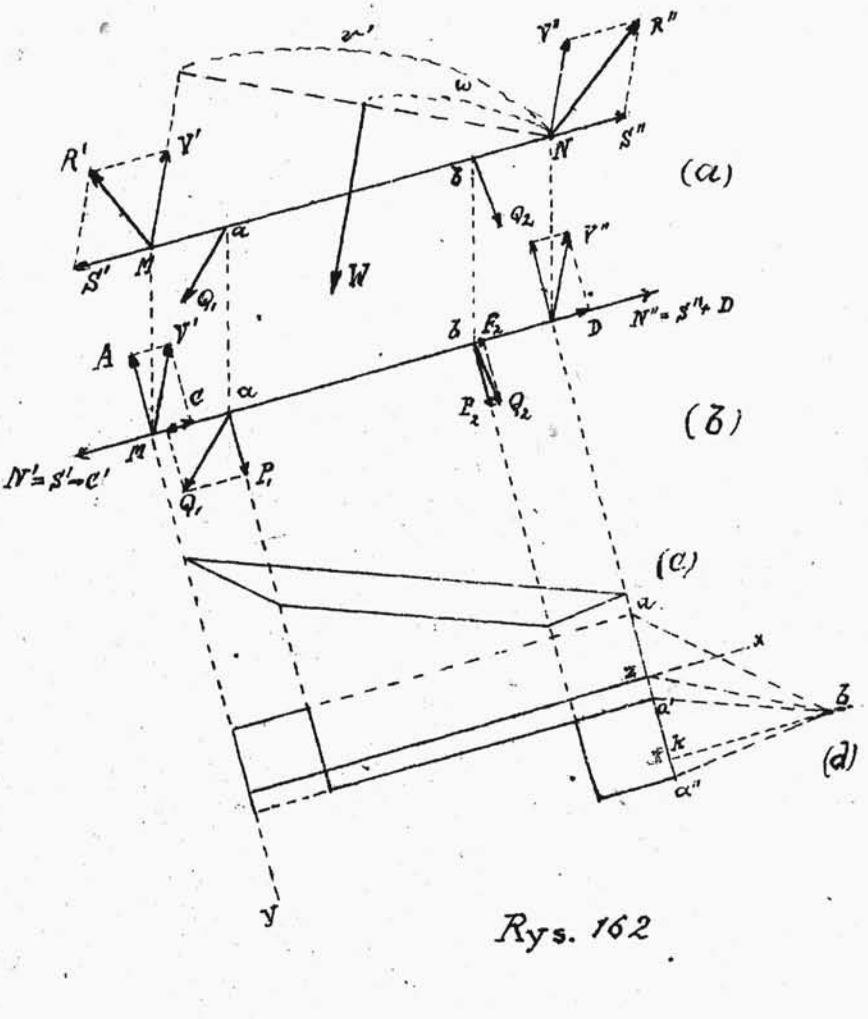
ZGINANIE PRĘTÓW KRATOWNICY PRZEGUBOWEJ W WYPADKU DZIAŁANIA SIŁ NA PRĘTY.

§ 130. Z §§ 43 i 46 wiemy, że jeżeli na pręty kratownicy przegubowej działają siły



Rys. 162

między węzłami, to reakcje węzłów na pręty w takich kratownicach nie działają wzdłuż osi pręta, lecz ukośnie. Na rys.np. 162 wyobrażony jest taki pręt „MN" kratownicy, jako swobodny. Na pręt działają bezpośrednio siły Q_1 i Q_2, posiadające wypadkową W oraz reakcje R' i R'' ze strony węzłów. Z § 43 wiemy, że w takim wypadku zawsze można obliczyć bezpośrednio składowe reakcyj np. V' i V'' równoległe do wypadkowej W, mianowicie:

