Przyjmując np. w pręcie 1 dla natężenia dowolną wielkość $b\alpha$ i przyjmując, że jest ściskające, możemy cały wykres wykon..., jak pokazano na rys.116.

Jak widać, może być nieskończenie wiele takich wykresów w zależności od dowolnego natężenia w jednym z prętów np. $b\alpha$ /na rys.116 pokazane są inne wykresy $abcd,\alpha'\beta'\gamma'\delta'$ i $abcdaA$/. Zadanie jest więc nieokreślone; geometryczne miejsce wierzchołków α jest to prosta (α), wierzchołków β - (β), - γ - (γ), - δ - (δ), jednak wykres natężeń, jako figura wzajemna, istnieje. Zadanie dopiero stanie się określone, jeżeli, jak wspominaliśmy w § 21, przyjmiemy pod uwagę przyrodę materjału, z którego są wykonane pręty, mianowicie ich sprężystość. Zbadanie zadania z tego punktu widzenia określi, który z prostokątów $\alpha\beta\gamma\delta$ wykresu odpowiada założeniom zadania. Kwestją tą zajmiemy się w Cz.II Kursu.

Krzywe sznurowe.

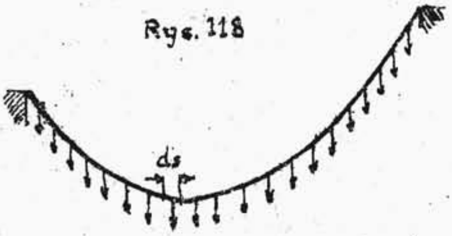
§ 89. Wśród rozmaitych rodzajów obciążeń, z któremi można się spotkać przy rozwiązywaniu zagadnień ze statyki budowlanej, zasługuje na uwagę wypadek, kiedy na ciało działają siły nie skupione o wartości skończonej, a przeciwnie rozłożone na sposób ciągły wzdłuż krzywej /ogólnie [illegible] przedstawia zbiór punktów zaczepienia owych sił. W przytoczony sposób działa np. parcie wiatru na

Rys. 117a

Rys. 117b

Rys. 117c

dach dowolnego kształtu, jak to widać z rys.117 a, lub parcie wody na tamę, jak na rys.117 b.i 117 c. lub siła ciężkości na nić materjalną, zawieszoną w dwóch punktach - rys.118.

