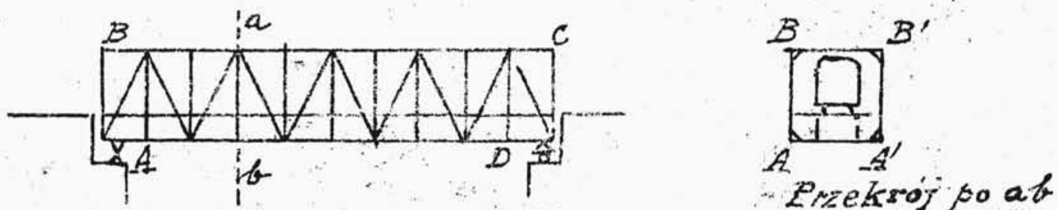
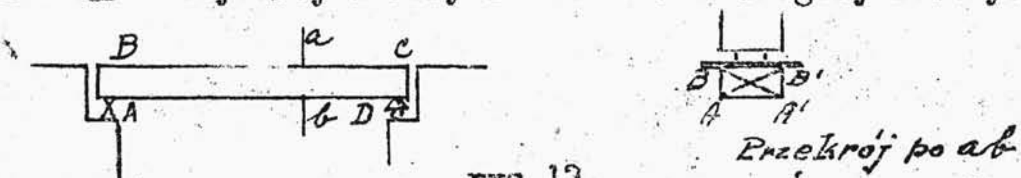
Układy płaskie.

§ 15. W zastosowaniach często spotykamy ciała, na które działają siły, znajdujące się w jednej płaszczyźnie. Przęsła mostu kolejowego z jezdnią dolną /rys.12/ lub z jezdnią górną /rys.13/ składają się z dwóch płaskich dźwigarów głównych:



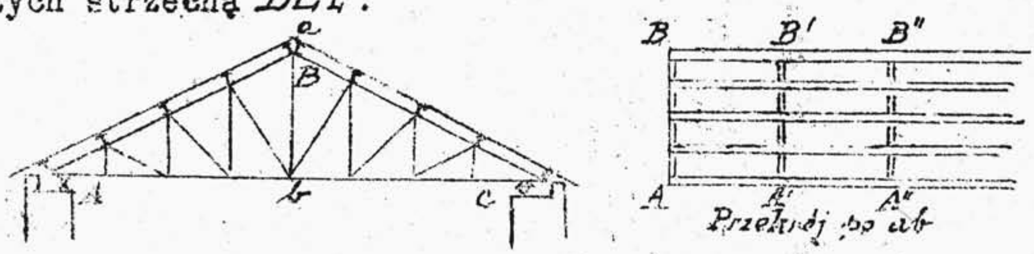
rys.12.

$ABCD$ z jednej strony i $A'B'C'D'$ z drugiej strony.



rys.13.

Wiązary dachowe /rys.14/ składają się z oddzielnych płaskich dźwigarów głównych ABC, $A'B'C'$, ... przykrytych strzechą DEF.



rys.14.

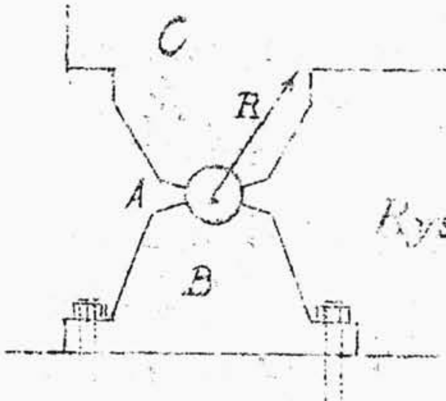
Przęsła mostów szosowych z jezdnią górną składają się z kilku płaskich dźwigarów głównych. Dla stateczności dźwigary główne w mostach i wiązarach dachowych są połączone tężnikami w kierunku poprzecznym. Siły pionowe od obciążenia ruchomego w mostach oddają się przez ustrój jezdni na dźwigary główne w postaci sił pionowych, znajdujących się w płaszczyźnie dźwigara. W wiązarach dachowych ciężar strzechy, obciążenie strzechy śniegiem lub ciśnieniem wiatru oddaje się przez ustrój strzechy na dźwigary główne w postaci układu sił, znajdujących się w płaszczyźnie dźwigara. W powyższych konstrukcjach możemy więc dźwigary główne rozważać, jako układy płaskie. Później się przekonamy, że takie rozważanie jest tylko przybliżeniem, jednakże w praktyce często dostatecznem.

Podpory w układach płaskich i reakcje tych podpór.

§ 16. W układach płaskich siły bezpośrednio przyłożone do układu znajdują się w jednej płaszczyźnie. W układach takich podporę, tworzącą powierzchnię nieruchomą, o którą opiera się jeden punkt ciała, urządzamy tak, że powierzchnia ta jest walcem, którego tworzące są prostopadłe do płaszczyzny sił. Przecięcie tego walca z płaszczyzną sił jest linją, do której reakcja powierzchni jest prostopadłą. Reakcja ta znajduje się więc także w płaszczyźnie sił. Jak widać w danym wypadku podpora, stanowiąca powierzchnię nieruchomą, nie różni się od podpory, stanowiącej linję nieruchomą. Reakcja podpory tworzącej punkt nieruchomy jest siłą R , która ogólnie określa się przez trzy rzuty R_x, R_y, R_z, na trzy osie Ox, Oy, Oz. W danym jednak wypadku układu płaskiego reakcja punktu nieruchomego będzie znajdować się także w płaszczyźnie sił i z tego powodu będzie się określać tylko przez dwa rzuty, np. na osie Ox, Oy, umieszczone w płaszczyźnie sił. Że reakcja R punktu nieruchomego znajduje się w płaszczyźnie sił bezpośrednio przyłożonych jest widoczne z następującego rozumowania. Reakcje są to siły bierne, które same nie występują, lecz są wywołane przez działanie sił bezpośrednio przyłożonych. Reakcje zastępują działanie podpór i równoważą się z siłami bezpośrednio przyłożonemi. W danym wypadku siły bezpośrednio przyłożone znajdują się w jednej płaszczyźnie i mogą być zrównoważone przez układ sił reakcyj, znajdujących się także w płaszczyźnie. Z tego powodu reakcja punktu nieruchomego w układzie płaskim wyznacza się przez dwa rzuty.

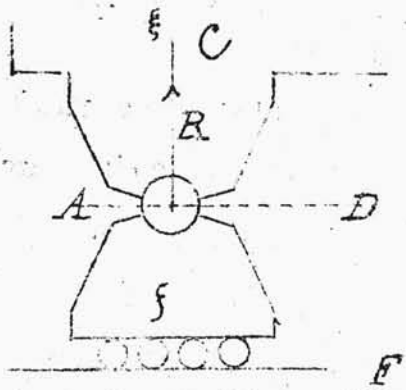
Urzeczywistnienie w układach płaskich podpór, wskazanych w § 11 może być uskutecznione w sposób następujący:

Punkt nieruchomy może być urzeczywistniony zapomocą przegubu walcowego /rys.15/, symetrycznego względem płaszczyzny sił. Ciało C opiera się na przegub walcowy, który spoczywa na nieruchomem łożysku B. Ponieważ uważamy, że między powierzchnią przegubu i powierzchnią ciała tarcia niema, wszystkie więc ciśnienia ze strony ciała na przegub będą normalne do powierzchni walca, t.j. będą przechodzić