$$V' = \frac{W w}{v'}; \qquad V'' = \frac{W(v'-w)}{w};$$

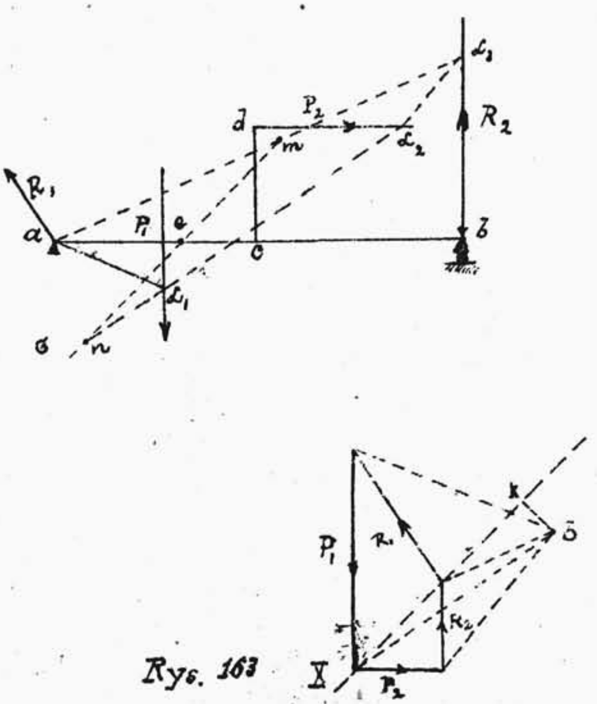
składowe zaś S' i S'', obliczają się natomiast z warunków równowagi całej kratownicy, jako natężenia prętów.

Rozkładając siły V', Q_1, Q_2, V'' /rys.b/ na składowe prostopadłe do osi pręta i wzdłuż osi pręta, otrzymamy, że pręt MN jest zginany przez siły: A, P_1, P_2, B oraz ściskany lub rozciągany przez siły: $N' = S' - C, F_1, F_2, N'' = S'' + D$. Elementy zgięcia, mianowicie moment gnący M oraz siła tnąca T dla powyższych sił gnących są wyobrażone w sposób znany na rys.c i d. Ściskanie lub rozciąganie jest tutaj różne na odcinkach pręta Ma, ab i bN.

Z powyższego **widzimy**, że w rozważanym wypadku prócz zgięcia kratownicy, jako całości /§§ 97 i 98/ mamy jeszcze zgięcie oddzielnych prętów kratownicy.

PARY SIŁ ZEWNĘTRZNE.

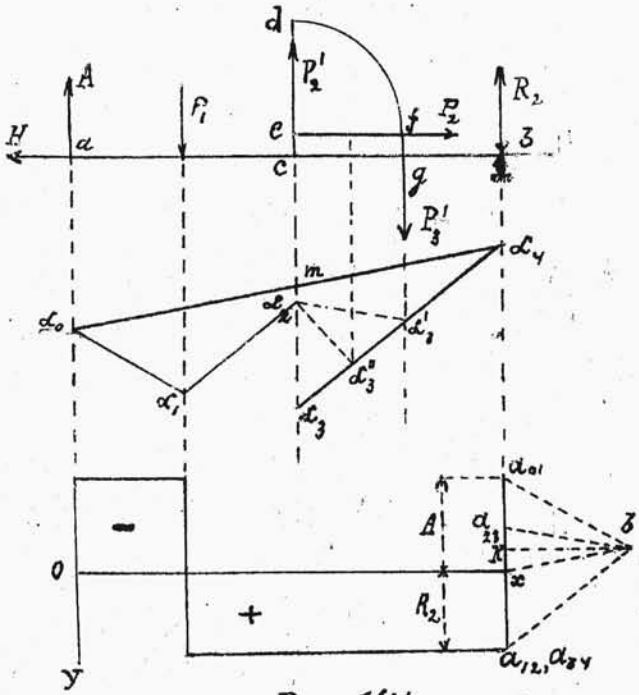
§ 131. W wykresach momentów rozpatrzonych powyżej przyjmowaliśmy, jako obciążenie siły skupione lub ciągłe. Może się jednak spotkać obciążenie takie i w postaci pary sił. Niech na belkę ab działa siła pionowa



Rys. 163

P_1 i pozioma P_2, przyczem siła P_2 działa na punkt d pręta cd, sztywnie zmocowanego w punkcie c z belką. Reakcje R_1 i R_2

