Oznaczymy przez a ilość reakcyj prostych podpór, otrzymamy, że warunek konieczny dla możności ich wyznaczenia jest następujący:

$$a = 3 + p' + 2s',$$

W §§25 i 26 wyraziliśmy ten warunek przez równanie $2p + s = 3c$

Oczywiście oba te warunki powinny dać rezultat identyczny.

Wyłożony tutaj sposób, oparty na zasadzie zesztywnienia, pozwala wyznaczać reakcje podpór układu bezpośrednio bez wprowadzenia do równań sił wewnętrznych t.j. reakcyj przegubów łączących.

Jeżeli w celu wyznaczenia reakcyj podpór i połączeń stosujemy sposób, wskazany w §§24 - 26, to równania /1/, /2/ i /3/ mogą służyć do sprawdzenia prawidłowości rozwiązania.

Metoda odcięć.

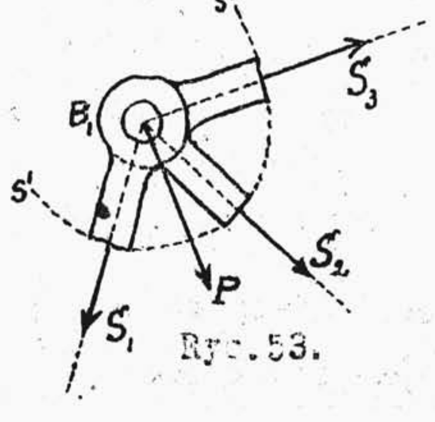
§37. W §31 mówiliśmy, że przecinając pręt A_1A_2 w punkcie A płaszczyzną prostopadłą do osi, musimy, dla zachowania tego samego stanu równowagi w jakim się pręt poprzednio znajdował, do wszystkich punktów płaszczyzny przekroju przyłożyć pewien zespół sił. Taki zespół sił odniesiony do jednostki powierzchni nazywa się naprężeniem.

Zastosowana metoda, zapomocą której ujawniliśmy te naprężenia nazywa się metodą odcięć.

Na ciało sztywne możemy się zapatrywać jako na układ punktów materjalnych o połączeniach tego rodzaju, że odległość między punktami jest niezmienna. Przecinając ciało znajdujące się w równowadze na dwie części, usuwamy w ten sposób połączenia między punktami materjalnemi, leżącemi nieskończenie blisko do powierzchni przekroju; działanie usuniętych połączeń musimy zastąpić w każdym punkcie przekroju przez reakcję, zespół tych reakcyj, działających na powierzchnię, tworzy układ sił nazwanych naprężeniami. Jak widzimy metoda odcięć wypływa więc z metody oswobodzenia od połączeń.

Zastosujemy tę metodę do rozpatrzenia równowagi dźwigara kratowego.

§ 38. Pewnym krzywym przekrojem $S'S''$ wytnijmy z dźwigara kratowego węzeł B_1 z przylegającemi do niego częściami prętów /rys. 53/ w ten sposób, że przekrój $S'S''$ będzie pro-



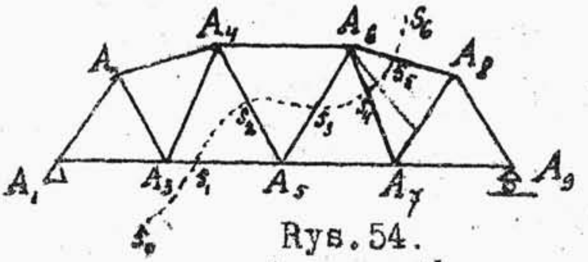
Rys. 53.

stopadły do osi prętów. Aby wycięty węzeł znajdował się w tym samym stanie równowagi, w jakim był w dźwigarze, należy w miejscach przekroju prętów przyłożyć odpowiednie naprężenia, zastępujące działanie pozostałych części dźwigara. Jak wiemy /§31/ wypadkowe tych naprężeń są to natężenia /inaczej siły osiowe/ S_1, S_2, S_3,

Wycięty węzeł z częściami prętów jest układem ciał geometrycznie zmiennym /gdyż części prętów mogą się obracać około przegubu/ jednakże na mocy zasady zesztywnienia możemy napisać równania równowagi tego układu, jak gdyby on był sztywnym i znajdował się w równowadze pod działaniem sił P, S_1, S_2, S_3. . Równania te oczywiście będą te same, co napisane w §28, mianowicie tylko dwa równania rzutów /gdyż wszystkie siły przecinają się w środku przegubu/. Wskazany tutaj sposób otrzymania równań równowagi węzłów jest ogólniejszy od podanego w §28, gdyż nie zależy on od tego czy przegub łączący jest ciałem oddzielnem, czy też stanowi całość z jednym z prętów.

§39. Powyższą metodę odcięć możemy oczywiście zastosować do dowolnej części dźwigara (detnijmy mianowicie dowolnym przekrojem

$S_0 S_1 - S_6$ /rys.54/ część $S_1 A_3 A_1 A_2 A_4 A_6 S_6 S_5 S_4 S_3 S_2$. Aby ta część była w równowadze musimy w przekrojach $S_1, S_2, \ldots S_5$ przyłożyć naprężenia, których



Rys.54.

wypadkowe będą natężeniami S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, czyli siłami o znanych kierunkach /linjach działania/: A_3A_5, A_4A_5, A_6A_5, A_6A_7, A_6A_8.

