Oś dwóch wieloboków szmurowych jednego i tego samego układu sił.

§ 63. Rozpatrzmy część dwóch wieloboków sznurowych przy sile $\overline{P}_k$, zbudowanych względem biegunów b i b': część $k-1, k, k+1$ (rys. 84) i część $(k-1)'k'(k+1)'$ oraz odpowiednie części wieloboku sił: $b a_{k-1,k}\, a_{k,k+1}$ i $b' a_{k-1,k}\, a_{k,k+1}$. Wprowadźmy w rozważanie siłę $\overline{P}_k'$ równą i wprost przeciwną sile $\overline{P}_k$ siły $\overline{P}_k$ i $\overline{P}_k'$ stanowią układ znajdujący się w równowadze. Rozłóżmy siłę $\overline{P}_k$ na kierunki $(k-1)k$ i $k(k+1)$, siłę zaś $\overline{P}_k'$ na kierunki $(k-1)'k'$ i $k'(k+1)'$. Z wieloboku sił otrzymamy

$$\overline{P}_k = \overline{A} + \overline{B}$$
$$\overline{P}_k' = \overline{C} + \overline{D}$$

Zastępujemy układ sił $\overline{P}, \overline{P}'$ przez układ czterech sił, równoważny z nim, następnie przenosimy siły $\overline{A}$ i $\overline{D}$ do punktu $C_{k-1,k}$ i je składamy; tak samo przenosimy siły $\overline{B}$ i $\overline{C}$ do punktu $C_{k,k+1}$ i je składamy.

Z wieloboku siły mamy

$$\overline{D} + \overline{A} = \overline{Q} = \overline{bb'}$$
$$\overline{B} + \overline{C} = \overline{Q}' = \overline{b'b},$$

przytem $\overline{Q}' = -\overline{Q}$. W ten sposób ostatecznie układ $\overline{P}_k, \overline{P}_k'$ został zastąpiony przez układ $\overline{Q}, \overline{Q}'$. Ponieważ układ sił $\overline{P}_k, \overline{P}_k'$ jest w równowadze, więc i układ zastępczy $\overline{Q}$ i $\overline{Q}'$ jest też w równowadze. Siły $\overline{Q}$ i $\overline{Q}'$ są równe i o kierunkach przeciwnych, dla równowagi jest więc rzeczą konieczną, aby siły te były względem siebie wprost przeciwne t.j. aby prosta $C_{k-1,k}\, C_{k,k+1}$ była równoległa do $\overline{Q}$ czyli do prostej $\overline{bb'}$.

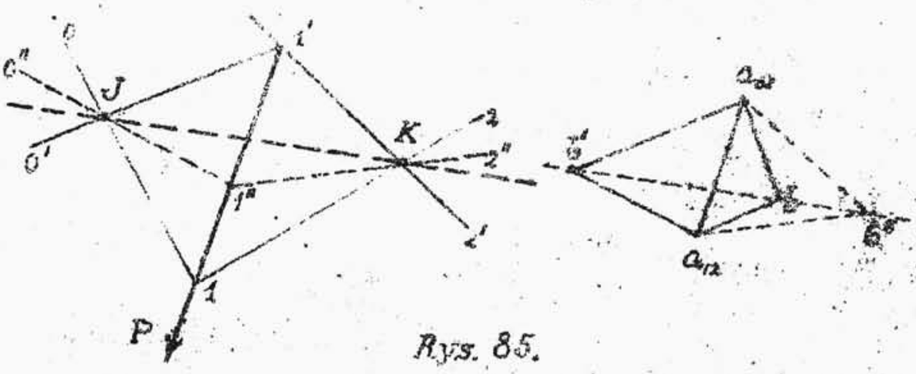
Wszystkie więc odcinki $C_{01} C_{12}$, $C_{12} C_{23}$, $C_{23} C_{34}$, ... są równoległe do bb', a ponieważ każdy z nich ma punkt wspólny z poprzednim odcinkiem, wszystkie odcinki należą do jednej prostej L, równoległej do bb'. —— Prosta ta nazywa się osią dwóch wieloboków szmurowych i jak widać z powyższego leży w odległości skończonej. Jeżeli dwa wieloboki szmurowe są zbudowane względem jednego bieguna, to ich odpowiednie boki są równoległe i nie przecinają się, lub, jak się mówi w Geometrji Rzutowej, przecinają się na nieskończoności, więc oś L w tym wypadku leży na nieskończoności. Otrzymujemy stąd następujące twierdzenia.

Jeżeli rozpatrujemy dwa jakiekolwiek wieloboki szmurowe tego samego układu sił, to punkty, w których boki pierwszego wieloboku przecinają odpowiednie boki drugiego wieloboku leżą na tej samej prostej.