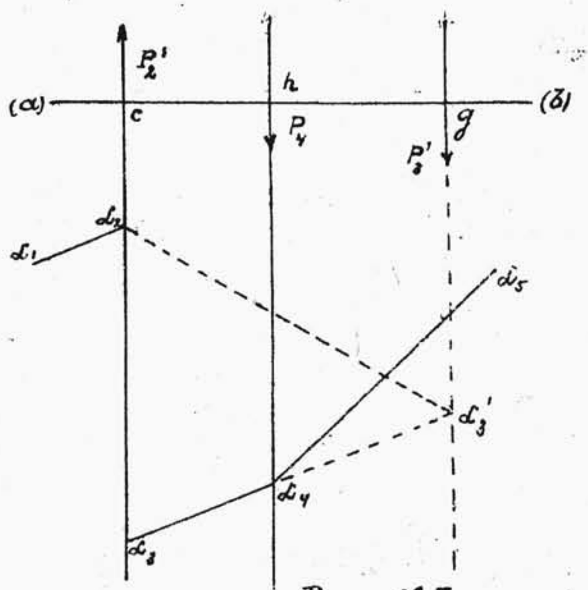
znajdziemy tutaj w sposób znany, budując wielobok sznurowy $a\,\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3$ przez punkt a. Moment gnący, w dowolnym punkcie e otrzymamy w sposób ogólny /§ 95/, jako moment sił R_1 i P_1 względem punktu e, mianowicie będzie $M = mn \cdot kb$. Łatwo jednak



Rys. 164

dany wypadek sprowadzić do wykresów tylko sił pionowych, rozpatrzonych powyżej. - W tym celu wyobraźmy sobie, że do pręta cd jest przymocowana bryła sztywna def przytem $ce = gf$ są wielkość. niesk. małemi. Następnie zastąpimy daną siłę P_2, siłą P_2', zaczepioną do punktu e i parą sił pionowych P_2' i $P_3' = P_2'$, takich, że $P_2 \cdot de = P_2' \cdot ef$. Oczywiście, że składowa H reakcji R_1 równoważy się z P_2, składowa zaś A i reakcja R_2

równoważą się z P_1, P_2' i P_3'. Reakcje A i R_2 znajdujemy w sposób znany, jak pokazano na rys. zapomocą wieloboku sił $b\,a_{01} \dots a_{34}$ i wieloboku sznurowego $\alpha_0\,\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3'\,\alpha_4\,\alpha_0$. Ten wielobok sznurowy byłby wykresem momentów gnących, gdyby siły P_1, P_2', P_3' działały bezpośrednio na belkę, oczywiście on zachowuje i w danym wypadku tę własność, lecz tylko na odcinkach ac i gb. W punkcie c belki jest przyłożona para zewnętrzna (P_2', P_3'), dla tej pary wielobokiem sznurowym jest $\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3'\,\alpha_4$, zatem moment jej M_0 równa się $\alpha_2\alpha_3 \times kb$. Moment gnący nieskończenie blisko od c nalewo jest $m\alpha_2 \cdot kb$ - naprawo zaś $m\alpha_2 \cdot kb + M_0 = (m\alpha_2 + \alpha_2\alpha_3)\,kb$, t.j. wykres momentów ma w tym punkcie przerwę ciągłości o $\alpha_2\alpha_3$. Parę sił zewnętrzną z momentem M_0 możemy sobie przedstawić inaczej niż na rysunku, możemy mianowicie zmniejszać ramię ef, powiększając równocześnie siły P_2' i P_3' tak, żeby $P_2' \cdot ef = M_0 = \text{const.}$, przytem położenie siły P_2' niech pozostaje na miejscu, a zmienia się położenie P_3'. Przy zmniejszeniu ef odcinek cg zmniejsza się, punkt α_3' przechodzi w α_3'', a w granicy przy $ef = 0$ punkt α_3' przejdzie w α_3. W granicy wielobok sznurowy $\alpha_2 \alpha_3 \alpha_4$ naprawo od c przejdzie w jeden bok $\alpha_3 \alpha_4$. W punkcie c będzie przerwa ciągłości o $\alpha_2 \alpha_3$.



