nania równowagi $\Sigma M = 0$. Wyznaczając np. reakcje dla przykładu, pokazanego na rys.32[b], w porządku wskazanym powyżej, możemy napisać następujące równania:

dla belki: $a_1 a_2 a_3$ : $\sum_1^3 X = 0$ /1/ $\sum_1^3 Y = 0$ /2/ $\sum_1^3 M_3 = 0$ /3/

" " $a_3 a_4$ : $\sum_3^4 X = 0$ /4/ $\sum_3^4 M_3 = 0$ /5/ $\sum_3^4 M_4 = 0$ /6/

" " $a_8 a_9 a_{10}$ : $\sum_8^{10} X = 0$ /7/ $\sum_8^{10} Y = 0$ /8/ $\sum_8^{10} M_9 = 0$ /9/

" " $a_7 a_8$ : $\sum_7^8 X = 0$ /10/ $\sum_7^8 M_7 = 0$ /11/ $\sum_7^8 M_8 = 0$ /12/

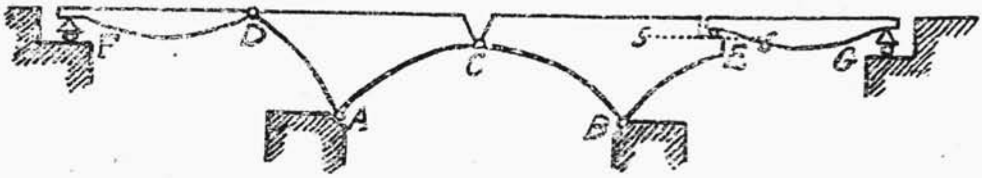
" " $a_4 a_5 a_6$ : $\sum_4^7 X = 0$ /13/ $\sum_4^7 Y = 0$ /14/ $\sum_4^7 M_5 = 0$ /15/

Sumy dotyczą wszystkich sił działających na daną belkę, zarówno sił bezpośrednio przyłożonych, jak i reakcji.

Z równania /1/ otrzymamy $R_{3x}$, z /4/ $R_{4x}$, z /7/ $R_{8x}$ z /10/: $R_{7x}$, z /13/: $R_{5x}$; z równania /5/ i /6/: $R_{3y}$ i $R_{4y}$, z /11/ i /12/ $R_{7y}$ i $R_{8y}$; z równania /2/ i /3/ : $R_{1y}$ i $R_{2y}$, z /8/ i /9/: $R_{9y}$ i $R_{10y}$ i nakoniec /14/ i /15/: $R_{5y}$ i $R_{6y}$.

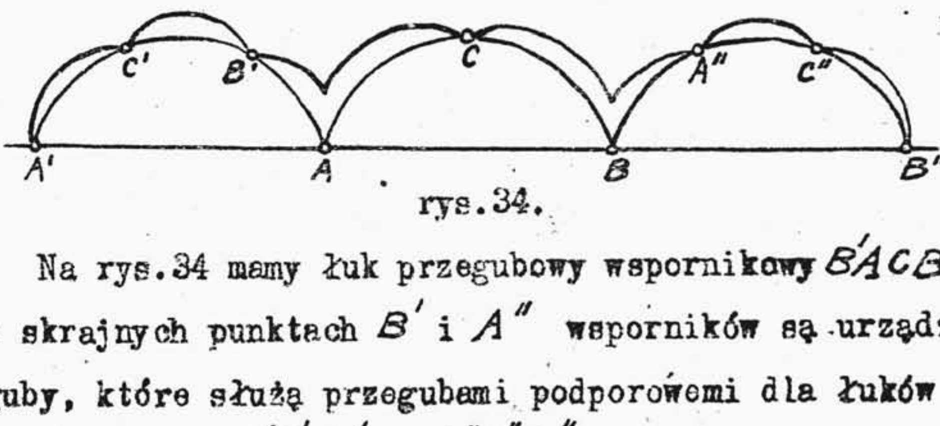
## Układy łuków i belek.

§ 26. Jak widać z § 23 wyznaczenie reakcyj w łuku trójprzegubowym nie zależy od kształtu ciał, tworzących łuk. Ciała te mogą posiadać części $DA$ i $BE$ /rys.33/, wystające poza przeguby podporowe, - które to części nazywamy wspornikami, a taki układ ciał - łukiem trójprzegubowym wspornikowym. Z łuków wspornikowych i belek zwykłych możemy tworzyć układy wieloprzęsłowe, podobnie jak to uczyniono wyżej /§ 24/ zapomocą belek wspornikowych i zwykłych. Na rys.33 pokazany przykład utworzonego w taki sposób mostu trójprzęsłowego. Można tworzyć układy wieloprzęsłowe z sa-



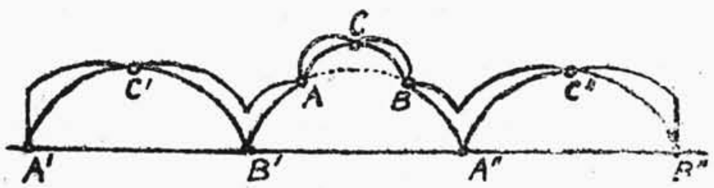

rys.33

mych łuków trójprzegubowych, opierając nowy łuk 3-przegubowy na wspornik i na stałą podporę lub na sąsiednie wsporniki.




rys.34.