Ta prosta, którą nazywamy osią wspólną dwóch wieloboków szmurowych, jest równoległa do prostej, łączącej dwa bieguny i leży w odległości skończonej, jeżeli dwa wieloboki szmurowe mają różne bieguny; leży ona w nieskończoności, jeżeli dwa wieloboki sznurowe mają wspólny biegun.

§ 64. Zastosujemy powyższe uwagi i twierdzenia do pewnych zadań, dotyczących wieloboku sznurowego przy danych warunkach.

1° Dla danej jednej siły przeprowadzić wielobok sznurowy, którego dwa boki 01 i 12 przechodzą odpowiednio przez dwa dane punkty J i K. /rys. 85 /



Rys. 85.

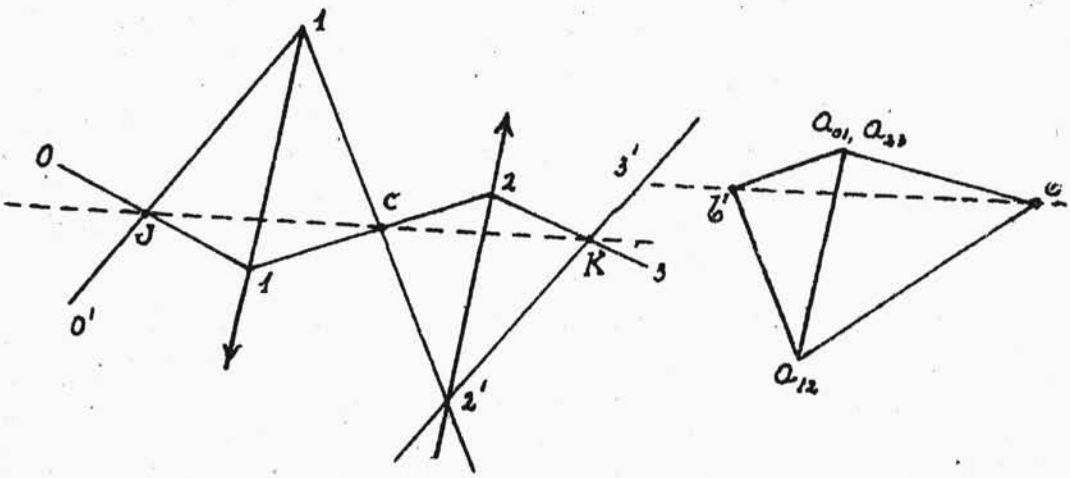
Szukanym wielobokiem sznurowym będzie wszelki wielobok 012, którego boki 01 i 12 przechodzą przez punkty J i K i przecinają się na linji działania siły P; zadanie jest więc nieokreślone.

Na mocy twierdzeń o osi, prosta JK jest równoległa do prostej bb', łączącej dwa bieguny b i b' dwóch przeprowadzonych w powyższy sposób wieloboków sznurowych 012 i $0'1'2'$. Każdy nowy wielobok sznurowy $0''1''2''$ zadawalający dane warunki, można teraz zbudować obierając na prostej bb' dowolny biegun b''

i przeprowadzając przez J bok $0''1''$ i łącząc $1''$ z K.

2° Dla danego układu sił przeprowadzić wielobok sznurowy, którego skrajne boki przechodzą odpowiednio przez dwa dane punkty J i K.

W wypadku, gdy dane siły redukują się do wypadkowej, to zadanie sprowadza się do powyższego, mianowicie zastępujemy dane siły przez wypadkową W ; budujemy dla niej, jak wyżej, wielobok sznurowy, przechodzący przez punkty J i K.



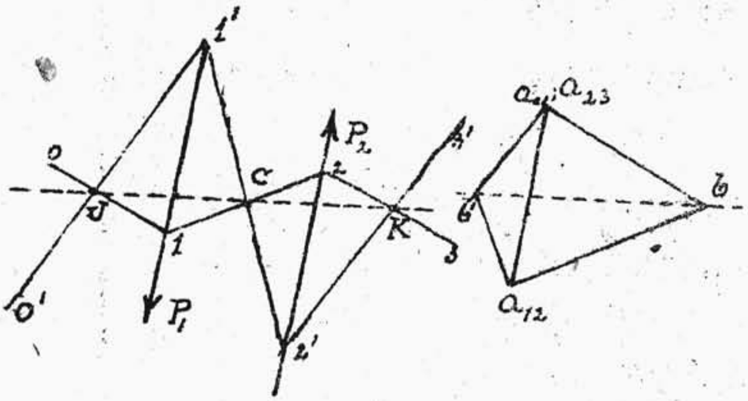
Rys. 86.