Z powodu tego, że części prętów A_3S_1, $A_4S_2, \ldots$ mogą się obracać około przegubów $A_3, A_4, \ldots$ odcięta część dźwigara jest układem geometrycznie zmiennym; jednakże na mocy zasady zesztywnienia siły zewnętrzne działające na tę część rozważaną za układ swobodny zadośćczynią trzem równaniom równowagi, jak gdyby ta część była układem sztywnym. Dla możności rozważania powyższej części za układ swobodny działanie podpory A_1 należy zastąpić reakcją R_1. Siłami zewnętrznemi działającemi więc na odciętą część dźwigara będą siły: reakcja R_1 podpory A_1, siły $P_1, P_2, P_3, \ldots$ bezpośrednio przyłożone do węzłów $A_1, A_2, \ldots$ i natężenia S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, które w stosunku do odciętej części są siłami zewnętrznemi.

Reakcję R, podpory w wypadku, gdy $a=3$ /§ 30/, możemy wyznaczyć poprzednio.

W wypadku więc, gdy reakcja podpory jest znana, w trzy równania równowagi odciętej części: $\Sigma X=0$, $\Sigma Y=0$, $\Sigma M=0$ wchodzi pięć niewiadomych: $S_1, \dots S_5$, a ogólnie m, jeżeli przekrój przecina m prętów.

Odcinając w różny sposób części dźwigara, możemy otrzymać więcej równań, zawierających te same niewiadome, jednakże jest rzeczą pożądaną przeprowadzić przekrój w ten sposób, aby z trzech równań równowagi odciętej części wyznaczyć kompletnie, odpowiednie niewiadome natężenia.

§ 40. Jak widać zadanie powyższe sprowadza sie do następującego: dany układ sił zrównoważyć przez m sił o danych kierunkach /linjach działania/.

Oznaczmy kąty pomiędzy kierunkami $A_1\zeta_1$, $A_2\zeta_2$, ... i osią Ox przez $\alpha_1, \alpha_2, \dots$. Rzuty nieznanych sił na osie $A_1\zeta_1$, $A_2\zeta_2$, ... oznaczmy przez $S_1, S_2, \dots$

Mamy następujące trzy równania równowagi przy układzie osi spółrzędnych, jak na rys. 9 /§ 9/:

$$S_1\cos\alpha_1 + S_2\cos\alpha_2 + \ldots + S_m\cos\alpha_m + \Sigma X = 0$$

$$S_1\sin\alpha_1 + S_2\sin\alpha_2 + \ldots + S_m\sin\alpha_m + \Sigma Y = 0$$

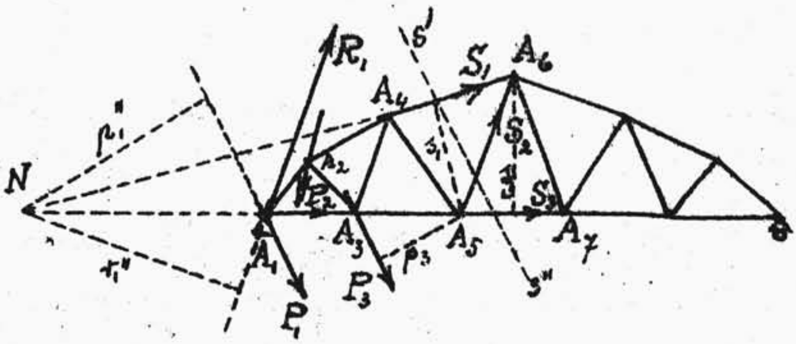
$$b_1 S_1\cos\alpha_1 - a_1 S_1\sin\alpha_1 + \ldots + b_m S_m\cos\alpha_m - a_m S_m\sin\alpha_m + \Sigma(yX - xY) = 0$$

gdzie $a_1, b_1, \ldots$ rzędne punktów $A_1, \ldots$, x, y...rzędne punktów zaczepienia danych sił. Jak wiemy dla układu płaskiego więcej równań równowagi niema. Zadanie więc jest nieokreślone dla wypadku $m > 3$ t.j. gdy ilość niewiadomych jest większa od ilości równań. W wypadkach $m = 1$ i $m = 2$ niewiadomych mamy mniej niż równań, zadanie więc może być określone tylko przy pewnych dodatkowych warunkach.

W wypadku $m = 3$ mamy tyle niewiadomych ile równań i zadanie jest wogóle określone. W szczególnym jednak wypadku, gdy dane kierunki nieznanych sił przecinają się w jednym punkcie, jak wiemy z §21 zadanie jest jednak nieokreślone.

§41. Z poprzedniego § widać, że przeprowadziwszy przekrój $S'S''$ tak, żeby on przeciął trzy pręty, możemy natężenia tych prętów wyznaczyć bezpośrednio z równań równowagi odciętej części dźwigara.

Jednakże w danym wypadku możemy zadanie ułatwić jeszcze dalej, jeżeli jako równania równowagi weźmiemy równania momentów i przytem za bieguny momentów weźmiemy punkty przecięcia się dwóch kierunków z trzech nieznanych natężeń. Mianowicie przeprowadzamy np. przekrój $S'S''$ /rys.55/



Rys.55.

i rozpatrujemy odciętą część dźwigara na lewo od przekroju $S'S''$, jako ciało sztywne i swobodne, znajdujące się w równowadze pod działaniem sił: $R_1, P_1, P_2, \ldots, S_1, S_2, S_3$.

Pod literami S_1, S_2, S_3, rozumiemy /§28/ rzuty natężeń $|S_1|, |S_2|, |S_3|$ na osie wychodzące z węzłów A_4 i A_5 w stronę odciętych prętów i mające kierunek osi tych prętów. Piszemy następnie równanie momentów powyższych sił np. względem punktu A_5, t.j. punktu przecięcia się kierunków S_2 i S_3 , mianowicie:

$$S_1 \delta_1 + R_1 r_1 - P_1 p_1 - P_2 p_2 - P_3 p_3 - P_4 p_4 - P_5 p_5 = 0 \ldots\ldots (1)$$

gdzie $\delta_1, r_1, p_1, p_2, \ldots$ są ramionami sił $S_1, R_1, P_1, \ldots$ względem bieguna A_5. Z równania tego otrzymujemy bezpośrednio

$$S_1 = -\frac{R_1 r_1 - P_1 p_1 - \ldots}{\delta_1}$$

Podobnie, pisząc równanie momentów względem punktu przecięcia się kierunków S_1 i S_2 t.j. punktu A_5 otrzymamy

$$-S_3 \delta_3 + R_1 r_1' - P_1 p_1' - \ldots = 0 \ldots\ldots\ldots /2/$$

$$S_3 = \frac{R_1 r_1' - P_1 p_1' - \ldots}{\delta_3}$$

gdzie $\delta_3, r_1', p_1', \ldots$ są ramionami sił względem punktu A_5.