Rys. 15

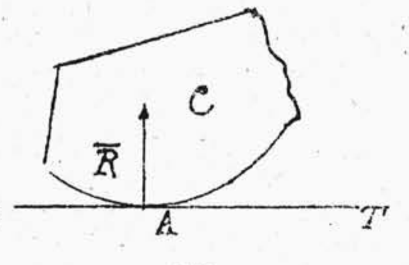
przez oś przegubu. Wypadkowa tych ciśnień czyli parcie ciała na podporę przechodzi przez oś przegubu i znajduje się w płaszczyźnie sił, przyłożonych bezpośrednio do układu. Siła równa i wprost przeciwna do parcia jest reakcją podpory. Reakcja ta, którą oznaczymy przez R, określa się przez 2 rzuty, np. R_x i R_y na osie spółrzędnych Ox i Oy, lub wogóle na dwie osie dowolne. Urzeczywistnienie w takich układach płaskich podpory w postaci powierzchni nieruchomej lub linji nieruchomej, po których mógłby się poruszać pewien punkt ciała, osiągamy zapomocą jednakowej konstrukcji. Mianowicie /rys.16/, gdy linją nieruchomą jest prosta AD, podpieramy ciało C przegubem walcowym A, który spoczywa na łożysku. Łożysko to leży na wałkach, znajdujących się na płaszczyźnie, której ślad EF jest równoległy do AD. Środek przegubu A może się więc poruszać po linji AD, równoległej do EF, lub po powierzchni /płaszczyźnie/ prostopadłej do płaszczyzny sił /płaszczyzna rysunku/ i przecinającej się z tą powierzchnią po prostej AD.



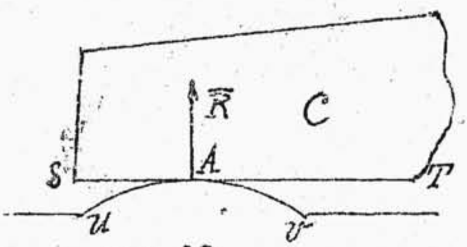
Rys. 16.

Reakcja $\overline{R}$ tej powierzchni, lub inaczej linji, jest prostopadła do AD i wyznacza się przez jeden rzut R_ξ na oś A_ξ, lub R_ζ na oś A_ζ.

Rozważana podpora może być urzeczywistniona zapomocą znacznie prostszej konstrukcji, mianowicie /rys.17/ zapomocą prostego dotyku punktu A ciała C o płaszczyznę



rys.17



rys.18

Ponieważ jednak w rzeczywistości mamy do czynienia z ciałami chropawemi, konstrukcje, uwidocznione na rys.17 i 18 posiadają tę wadę, że występuje tutaj tarcie większe, niż przy użyciu konstrukcji podług rys.16.

Ograniczymy się narazie powyższem rozpatrzeniem rodzajów podpór, odkładając opis innych rodzajów podpór do miejsc właściwych kursuw.

Równanie równowagi ciała nieswobodnego, stanowiącego układ płaski.

§ 17. Rozpatrzymy ciało nieswobodne, na które działają siły bezpośrednio przyłożone: $\overline{P}_1, \overline{P}_2, \ldots, \overline{P}_n$, znajdujące się w jednej płaszczyźnie Q, w tej samej płaszczyźnie znajdują się wszystkie reakcje podpór: $\overline{R}_1, \overline{R}_2, \ldots \overline{R}_m$, zastępujące działanie tych podpór. Zastąpiwszy działanie podpór reakcjami, możemy na ciało zapatrywać się, jako na swobodne, znajdujące się w równowadze pod działaniem układów sił (P) i (R), leżących w jednej płaszczyźnie. Warunki równowagi /§ 7/ są następujące:

$$\Sigma\overline{P} + \Sigma\overline{R} = 0 \;; \quad \Sigma\overline{M}(\overline{P}) + \Sigma\overline{M}(\overline{R}) = 0$$

Pierwszy warunek wyraża, że suma geometryczna wszystkich sił, bezpośrednio przyłożonych do ciała i reakcyj równa się zeru, drugi warunek wyraża, że suma geometryczna momentów tych sił względem dowolnego punktu O /obieramy go w płaszczyźnie sił/ równa się zeru. Obierając osi spółrzędnych Oxy w płaszczyźnie sił, pierwszy warunek możemy zastąpić przez dwa równania algebraiczne rzutów sił na osie spółrzędnych:

$$\Sigma X + \Sigma R_x = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots /a/$$

$$\Sigma Y + \Sigma R_y = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots /b/$$

Jak wyjaśniliśmy w § 9 drugi warunek równowagi jest równoznaczny z jednem równaniem algebraicznem, mianowicie:

$$\Sigma M(\overline{P}) + \Sigma M(\overline{R}) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots /c/$$

które to równanie wyraża, że suma <u>algebraiczna</u> momentów wszystkich sił bezpośrednio przyłożonych do ciała i reakcyj względem dowolnego punktu O w płaszczyźnie sił równa się zeru. Pod momentem siły względem punktu O rozumiemy tutaj pojęcie algebraiczne, zdefinjowane w § 9, mianowicie momentem siły $\bar{P}$ względem punktu O nazywamy iloczyn $\pm Pr$ siły P przez odległość /ramię/ r od punktu O do linji działania siły, wzięty ze znakiem /+/, gdy siła względem punktu O idzie z lewej strony na prawą /w kierunku ruchu wskazówki zegara/ i ze znakiem /—/ w odwrotnym wypadku.

Zamiast powyższych trzech równań równowagi często bywa dogodniej równania /a/ i /b/ zastąpić przez równania momentów /§ 9/ względem innych punktów O_1 i O_2, nie leżących na jednej prostej z punktem O, mianowicie:

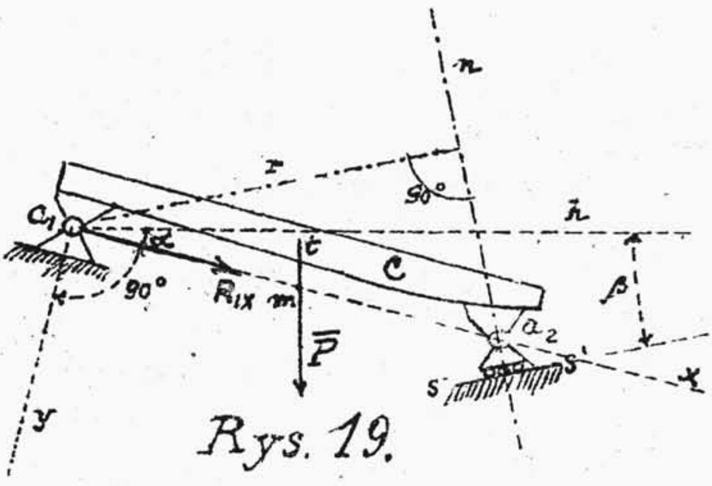
$$\Sigma M'(\bar{P}) + \Sigma M'(\bar{R}) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots /d/$$

$$\Sigma M''(\bar{P}) + \Sigma M''(\bar{R}) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots /e/$$

Można także użyć jedno z równań /a/ lub /b/ i dwa z równań /c/, /d/, /e/. W każdym razie zawsze mamy tylko trzy niezależne od siebie równania równowagi, które służą jako środek do wyznaczania reakcyj podpór, a jeżeli ciało nie jest nieruchome, to i położenia równowagi ciała.

Ciało podparte w dwuch punktach.

§ 18. Ciało C /rys. 19/, do którego jest przyłożona bezpośrednio jedna siła pionowa $\bar{P}$, spoczywa na dwuch podporach przegubowych: nieruchomej a_1 i ruchomej a_2; chcemy znaleźć reakcje tych podpór.



Rys. 19.

Wielkości $a_1a_2 = l$, $a_1m = l/2$ uważamy za wiadome, tak samo - kąt α między prostą a_1a_2 i linją poziomą a_1h, oraz kąt β między linją ślizgania się podpory a_2 i linją poziomą a_1h.