Na rys.34 mamy łuk przegubowy wspornikowy $B'ACBA''$, w skrajnych punktach $B'$ i $A''$ wsporników są urządzone przeguby, które służą przegubami podporowemi dla łuków trójprzegubowych $A'C'B'$ i $A''C''B''$. Na rys.35 mamy dwa oddzielne łuki trójprzegubowe wspornikowe $A'C'B'A$ i $BA''C''B''$; punkty $A$ i $B$ są tutaj wykorzystane jako podpory dla trze-




rys. 35.

ciego łuku trójprzegubowego $ACB$. Otrzymaliśmy w ten sposób konstrukcje, stosowane w halach dworców kolejowych przy znacznych rozpiętościach. Obliczenie reakcyj w powyższych układach możemy uskutecznić, stosując metodę oswobodzenia od połączeń t.j. zastępując działanie połączeń przez siły nieznane - reakcje i rozważając każde ciało, wchodzące w skład układu, jak oddzielne ciało swobodne, znajdujące się w równowadze pod działaniem sił bezpośrednio przyłożonych i reakcyj. Możemy więc dla każdego ciała napisać 3 równania równowagi i jeżeli ilość ciał, z których składa się układ, jest „$c$", to ogółem będziemy mieli $3c$ równań. Jak zaznaczyliśmy wyżej równania równowagi są równaniami algebraicznemi 1-go stopnia względem rzutów sił i reakcyj. Ze sposobu tworzenia powyższych układów wypływa, że układy te, podobnie jak i belki wspornikowe, są to układy ciał sztywnych o połączeniach tego rodzaju, że siły bezpośrednio przyłożone nie zmieniają postaci układu, postać równowagi układu jest więc znana. Z tego powodu w równania równowagi wchodzą jako niewiadome tylko rzuty reakcyj, czyli t.zw. reakcje proste; ilość niewiadomych w powyższych $3c$ równaniach równa się więc ilości reakcyj prostych. Z poprzedniego wiemy już, że w układach płaskich reakcja podpory przegubowej nieruchomej /$A$, $B$, $C$ na rys. 33, $A'$, $A$, $B$, $B''$ na rys. 34/ i reakcja przegubu nieruchomego

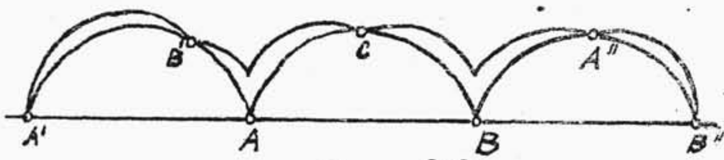
/$D, C$ na rys.33 i $C', B', C, A'', C''$ na rys.34/ wyraża się przez dwie reakcje proste; reakcja zaś podpory ruchomej /$F$ na rys.33/, lub przegubu ruchomego /$E$ na rys.33, $B'$ i $A''$ na rys.37/ jest reakcją prostą. Oznaczywszy więc ilość podpór i przegubów nieruchomych w układzie przez „$p$", ilość zaś podpór i przegubów ruchomych przez „$s$", będziemy mieli następujący wzór na ilość niewiadomych reakcyj prostych w układach: $2p+s$ t.j. taki sam, jak dla belek wspornikowych. Należy zauważyć, że rozpatrzone układy łuków lub belek mają tę wspólną cechę, że stanowią układ ciał, z których każde następne jest połączone z poprzednim tylko jednym przegubem - ruchomym lub nieruchomym, przytem każde ciało może być podparte o układ niezmienny nieruchomy /fundament/ lub też być tylko zawieszone na wspornikach.

Dla możności wyznaczenia reakcyj jest rzeczą konieczną, aby ilość niewiadomych $2p+s$ równała się ilości równań $3c$, t.j. aby był zachowany warunek $2p+s=3c$. Warunek ten jest konieczny, lecz nie dostateczny, konieczna jeszcze, żeby żadne z równań równowagi nie stawało się tożsamością, żeby równania miały rozwiązanie i żeby pierwiastki równań były skończone.