Mając wielobok sznurowy dla wypadkowej, możemy uzupełnić go bokami pośredniemi, poprowadzonemi równolegle do promieni biegunowych ba_{12}, ba_{23}, ...; otrzymamy wielobok sznurowy dla całego układu sił, którego skrajne boki przechodzą przez dane punkty J i K

Ponieważ dla jednej siły zadanie jest nieokreślone, więc i dla układu sił zadanie jest też nieokreślone.

W wypadku, gdy dany układ redukuje się do pary siły można zadanie rozwiązać, opierając je na rozwiązaniu następującego zadania.

3º Dla danej pary sił P_1, P_2 przeprowadzić wielobok sznurowy, którego boki 01 i 23 przechodzą przez dwa dane punkty J i K.

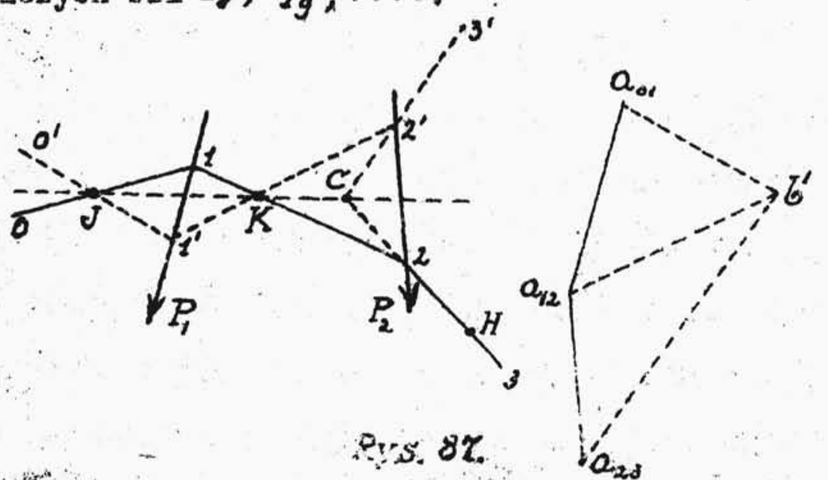


Rys. 86.

Wiedząc o tem, że dla pary sił ostatnie boki wieloboku sznurowego są zawsze równoległe, przeprowadzamy przez punkty J i K dwie dowolne proste 01 i 23, równoległe do siebie, punkty 1 i 2 łączymy prostą 12; otrzymujemy w ten sposób szukany wielobok 0123. Biegun tego wieloboku znajdziemy, poprowadzając z punktu $a_{01}(a_{23})$ prostą $a_{01}b \parallel 01$ i z punktu a_{12} prostą $a_{12}b \parallel 12$, w przecięciu b tych prostych leży biegun. W powyższy sposób można zbudować nieskończenie wiele wieloboków sznurowych, zadośćczyniących danym warunkom, zadanie jest więc nieokreślone. Na mocy twierdzenia o osi dwóch wieloboków sznurowych prosta JK jest równoległa do prostej bb', prócz tego boki 12 i $1'2'$ powinny się przecinać na osi JK /punkt C /.

4°. Dla danego układu sił zbudować wielobok sznurowy, którego dwa dane boki, np. 34 i 78 przechodzą przez dwa dane punkty J i K.

Rozważając wielobok cząstkowy dla układu sił P_4, P_5, P_6, P_7 i redukując ten układ do wypadkowej, lub pary sprowadzamy zadanie do zadań powyższych; następnie uzupełniony wielobok sznurowy cząstkowy bokami z jednej strony dla sił $P_1, P_2, P_3, \ldots$, - z drugiej strony dla dalszych sił P_8, $P_9, \ldots$



Rys. 87.

Zadanie to, na podstawie powyższych zadań jest też nieokreślone.

5° Dla dwóch danych sił przeprowadzić wielobok sznurowy, którego boki 01, 12, 23 przechodzą odpowiednio przez trzy dane punkty J, K, H (Rys. 87).

Budujemy nasamprzód dowolny wielobok sznurowy $0'1'2'3'$, którego boki $0'1'$, $2'3'$ przechodzą odpowiednio przez punkty J i K, budujemy odpowiedni biegun b', przeprowadzając $a_{01} b' \parallel 0'1'$, $a_{12} b' \parallel 1'2'$; bok $2'3' \parallel a_{23} b'$ wogóle przez punkt H nie przejdzie. Z twierdzenia o osi dwóch wieloboków sznurowych wiemy, że jeżeli rozpatrzymy dla danego układu drugi wielobok sznurowy, to odpowiednie boki tych dwóch wieloboków przecinają się na jednej prostej-osi. Wyobraźmy sobie, że drugi wielobok 0123 posiada boki 01 i 12, przechodzące przez punkty J i K, osią więc tych dwóch wieloboków będzie prosta JK; ponieważ bok $2'3'$ przecina oś w punkcie C, więc i bok 23 drugiego wieloboku powinien przechodzić przez punkt C. Korzystając z punktów osi J, K, C możemy takich wieloboków sznurowych 0123 zbudować nieskończenie wiele. Możemy więc budowę takiego wieloboku sznurowego ograniczyć warunkiem, żeby bok jego 23 przechodził przez punkt H; wielobok taki będzie szukany; zbudujemy go, przeprowadzając przez punkty H i C bok 23 i następnie łącząc punkt 2 z K do przecięcia się z kierunkiem siły P_i w punkcie I i nakoniec przeprowadzając bok $0I$ przez punkty I i J.