Przy danych podporach i sile $\bar{P}$ ciało C jest nieruchome, t.j. położenie równowagi jest już znane, pozostaje wyznaczyć reakcje podpór. Reakcja $\bar{R}_1$ podpory a_1, jako punktu nieruchomego przechodzi przez punkt a_1, lecz wielkość siły, kierunek i zwrot jej są niewiadome, reakcja przeto $\bar{R}_1$ będzie wyznaczona, jeżeli znajdziemy dwa rzuty: R_{1x} i R_{2x} tej siły na dowolnie wybrane osie np. a_1x i a_1y. Reakcja $\bar{R}_2$ podpory a_2, jako punktu, mogącego się poruszać po prostej równoległej do ss', jest siłą prostopadłą do prostej ss', nieznana jest tylko wielkość i zwrot siły. Siła ta będzie wyznaczona, jeżeli znajdziemy jej rzut R_{2n} na oś a_2n prostopadłą do ss', t.j. oś pokrywającą się z linją działania tej siły. Dodatni kierunek osi przyjmiemy od a_2

do n , rzut więc dodatni R_{2n} będzie wskazywać, że siła $\bar{R}_2$ ma kierunek od a_2 do n , - ujemny, że siła ma kierunek przeciwny. Działanie podpór a_1 i a_2 może być zastąpione przez siły $\bar{R}_1$ i $\bar{R}_2$, możemy więc ciało C uważać za swobodne i znajdujące się w równowadze pod działaniem sił: $\bar{P}, \bar{R}_1, \bar{R}_2$. Trzy równania równowagi, wyrażające, że suma rzutów wszystkich sił na osie a_1x i a_2y równa się zeru i że suma algebraiczna momentów wszystkich sił względem np. punktu a_1 równa się zeru, będą następujące:

$$R_{1x} + R_{2n}\cos(a_2n, a_1x) + P\cos(\widehat{\bar{P}x}) = 0 \quad \ldots\ldots /a/$$

$$R_{1y} + R_{2n}\cos(a_2n, a_1y) + P\cos(\bar{P}y) = 0 \quad \ldots\ldots /b/$$

$$-R_{2n}\cdot r + P.a_1t = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots /c/$$

Mamy $(\widehat{a_2n, a_1x}) = 90° + \alpha + \beta$; $(\widehat{\bar{P}_1x}) = 90° - \alpha$; $(\bar{P}, y) = \alpha$; $(a_2n, a_1y) = 180° + \alpha + \beta$; $r = l\cos(\alpha+\beta)$; $a_1t = \frac{l}{2}\cos\alpha$;

równania więc /a/, /b/, /c/ przyjmą postać:

$$R_{1x} - R_{2n}\sin(\alpha+\beta) + P\sin\alpha = 0 \quad \ldots\ldots\ldots /a'/$$

$$R_{1y} - R_{2n}\cos(\alpha+\beta) + P\cos\alpha = 0 \quad \ldots\ldots\ldots /b'/$$

$$-R_{2n}\cdot l\cos(\alpha+\beta) + P\cdot\frac{1}{2}l\cos\alpha = 0 \quad \ldots\ldots\ldots /c'/$$

Z równania /c'/ otrzymamy:

$$R_{2n} = \frac{\cos\alpha}{2\cos(\alpha+\beta)}\cdot P \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots /e/$$

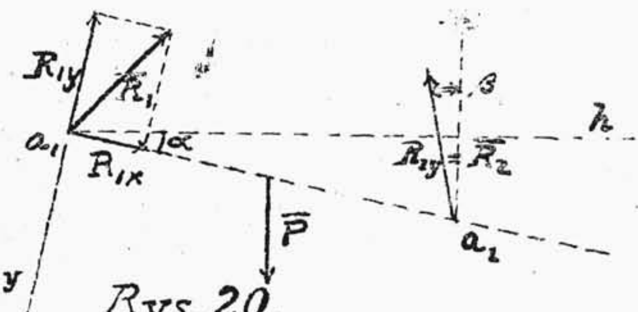
następnie z /a'/, a potem z /b'/

$$R_{1x} = \left[\frac{1}{2}\cos\alpha\, tg(\alpha+\beta) - \sin\alpha\right]P \quad \ldots\ldots\ldots\ldots /f/$$

$$R_{1y} = -\frac{1}{2}\cos\alpha . P \quad \ldots\ldots\ldots\ldots /g/$$

Znak dodatni R_{2n} oznacza, że rzut R_{2n} czyli siła $\overline{R}_2$ ma kierunek od a_2 do n, znak dodatni R_{1x} - że rzut R_{1x} ma kierunek od a_1 do x, znak ujemny R_{1y} - że rzut R_{1y} ma kierunek od a_1 w stronę ujemnej osi y. Kierunki rzutów reakcyj i same reakcje będą więc, jak na rys.20. Wielkość reakcji R_1 wyznaczymy z wzoru

$$R_1=\sqrt{R_{1x}^2+R_{1y}^2}$$



Rys. 20.

W wypadku szczególnym, gdy $\alpha=\beta=0$, z wzorów /e/, /f/, /g/ otrzymamy:

$$R_{2n}=\frac{1}{2}P;\ R_{1x}=0;\ R_{1y}=-\frac{1}{2}P$$

Oś a_2n jest w tym wypadku równoległa do osi a_1y, lecz ma kierunek przeciwny, wobec tego $R_{2y}=-R_{2n}=-\frac{1}{2}P$

W wypadku ogólniejszym, gdy na ciało C działa n sił $\overline{P}_1, \overline{P}_2, \ldots, \overline{P}_n$, należy przedewszystkiem z danych warunków geometrycznych obliczyć rzuty tych sił na przyjęte osie spółrzędnych: $X_1, Y_1; X_2, Y_2; \ldots\ldots$ oraz rzędne: $x_1 y_1; x_2 y_2; \ldots\ldots\ldots$ punktów zaczepienia sił.

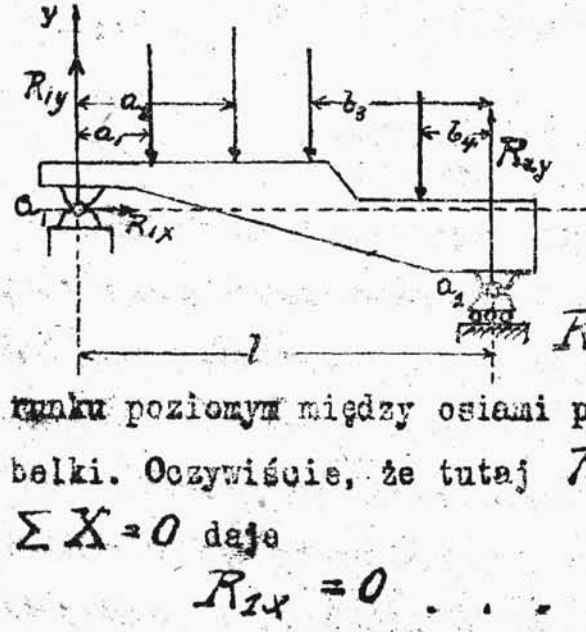
Następnie należy napisać równania równowagi, analogiczne do /a/, /b/, /c/, mianowicie

$$R_{1x} - R_{2n}\sin(\alpha+\beta) + \sum X_i = 0$$
$$R_{1y} - R_{2n}\cos(\alpha+\beta) + \sum Y_i = 0$$
$$- R_{2n}l\cos(\alpha+\beta) + \sum(x_i Y_i - y_i X_i) = 0$$

i z równań tych obliczyć R_{1x}, R_{1y}, R_{2n}

Belka zwykła.