W powyższych przykładach ilość niewiadomych i równań jest następująca:

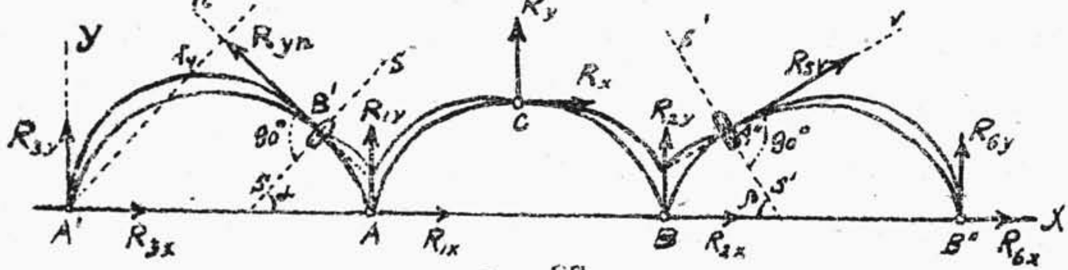
| | $p$ | $s$ | $c$ | $2p+s$ | $C$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Układ na rys.33 | 5 | 2 | 4 | 12 | 12 |
| " " " 34 | 9 | 0 | 6 | 18 | 18 |
| " " " 35 | 9 | 0 | 6 | 18 | 18 |

T.j. w przykładach tych warunek konieczny określoności reakcyj jest zachowany. Przytoczymy przykład, w którym warunek ten nie ma miejsca /rys.36/. Tutaj $p=7$, $s=0$, $c=4$, mamy więc $2p+s=14$, $3c=12$ t.j. $2p+s>3c$, zadanie więc wyznaczenia reakcyj jest tutaj nieokreślone. Widzimy jednak, że




Rys. 36.

przy urządzeniu dodatkowych przegubów $C'$ i $C''$, jak na rys.34, zadanie może się stać określone. Ten sam cel moglibyśmy także osiągnąć, urządziwszy w $B'$ i $A''$ zamiast przegubów nieruchomych przeguby ruchome /§ 22/ o danej linji ślizgania, jak wyobrażone na rys.37. Tutaj $p=5$, $s=2$, $c=4$, więc $2p+s=3c$




rys.37.

Dla wypadków, w których $2p+s=3c$ wyznaczenie reakcyj sprowadza się więc do rozwiązania $3c$ równań 1-go stopnia z $3c$ niewiadomemi. Ponieważ nie wszystkie niewiadome wchodzą odrazu do wszystkich równań, rozwiązanie to można znacznie uprościć, rozwiązując równania w pewnym porządku. Porządek ten jest w każdym oddzielnym wypadku widoczny ze sposobu utworzenia układu. Nasamprzód należy wyznaczyć reakcje dla belek lub łuków 3-przegubowych, podpartych całkowicie lub częściowo na wspornikach, następnie, znając już te reakcje, wyznaczyć reakcje w łukach zasadniczych, mających podpory stałe.

Dla przykładu rozpatrzymy układ na rys.37. Wyznaczymy najpierw reakcje w częściach $A'B'$ i $A''B''$, rozpatrując je jako ciała swobodne. Na część $A'B'$ działają siły bezpośrednio przyłożone $P_1, P_2$ i reakcja $\bar{R}_3$, określająca się przez dwa rzuty $R_{3x}$ i $R_{3y}$, oraz reakcja $R_4$, określająca się przez jeden rzut na oś $B'n$, mianowicie $R_{4n}$. Równania równowagi ciała $A'B'$ na osie $A'xy$ będą:

$$R_{3x} - R_{4n} \cdot \sin\alpha + \sum_{A'}^{B'} P_x = 0$$

$$R_{3y} + R_{4n} \cos\alpha + \sum_{A'}^{B'} P_y = 0$$

$$-R_{4n} \cdot r_4 + \sum_{A'}^{B'} M_{A'}[P] = 0$$

Z równań tych wyznaczymy $R_{3x}$, $R_{3y}$ i $R_4$. Podobnie wyznaczymy dla ciała $A''B''$ rzuty reakcyj $R_{5v}, R_{6x}, R_{6y}$. Następnie przejdziemy do rozpatrzenia równowagi łuku środkowego. Działanie ciała $A'B'$ na punkt $B'$ tego łuku wyraża się siłą $R_4'$ - równą i wprost przeciwną do siły $R_4$ rzuty więc siły $R_4'$ na osie $A'X$ i $A'Y$ będą:

$$R_{4x}' = -R_{4x} = -[-R_{4n}\sin\alpha] = R_{4n}\sin\alpha$$

$$R_{4y}' = -R_{4y} = -[R_{4n}\cos\alpha] = -R_{4n}\cos\alpha$$

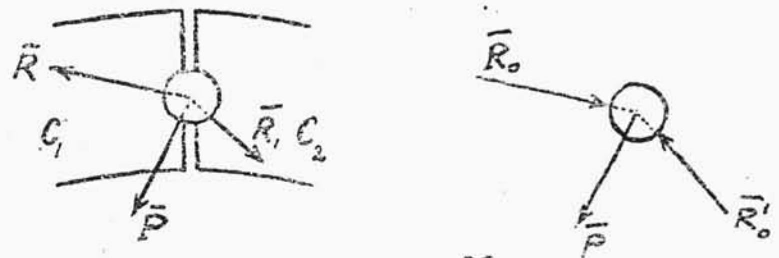
Podobnie działanie ciała $A''B''$ na łuk środkowy w punkcie $A''$ wyraża się przez siłę $R_5'$, równą i wprost przeciwną do siły $R_5$, rzuty więc siły $R_5'$ będą:

$$R_{5x}' = -R_{5x} = -R_{5v}\sin\beta$$

$$R_{5y}' = -R_{5y} = R_{5v}\cos\beta$$

Teraz możemy rozpatrzeć równowagę łuku trójprzegubowego $B'ACBA''$ tak, jak to uczyniono w § 23, przytem siły $R_4'$ i $R_5'$, przyłożone w punktach $B'$ i $A''$ można już rozpatrywać jako siły znane.