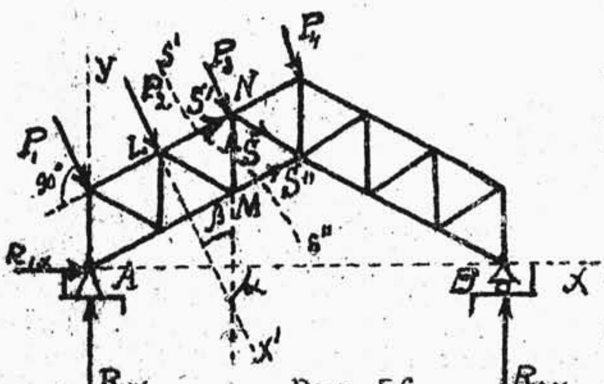
Równanie dla S_2 otrzymamy biorąc za biegun momentów punkt N t.j. punkt przecięcia się kierunków S_1 i S_3, otrzymamy

$$-S_2 \delta_2 - R_1 r_1'' + P_1 p_1'' + P_2 p_2'' + \ldots = 0 \ldots\ldots /3/$$

skąd $S_2 = \dfrac{-R_1 r_1'' + P_1 p_1'' + P_2 p_2'' + \ldots}{\delta_2}$

Rzecz oczywista, że zamiast rozpatrywania równowagi odciętej części dźwigara na lewo od przekroju $s's''$, możemy rozpatrywać równowagę części dźwigara na prawo od tego przekroju. Zwroty sił S_1, S_2, S_3, a ściślej zwroty osi rzutów dla tych sił, będą wtedy przeciwne do przyjętych dla lewej części, bieguny momentów pozostaną te same. Wyłożony sposób zastosowania trzech równań momentów nazywa się sposobem momentów, lub sposobem Rittera.

§42. W wypadku, gdy dwa z przeciętych prętów są równoległe, dla wyznaczenia natężenia w trzecim pręcie stosujemy równanie rzutów na oś prostopadłą do dwóch równoległych prętów.



Rys.56.

Np. chcąc wyznaczyć natężenie S w pręcie MN /rys.56/, przeprowadzamy przekrój $S'S''$ i rozpatrujemy np. równowagę lewej części dźwigara, jako ciała swobodnego, znajdującego się w równowadze pod działaniem sił: $P_1, P_2, R_{1x}, R_{1y}, S, S', S''$ i piszemy równanie rzutów tych sił na oś $Lx' \perp AM$. Przyjmując pod uwagę, że rzuty sił S_1 i S_2 na tę oś równają się zeru, otrzymamy

$$P_1 + P_2 + R_{1x}\cos\alpha - R_{1y}\sin\alpha - S\cos\beta = 0$$

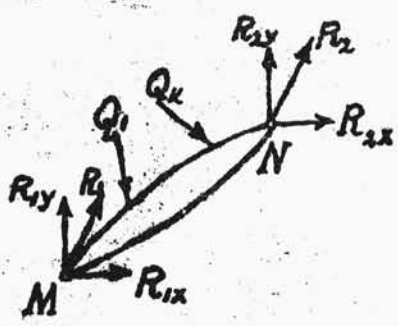
skąd
$$S = -\frac{P_1 + P_2 + R_{1x}\cos\alpha - R_{1y}\sin\alpha}{\cos\beta}$$

Zamiast równowagi lewej części dźwigara można rozpatrywać równowagę prawej części, należy tylko zwroty sił S, S', S'' przyjąć odwrotne. Ten sposób wyznaczenia natężenia w pręcie można nazwać sposobem rzutów.

Wyłożone sposoby momentów i rzutów, jak widać nie są ogólne, stosuje się je głównie wtedy, gdy można wykonać przekrój, przecinający tylko trzy pręty dźwigara.

§43. Wpływ sił zewnętrznych, przyłożonych między węzłami układu przegubowego. Rozpatrując dźwigary kratowe przypuszczaliśmy dotąd, że siły zewnętrzne są przyłożone w węzłach dźwigara. W §28 omawialiśmy, że w stosunku do sił ciężkości pręta takie rozważanie jest tylko przybliżone, gdyż siły ciężkości preta działają we wszystkich punktach pręta, a więc są przyłożone między węzłami. Mamy także konstrukcje, jak mosty z jezdnią górną /§15/, w których na górnym pasie są położone mostownice/poprzeczne belki drewniane/, przez które ciśnienia od obciążenia ruchomego oddają się bezpośrednio na pręty miedzy węzłami. Dla ogólności przypuśćmy, że mamy układ przegubowy, składający się z ciał sztywnych dowolnego kształtu, przytem siły bezpośrednio przyłożone są zaczepione i w węzłach i między węzłami.

Każde ciało układu np. miedzy węzłami MN /rys.57/, na które działają siły $R_1, \ldots Q_K$, żemy rozważać, jako swobodne, zastąpiwszy działanie przegubów węzłowych przez reakcje R_1 i R_2. Reakcje te na podstawie §22. określają się każda przez dwie składowe np. na osie spółrzędnych t.j. R_{1x} i R_{1y} i R_{2x}, R_{2y}. Mamy więc dla każdego ciała między przegubami 4 niewiadome.