19. W praktyce spotykamy najczęściej wypadek, gdy linja ślizgania się podpory ruchomej jest pozioma, a siły $\overline{P}_1, \overline{P}_2 \ldots, \overline{P}_n$ są siłami ciężkości, są więc pionowe.



Rys21.

Ciało C, przy takiem położeniu podpór, nazywamy belką, leżącą swobodnie na 2-ch podporach /rys.21/. Odległość l w kierunku poziomym między osiami podpór nazywamy rozpiętością belki. Oczywiście, że tutaj $R_{1x} = 0$, gdyż równanie $\sum X = 0$ daje

$$R_{1x} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots /a/$$

Reakcje $\overline{R}_1$ i $\overline{R}_2$ są więc pionowe i rzuty ich R_{1y} i R_{2y} wyznaczają się z 2-ch pozostałych równań równowagi $\sum Y = 0$ i $\sum M_{a_1} = 0$:

$$R_{1y} + R_{2y} - \sum P_i = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots /b/$$
$$-R_{2y}.l + \sum P_i.a_i = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots /c/$$

Mianowicie $R_{2y} = +\frac{1}{l}\sum P_i a_i$

$$R_{1y} = +\sum P_i - R_{2y} = +\sum P_i - \frac{1}{l}\sum P_i a_i =$$

$$= \sum P_i \left(1-\frac{a_i}{l}\right) = \sum P_i \frac{l-a_i}{l} = \sum P_i \frac{b_i}{l}$$

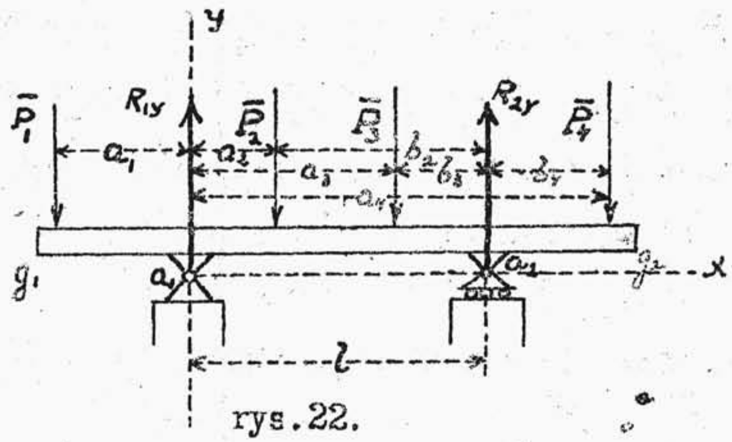
Wyrażenie to otrzymamy bezpośrednio, gdy zamiast równania /b/ zastosujemy równanie $\sum M_{a_2} = 0$, mianowicie

$$+R_{1y} l - \sum P_i b_i = 0$$

Zauważmy, że w danym wypadku rzuty R_{1y} i R_{2y} reakcyj $\overline{R_1}$ i $\overline{R_2}$ otrzymaliśmy dodatnie, co znaczy, że reakcje mają ten sam zwrot, co oś $a_1 y$, a więc działają do góry. Gdybyśmy oś $a_1 y$ skierowali na dół, to otrzymalibyśmy rzuty R_{1y} i R_{2y} ujemne.

Belka wspornikowa.

§ 20. Rozpatrzmy teraz równowagę belki z końcami zwieszającemi się /rys.22/. Belka taka nazywa się wspornikową, końce $g_1 a_1$ i $g_2 a_2$ nazywają się wspornikami. Wobec przyłożenia do belki tylko sił pionowych z równania $\sum X = 0$ okazuje się, że rzut R_{1x} reakcji $\overline{R_1}$ równa się zeru. Rzuty pionowe R_{1y} i R_{2y} reakcyj $\overline{R_1}$ i $\overline{R_2}$ wyznaczamy jak wyżej z równań $\sum Y = 0$ i $\sum M_1 = 0$ /suma momentów względem punktu a_1/. Zamiast równania $\sum Y = 0$ dogodniej użyć równanie momentów względem punktu a_2, t.j. $\sum M_2 = 0$. W każdem z równań momentów będzie tylko po jednem niewiadomem, mianowicie:



rys.22.

$$-R_{2y}.l - P_1a_1 + P_2a_2 + P_3a_3 + P_4a_4 = 0$$

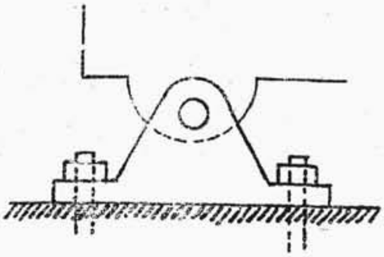
$$R_{1y}l - P_1b_1 - P_2b_2 - P_3b_3 + P_4b_4 = 0$$

Skąd

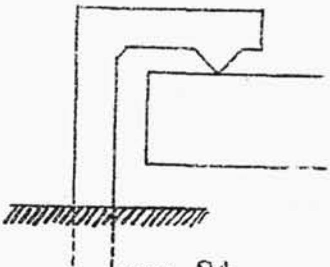
$$R_{1y} = \frac{1}{l}(P_1b_1 + P_2b_2 + P_3b_3 - P_4b_4)$$

$$R_{2y} = \frac{1}{l}(-P_1a_1 + P_2a_2 + P_3a_3 + P_4a_4)$$

Ponieważ w część prawą wzorów wchodzą wielkości dodatnie i ujemne, rzuty R_{1y} i R_{2y} mogą być dodatnie i ujemne. Jeżeli rzuty te są dodatnie, to reakcje $\bar{R}_1$ i $\bar{R}_2$ są skierowane do góry, parcia zaś belki na podpory $\bar{D}_1 = -\bar{R}_1$, $\bar{D}_2 = -\bar{R}_2$ są skierowane na dół. Podpory o konstrukcji, wskazanej na rys.15 i 16 są dostateczne do unicestwienia takich parć. W wypadku, gdy który z rzutów R_{1y} lub R_{2y} jest ujemny, to odpowiednia reakcja $\bar{R}$ jest skierowana na dół, parcie zaś belki na podporę $\bar{D}$ - do góry. Konstrukcja podpór opisanych w § 16 jest wtedy niedostateczna; dla unicestwienia parć o kierunku do góry należy zastosować podporę nieruchomą o konstrukcji, wskazanej np. na rys. 23 , a podporę ruchomą - o konstrukcji, wskazanej na rys. 24.



rys.23.



rys.24.

W wypadku, gdy belka podlega działaniu różnych ciężarów, przy których reakcje podpór mogą być skierowane to na dół, to do góry, należy w konstrukcji podpory, mającej wywierać takie reakcje, połączyć powyższe elementy konstrukcyjne.

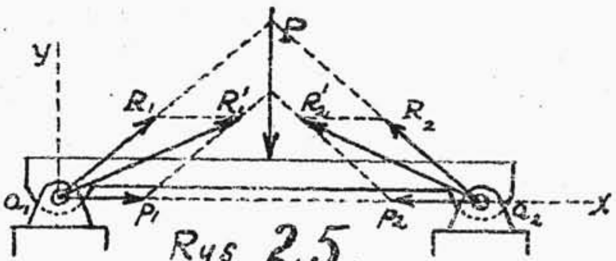
§ 21. W powyższych przykładach rozważaliśmy podpory tego rodzaju, że nie dawały one możności wykonania przez ciało jakiegokolwiek ruchu, czyli powodowały zupełną nieruchomość ciała. Podane konstrukcje podpór nie osiągają wprawdzie tego celu przy wszelkich działających na ciało siłach, lecz tylko przy pewnym kierunku tych sił. W praktyce zawsze znamy kierunek działających na budowlę sił, przeto przez wskazane konstrukcje podpór urzeczywistniamy pożądany cel, mianowicie osiągamy nieruchomość ciała przy danych siłach.