27. W powyższych przykładach przypuszczaliśmy, że do przegubów łączących ciała niema przyłożonych żadnych sił /ciężaru samego przegubu wobec innych sił nie uwzględniamy/. Z tego powodu / § 22/ przy połaczeniu przegubem tylko dwuch ciał, na mocy zasady działania i przeciwdziałania reakcje jakie ciała wzajemnie na siebie wywieraj[illegible] są równe i wprost przeciwne: $\overline{R} = -\overline{R}'$. Rozpatrzymy t[illegible]raz wypadek połączenia ciał oddzielnym przegubem, do które[illegible]o jest przyłożona siła $P$, której ignorować nie można /rys.39/. Oznaczając reakcję ze strony przegubu na ciało $C_1$ przez $\overline{R}$, - na ciało $C_2$ - przez $\overline{R'}$, wnioskujemy, że na przegub ze strony ciała $C_1$ działa reakcja $\overline{R}_0 = -\overline{R}$, ze s[illegible]tony cia[illegible] $C_2$



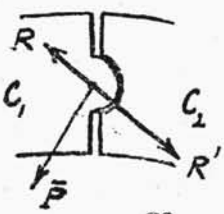

rys. 38.

reakcja $\overline{R'_o} = -\overline{R'}$ . Rozpatrując równowagę samego przegubu, jako ciała swobodnego, widzimy, że przegub ten znajduje się pod działaniem trzech sił $\overline{P}$, $\overline{R_o}$, $\overline{R'_o}$ , przecinających się w jednym punkcie. Równania równowagi przegubu będą:

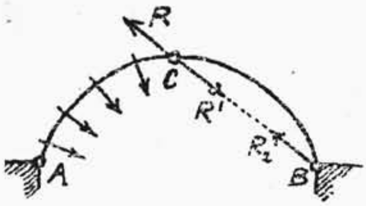
$$P_x + R_{ox} + R'_{ox} = 0 \qquad P_x - R_x - R'_x = 0$$
$$P_y + R_{oy} + R'_{oy} = 0 \qquad P_y - R_y - R'_y = 0$$

czyli
$$R'_x = P_x - R_x$$
$$R'_y = P_y - R_y$$

Gdy przegub stanowi całość z jednym z ciał /rys.39/, mamy tylko dwie reakcje, oczywiście $\overline{R} = -\overline{R'}$ , siłę $\overline{P}$ należy uważać za jedną z sił przyłożonych do ciała $C_1$ . Zwróćmy uwagę jeszcze na pewien szczególny rozkład sił bezpośrednio przyłożonych; mianowicie gdy do jednego z ciał, połączonego z sąsiedniemi ciałami zapomocą przegubów nieruchomych, niema przyłożonej żadnej siły i przytem ciężaru własnego nie uwzględniamy. Rozpatrując to ciało, jako swobodne, widzimy, że znajduje się ono pod działaniem dwuch reakcyj przegubów. Aby równowaga była zachowana, reakcje te powinny być więc równe i wprost przeciwne. Rozpatrując np.




rys. 39.



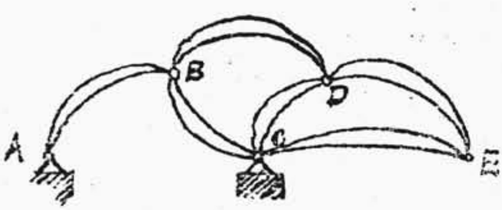

Łuk [illegible] rys.40 [illegible],
[illegible] część $CB$ nie działa żadna siła, wnio-
skujemy, że reakcje na część $CB$: $R'$ i $R_2$
są równe i wprost przeciwne, a więc dzia-
łają wzdłuż prostej $CB$; ponieważ [illegible]

rys.40.

reakcja $R$ części $CB$ na $AC$ jest równa i wprost przeciwna do reakcji $R'$, więc linja działania reakcji $R$ jest także prosta $CB$. W tym wypadku wyznaczenie reakcyj sprowadza się więc tylko do równań równowagi części $AC$, przytem kierunek reakcji $R$ jest znany.

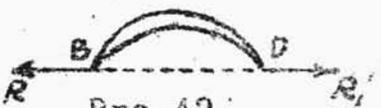
## Dźwigary kratowe.