Jak widać z powyższego budowę szukanego wieloboku można było wykonać, nie korzystając z bieguna.

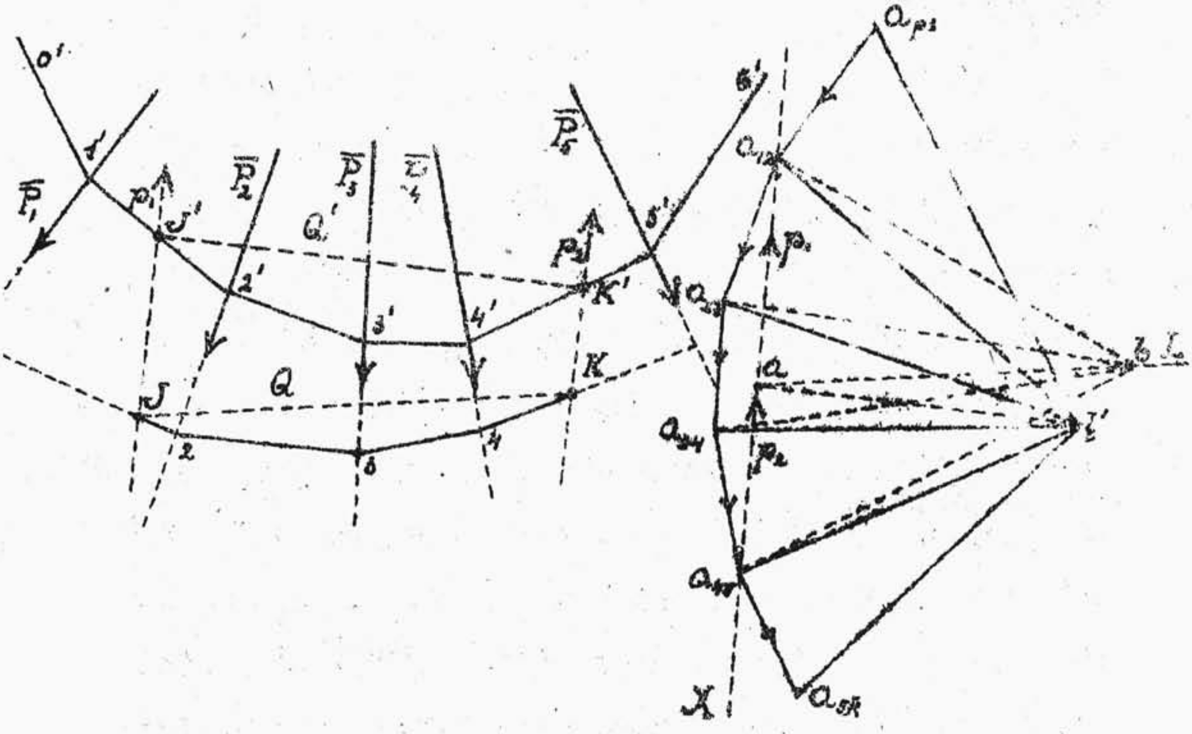
6º Dla danego układu sił zbudować wielobok sznurowy, którego trzy dane boki $(i, i+1), (k, k+1), (h, h+1)$ przechodzą przez trzy dane punkty J, K, H.

Zadanie to można sprowadzić do powyższego, jeżeli grupy sił pomiędzy bokami $P_{i+1}, \ldots P_k$ i $P_{k+1}, \ldots, P_h$ redukują się do wypadkowych; jeżeli zaś którakolwiek z grup redukuj się do pary, to możemy rozwiązanie oprzeć na zadaniu pod punktem 3º.

Zadania dotyczące budowy wieloboków sznurowych można rozwiązywać bardziej jednostajnie niż wskazano w powyższych przykładach na mocy pewnego ogólnego twierdzenia, mającego związek z kwestją o ilości parametrów, określających wielobok sznurowy. Wielobok ten jest linją budowaną w określony sposób. Każda linja, a więc i wielobok sznurowy może być określony przez pewną ilość punktów danych. Zbadajmy ogólnie ile punktów określa wielobok sznurowy. W tym celu udowodnimy twierdzenie o następującem miejscu geometrycznem.