Zagadnienie statyczne, dotyczące takich ciał, polega na wyznaczeniu reakcyj podpór. Znajomość tych sił jest potrzebna przy konstruowaniu budowli, gdyż znając je, możemy podług zasad Wytrzymałości Materjałów obliczyć wytrzymałość ciała i podpory w miejscach zetknięcia oraz siły wewnętrzne w innych miejscach ciała lub podpory.

Jak wiadomo ze Statyki Teoretycznej ~~zagadnienia~~ zagadnienia statyczne polegają na wyznaczeniu położenia równowagi ciała lub układu ciał przy danych siłach i obliczeniu reakcyj połączeń. Ponieważ w budowlach podpory i wogóle połączenia są urządzone przeważnie tak, że ciała wchodzące w skład budowli nie mogą zmienić swego położenia, które przez to jest już położeniem równowagi, będziemy mieli przeważnie do wyznaczenia tylko reakcje połączeń. Nie mniej jednak spotkamy się z zagadnieniami, mającemi zastosowania w budowlach, gdzie będzie należało określić także i położenie równowagi ciał.

Wyznaczenie reakcyj ciała nieswobodnego z podporami, które uniemożliwiają zmianę położenia ciała, przy danych siłach bezpośrednio przyłożonych, sprowadza się do rozwiązania równań równowagi. Warunki równowagi ciała sztywnego dają nam przy układzie przestrzennym 6 równań równowagi, przy układzie płaskim - 3 równania. Równania te względem niewiadomych reakcyj, ściślej reakcyj prostych /§. 11/, są równaniami algebraicznemi pierwszego stopnia. Aby to wyznaczenie było możliwe, przedewszystkiem jest rzeczą konieczną, żeby ilość reakcyj prostych była nie większa od $a = 6$ w układzie przestrzennym i od $a = 3$ w układzie płaskim.

Statyka ciał sztywnych nie daje nam więcej równań, w które wchodziłyby niewiadome reakcje. Z tego powodu, gdy ilość niewiadomych reakcyj prostych jest większa od „a", równania równowagi ciała sztywnego nie są dostateczne do wyznaczenia reakcyj. Gdy ciało np. posiada dwie podpory, tworzące dwa punkty nieruchome /rys.25/, ilość niewiadomych reakcyj prostych



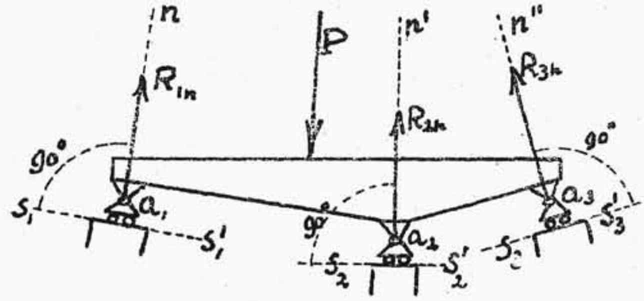
Rys. 25.

jest 4 ($R_{1x}, R_{1y}, R_{2x}, R_{2y}$), równań zaś równowagi 3. Z tego powodu reakcje są tutaj nieokreślone. Jest to oczywiste bezpośrednio, gdyż do ciała sztywnego możemy przyłożyć dwie siły równe i wprost przeciwne $\overline{P}_1$ i $\overline{P}_2 = -\overline{P}_1$, działające wzdłuż prostej $a_1 a_2$. Dodając siły $\overline{P}_1$ i $\overline{P}_2$ do reakcyj $\overline{R}_1$ i $\overline{R}_2$ otrzymamy nowy układ reakcyj $\overline{R}_1'$ i $\overline{R}_2'$

$$\overline{R}_1' = \overline{R}_1 + \overline{P}_1 \; ; \quad \overline{R}_2' = \overline{R}_2 + \overline{P}_2$$

Jak widać z powyższego przyczyną nieokreśloności reakcyj w takich wypadkach jest hypoteza absolutnej sztywności ciał. Ciała fizyczne nie są ciałami sztywnemi, posiadają one własność sprężystości i jak później zobaczymy rozważanie równowagi ciał sprężystych potwierdzi ważność powyższych równań i prócz tego da możność utworzenia dodatkowych równań dla reakcyj. Nieokreśloność zagadnienia zniknie.

Powracając do wypadku ciała, zamocowanego nieruchomo, gdy ilość reakcyj prostych równa się ilości równań równowagi zauważymy, że warunek ten jest konieczny dla określoności reakcyj, lecz nie jest dostateczny. Zobaczymy to na następującym przykładzie /rys.26/. Reakcjami prostemi są tutaj wielkości: $R_{1n}, R_{2n}', R_{3n}''$ - rzuty reakcyj $\overline{R}_1, \overline{R}_2, \overline{R}_3$ na osie a_1n, a_2n', a_3n''. Reakcje te wyznaczymy z równań równowagi:



Rys. 26.

$$\Sigma X = 0,\ \Sigma Y = 0,\ \Sigma M = 0 \ldots /a/$$

gdzie pod X, Y rozumiemy rzuty wszystkich sił: $\overline{P}, \overline{R}_1, \overline{R}_2, \overline{R}_3$ na osie Ox i Oy, pod M rozumiemy moment każdej z tych sił względem jednego dowolnego punktu. Rozpatrzmy wypadek, gdy kierunki siły P i prostych a_1n, a_2n', a_3n'' przecinają się w jednym punkcie O_1. Równanie momentów względem tego punktu $\Sigma M' = 0$ jest w tym wypadku tożsamością, gdyż moment każdej z sił: P, R_1, R_2, R_3 względem punktu O_1 jest zerem. Równanie momentów względem innego dowolnego punktu O_2: $\Sigma M'' = 0$ na mocy § 8, możemy przedstawić w postaci:

$$\Sigma M' - y_2' \Sigma X + x_2' \Sigma Y = 0 \ldots\ldots\ldots /b/$$

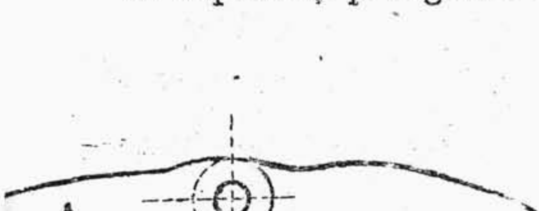
gdzie $x_1' y_1'$ - rzędne punktu O_2 przy osiach: O_1x' równoległ. do Ox, O_1y' równoległej do Oy. Ponieważ mamy już równania: $\Sigma X = 0, \Sigma Y = 0, \Sigma M' = 0$ równość więc /b/ jest tożsamością. Pozostają tylko 2 równania: $\Sigma X = 0, \Sigma Y = 0$, których nie wystarcza do wyznaczenia niewiadomych: $R_{1n}, R_{2n'}, R_{3n''}$. Wypadek ten należy więc do kategorji rozważonej wyżej, t.j. układu.

którego reakcje są nieokreślone z punktu widzenia statyki ciał sztywnych.

Z powyższego widać, że reakcje podpór ciała sztywnego nieswobodnego, podpartego tak, że zmiana położenia ciała jest niemożliwa, będą określone, jeżeli ilość reakcyj prostych równa się 6 w układzie przestrzennym i - 3 w układzie płaskim, jeżeli przytem wszystkie równania równowagi są możliwe i żadne z nich nie staje się tożsamością i jeżeli pierwiastki tych równań są skończone.