§ 28. Rozpatrywaliśmy dotąd takie układy ciał, połączonych przegubami, w których każdy przegub łączy tylko dwa ciała. Rozpatrzymy teraz więcej ogólny układ ciał, połączonych przegubami nieruchomemi, mianowicie, gdy w jednym przegubie schodzą się ciała w ilości wogóle większej od dwuch, jak np. układ wyobrażony na rys.41. Przypuśćmy, że podpory i przeguby są rozmieszczone w układzie w ten sposób, że dany układ ciał sztywnych nie może zmienić postaci pod działaniem sił, czyli tworzy układ geometrycznie niezmienny. W celu wyznaczenia reakcyj podpór i połączeń w takim układzie możemy zastosować stosowaną już po-




rys.41.

wyżej metodę. Należy więc mianowicie rozpatrzyć równowagę każdego z ciał $AB$, $BC$,... i każdego przegubu $A$, $B$, $C$,..... , oddzielnie, jako ciała swobodnego znajdującego się w równowadze pod działaniem sił bezpośrednio przyłożonych i reakcyj. Jeżeli na jakiekolwiek z ciał np. $BD$ żadna siła bezpośrednio przyłożona nie działa i przytem ciężar własny pręta wobec innych znacznych sił działających na układ odrzucamy, to rozpatrując ciało takie, jako ciało swobodne widzimy, że znajduje się ono pod działaniem tylko dwóch sił, mian. reakcyj ze strony przegubów $B$ i $D$ /rys.41/, przyłożonych do punktów $B$ i $D$ ciała $BD$.

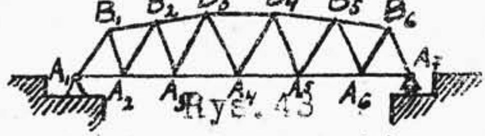


Rys.42

Żeby równowaga była zachowana siły te $R$ i $R_1$ muszą być równe i wprost przeciwne, a więc działają po prostej $BD$. Jest to ten sam wniosek, jaki otrzymaliśmy w końcu § 27. Siły $R$ i $R_1$ mogą posiadać zwroty na zewnątrz od ciała $BD$ jak pokazano na rys.42, lub też przeciwnie ~~na~~wewnątrz.

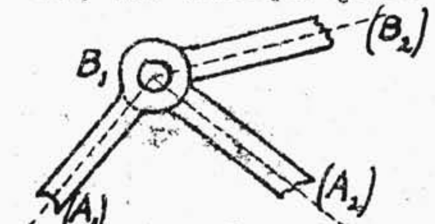
Rozpatrzmy szczególny przypadek opisanego układu przegubowego, mającego zastosowanie jako dźwigary mostów i wiązarów dachowych i innych konstrukcyj, mianowicie geometrycznie niezmienny układ przegubowy, składający się z prętów prostoliniowych /rys.43/

Taki układ będziemy nazywać dźwigarem kratowym.



Rys. 43

Pręty schodzące się w każdym węźle, są połączone przegubem walcowym, jak wyobrażono na rys. 44, na którym jest pokazany węzeł $B$ powyższego dźwigara./x/ Zespół prętów zewnętrznych $A_1, A_2, A_3 \ldots A_7$ znajdujących się między podporami $A_1$ i $A_7$ i ograniczających dźwigar od dołu nazywamy pasem dolnym, zespół prętów zewnętrznych $A_1 B_1 B_2 \ldots A_7$ nazywamy pasem górnym, zespół prętów wewnętrznych $B_1 A_2 B_2 A_3 \ldots\ldots$ nazywamy kratą, przytem pręty ukośne do linji pionowej nazywamy krzyżulcami, pręty pionowe słupkami, lub wieszarami.



Rys. 44

---

Takie konstrukcje przegubowe w Ameryce są stosowane w szerokim zakresie do mostów, w Europie jednak bardzo rzadko. W konstrukcjach europejskich przeważnie łączy się pręty żelazne zapomocą nitów, co czyni węzeł sztywnym. W dalszym ciągu kursu my zajmiemy się także teorją dźwigarów "z węzłami sztywnemi" i pokażemy, że teorja dźwigarów przegubowych daje pierwsze przybliżenie dla dźwigarów z węzłami sztywnemi

W § 15 rys. 12 i 14 zostały podane przykłady zastosowania dźwigara kratowego do mostu i do wiązaru dachowego. Jezdnia w mostach zwykle jest tak konstruowana, że ciężar jej oraz ciężar ruchomy /pociąg, wozy, ludzie/ przenosi się na węzły dźwigarów głównych. Podobnie w konstrukcjach dachowych /rys. 14/ ciężar strzechy, parcie wiatru i śniegu przenosi się zapomocą poprzecznej konstrukcji na węzły dźwigarów głównych. Widzimy więc, że siły zwykle najwięcej znaczne co do wielkości, są przyłożone do węzłów dźwigara i pozostaje jedynie ciężar własny prętów dźwigara, działający na całej długości preta. Jednakże ciężar każdego pręta w porównaniu do powyższych sił, przyłożonych w węzłach jest nieznaczny, z tego powodu uczynimy następujące założenie. Ciężar każdego pręta rozłożymy na sąsiednie węzły dźwigara i będziemy uważali, że pręt jest nieważki. Zobaczymy później, że powyższe założenie ma także podstawę teoretyczną i że do reakcyj obliczonych przy tem założeniu można będzie wprowadzić odpowiednią poprawkę, uwzględniającą rzeczywisty rozkład sił ciężkości.