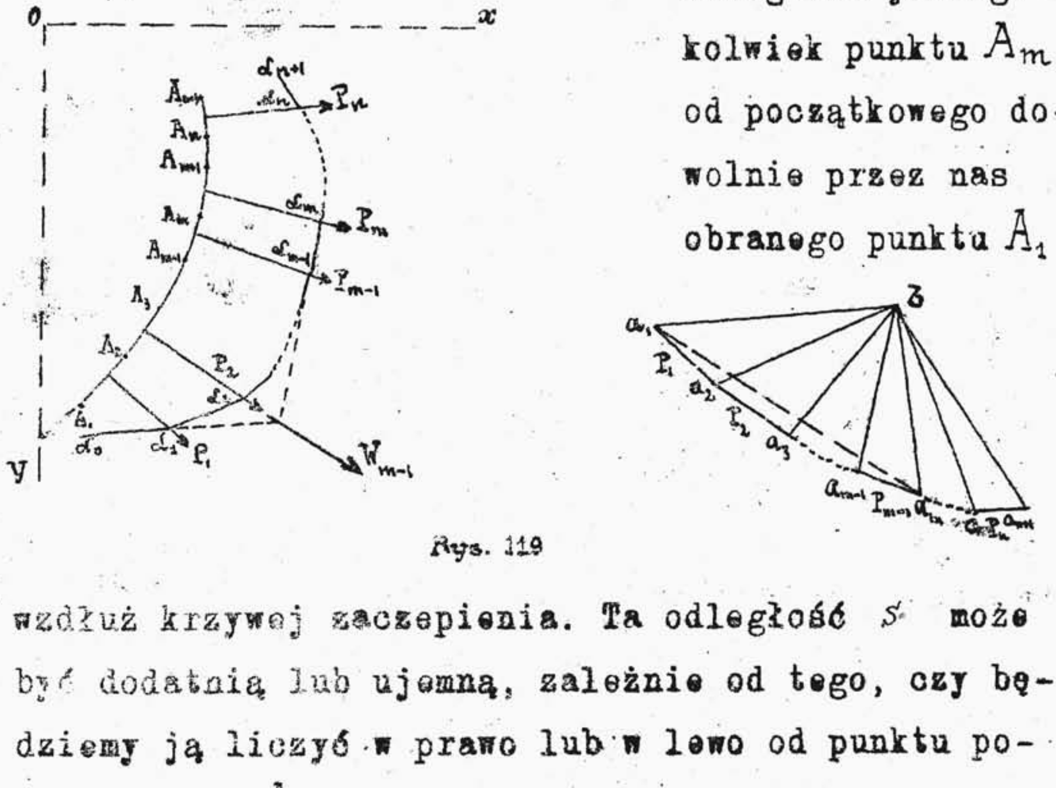


Rys. 118

Należy zauważyć, że siły te w całości przedstawiają wartość skończoną, lecz dla wyznaczenia warunków równowagi przy takiem obciążeniu należy podzielić linję zaczepienia tego obciążenia c i ą g ł e g o , jak go nazywamy, na nieskończenie małe elementy ds i wtedy na taki mały element będzie działać siła również nieskończenie mała. Wartość i kierunek każdej z tych nieskończenie małych sił dla rozmaitych punktów linji zaczepienia są ogólnie biorąc różne i zależne od kształtu linji zaczepienia i od rodzaju obciążenia.

Wyobraźmy sobie taką linję zaczepienia kształtu zupełnie dowolnego /rys.119/, odniesioną do dowolnego również układu spółrzędnych OXY. Nazwiemy tę linję kierownicą.

Wybierzmy na tej linji zaczepienia dowolny punkt A_1. Pod wielkością S będziemy rozumieć odległość jakiegokolwiek punktu A_m od początkowego dowolnie przez nas obranego punktu A_1



Rys. 119

wzdłuż krzywej zaczepienia. Ta odległość S może być dodatnią lub ujemną, zależnie od tego, czy będziemy ją liczyć w prawo lub w lewo od punktu początkowego A_1. Przypuśćmy, że na pewien nieskończenie mały odcinek ds działa w płaszczyźnie XOY nieskończenie mała siła P. Siła ta jest proporcjonalna do ds. Wartość i kierunek tej siły jest zależna od położenia odcinka ds, czyli jest funkcją wartości S t.j. $P = f(S)\,ds$. Jak widać $f(S)$ jest to obciążenie jednostkowe, t.j. prz ndające na jednostkę długości linji zaczepienia w danym punkcie. Składowe siły P wzdłuż osi X i Y są także odpowiedniemi funkcjami s i $P_x = \varphi(s)\,ds$, $P_y = \psi(s)\,ds$. Postać tych funkcji φ i ψ niech nam będzie znana, zbadamy jak będzie wyglądać dla takiego układu sił wielobok sił i wielobok sznurowy?

Dzielimy nasamprzód naszą linję obciążenia nie na nieskończenie małe, a na małe lecz skończone odcinki krzywolinjowe A_1A_2, A_2A_3, ... A_mA_{m+1}, ... A_nA_{n+1}.

Niech w pewnym punkcie środkowym każdego z tych odcinków działają siły $P_1, P_2, \ldots P_{m-1}, P_m, \ldots P_n$.

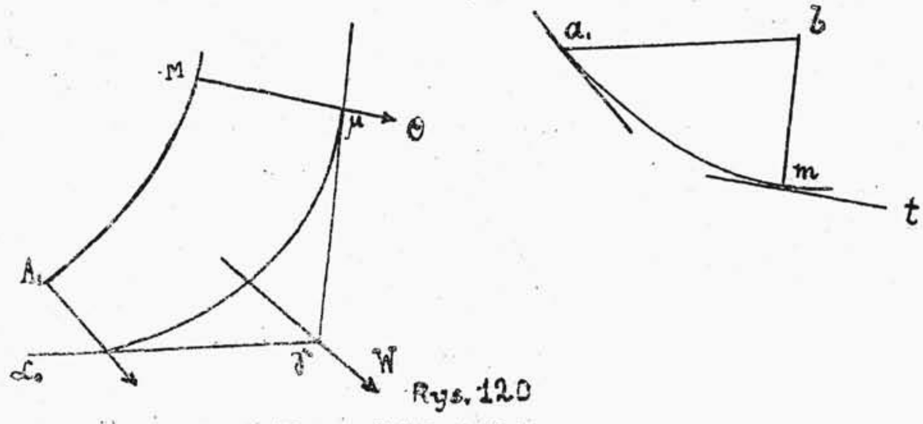
Dla każdej z tych sił, na podstawach wyżej wyłuszczonych, składowe otrzymamy według prawa wyrażonego ogólnie:

$$P_{mx} = \varphi(A_1A_m)\,A_mA_{m+1}\ ; \quad P_{my} = \psi(A_1A_m)\,A_mA_{m+1}$$

Dla układu sił $P_1, P_2, \ldots P_m, \ldots P_n$ w ten sposób określonego, wieloboki sił i sznurowy będą w zupełności określone z chwilą, gdy przyjmiemy początkowe ich punkty a_1 i a_0 oraz biegun wieloboku sił b.