<u>Miejsce geometryczne biegunów wieloboków sznurowych, przechodzących przez dwa dane punkty.</u>

§ 65. Dla większej określoności rozpatrzmy układ z 5 sił /rys. 88/. Dwa dane punkty niech będą J i K, przez które mają przechodzić boki 12 i 45 wieloboków sznurowych. Budujemy dowolny pomocniczy wielobok sznurowy $0'1'2'3'4'5'6'$ względem dowolnego bieguna b'. W wieloboku sił łączymy prostą wierzchołek



Rys. 88.

łek a_{12} z wierzchołkiem a_{45} i tą prostą nazwiemy X. Następnie przez punkty J i K przeprowadzamy proste JJ' i KK', równoległe do prostej X do spotkania się w punktach J' i K' z bokami $1'2'$ i $4'5'$. Przez b' przeprowadzamy równoległą $b'a$ do $J'K'$

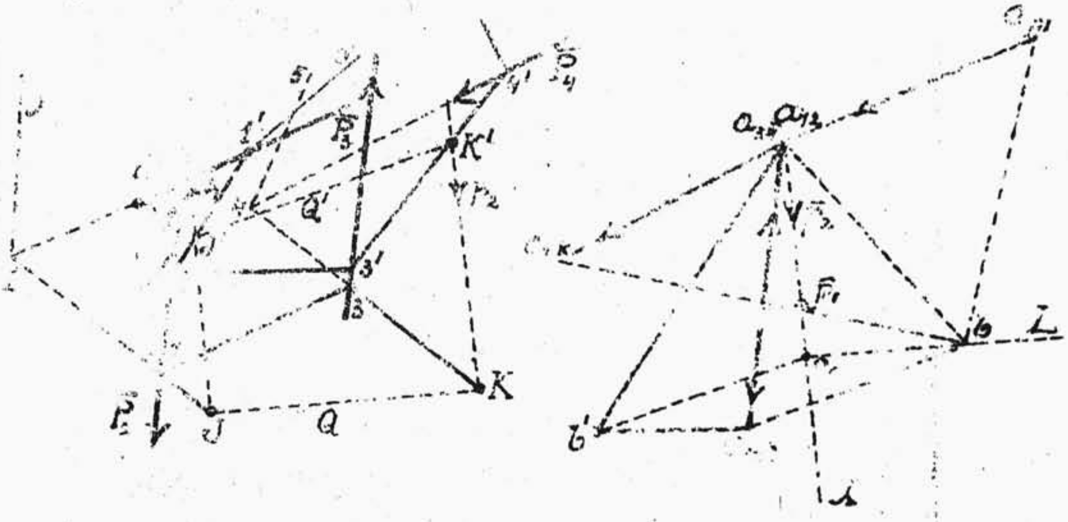
do spotkania się z prostą X w punkcie a.

Niech p_1 i p_2 będą siłami, z których pierwsza ma za odcinek aa_{12} i za linję działania JJ', druga ma za odcinek $a_{45}a$ i za linję działania KK'. Rozpatrzymy układ sił $\overline{p}_1, \overline{P}_2, \overline{P}_3, \overline{P}_4, \overline{p}_2$. Wielobok tych sił $aa_{12}a_{23}a_{34}a_{45}a$ jest zamknięty; wielobok sznurowy $Q'J'2'3'4'K'Q'$ jest też zamknięty, układ znajduje się więc w równowadze i z tego powodu każdy inny wielobok sznurowy dla tego układu będzie także zamknięty, więc i wielobok, mający za bok prostą JK. W celu zbudowania takiego wieloboku sznurowego przeprowadzamy przez punkt a prostą L równolegle do JK i obierając na tej prostej dowolny punkt b za biegun, budujemy względem tego bieguna wielobok sznurowy dla układu sił $\overline{p}_1, \overline{P}_2, \overline{P}_3, \overline{P}_4, \overline{p}_2$ przytem bok równoległy do ab przeprowadzamy przez punkty J i K. Otrzymamy w ten sposób wielobok zamknięty $QJ234KQ$. Wielobok $J234K$ można także rozpatrywać jako wielobok sznurowy względem bieguna b dla układu cząstkowego $\overline{P}_2, \overline{P}_3, \overline{P}_4$. Mając biegun b łatwo dokończyć budowę wieloboku sznurowego dla całego danego układu, otrzymamy wielobok sznurowy czyniący zadość postawionym warunkom - przechodzenia boków 12 i 45 przez punkty J i K. Można otrzymać nieskończenie wiele wieloboków sznurowych zadośćczyniących tym samym warunkom, obierając dla każdego z nich na prostej L biegun b i powtarzając powyższą budowę; stąd wnioskujemy, że prosta L jest miejscem geometrycznem biegunów takich wieloboków sznurowych.