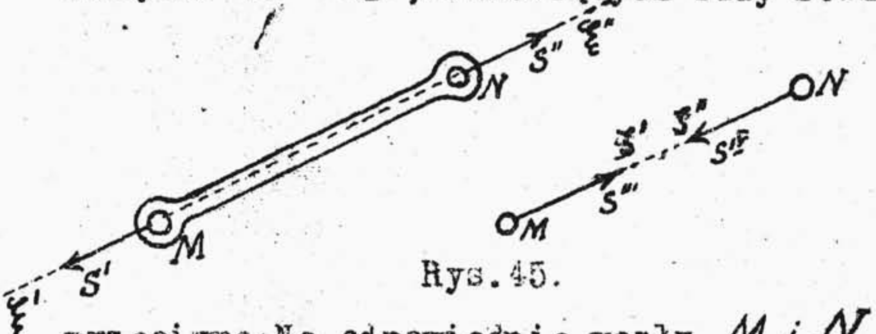
Ponieważ podpory /np. $A_1$ i $A_7$/ urządzamy w węzłach, otrzymamy więc przy powyższem założeniu, że wszystkie siły bezpośrednio przyłożone i reakcje podpór są przyłożone tylko do węzłów.

Widzieliśmy już wyżej, że jeżeli na jakiekolwiek ciało w układzie przegubowym nie działają siły bezpośrednio przyłożone, wówczas ciało to, rozpatrywane jako swobodne, znajduje się pod działaniem dwóch sił: reakcyj przegubów, czyli węzłów. W takich warunkach znajduje się, przy powyższych za[illegible]żeniach co do sił bezpośrednio przyłożonych i [illegible]akcyj podpór, każdy pręt dźwigara kratowego. A[illegible]ęc każdy pręt MN znajduje się pod działaniem pr[illegible]łożonych do końców M i N pręta dwóch sił reakcyj węzłów M i N, działających wzdłuż prostej MN, łączącej środki przegubów M i N. Pręty stanowią bryły walcowe; środki ciężkości przekrojów pręta, normalnych do tworzącej, leżą na prostej, którą nazywamy osią pręta. Dźwigary konstruujemy w ten sposób, że oś pręta przechodzi przez środki przegubów. Widzimy więc, że reakcje, działające na pręt, mają kierunek osi pręta.

Reakcje te będziemy nazywali natężeniami /Termin zaś "naprężenie" pozostawimy dla oznaczenia pojęcia zespołu sił, działających na daną płaszczyznę/ pręta] reakcje te nazywają także "siłami osiowemi".

Z powiedzianego na początku widać, że natężenia prętów możemy wyznaczyć z równań równowagi każdego węzła, rozpatrując węzeł, jako ciało swobodne,znajdujące się pod działaniem sił bezpośrednio przyłożonych i reakcyj prętów;te reakcje są siłami równemi i wprost przeciwnemi do reakcyj węzła na pręt.

Każdy pręt $MN$,rozpatrywany jako ciało swobodne,znajduje się więc /rys.45/pod działaniem dwóch natężeń $S'$ i $S''$,stanowiących siły równe i wprost




Rys.45.

przeciwne.Na odpowiednie węzły $M$ i $N$ działają reakcje $S'''$ i $S^{IV}$,równe i wprost przeciwne do odpowiednich reakcyj $S'$ i $S''$.Reakcje $S'$ i $S''$ mogą być skierowane albo na zewnątrz od pręta,albo wewnątrz pręta, w pierwszym wypadku są to siły rozciągające pręt, w drugim-ściskające.Na rys.45 pokazano kierunek sił $S', S'', S''', S^{IV}$ w pierwszym wypadku, w wypadku drugim, zwroty wszystkich tych sił byłyby przeciwne.Dla możności odróżnienia tych dwóch wypadków wyobraźmy sobie dla każdego pręta osie $M\xi'$ i $N\xi''$ skierowane na zewnątrz od pręta i osie $M\zeta'$ i $N\zeta''$ skierowane nazewnątrz od węzłów w stronę rozważanego pręta.Rzuty sił $S'$, $S''$, $S'''$, $S^{IV}$ na odpowiednie osie $\xi'$, $\xi''$, $\zeta'$, $\zeta''$ będą w obu wypadkach natężeń równe co do wielkości i znaku,mianowicie