Rys. 165

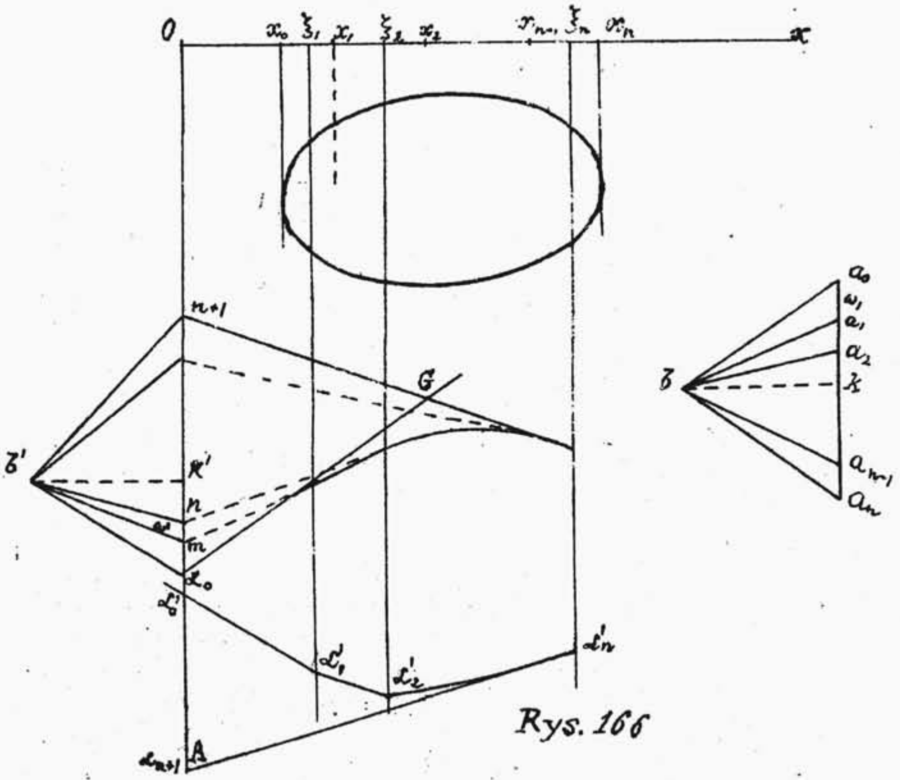
Gdyby na odcinku cg były siły bezpośrednio działające na belkę, np. P_4 /rys.165/, to budujemy wykres podobnie. Nasamprzód

$\ldots \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3' \alpha_4 \alpha_5 \ldots$

wykres ten jest słuszny na odcinkach ac i gb. Przy zmniejszaniu ramienia cg pary do zera, pozostawiając punkt c na miejscu, punkt α_3' będzie się przenosił wzdłuż prostej $\alpha_3 \alpha_3'$, aż do punktu α_3 i wielobok sznurowy naprawo od c w granicy będzie wielobokiem $\alpha_3 \alpha_4 \alpha_5$, który jest wykresem momentów naprawo od c. W punkcie c otrzymujemy przerwy ciągłości o $\alpha_2 \alpha_3$.

WYKREŚLNE WYZNACZANIE MOMENTÓW STATYCZNYCH, ŚRODKÓW CIĘŻKOŚCI I MOMENTÓW BEZWŁADNOŚCI BRYŁ PŁASKICH.

§ 132. Mamy bryłę płaską, którą odnosimy do osi Oxy. Przyprowadzamy styczne, równoległe do Oy, przecinające oś Ox w x_0 i x_n, następnie dzielimy przedział $x_0 x_n$ na n małych części Δx_1, Δx_2,...Δx_n przez punkty x_1,



Rys. 166

x_2,.... x_{n-1} . Moment pola bryły czyli t.zw. moment statyczny pola bryły względem osi

Oy nazywa się następująca całka określona:

$$S = \int_{\Omega} x\,d\omega = \sum_i \int_{\omega_i} x\,d\omega$$

gdzie Ω płaszczyzna pola, ω lub ω_i - płaszczyzna wycinka pola między x_{i-1} i x_i. Na podstawie twierdzenia o wartości średniej

$$\int x\,d\omega = \xi \int d\omega = \xi \cdot \omega$$

przytem

$$x_{i-1} < \xi < x_i$$

A zatem $S = \sum \xi \cdot \omega$. W przybliżeniu można przyjąć np.

$$\xi_i = \frac{1}{2}(x_{i-1} + x_i) \quad , \quad \omega = (x_i - x_{i-1})\,\eta_i$$

gdzie η_i odcinek prostej $x = \xi_i$ przez kontur bryły.