Rys.57.

Na mocy zasady działania i przeciwdziałania na przegub M ze strony ciała MN działa reakcja R_1' równa i wprost przeciwna do reakcji R_1, a więc określająca się przez rzuty $(-R_{1x})$, $(-R_{1y})$, podobnie na przegub N działa ze strony ciała MN reakcja, określająca się przez rzuty $(-R_{2x})$, $(-R_{2y})$. Oznaczywszy ilość ciał układu przez b, ilość reakcyj prostych podpór przez a, mamy ogólną ilość niewiadomych

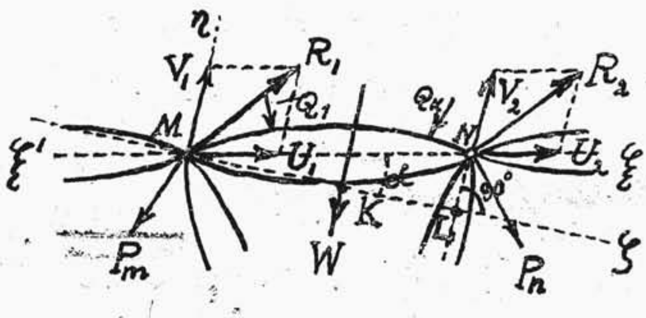
$$4b+a$$

Rozważając każde ciało układu i każdy węzeł, jako ciało swobodne, możemy dla każdego ciała napisać 3 równania równowagi, dla każdego węzła dwa równania, ogółem mamy więc równań

$3b+2n$, gdzie n – ilość w... . Oddanie to może być określone, jeżeli $4b+a=3b+2n$ czyli $a+b=2n$ jest to warunek taki sam, jak dla dźwigara kratowego.

Pokażemy, że rozwiązanie danego zagadnienia może być sprowadzone do wypadku, gdy sił na prętach niema.

Niech będzie /rys.58./ ciało MN układu przegubowego; na ciało to działają siły Q_1 .... Q_k, które posiadają wypadkową W, pozatem do węzłów układu są przyłożone siły $P_m, P_n, \ldots$



Rys.58.

Rozpatrzmy ciało MN, jako swobodne: musimy w tym celu ze strony przegubów M i N przyłożyć reakcje R_1 i R_2. Każda reakcja /§22/ określa się przez dwie składowe: Dla składowych tych weźmy dwa kierunki: MN, wzdłuż prostej MN i $M\eta$ równolegle do wypadkowej W; oznaczmy składowe te odpowiednio przez U_1, V_1 i U_2, V_2

Napiszmy następujące trzy równanie równowagi ciała MN: równania rzutów na oś $M\zeta \perp W$

i równanie momentów względem punktów M i N, mianowicie:

$$U_1 \cos\alpha + U_2 \cos\alpha = 0$$

$$-V_2 . ML + W . MK = 0$$

$$V_1 . ML - W . KL = 0 .$$

skąd: $V_1 = \frac{KL}{ML} \cdot W$, $V_2 = \frac{MK}{ML} \cdot W$, składowe te są więc całkowicie wyznaczone, co się zaś tyczy składowych U_1 i U_2, to z pierwszego równania, otrzymujemy tylko, że składowe te są równe i wprost przeciwne, mianowicie: $U_2 = -U_1$

Oznaczmy tę wspólną wielkość przez S, gdzie S jest rzutem reakcyj R_1 i R_2 odpowiednio na osie $N\xi$ i $N\xi'$ t.j. osie skierowane nazewnątrz od pręta.

Na mocy zasady działania i przeciwdziałania ze strony ciała MN działa na węzeł M reakcja $\overline{R_1'} = -\overline{R_1}$ czyli jej dwie składowe: znana już siła $V_1' = -V_1$ i nieznana S, skierowana na zewnątrz od węzła w stronę ciała MN; na węzeł N podobnie działa reakcja $\overline{R_2'} = -R_2$, określająca się przez znaną już składową $V_2' = -V_2$ i nieznaną S, skierowaną nazewnątrz od węzła w stronę ciała MN.

Postępując podobnie ze wszystkiemi ciałami układu obciążonemi, widzimy, że każdy węzeł, rozpatrywany jako ciało swobodne, znajduje się w równowadze pod działaniem sił znanych, sił P, V' i nieznanych S, przytem siły S mają kierunek prostych, łączących osie przegubów. Dla każdego węzła możemy napisać dwa równania równowagi; jest rzeczą jasną, że równania te będą takie same, jak dla dźwigara kratowego o prętach prostolinijnych, łączących osie przegubów i nieobciążonych między węzłami, lecz przy warunku, że prócz sił P bezpośrednio przyłożonych do węzłów, przyłożyliśmy jeszcze do węzłów parcie V', określone w sposób powyższy.

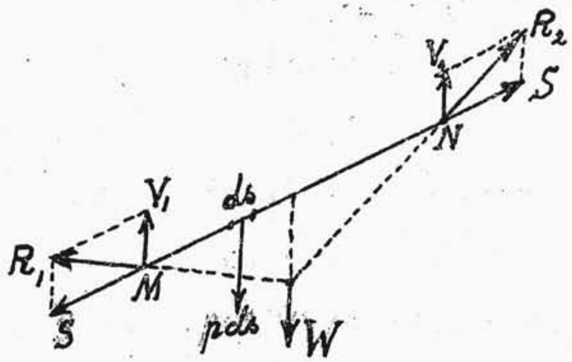
Siły S mogą więc być rozpatrywane jako natężenia prętów takiego wyobrażalnego dźwigara. Warunek więc określoności zagadnienia jest ten sam, co dla dźwigarów kratowych z prętami nieobciążonemi, co wreszcie udowodniliśmy wyżej drogą ogólną.