Połączenia i reakcje połączeń w układach ciał, na które działają siły leżące w jednej płaszczyźnie.

§ 22. Prócz rozpatrzonych wyżej ciał nieswobodnych, stanowiących jedną całość, w budowlach stosujemy często układy ciał nieswobodnych, składające się z oddzielnych ciał, połączonych pomiędzy sobą zapomocą pewnych sprzężeń czyli połączeń. Połączenia te w układach płaskich urządzamy zwykle zapomocą przegubów walcowych /rys. 27/ Ciała A i B, połączone są trzecim ciałem walcowem C. Walec C może nie stanowić oddzielnego ciała, a może z jednym z ciał A lub B tworzyć całość. Przy nieuwzględnieniu tarcia pomię-



Rys. 27.

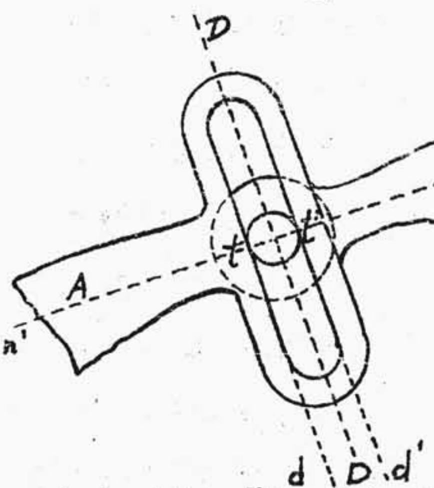
dzy powierzchniami walca C i otworów w ciałach A i B ciśnienia wzajemne ciał są normalne do powierzchni walca i z tego powodu wypadkowa tych ciśnień przechodzi przez oś walca, czyli przegubu, a zatem reakcja przegubu sprowadza się do jednej siły, przechodzącej przez oś przegubu. Działanie ciała B na ciało A można zastąpić przez jedną siłę $\overline{R}$, przyłożoną do ciała A w środku przegubu. Niewiadome są linją ~~działania tej~~ siły, jej wielkość i zwrot. Niewiadome te staną się znane, jeżeli znajdziemy rzuty R_ξ i R_η siły R na dwie dowolne osie ξ i η. Na mocy zasady działania i przeciwdziałania, działanie ciała A na ciało B można zastąpić przez siłę $\overline{R}'$, przyłożoną do ciała B w środku przegubu i równą lecz wprost przeciwną do siły $\overline{R}$ - reakcji ciała B na ciało A t.j. $\overline{R}' = -\overline{R}$, a więc

$$R'_\xi = -R_\xi, \quad R'_\eta = -R_\eta$$

Prócz powyższego przegubu, można stosować przegub, umożliwiający nietylko obrót jednego z połączonych ciał względem drugiego, lecz także ruch postępowy jednego z tych ciał względem drugiego. Mianowicie przy sprzężeniu ciał A i B, wskazanym na rys. 28, każde z tych ciał może się obrócić względem drugiego około środka walca C /stanowiącego całość z ciałem A/ i przesunąć się jedno względem drugiego po prostej DD.

Ciśnienie ze strony ciała B na ciało A w punkcie E czyli reakcja $\overline{R}$ przegubu na ciało A jest z łą przyłożoną do ciała A w punkcie t lub t'. Siłę tę można rozłożyć na kierunki tn prostopadłe do DD i td prostop. do DD. Ponieważ przyjmujemy, że konstrukcja przegubu nie wywiera tarcia, więc ciało A nie może przedstawić żadnego oporu dla składowej ciśnienia w kierunku td, a więc tylko opór w kierunku tn lub tn'. Z tego powodu linją działania reakcji $\overline{R}_2$ jest prosta tn, pozostają niewiadomemi wielkość i zwrot tej siły. Elementy te znajdziemy, skoro wyznaczymy jedną wielkość algebraiczną, mianowicie rzut siły $\overline{R}$ na oś, zlewającą się z linją działania, więc na tn lub tn', t.j. rzut R_n lub $R_{n'}$. Na mocy zasady działania i przeciwdziałania, jeżeli działanie ciała B na ciało A wyraża się przez siłę $\overline{R}$, przyłożoną do ciała A, to działanie ciała A na ciało B wyraża się przez siłę $\overline{R}'$, przyłożoną do ciała B, równą i wprost przeciwną do siły $\overline{R}$, t.j. $\overline{R}' = -\overline{R}$. Z tego powodu rzut $R'_n = -R_n$

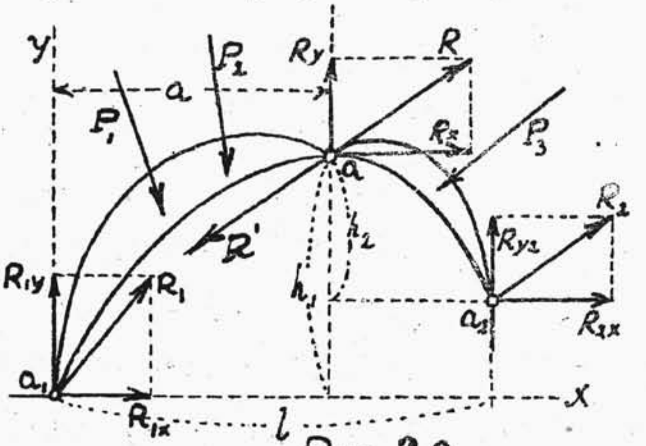
Rys. 28.



Przegub wyobrażony na rys.27 nazywamy przegubem nieruchomym lub wprost przegubem, przegub wyobrażony na rys. 28 nazywamy przegubem ruchomym lub przegubem o danej linji ślizgania.

Łuk trójprzegubowy.

§ 23. Rozpatrzymy równowagę układu dwuch ciał, połączonych przegubem walcowym i opierających się na podpory, stanowiące punkty nieruchome. Środek przegubu, łączącego i dwa punkty nieruchome znajdują się w płaszczyźnie sił, bezpośrednio przyłożonych. Taki układ dwuch ciał przy zastosowaniu go do budowli nazywamy łukiem trójprzegubowym.



Rys. 29.

Niech ciała C_1 i C_2 /rys.29/ są połączone przegubem a i mają podpory w postaci przegubów nieruchomych a_1 i a_2. Na ciała te działają znajdujące się w płaszczyźnie $a_1 a a_2$ siły bezpośrednio przyłożone $\overline{P}$, których rzuty na dowolnie wybrane osie Oxy oznaczymy przez P_x i P_y.

Układ ciał C_1 i C_2 znajduje się w równowadze, każde więc z ciał C_1 i C_2 znajduje się także w równowadze. Rozpatrzmy równowagę ciała C_1. Działanie podpory a_1 /§ 16./ możemy zastąpić przez siłę $\overline{R}_1$, przechodzącą przez punkt a_1. Ta niewiadoma reakcja określa się przez dwa rzuty R_{1x} i R_{1y} na osie Ox i Oy. Działanie ciała C_2 na ciało C_1 / § 21/ można zastąpić przez siłę $\bar{R}$, przechodzącą przez środek przegubu a. Reakcja ta, jako siła o niewiadomej linji działania, niewiadomej wielkości i zwrocie określa się przez dwa rzuty na dwie dowolne osie, za które przyjmiemy także osie OX i OY i rzuty te oznaczymy przez R_x i R_y. Ciało C_2 możemy uważać za swobodne i znajdujące się w równowadze pod działaniem sił $\bar{P}$, bezpośrednio przyłożonych i reakcyj $\bar{R}_2$ i $\bar{R}' = -\bar{R}$. Możemy teraz napisać / § 17 / trzy równania równowagi: $\Sigma X = 0, \Sigma Y = 0, \Sigma M_1 = 0$ /suma momentów względem punktu a_1 /, mianowicie:

$$R_{1x} + R_x + \Sigma' P_{1x} = 0 \qquad ..../1/$$

$$R_{1y} + R_y + \Sigma' P_y = 0 \qquad ..../2/$$

$$R_x \cdot h_1 - R_y \cdot a + \Sigma' M_1[P] = 0 \qquad ..../3/$$

Przez znak Σ' oznaczyliśmy sumę dotyczącą sił przyłożonych tylko do ciała C_1.

