prostopadłą do osi Bx i odległości /ramiona/ od punktu B przecięcia się osi Bx z płaszczyzną Byz do powyższych rzutów sił. Przy zestawianiu równania momentów względem osi By płaszczyzną rzutów będzie płaszczyzna Bxz, - względem zaś osi Bz płaszczyzną rzutów będzie Bxy. Musimy więc znać rzuty sił i niektórych wymiarów ciała na płaszczyzny spółrzędne Byz, Bxz, Bxy. W celu ułatwienia sobie wyznaczenia tych rzutów wykonywamy podług zasad Geometrji Wykreślnej rysunek rzutów na dwie płaszczyzny prostopadłe Bxy i Bxz, a następnie i na płaszczyznę Byz /rys.11/.

Przy ułożeniu równania momentów względem osi Bx

$$\Sigma M_{Bx}(\bar{P}) + \Sigma M_{Bx}(\bar{R}) = 0$$

korzystamy z płaszczyzny rzutów Byz. Pisząc wprost równanie momentów zrzutowanych na tę płaszczyznę sił względem punktu B, otrzymamy żądane równanie, mianowicie

$$R_{1z}.AB + R_{3z}.CB - P.CB = 0 \quad \ldots\ldots\ldots /4/$$

Tak samo otrzymamy równania momentów względem osi By i Bz, mianowicie:

$$-R_{3z}.B'C' + P.B'\mathcal{E}' = 0 \quad \ldots\ldots /5/$$

$$-R_{1x}.B''A'' = 0 \quad \ldots\ldots /6/$$

Oznaczając promień koła, opisanego około trójkąta $A''B''C''$ przez r, t.j. kładąc

$$\mathcal{E}''A'' = \mathcal{E}''B'' = \mathcal{E}''C'' = r,$$

otrzymamy

$$AB = r\sqrt{3}; \quad CB = \frac{1}{2} r\sqrt{3}$$

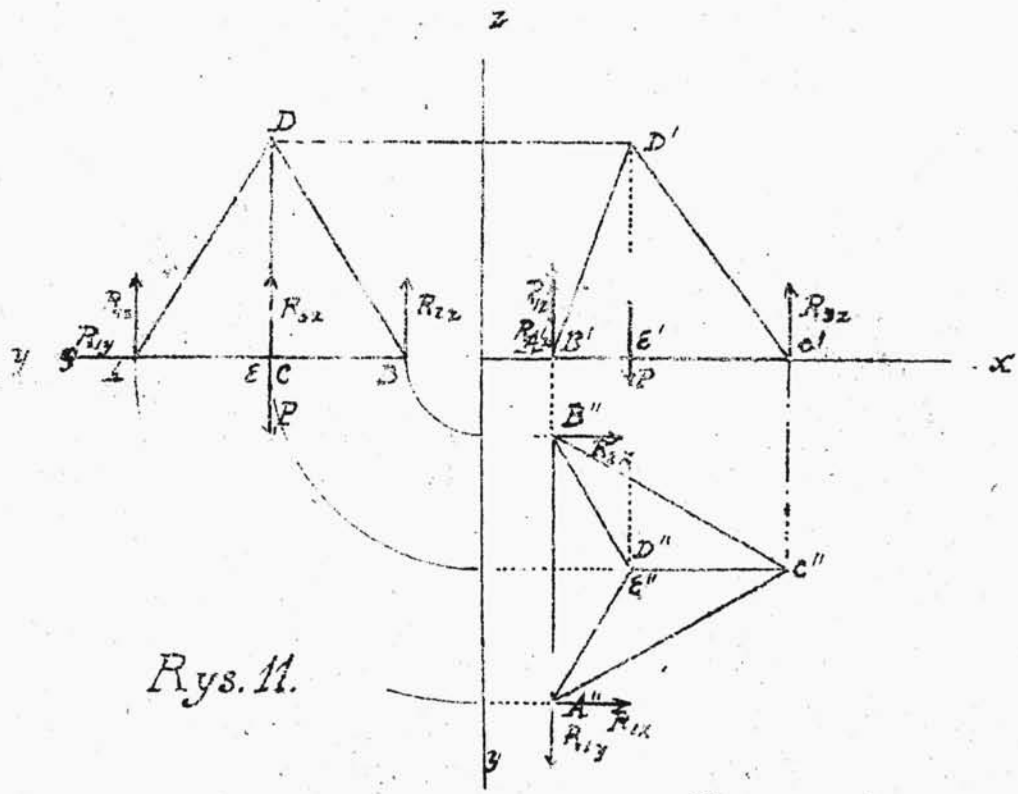
$$B'C' = \frac{3}{2} r; \quad B'\mathcal{E}' = \frac{1}{2} r$$

Równania więc /4/, /5/, /6/, po podstawieniu tych wartości i właściwem skróceniu można napisać w postaci:

$$2R_{1z} + R_{3z} - P = 0 \quad \ldots\ldots /4'/$$

$$-3R_{3z} + P = 0 \quad \ldots\ldots /5'/$$

R_{1x} ....../6'/



Rys. 11.

Z równania /6'/ i /1/ otrzymamy: $R_{2x} = 0$;

z /5/: . . $R_{3z} = \frac{1}{3}P$,

z /4'/: . . $R_{1z} = \frac{1}{3}P$,

z /3/: . . $R_{2z} = \frac{1}{3}P$.

Zadanie jest więc rozwiązane, reakcją każdej z 3-ch podpór jest siła pionowa, zwrócona do góry i równająca się $\frac{1}{3}P$.