Rozpatrzmy jeszcze wypadek, kiedy wierzchołki wieloboku sił określające prostą X ,/jak w powyższym przykładzie a_{12} a_{45}/ wpadają na siebie. Bywa to wtedy, kiedy suma geometryczna sił, leżących pomiędzy danemi punktami równa się zeru t.j. gdy siły te są w równowadze lub tworzą parę, jak np. na rys.89 , siły P_2 i P_3 zawarte między bokami 12 i 34 , które mają przejść przez punkty J i K.

Podany wyżej sposób budowy wieloboku sznurowego w danym wypadku traci sens; daje jednak nam wskazówkę jak postąpić i w tym wypadku; chodzi mianowicie jak i wyżej o utworzenie układu sił $\overline{P}_1, \overline{P}_2, \overline{P}_3, \overline{P}_2$; znajdującego się w równowadze, przytem siły $\overline{P}_1$ i $\overline{P}_2$ mają przechodzić przez punkty J i K i następnie o zbudowanie dla tego układu wieloboku sznurowego, którego jeden bok ma przejść przez punkty J i K. W tym celu, jak i wyżej budujemy pomocniczy wielobok sznurowy $0'1'2'3'4'5'$, następnie przez punkt a_{12} /który wpada na punkt a_{34} / przeprowadzamy prostą X

o dowolnym kierunku i dalej postępujemy jak wyżej.



Rys. 89.

Przez punkt b' przeprowadzamy równoległą do $J'K'$ do przecięcia w punkcie a z prostą X i wprowadzamy w rozważanie siły $\overline{p}_1$ i $\overline{p}_2$, mające za linję działania proste JJ' i KK', a za odcinki $\overline{p}_1 = \overline{aa_{12}}$ i $\overline{p}_2 = a_{34}a$. Układ sił $\overline{p}_1, \overline{P}_2, \overline{P}_3, \overline{p}_2$ jest w równowadze, gdyż wielobok sił $aa_{12}a_{23}a_{34}a$ jest zamknięty i wielobok sznurowy $Q'J'2'3'K'Q'$ jest też zamknięty. Z tego powodu każdy inny wielobok sznurowy dla tego układu jest także zamknięty, więc i wielobok, mający za bok prostą JK. Dla zbudowania tego wieloboku przeprowadzamy przez punkt a prostą L i obieramy na tej prostej dowolny punkt b. Przyjmując go za biegun budujemy wielobok sznurowy $QJ23KQ$, taki, że jeden jego bok przechodzi przez punkty J i K. Otrzymujemy w ten sposób rzłonego wieloboku sznurowego danego układu sił $J23K$, którą łatwo uzupełnić. Prosta L jest więc miejscem geometrycznem takich wieloboków.

Otrzymujemy więc twierdzenie. Jeżeli między wielobokami sznurowemi tego samego układu sił, rozpatrujemy tylko te, których dwa boki $(i-1)i$ i $k(k+1)$ przechodzą odpowiednio przez dwa dane punkty J i K, to miejsce geometryczne biegunów takich wieloboków sznurowych jest prostą równoległą do JK. Prawidło zbudowania miejsca geometrycznego biegunów wieloboków sznurowych, którego boki $i(i+1)$ i $k(k+1)$ mają przejść przez dwa dane punkty J i K będzie następujące.

Budujemy dla układu cząstkowego sił $P_i, P_{i+1}, \ldots, P_k$, które będą się zawierać między bokami $(i-1)i$ i $k(k+1)$, mającemi przejść przez dane punkta J i K dowolny wielobok sznurowy $0'1'2' \ldots n'(n+1)'$ przeprowadzamy przez punkty J i K proste równoległe do prostej X do spotkania się w punktach J' i K' z bokami $(i-1)'i'$ oraz $k'(k+1)'$ powyższego wieloboku sznurowego; prosta X określa się przez wierzchołki wieloboku sił $a_{i-1,i}$ i $a_{k,k+1}$ w wypadku, gdy wierzchołki te są różne, gdy zaś wpadają na siebie, to prosta X jest dowolną prostą, przechodzącą przez wspólny wierzchołek $a_{i-1,i}$; nakoniec przez biegun b' wieloboku pomocniczego przeprowadzamy prostą równoległą do prostej $J'K'$ do spotkania się z prostą X w punkcie a; przez punkt a przeprowadzamy prostą L, równoległą do prostej JK; ta prosta L jest szukanem miejscem geometrycznem.