Podobnie rozpatrujemy równowagę ciała C_2; znajduje się ono w równowadze pod działaniem sił $\bar{P}$, bezpośrednio do niego przyłożonych i reakcyj $\bar{R}_2$ i $\bar{R}_1$. Ponieważ $\bar{R}' = -\bar{R}$ więc zamiast rzutów R'_x i R'_y wprowadzamy odrazu równe im rzuty $[-R_x]$ i $[-R_y]$, następnie przy pisaniu równania momentów mamy na względzie, że $M[R'] = -M[R]$

Dla napisania więc $M[R']$ w funkcji rzutów R_x i R_y należy

---

napisać wyrażenie momentu $M[R]$ i w tym wyrażeniu zmienić znaki na odwrotne. Mając powyższe na uwadze równania równowagi ciała C_2 : $\Sigma X=0, \Sigma Y=0, \Sigma M_2=0$ napiszemy w postaci:

$$R_{2x}+[-R_x]+\Sigma'' P_x=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots /4/$$

$$R_{2y}+[-R_y]+\Sigma'' P_y=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots /5/$$

$$-[R_x.h_2-R_y(l-a)]+\Sigma'' M_2[P]=0 \ldots\ldots\ldots\ldots /6/$$

Przez znak Σ'' wskazujemy, że sumowanie dotyczy sił przyłożonych tylko do ciała C_2 .

Nasamprzód z równań /3/ i /6/ wyznaczymy dwie niewiadome R_x i R_y , przez co w pozostałych równaniach pozostanie w każdem po jednej niewiadomej $R_{1x}, R_{1y}, R_{2x}, R_{2y}$ które wyznaczamy z każdego równania bezpośrednio. Mając wyznaczone rzuty reakcyj, wielkości samych reakcyj otrzymujemy z równości $R_1=\sqrt{R_{1x}^2+R_{1y}^2}$ $R_2=\sqrt{R_{2x}^2+R_{2y}^2}$

$$R=\sqrt{R_x^2+R_y^2}$$

Parcia na podpory a_1 i a_2 są to siły przyłożone do podpór w punktach a_1 i a_2 równe i wprost przeciwne reakcjom R_1 i R_2 .

Belki wspornikowe wieloprzęsłowe.

§ 24. W poprzednich §§ zapoznaliśmy się z wyznaczaniem reakcyj podpór w belkach zwykłych i wspornikowych. Z belek wspornikowych i zwykłych możemy tworzyć t.zw. belki wspornikowe wieloprzęsłowe, jak pokazano na rys.30. Podpory a_1, a_3, a_5 są tutaj nieruchome, podpory a_2, a_4, a_6 - ruchome o poziomej linji ślizgania. Reakcja podpór belek zwykłych wyznaczamy, jak w § 19, mianowicie rozpatrując belki a_1a_2 i a_5a_6 jako swobodne i znajdujące się pod działaniem sił bezpośrednio przyłożonych P i reakcyj R. Oznaczając reakcje podpór a_1, a_2 przez $R_1, R_2 \ldots$, otrzymamy następujące równanie równowagi

$$R_{1x}+\sum_1^2 P_x=0 \quad \ldots\ldots /1/ \qquad R_{5x}+\sum_5^6 P_x=0 \quad \ldots\ldots\ldots /4/$$
$$R_{1y}+R_{2y}+\sum_1^2 P_y=0 \quad \ldots /2/ \qquad R_{5y}+R_{6y}+\sum_5^6 P_y=0 \quad \ldots\ldots\ldots /5/$$
$$-R_{2y}l_1+\sum_1^2 M_1[P]=0 \quad \ldots /3/ \qquad -R_{6y}l_5+\sum_5^6 M_5[P]=0 \quad \ldots\ldots\ldots /6/$$

gdzie przez M_i oznaczyliśmy moment siły względem punktu a_i /środek przegubu podpory nieruchomej lub punkt zaczepienia reakcji w podporze ruchomej/; jak $\sum_i^K$ oznacza, że suma dotyczy wszystkich sił przyłożonych bezpośrednio do belki a_ia_k. W wypadku sił P pionowych $P_x=0$, $P_y=-P$. Z powyższych równań wyznaczamy rzuty reakcyj, a następnie same reakcje

$$R_1=+\sqrt{R_{1x}^2+R_{1y}^2}, \quad R_2=/R_{2y}/, \quad R_5=+\sqrt{R_{5x}^2+R_{5y}^2}, \quad R_6=/R_{6y}/$$

gdzie $/R_{2y}/$ i $/R_{6y}/$ oznacza wartość bezwzględną R_{2y} i R_{6y}

Rys. 30.

Dla możności rozważania belki $a_2 a_5$, jako ciała swobodnego, znajdującego się w równowadze, musimy działanie połączeń i podpór zastąpić reakcjami. W punktach a_2 i a_5 działanie belek skrajnych wyraża się przez parcia tych belek, czyli przez reakcje R_2' i R_5', przyłożone w punktach a_2 i a_5 do belki $a_2 a_5$. Na mocy zasady działania i pr... ciwdziałania reakcje te są odpowiednio równe i wprost przeciwne do reakcyj R_2 i R_5 t.j. będziemy mieli równości geometryczne

$$\bar{R}_2' = -\bar{R}_2 \quad ; \quad \bar{R}_5' = -\bar{R}_5$$

Ta sama zależność będzie się wyrażać przez następujące równości algebraiczne, dotyczące rzutów

$$R_{2x}' = -R_{2x} \quad ; \quad R_{2y}' = -R_{2y}$$
$$R_{5x}' = -R_{5x} \quad ; \quad R_{5y}' = -R_{5y}$$

Równanie równowagi belki $a_2 a_5$ otrzymamy, jak w § 20

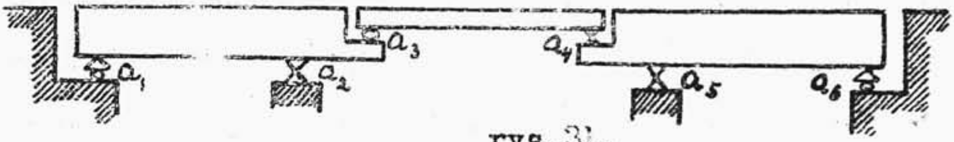
$$R_{3x} + R_{5x} + \sum_2^5 P_x = 0$$
$$R_{2y}' + R_{3y} + R_{4y} + R_{5y}' + \sum_2^5 P_y = 0$$
$$R_{2y}' l_2 - R_{4y} l_3 - R_{5y}' [l_3 + l_4] + R_{5x}' h + \sum_2^5 M_3[P] = 0$$

Zastępując tutaj rzuty R' przez rzuty R, otrzymamy:

$$R_{3x} + R_{5x} + \sum_2^5 P_x = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots /7/$$
$$-R_{2y} + R_{3y} + R_{4y} - R_{5y} + \sum_2^5 P_y = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots /8/$$
$$-R_{2y} l_2 - R_{4y} l_3 - R_{5y}' [l_3 + l_4] - R_{5x} h + \sum_2^5 M_3[P] = 0 \ldots\ldots\ldots /9/$$