Z powyższego widzimy, że rozwiązanie wyłożonego zagadnienia t.j. wyznaczenia reakcyj połączeń w powyższym układzie może być uskutecznione dwoma sposobami: sposobem ogólnym, pisząc równania równowagi dla każdego ciała układu i dla każdego węzła, lub sprowadzeniem kwestji do zagadnienia równowagi dźwigara kratowego z prętami nieobciążonemi.

Wyznaczywszy reakcje R_1 i R_2 na każde ciało MN układu, mamy możność dalszego obliczenia ciała MN.

Znajduje się ono pod działaniem sił bezpośrednio przyłożonych $Q_1, \ldots Q_k$ i reakcyj R_1 i R_2, widzimy więc, że w tym wypadku ciało MN nie tylko jest rozciągane lub ściskane, lecz ulega więcej złożonemu działaniu sił.

Rozpatrzony w tym § wypadek działania sił wyjaśnia także w zupełności założenie, uczynione w §28, co do siły ciężkości każdego pręta dźwigara kratowego, które to siły stanowią szczególny przypadek rozpatrzonych tutaj sił działających między prętami. Otóż widzimy, że rozłożywszy wypadkową sił ciężkości każdego pręta na sąsiednie węzły w postaci rozpatrzonych wyżej sił V_1' i V_2' wyznaczenie składowych S reakcyj każdego węzła na pręt sprowadza się do sposobów, wyłożonych dla wypadku prętów nieobciążonych. Jednakże ostatecznie, chcąc uwzględnić siły ciężkości każdego pręta, zgodnie z wyłożonym wyżej, możemy powiedzieć, że każdy pręt MN /rys.59/ układu znajduje się nie pod-



Rys. 59.

działaniem natężeń S, lecz pod działaniem sił ciężkości i reakcyj R_1 i R_2, działających pod kątem do osi MN tak że reakcje te równoważą się z siłami ciężkości, a więc i z wypadkową ich W.

Do każdego nieskończenie małego elementu pręta ds jest przyłożona siła ciężkości pds których wypadkową jest W.

Pręt MN jest więc nie tylko rozciągany lub ściskany, lecz i zginany. W praktyce siły S mają znaczenie przeważające, wobec czego przeważnie ignorujemy działaniem na pręt sił ciężkości i składowych V_1 i V_2 i jak powiedzieliśmy w §28 działanie sił ciężkości pds uwzględniamy w postaci sił V_1', V_2', przyłożonych do sąsiednich węzłów.

Kratownice wspornikowe i kratownice trójprzegubowe zwykłe i wspornikowe.-

§44. Z wyłożonych w poprzednich §§ metod obliczania reakcyj podpór i połączeń w łuku trójprzegubowym, w układach belek wspornikowych i w układach łuków i belek widać, że wszelkie równania równowagi, zapomocą których obliczamy powyższe reakcje, zupełnie nie zależą od kształtu poszczególnego ciała układu, a tylko od rodzaju i położenia podpór i przegubów łączących. Każde poszczególne ciało układu powinno być tylko sztywne, czyli stanowić układ niezmienny. Wobec tego każde poszczególne ciało układu może być skonstruowane, jako dźwigar kratowy t.j. może stanowić układ niezmienny prętów, połączonych przegubami.

Taki układ prętów będziemy nazywać kratownicą.

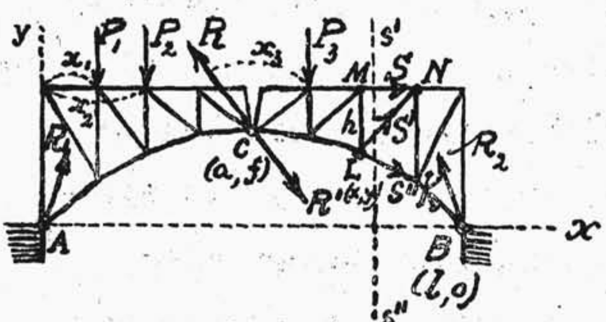
Rozpatrzony w poprzednich §§ dźwigar kratowy jest też kratownicą.

Układy belek wspornikowych, łuków, których poszczególne bryły są kratownicami, nazywamy odpowiednio belkami wspornikowemi kratowemi, łukami trójprzegubowemi kratowemi lub wprost kratownicami wspornikowemi, trójprzegubowemi i t.p.

Rozpatrzmy wypadek, gdy siły zewnętrzn

są przyłożone w węzłach poszczególnych kratownic układu, siły ciężkości prętów uważajmy także przyłożone do węzłów i zadajmy sobie pytanie, jak wyznaczyć reakcje podpór, przegubów łączących poszczególne kratownice i natężenia prętów każdej kratownicy ? Odpowiedź jest jasna, gdyż wszystkie dane do takiego obliczenia już posiadamy. Ponieważ wyznaczenie reakcyj podpór i przegubów łączących nie zależy od tego z czego składają się poszczególne ciała układu, aby tylko każde ciało było sztywne, wyznaczamy więc nasamprzód te reakcje sposobami opisanemi w §§23,24,25,26,35,36. Mając wyznaczone te reakcje możemy każde oddzielne ciało czyli poszczególną kratownicę rozpatrzyć jako ciało swobodne, znajdujące się w równowadze pod działaniem sił bezpośrednio przyłożonych i reakcyj ze strony podpór i przegubów łączących. Możemy więc w tej kratownicy swobodnej wyznaczyć natężenia prętów /siły osiowe/ zapomocą równań równowagi węzłów, lub równań momentów lub rzutów t.j. wogóle sposobami podanemi w §§28,38,41,42. Jeżeli reakcje podpór są znane, przypuśćmy np. że są wyznaczone sposobem podanym w §36, to w celu wyznaczenia natężeń pretów poszczególnych kratownic można stosować zasadę zesztywnienia, jak to jest opisane w § 36, mianowicie, nie rozłączając poszczególne bryły w przegubach łączących, rozważać cały układ jako swobodny /oswobodzony tylko od podpór/. W takim układzie możemy stosować metodę odcięć, a mianowicie sposób momentów lub rzutów / § 41 i 42/ i rozpatrywać przytem równowagę całej części układu nalewo lub naprawo od przekroju.