$$S'_{\xi_1'} = S''_{\xi_1''} = S'''_{\xi'} = S^{IV}_{\xi''}$$

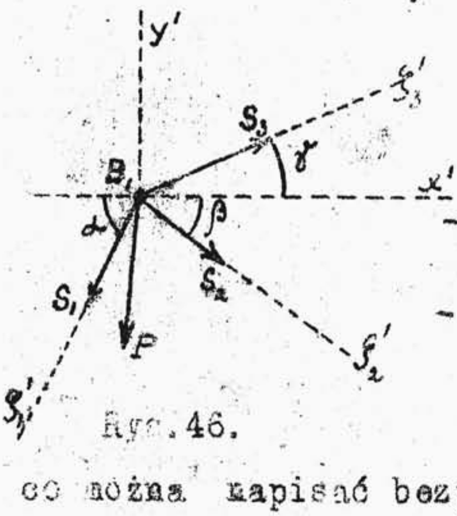
Oznaczmy wspólną wielkość tych rzutów przez jedną literę $S$; wielkość ta jest dodatnia przy natężeniach rozciągających i ujemna przy natężeniach ściskających; samo natężenie jako siła nie posiada znaku i jest wartością bezwzględną $/S/$.

Przy pisaniu równań równowagi węzła przyjmujemy, jak zwykle, że wszystkie rzuty reakcyj są dodatnie, znak rzutu $S$ otrzymany z rozwiązania równań wskaże zwrot natężenia $/S/$, mianowicie $/+/$- rozciąganie $/-/$- ściskanie.

Równania równowagi $\Sigma X = 0$ i $\Sigma Y = 0$ węzła np. $B_1$ będą następujące:

$$S_1\cos(\xi_1',x) + S_2\cos(\xi_2',x) + S_3\cos(\xi_3',x) + P_x = 0$$

$$S_1\cos(\xi_1',y) + S_2\cos(\xi_2',y) + S_3\cos(\xi_3',y) + P_y = 0.$$




Ryc. 46.

czyli, ponieważ

$$(\xi,x) = 180^\circ - \alpha,\ (\xi,y) = 90^\circ - \alpha, \ldots$$

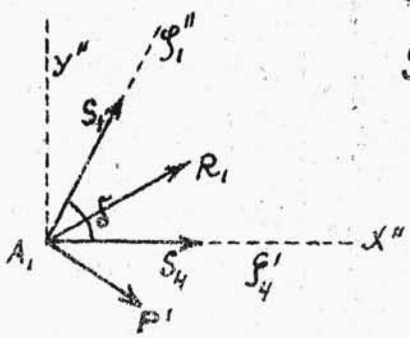
$$\left.\begin{aligned} -S_1\cos\alpha + S_2\cos\beta + S_3\cos\gamma + P_x &= 0 \\ -S_1\sin\alpha - S_2\sin\beta + S_3\sin\gamma + P_y &= 0 \end{aligned}\right\} -(1)$$

co można napisać bezpośrednio na podstawie określenia rzutu / §5 /.

Dla każdego węzła będziemy mieli tylko dwa podobne równania, gdyż w każdym węźle wszystkie siły przecinają się w jednym punkcie, równanie momentów jest więc tożsamością /§9/.

Pisząc równanie równowagi dla węzła podporowego do powyższych sił należy oczywiście dołączyć reakcje podpory, gdyż węzeł ten możemy rozważać, jako ciało swobodne, po zastąpieniu działania połączeń, a więc także i podpory, reakcjami. Równania równowagi np. węzła $A_1$ /rys.47/ będą następujące:

$$\left.\begin{array}{l} S_1\cos\delta + S_4 + R_{1x} + P'_x = 0 \\ S_1\sin\delta + R_{1y} + P'_y = 0 \end{array}\right\} \ldots\ldots (2)$$

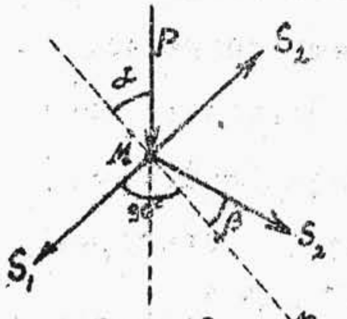



Rys.47.

Jak widać z równań /1/ i /2/ do napisania ich niema potrzeby wprowadzać każdy raz osi $\xi$, wystarczy wszystkim reakcjom $S$, przyłożonym do węzła nadać zwroty nazewnątrz od węzła – każdej w stronę właściwego pręta, otrzymamy te same równania i z tem samem znaczeniem wielkości $S$, gdyż kąty $/\xi, x/$, $/\xi y/$, lub wogóle $/\xi, n/$ będą te same, co kąty, $/S,x/$, $/S,y/$, $/S,n/$.

Równania /1/ i /2/ są to równania rzutów na osie spółrzędnych $Oxy$/ gdyż $B_1x'//Ox$, $B_1y'//Oy$, $A_1x''//Ox$, $A_1y''//Oy$/. Oczywiście, znaczenie równań równowagi nie zależy od kierunku osi, przeto możemy napisać równania równowagi dla dowolnego węzła i na inne osie, czasem i nieprostokątne; osie te dobieramy tak, żeby wyrugować z równania możliwie więcej niewiadomych, np./rys.48/ dla węzła $M$, w którym $S_1$ i $S_2$ działają wzdłuż tej samej prostej, najdogodniej za jedną oś przyjąć oś $Mn \perp S_1$, przytem otrzymamy równanie: $S_2 \cos\beta + P\cos\alpha = 0$, skąd

$$S_2 = -P\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}.$$



Rys.48.