§.66. Zapomocą powyższego twierdzenia możemy budować wieloboki sznurowe, czyniące zadość warunkom ściśle określającym położenie wieloboków, więc np.

a/ Zbudować wielobok sznurowy przechodzący przez trzy dane punkty tak, żeby bok $i(i+1)$ przechodził przez punkt J, bok $k(k+1)$ przez punkt K i bok $h(h+1)$ przez punkt H. Zapomocą powyższego twierdzenia możemy znaleźć miejsce geometryczne L biegunów wieloboków sznurowych przechodzących przez punkty J i K oraz miejsce L' biegunów wieloboków sznurowych, przechodzących przez punkty K i H. Punkt przecięcia b miejsc geometrycznych L i L' jest biegunem szukanego wieloboku sznurowego. Dla sprawdzenia konstrukcji geometrycznej możemy jeszcze znaleźć przechodzące przez punkt b miejsce geometryczne L'' biegunów wieloboków sznurowych, przechodzących przez punkty J i H.

b/ Zbudować wielobok sznurowy, którego boki przechodzące przez dwa dane punkty J i K i którego jeden bok np. $h(h+1)$ jest równoległy do danej prostej AB.

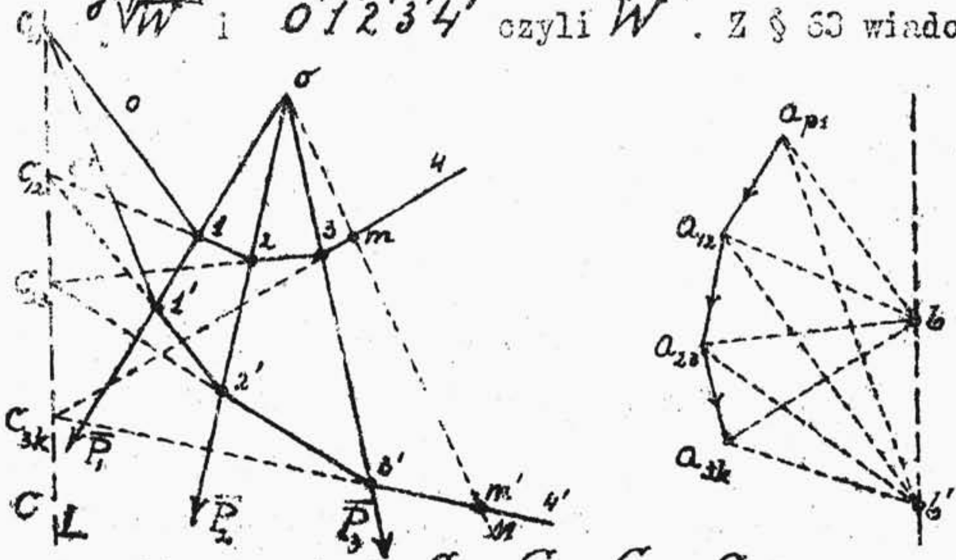
Budujemy miejsce geometryczne L i następnie przez wierzchołek $a_{k,k+1}$ przeprowadzamy promień $ba_{k(k+1)}$ który w przecięciu z L wyznaczy biegun b szukanego wieloboku.

c/ Zbudować wielobok sznurowy, którego boki $i(i+1)$ i $k(k+1)$ mają przechodzić przez dane punkty J i K i dla którego odległość od bieguna /czyli t.zw. odległość biegunowa/ do prostej np. $a_{l(l+1)}a_{m(m+1)}$, łączącej wierzchołki $a_{l(l+1)}$ i $a_{m(m+1)}$ wieloboku sił, jest wielkością daną H .

Szukany biegun b powinien być przedewszystkiem na jednej z dwóch prostych równoległych do $a_{l(l+1)}a_{m(m+1)}$ i położonych w odległości H z jednej i drugiej strony od tej prostej. Prócz tego biegun powinien być na miejscu geometrycznym L . Prosta L przecina dwie pierwsze w dwóch punktach; mamy więc dwa rozwiązania. Dla rozwiązania jednoznacznego powinno być dane położenie bieguna względem prostej $a_{l(l+1)}a_{m(m+1)}$.

§ 67. Zwróćmy uwagę na własności wieloboków sił i sznurowego wrazie pewnych szczególnych przypadków układu sił, mianowicie, gdy dany układ sił stanowi siły, przecinające się w jednym punkcie i gdy dany układ składa się tylko z sił równoległych, jak to bywa przy rozpatrywaniu tylko sił ciężkości.