Sumę $\sum \xi_i \cdot \omega$ można rozważać, jako sumę momentów sił ω równoległych do Oy i działających wzdłuż prostych $x = \xi$. Na podstawie § 95 moment ten można znaleźć wykreślnie zapomocą wieloboku sił $b\, a_0\, a_1 \ldots a_n$ i wieloboku sznurowego $\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_n \alpha_{n+1}$, mianowicie mamy:

$$S = \sum \xi \cdot \omega = \sum M(\omega) = kb \cdot \alpha_0 \alpha_{n+1}$$

Rozpatrując S względem różnych osi równoległych do Oy, widzimy, że S będzie 0, gdy oś przejdzie przez punkt G - przecięcie $\alpha_0 \alpha_1$ i $\alpha_n \alpha_{n+1}$. Stąd widać, że środek ciężkości bryły leży na prostej równoległej do Oy i przechodzącej przez G. Obierając oś Oy w innym kierunku otrzymamy drugą prostą, posiadającą tę samą własność, na przecięciu tych prostych leży środek ciężkości bryły. Zauważmy, że moment statyczny jednego paska bryły t.j. $\int x\,d\omega$ czyli w przybliżeniu $\xi \cdot \omega$ jest to iloczyn $mn \cdot kb$, gdzie mn odcinek na osi Oy, przez odpowiednie boki wieloboku sznurowego, przecinające ω.

§ 133. Moment bezwładności bryły względem osi Oy jest to całka

$$J = \int_{\Omega} x^2 d\omega = \sum \int_{\omega_i} x^2 d\omega$$

Na podstawie twierdzenia o wartości średniej

$$\int_{\omega i} x^2 d\omega - \xi' \int x d\omega = \xi' \cdot mn \cdot kb \quad \ldots\ldots \quad (\alpha)$$

przyczem $x_{i-1} < \xi' < x_i$, w przybliżeniu, ponieważ Δx są małe, przyjmiemy $\xi' = \xi = \frac{1}{2}(x_{i-1}+x_i)$. Mamy wtedy

$$J = \sum \xi \cdot mn \cdot kb = kb \cdot \sum \xi \cdot mn = kb \cdot S',$$

gdzie S' znowu można rozpatrywać, jako moment statyczny sił $mn = \omega'$, działających wzdłuż prostych $x = \xi$. Wielkości $\omega' = mn$ są to wielkości kolejnych odcinków $\alpha_0 m$, $mn_1, \ldots\ldots$ jakie na prostej Oy odcinają boki $\alpha_0 \alpha_1$, $\alpha_1 \alpha_2, \ldots\ldots$. Chcąc wyznaczyć wykreślnie S', postępujemy jak powyżej, dla wieloboku sił $\alpha_0 mn \ldots\ldots \alpha_{n+1}$ obieramy biegun b' i budujemy wielobok sznurowy $\alpha_0' \alpha_1' \ldots\ldots \alpha_n' \alpha_{n+1}'$. Moment S' będzie się równać $S' = \alpha_0' \alpha_{n+1}' \cdot k'b'$ a zatem

$$J = kb \cdot S' = kb \cdot k'b' \cdot \alpha_0' \alpha_{n+1}'$$

Powyższy sposób został podany przez Culmanna; Mohr uczynił w nim następującą modyfikację.

Widzieliśmy powyżej, że J może być wyrażone w przybliżeniu, jako suma $J = kb \cdot \Sigma \xi \cdot mn$

Każdy iloczyn $\xi \cdot mn$ jest podwojoną płaszczyzną trójkąta, mającego za wierzchołek α_i i za podstawę odpowiedni odcinek mn, odcięty na prostej $\alpha_0 \alpha_{n+1}$ przez boki $\alpha_{i-1} \alpha_i$ i $\alpha_i \alpha_{i+1}$, np. $\xi_2 \cdot mn = 2 pl.(\alpha_2 mn)$. A zatem

$$J = 2kb \Sigma \, pl.(\alpha_i \, m \, n) =$$

$$= 2 \, kb \cdot pl.(\alpha_0 \alpha_1 \ldots \alpha_n \alpha_{n+1} \alpha_0).$$

ROZDZIAŁ III.

PARCIE ZIEMI.

PODSTAWY TEORJI NAPRĘŻEŃ W ŚRODOWISKU.

§ 134. Zanim przejdziemy do właściwego zagadnienia, podamy pewne zasadnicze pojęcia z teorji sprężystości. Przedewszystkiem zajmiemy się określeniem "naprężenia". Wyobraźmy sobie dowolne ciało, sztywne lub nie, będące w równowadze pod działaniem sił zewnętrznych i uważajmy je za środowisko ciągłe, Przetnijmy to ciało w myśli dowolną powierzchnią i rozważajmy warunki równowagi jednej z wyodrębnionych w ten sposób części.

Na mocy zasady oswobodzenia od połączeń, musimy dla zachowania równowagi, zniszczone przez przecięcie połączenia zastąpić przez siły. Siły te, przy założeniu ciąg-