Z równań tych wyznaczamy trzy niewiadome R_{3x}, R_{3y}, R_{4y} a następnie i wielkości reakcyj $R_3 = +\sqrt{R_{3x}^2 + R_{3y}^2}$; $R_4 = /R_{4y}/$

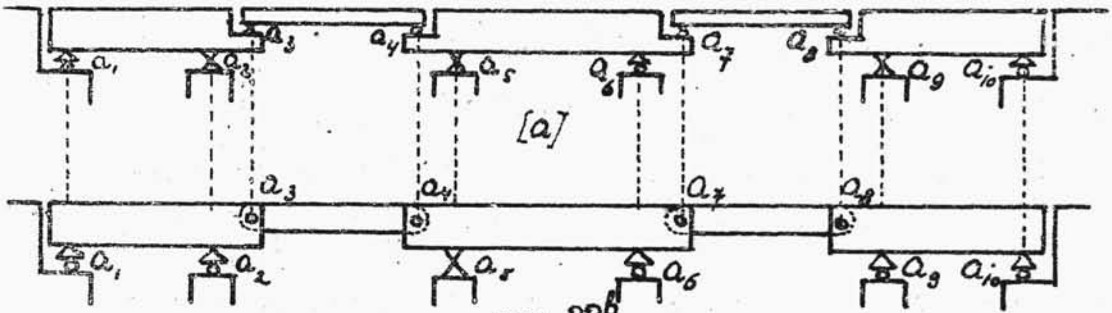
Podobnie znajdziemy reakcje dla belek wspornikowych, pokazanych na rys.31, i rys.32a , dla których należy naprzód wyznaczyć reakcje belek zawieszonych, a następnie każ



rys.31.

dą oddzielną belkę wspornikową rozpatrzeć osobno.

W podobny sposób można urządzać belki wspornikowe o większej ilości przęseł zawieszając belki zwykłe na wspornikach oddzielnych belek wspornikowych /rys.32a/



rys.32b

W podanych przykładach każda belka zawieszona ma dwie podpory: jedną nieruchomą, drugą ruchomą. Zamiast takiego podparcia można belki zawieszone łączyć ze wspornikami za pomocą przegubów nieruchomych /rys.32 b/; wówczas w oddzielnych belkach wspornikowych wszystkie podpory z wyjątkiem jednej urządzamy jako ruchome. Podpory i połączenia w belkach wspornikowych wieloprzęsłowych urządzamy tak, aby można było wyznaczyć z warunków równowagi wszystkie reakcje.

§ 25. Wyznaczenie reakcyj podpór i wogóle połączeń w układach ciał może być uskutecznione zapomocą metody oswobodzenia od połączeń, zastosowanej już w powyższych przykładach. Każde ciało należące do układu, znajdującego się w równowadze, może być rozpatrywane jako ciało swobodne, znajdujące się w równowadze pod działaniem sił bezpośrednio przyłożonych i reakcyj, zastępujących działanie podpór i połączeń z innemi ciałami układu. O ile rozpatrujemy układy płaskie, to jak wiadomo z § 9, warunki równowagi każdego oddzielnego ciała wyrażają się analitycznie przez trzy równania. Jeżeli układ płaski składa się z „c" ciał, to równań równowagi mamy $3c$.

Wszystkie te równania są to równania algebraiczne pierwszego stopnia względem rzutów sił i reakcyj.

Podpory i połączenia belek wspornikowych urządzamy tak, żeby ilość niewiadomych reakcyj prostych /§ 11/ równała się także $3c$ i żeby te równania równowagi pozwalały wszystkie te reakcje wyznaczyć. W powyższych przykładach wymagania te są zachowane. Ponieważ reakcja każdej podpory nieruchomej /przegubowej/ lub przegubie wyraża się przez dwie reakcje proste /rzuty na dwie osie/, a reakcja podpory ruchomej jest reakcją prostą, można więc ilość niewiadomych reakcyj prostych wyrazić wzorem $2p+s$, gdzie p ilość podpór przegubowych nieruchomych i ilość przegubów łączących, s - ilość podpór i przegubów ruchomych o linji ślizgania. W przytoczonych przykładach mamy następujące ilości równań i niewiadomych:

	c	p	s	$3c$	$2p+s$
rys.30	3	3	3	9	9
" 31	3	3	3	9	9
" 31 a	5	5	5	15	15
" 31 b	5	5	5	15	15

T.j. $2p+s=3c$, prócz tego widać, że w pierwszych 3-ch przykładach rozwiązanie równań jest możliwe, gdyż możemy je rozwiązywać w następującym porządku: nasamprzód wyznaczyć oddzielnie dla każdej belki zawieszonej 3 proste reakcje, następnie, znając już te reakcje, możemy dla każdej oddzielnej belki wspornikowej wyznaczyć 3 proste reakcje. Wyznaczenie reakcyj w układzie, pokazanym na rys.32b należy wykonać w następującym porządku: nasamprzód dla belek $a_1 a_2 a_3$, $a_3 a_4$, $a_2 a_9 a_{10}$, $a_7 a_8$ i w końcu dla belki $a_4 a_5 a_6 a_7$. Jak widać dla każdej oddzielnie belki będziemy mieli do wyznaczenia 3 niewiadome.

Jak wskazywaliśmy w § 9 i jak stosowaliśmy w §§ 19 i 20. dwa równania równowagi $\Sigma X=0$ i $\Sigma Y=0$ lub jedno z nich może być zastąpione przez równanie momentów $\Sigma M'=0$ względem innego bieguna niż wziętego dla 3-go równania równania równowagi $\sum M=0$. Wyznaczając np. reakcje dla przykładu, pokazanego na rys. 32[b], w porządku wskazanym powyżej, możemy napisać następujące równania:

dla belki: $a_1 a_2 a_3$: $\sum_1^3 X=0$ /1/ $\sum_1^3 Y=0$ /2/ $\sum_1^3 M_3=0$ /3/

" " $a_3 a_4$: $\sum_3^4 X=0$ /4/ $\sum_3^4 M_3=0$ /5/ $\sum_3^4 M_4=0$ /6/

" " $a_8 a_9 a_{10}$: $\sum_8^{10} X=0$ /7/ $\sum_8^{10} Y=0$ /8/ $\sum_8^{10} M_9=0$ /9/

" " $a_7 a_8$: $\sum_7^8 X=0$ /10/ $\sum_7^8 M_7=0$ /11/ $\sum_7^8 M_8=0$ /12/

" " $a_4 a_5 a_6$: $\sum_4^7 X=0$ /13/ $\sum_4^7 Y=0$ /14/ $\sum_4^7 M_5=0$ /15/

Sumy dotyczą wszystkich sił działających na daną belkę, zarówno sił bezpośrednio przyłożonych, jak i reakcji.

Z równania /1/ otrzymamy R_{3x}, z /4/ R_{4x}, z /7/ R_{8x} z /10/: R_{7x}, z /13/: R_{5x}; z równania /5/ i /6/: R_{3y} i R_{4y}, z /11/ i /12/ R_{7y} i R_{8y}; z równania /2/ i /3/ : R_{1y} i R_{2y}, z /8/ i /9/: R_{9y} i R_{10y} i nakoniec /14/ i /15/: R_{5y} i R_{6y}.

Układy łuków i belek.

§ 26. Jak widać z § 23 wyznaczenie reakcyj w łuku trójprzegubowym nie zależy od kształtu ciał, tworzących łuk. Ciała te mogą posiadać części DA i BE /rys.33/, wystające poza przeguby podporowe, - które to części nazywamy wspornikami, a taki układ ciał - łukiem trójprzegubowym wspornikowym. Z łuków wspornikowych i belek zwykłych możemy