Dla przykładu rozpatrzmy kratownicę trójprzegubową / rys. 60/, znajdującą się pod działaniem sił pionowych P_1, P_2, P_3 i przypuśćmy, że chcemy znaleść natężenie S w pręcie MN. Nasamprzód sposobem, podanym w § 23 lub w § 35, znajdujemy



Rys. 60.

reakcje podpór R_1 i R_2 oraz reakcję R ze strony prawej części łuku na lewą; reakcja R' ze strony lewej części na prawą jest równa a wprost przeciwna do R.

Znamy więc rzuty tych reakcyj na osie

np. A_{xy} t.j. $R_{1x}, R_{1y}, R_{2x}, R_{2y}, R_x, R_y$, $R_x' = -R_x$, $R_y' = R_y$. W celu wyznaczenia natężenia S możemy rozpatrzeć część prawą łuku jako ciało swobodne, znajdujące się w równowadze pod działaniem sił: R', P_3, R_2. Przekrojem $S'S''$ przecinamy pręty MN, LN i LK, w miejscach przekroju przykładamy niewiadome natężenia $S_1\ S_1'\ S_1''$, rozpatrujemy następnie równowagę części np. CLM nalewo od przekroju i piszemy równanie momentów względem punktu L, mianowicie

$$R_x'(f-y)+R_y'(x-a)-P_3(x-x_3)+S.h=0$$

czyli $-R_x(f-y)-R_y(x-a)-P_3(x-x_3)+Sh=0$ gdzie $x;\ y$ są rzędne punktu L; a, f - punktu C, x_3 - odcięta punktu zaczepienia siły P_3; z równania tego mamy

$$S=+\frac{1}{h}\left[R_x(f-y)+R_y(x-a)+P_3(x-x_3)\right].$$

Moglibyśmy rozpatrzeć równowagę części naprawo od $S'S''$; należy wtedy siłom S nadać zwroty odwrotne, równanie momentów względem L będzie: $R_{2x}\cdot y-R_{2y}(l-x)-Sh=0$

Możnaby także, jak powiedziano wyżej rozpatrywać równowagę części całego łuku nalewo od $S'S''$ jako układu swobodnego, nie rozłączonego w przegubie C ; część ta znajduje się w równowadze pod działaniem sił $R_1, P_1, P_2, P_3, S, S', S''$. Równanie momentów względem punktu L będzie:

$$-R_{1x}\cdot y+R_{2y}x-P_1(x-x_1)-P_2(x-x_2)-P_3(x-x_3)+S.h=0$$

Jeżeli siły bezpośrednio przyłożone są zaczepione także do przegubów łączących lub do prętów między węzłami w kratownicach, to do wyznaczenia reakcyj wszystkich połączeń należy jeszcze zastosować uzupełnienia podane w §§27 i 43.

§45. Z §§10 i 17 wiemy, że równania równowagi ciała nieswobodnego są algebraicznem wyrażeniem dwóch warunków geometrycznych równowagi tego ciała mianowicie

$$\Sigma\bar{P}+\Sigma\bar{R}=0 \quad \text{i} \quad \Sigma\bar{M}(\bar{P})+\Sigma\bar{M}(\bar{R})=0$$

wielkości $\Sigma\bar{P}$ i $\Sigma\bar{M}(\bar{P})$, jak wiemy z §4, są niezmiennikami układu sił bezpośrednio przyłożonych do ciała sztywnego t.j. nie zależą od przekształceń układu sił / §2 /. Powyższe więc dwa warunki równowagi nie zmienią się jeżeli układ sił / P / zamienimy na inny zastępczy układ np. na wypadkową, jeżeli układ / P /wypadkową posiada. Widzimy więc, że siły przyłożone do jednego ciała sztywnego nieswobodnego możemy przekształcać podług trzech sposobów, wskazanych w §2 i że reakcje podpór nie zależą od tych przekształceń.

Jeżeli mamy układ ciał, to powstaje kwestja, czy reakcje podpór i połączeń układu zależą od podobnego przekształcenia sił, czy nie. Na pytanie to możemy odpowiedzieć, opierając się na następującej uwadze.

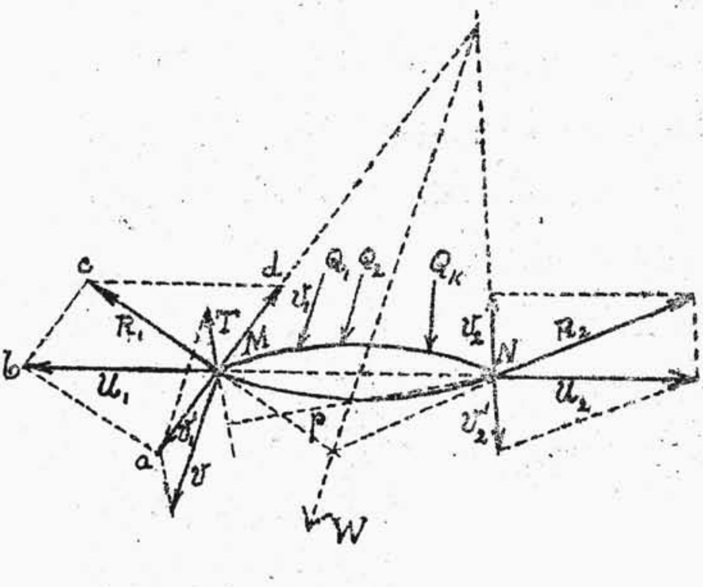
Równania równowagi układu ciał są równaniami algebraicznemi pierwszego stopnia względem rzutów reakcyj czyli t.zw. reakcyj prostych. Dla układów geometrycznie niezmiennych zadanie jest określone, jeżeli ilość reakcyj prostych równa się ilości równań równowagi i jeżeli przytem równania mają pierwiastki skończone; lecz równania 1-go stopnia mają w tym wypadku tylko jedno rozwiązanie, zagadnienie więc powyższe posiada więc tylko jedno rozwiązania t.j. istnieje tylko jeden zupełnie określony układ reakcyj podpór i połączeń / a więc i natężeń /, który równoważy siły bezpośrednio przyłożone.