§29. Z powyższego widać, że równań równowagi, wyrażającemi związki między siłami $P$, $R$ i $S$ mamy $2n$, gdzie $n$ - ilość węzłów. Oznaczywszy ilość reakcyj prostych podpór przez "$a$", ilość prętów t.j. i ilość niewiadomych natężeń przez "$b$", mamy ogólną ilość niewiadomych $a+b$. Równania równowagi są względem tych niewiadomych równaniami algebraicznemi 1-go stopnia. Ponieważ dźwigar jako całość stanowi układ niezmienny, który rozważany, jako ciało swobodne, znajduje się w równowadze pod działaniem sił bezpośrednio przyłożonych i reakcyj podpór, siły te więc zadośćczynią także trzem równaniom równowagi dźwigara, jako całości. Jednakże te trzy równania będą tylko skutkiem $2n$ równań, zestawionych dla każdego węzła, gdyż, jeżeli każdy pręt i każdy węzeł oddzielnie są w równowadze, to i cały dźwigar będzie w równowadze. Można tego dowieść także w sposób następujący. Oznaczmy ... rzędne węzła "$i$" w osiach $Oxy$ przez $x_i, y_i$, sumę rzutów sił, przyłożonych do tego węzła, ewentualnie więc włącznie z reakcjami podpór, przez $\overline{X}_i, \overline{Y}_i$; mamy następujące równania równowagi węzła "$i$".

$$\sum_i' S\cos(S,x) + \overline{X}_i = 0, \quad \sum' S\cos(S,y) + \overline{Y}_i = 0 \ldots\ldots(3),$$

w którym znak $\sum_i'$ oznacza, że sumowanie dotyczy wszystkich reakcyj $S$ działających na dany węzeł "$i$". Dodajmy do siebie odpowiednio równania /3 /, napisane dla wszystkich węzłów, otrzymamy

$$\sum\sum_i' S\cos(S,x) + \sum\overline{X}_i = 0 \ldots\ldots(4)$$

$$\sum\sum_i' S\cos(S,y) + \sum\overline{Y}_i = 0 \ldots\ldots(5),$$

gdzie znak $\sum$ oznacza, że sumowanie jest rozciągnięte na wszystkie węzły. Ponieważ każdej reakcji $S$, przyłożonej do pewnego węzła $M$ odpowiada reakcja równa i wprost przeciwna, przyłożona do węzła $N$, połączonego z $M$ prętem $MN$, przeto w równaniach /4/ i /5/ sumy pierwsze równają się zeru i równania przybiorą postać

$$\sum\overline{X}_i = 0, \quad \sum\overline{Y}_i = 0 \ldots\ldots(6)$$

Aby otrzymać równanie momentów względem punktu $O$, przy rozkładzie osi, jak np. na rys.9 /§9/ mnożymy pierwsze z równań /3/ przez $y_i$, drugie $x_i$ i odejmujemy od siebie, otrzymujemy

$$y_i\sum_i' S\cos(S,x) - x_i\sum_i' S\cos(S,y) + y_i\overline{X}_i - x_i\overline{Y}_i = 0$$

czyli $\sum_i' M_o(S) + y_i\overline{X}_i - x_i\overline{Y}_i = 0$

Dodając do siebie równania takie, napisane dla wszystkich węzłów, otrzymamy

$$\sum \sum_i' M_o(S) + \sum (y_i X_i - x_i Y_i) = 0 \ldots\ldots (7)$$

czyli, ponieważ pierwsza suma na mocy powiedzianego wyżej równa się zeru,

$$\sum (y_i X_i - x_i Y_i) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

Jest to równanie momentów, wyrażające, że suma momentów względem punktu $O$ wszystkich sił $P$, bezpośrednio przyłożonych do dźwigara i sił reakcyj podpór równa się zeru; równania /6/ wyrażają, że suma rzutów tych na osie $Ox$ i $Oy$ równa się zeru; równania więc /6/ i /8/ są równaniami równowagi dźwigara, jako całości i jak widać są skutkiem algebraicznym $2n$ równań równowagi węzłów.

Mamy więc $2n$ równań algebraicznych 1-go stopnia względem niewiadomych $S$ i $R$ o ilości $a+b$, zagadnienie więc jest określone, jeżeli $a+b=2n$ i. jeżeli równania mają rozwiązanie i posiadają pierwiastki skończone. Jeżeli $a+b>2n$ zagadnienie jest nieokreślone, wypadkiem $a+b<2n$ zajmiemy się później.

§30 /. Równania równowagi węzłów stanowią układ $2n$ równań algebraicznych 1-go stopnia względem $(a+b)$ niewiadomych reakcyj podpór i natężeń prętów. Niewiadome nie wchodzą odrazu we wszystkie równania, lecz tylko w niektóre; prócz tego dla reakcyj pod