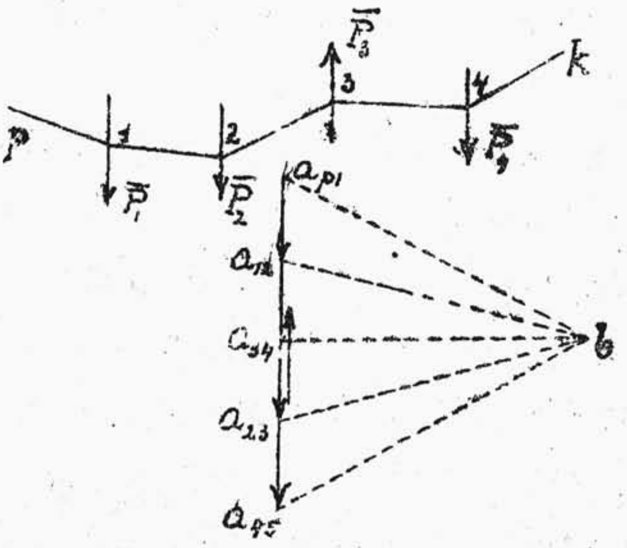
Rozpatrzmy układ sił $\overline{P}_1, \overline{P}_2, \overline{P}_3$, przecinających się w punkcie O. Znajdziemy przecięcia się odpowiednich boków dwóch wieloboków sznurowych: $O1234$ nazwijgo przez VW i $O'1'2'3'4'$ czyli W'. Z § 63 wiadomo, że



punkty przecięcia C_{01}, C_{12}, C_{23}, C_{34} leżą na jednej prostej LC t.zw. osi dwóch wieloboków, równoległej do bb'. Rozpatrując powyższe dwa wieloboki sznurowe W i W' możemy zauważyć następującą odpowiedniość: punkt figury W odpowiada punktowi figury W' np. 1 i $1'$, 2 i $2'$, 3 i $3'$ lub m i m' /na dowolnej prostej M, przechodzącej przez O/; prosta figury W odpowiada prostej figury W' np. $O1$ i $O'1'$, 12 i $1'2'$, $2m$ i $2'm'$; każde dwa punkty odpowiednie znajdują się na prostych, przechodzących przez stały punkt O; każde dwie odpowiednie proste przecinają się na stałej prostej L.

Taka odpowiedniość dwóch figur nazywa się w Geometrji Rzutowej homologją. Stały punkt O nazywa się środkiem homologji, stała prosta L - osią homologji. W wypadku sił równoległych środek homologji i oś homologji /§ 63 / leżą w nieskończoności./x/

Wypadek sił równoległych /rys.91/ nie nasuwa żadnych trudności w budowaniu wieloboku sznurowego. Należy tylko zauważyć, że wielobok sił jest w tym wypadku linją prostą. Na rys.91 wszystkie siły działają zgóry na dół, z wyjątkiem siły $\overline{P}_3$, która działa zdołu do góry. Z tego powodu w wieloboku sił odcinek $a_{23}\,a_{34}$ ma kierunek od dołu do góry.



Rys. 91

/x/ Te właściwości geometryczne wieloboku sznurowego pozwalają oprzeć teorję wieloboków sznurowych na podstawach Geometrji Rzutowej, mianowicie na twierdzeniach o figurach homologicznych. Jednakże metoda taka rozszerzyłaby znacznie ramki wykładu, dlatego w niniejszym wykładzie cała teorja wieloboku sznurowego została oparta tylko na mechanicznych właściwościach.

Zrównoważenie danego układu płaskiego sił przez siły o pewnych danych cechach.

§ 68. Przy wyznaczaniu reakcyj podpór lub połączeń ciała nieswobodnego lub układu ciał spotykamy się z kwestją zrównoważenia układu sił, przyłożonych do ciała sztywnego przez nieznane siły - reakcje, co do których pewne cechy są często znane /§ § 11,16/ Zadanie to jest równoznaczne z zadaniem o rozkładzie danego układu sił na siły o pewnych znanych cechach; różnica polega tylko na tem, że zwroty nieznanych sił będą przeciwne do zwrotów tych sił w pierwszem zadaniu.

Sformułowane zadanie rozwiązywaliśmy analitycznie na podstawie dwóch warunków równowagi, które dla układów płaskich sprowadzały się do trzech równań równowagi: $\Sigma X=0, \Sigma Y=0, \Sigma M=0$ Rozwiązywanie tych zadań drogą wykreślną musi być więc ogólnie oparte na warunkach wykreślnych równowagi, które, jak wiemy /§ 59/ polegają na tem, że: 1/wielobok wszystkich sił, przyłożonych do ciała sztywnego swobodnego, znajdującego się w równowadze, powinien być zamknięty, 2/dowolny wielobok sznurowy tych sił powinien być zamknięty. Rozwiążemy nasamprzód zadania na wyznaczenie reakcyj podpór ciał i belek, podpartych w dwóch punktach, które to zadania w § §.18,19,20 były rozwiązane drogą analityczną. Za-