Jak wiemy wyznaczenie reakcyj podpór i połączeń układu ciał możemy uskutecznić z równań równowagi napisanych dla każdego poszczególnego ciała układu, rozpatrywanego za swobodne, otrzymane wartości reakcyj są więc na zasadzie powyższego rozwiązaniem jedynem. Gdybyśmy układ sił bezpośrednio przyłożonych do układu przekształcili na inny, to równania równowagi każdego poszczególnego ciała byłyby inne i rozwiązanie mogłoby być inne, a ponieważ rozwiązanie jest jedyne, więc przekształcać układ sił przyłożonych do układu ciał na inny układ zastępczy nie można. Jednakże pewne przekształcenie częściowe wykonywać możemy bez zmiany wielkości reakcyj, mianowicie możemy przekształcać każdy układ sił, przyłożonych bezpośrednio do poszczególnego ciała układu, na inny zastępczy; warunki równowagi i równania równowagi tego poszczególnego ciała układu nie zmienią się, a więc i wielkości reakcyj podpór i połączeń też się nie zmienią.

Następnie z samego znaczenia zasady zesztywnienia wypływa, że jeżeli będziemy pisać równania równowagi całego układu lub jego części, stosując zasadę zesztywnienia, to równania te pozostaną słuszne także dla przekształconego układu sił, działającego na cały układ lub rozpatrywaną jego część. Ponieważ stosując zasadę zesztywnienia dla całego układu otrzymujemy równania równowagi, w które wchodzą tylko reakcje podpór, widzimy więc, że przekształcanie sił przyłożonych do układu jest dozwolone tylko przy zestawianiu równań równowagi, w które wchodzą reakcje podpór t.j. siły zewnętrzne nie możemy zaś sił bezpośrednio przyłożonych przekształcać jakkolwiek przy zestawianiu równań, zawierających reakcje połączeń t.j. siły wewnętrzne, z wyjątkiem częściowych przekształceń, omówionych powyżej. Te wnioski o przekształcaniach sił, przyłożonych do układu ciała, będą nam później przydatne przy rozważaniu możności przekształcania sił, przyłożonych do ciała sprężystego.

§46. Skorzystamy z wywodów poprzedniego § dla wyjaśnienia z nieco odmiennego i ogólniejszego punktu widzenia kwestję poruszoną w §43 o działaniu sił, przyłożonych między węzłami dźwigara przegubowego.

Wyobraźmy sobie, jak poprzednio ciało MN układu przegubowego /rys.61/ między przegubami M i N. Na ciało to działa układ sił bezpośrednio przyłożonych $Q_1, Q_2 ... Q_k$. Ciało to, rozpatrywane jako swobodne, znajduje się w równowadze pod działaniem



Rys.

sił Q i reakcyj przegubów R_1 i R_2, co do których znamy tylko punkty zaczepienia M i N. Układ sił Q działających na ciało MN przekształcimy na inny układ zastępczy.

Oznaczmy przez $\overline{V}$ sumę geometryczną układu sił Q - przez L moment tego układu sił względem punktu M. Z § 4 wiemy, że układ Q możemy zastąpić przez jedną siłę $\overline{V_1}$, przyłożoną do punktu M i parę sił z momentem L; te parę sił można sobie wyobrazić dowolnie, aby tylko moment jej równał się L; wyobraźmy ją sobie w postaci dwóch sił T i V_2' równych co do wielkości, równoległych i przechodzących odpowiednio przez punkty M i N, przytem $V_2'p = Tp = L$; kierunek siły V_2' może być dowolny. Składając siły T i V, działające w punkcie M w jedną V_1', otrzymamy ostatecznie zastępczy układ w postaci dwóch sił V_1' i V_2'; takich układów może być nieskończenie wiele w zależności od dowolnego kierunku V_2'. Otrzymaliśmy więc, że na ciało MN, znajdujące się w równowadze, działają cztery siły V_1', V_2', R_1 i R_2; składając siły R_1 i V_1' w jedną U_1, R_2 i V_2' w jedną U_2 widzimy że siły U_1 i U_2 powinny być równe i wprost przeciwne t.j. powinny mieć kierunek prostej MN. Ponieważ w równoległoboku Mab

mamy $Ma \parallel bc$ więc prosta Md - przedłużenie prostej Ma jest równoległa do bc, możemy więc siłę R_1 rozłożyć na U_1 i $V_1 = Md$, przytem V_1 będzie równa i wprost przeciwna V_1'. Podobnie reakcję R_2 możemy rozłożyć na dwie siły U_2 i V_2, przytem V_2 jest równa i wprost przeciwna sile V_2'. Widzimy więc, że każdą z nieznanych reakcyj R_1 i R_2 możemy zawsze rozłożyć na dwie składowe, z których V_1 i V_2 znane /w zależności od przyjętego dowolnie kierunku V_2'/, a U_1 i U_2 nieznane, wiemy tylko, że to są siły wzajemnie równe i przeciwne. Na mocy zasady działania i przeciwdziałania na węzeł M działa ze strony ciała MN reakcja $\overline{R_1'} = -\overline{R_1}$ czyli jej dwie składowe: znana $\overline{V_1'} = -\overline{V_1}$ i nieznana $\overline{U_1'} = -\overline{U_1}$;

podobnie na węzeł N działa reakcja $\overline{R_2'} = -\overline{R_2}$, czyli jej dwie składowe: znana $\overline{V_1'} = -\overline{V_2}$ i nieznana $\overline{U_2'} = -\overline{U_1}$. Siły U_1' i U_2' działające na sąsiednie węzły M i N są to siły równe i wprost przeciwne i jak wyjaśniliśmy w § 43 możemy je wyznaczyć, jako siły osiowe, jeżeli do sił działających bezpośrednio na węzły dołączymy jeszcze siły V' określone w powyższy sposób w zależności od sił Q. Powyższy rozbiór jest niezależny od tego, czy układ sił Q sprowadza się do wypadkowej; czy do pary; w pierwszym wypadku, gdy $\overline{V} \neq 0$, siły V_1' i V_2' (i reakcje) przecinają się z kierunkiem wypadkowej W ; w wypadku pary $V = 0$, $V_1' = T$

Z powyższego rozbioru widać także, że rozkład sił Q na siły V_1' i V_2' może być wykonany na nieskończenie wiele sposobów, w zależności od dowolnego kierunku V_2'. Sposób podany w § 43 jest sposobem szczególnym dla wypadku gdy siły Q posiadają wypadkową i gdy kierunek V_2' jest równoległy do wypadkowej.

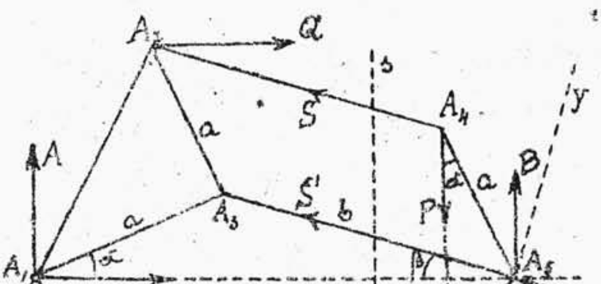
ZASTOSOWANIE ZASADY ZESZTYWNIENIA DO UKŁADÓW GEOMETRYCZNIE ZMIENNYCH.

§47. Rozpatrzmy równowagę układu przegubowego, geometrycznie zmiennego, który otrzymamy, gdy w dźwigarze kratowym /t.j. układzie sztywnym/ usuniemy jeden z prętów. Weźmy dla przykładu układ $A_1A_2A_3A_4A_5$ /rys. 61/ do którego są przyłożone bezpośrednio dwie dane siły: P - pionowa i Q - pozioma; dane są przytem:

$$A_1A_3 = A_3A_2 = A_4A_5 = a$$

$$A_3A_4 = A_2A_4 = b$$

$$\sphericalangle A_1A_3A_2 = 90^\circ$$



Rys. 61

Chcemy znaleść położenie równowagi układu, które jak widać z rysunku może być określone przez kąt α. Kąt β jest funkcją od α, mianowicie

$$a\sin\alpha = b\sin\beta$$

Zastosujemy w tym celu zamiast sposobu wskazanego w § 32, zasadę zesztywnienia. Pisząc równanie momentów względem punktu A_1 dla całego układu, rozważanego za swobodny, pozbawiamy się w równaniu składowych A i H reakcji podpory A_1, mianowicie:

$$-B(a\cos\alpha + b\cos\beta) + Q(a\cos\alpha + a\sin\alpha) +$$
$$+ P(a\cos\alpha - b\cos\beta - a\sin\alpha) = 0$$

Wykonywując przekrój SS i rozpatrując równowagę prawej części układu, znajdującej się pod działaniem sił P, B, S i S', możemy napisać następujące równanie rzutów na oś $A_5 y \perp A_1 A_5$

$$-P\cos\beta + B\cos\beta = 0$$

skąd $B = P$. Podstawiając tę wartość na B w równania napisane wyżej otrzymamy:

$$Q(\cos\alpha + \sin\alpha) - P\sin\alpha = 0 \ldots\ldots\ldots (a)$$

Jest to równanie, wyrażające związek między siłami bezpośrednio przyłożonemi P i Q i parametrem α, określającym położenie równowagi układu. Jeżeli dane są P i Q, to z równania /a/ określamy α, a przez to i położenie równowagi układu. Jeżeli przeciwnie α jest dane, to równanie /a/ wyraża warunek dla wielkości sił P i Q, przy którym możliwe jest przyjęte położenie równowagi. Np. przy $\alpha = 90^\circ$ powinien być zachowany warunek $Q=P$; przy $\alpha = 45^\circ$, $P=2Q$; przy $\alpha = 30^\circ$, $P=Q(1+\sqrt{3})$; przy $\alpha = 0$, $Q=0$, P - dowolne. W wypadku, gdy siły P i Q są dane, po wyznaczeniu położenia równowagi z równania /a/, obliczenie reakcyj podporowych i sił osiowych może być uskutecznione, jak dla układów geometrycznie niezmiennych.

Z powyższego rozważania widać, że w układach geometrycznie zmiennych zmiana sił bezpośrednio przyłożonych powoduje zmianę w położeniu równowagi układu, z tego powodu układy takie bezpośrednio nie mogą być stosowane w budowlach.

WIELOBOK PRZEGUBOWY.

§ 47. Rozpatrzmy równowagę układu płaskiego ciał, połączonych każde następne z poprzednim jednym przegubem walcowym. Skrajne ciała mają podpory w postaci punktów nieruchomych. Układ ten