Zagadnienie sprowadza się teraz do wykazania, jaką postać przyjmą wieloboki sił i sznurowy, jeżeli zaczniemy ilość odcinków krzywej A_1A_{n+1} zwiększać do nieskończoności, a długość tych odcinków tym samym zmniejszać do zera.

Rozpatrzmy wielobok sił; wiadomo, że odcinek $a_1 a_m$ równa się wypadkowej sił: $P_1, P_2, \ldots P_{m-1}$, stanowiących obciążenie częściowe od punktu A_1 do punktu A_m. Przy procesie rozdrabniania odcinków $A_{i-1} A_i$ i pozostawienia punktu A_m na miejscu, powiększy się ilość poszczególnych sił $P_1, P_2, \ldots$ i same siły te zaczną się zmniejszać. W granicy ostatnia z prawej strony nieskończenie mała siła P_{m-1} przejdzie przez punkt A_m; oznaczamy go przez M /rys. 120/ i za linję działania będzie miała prostą $M\Theta$.



Rys. 120

Punkt a_m w granicy zajmie położenie punktu m, punkt C - położenie γ przy pozostawieniu kierunku $\mathcal{L}_0\mathcal{L}_1$ niezmiennym. Wielkość wypadkowej W_{m-1} czyli odcinka $a_1 a_m$ w granicy będzie $a_1 m$, samą wypadkową w granicy oznaczymy przez W, siła ta przechodzi przez punkt γ i równa się odcinkowi $a_1 m$.

Miejsce geometryczne punktów m, otrzymanych w powyższy sposób, zmieniając punkt A_m od A_1 do A_{n+1}, czyli zmieniając długość łuku S, będzie pewną krzywą linją (m) ściśle określoną. Do krzywej tej dąży w granicy wielobok sił przy zmniejszaniu się odcinków $a_{m-1}\,a_m$ do zera. Krzywą (m) będziemy nazywać krzywą sił.

Przejdźmy teraz do określenia granicy wieloboku sznurowego. Podobnie, jak wyżej, pozostawimy punkt A_m na miejscu, oznaczywszy go przez M i będziemy szukać, jakie położenie zajmie punkt $\mathcal{L}_{m-1}$, jeżeli będziemy zmniejszać do zera wielkość odcinków $A_{i-1}A_i$. W myśl przed chwilą wypowiedzianej uwagi co do kierunku sił, twierdzimy, że siła P_{m-1} w granicy będzie równoległa do stycznej mt do krzywej sił w punkcie m t.j. ma za linję działania prostą $M\Theta$. Pozostaje stwierdzić, jakie będzie położenie graniczne punktu $\mathcal{L}_{m-1}$? Wyznaczymy go w ten sposób: wiadomo, że punkt C linji działania wypadkowej W_{m-1} /rys. 119/ znajdziemy, przedłużając ostatnie 2 boki wieloboku sznurowego /układu cząstkowego/ $\mathcal{L}_0\mathcal{L}_1$ i $\mathcal{L}_{m-1}\mathcal{L}_m$. Zauważmy, że wymienione ostatnie boki są równoległe do promieni krańcowych wieloboku sił ba_1 i ba_m. Możemy więc powiedzieć odwrotnie, że punkt $\mathcal{L}_{m-1}$ można wyznaczyć, przedłużywszy pierwszy bok wieloboku sznurowego $\mathcal{L}_0\mathcal{L}_1$ do przecięcia się z linją działania wypadkowej W_{m-1} w punkcie C i przeprowadziwszy z tego punktu C równoległą do ostatniego promienia biegunowego $b a_m$ aż do przecięcia się z linją działania ostatniej siły P_{m-1} w punkcie α_{m-1}

W granicy 1 bok $\alpha_0 \alpha_1$ pozostaje na miejscu, punkt C przechodzi w γ, prosta $C\alpha_{m-1}$ przechodzi w $\gamma\mu$ równoległe do mt, w granicy linja działania siły P_{m-1} przechodzi w $M\theta$, graniczne więc położenie punktu α_{m-1} określi się jako przecięcie przed chwilą określonej prostej $\gamma\mu$ i prostej $M\theta$ przechodzącej przez punkt M i równoległej do stycznej mt. Punkt ten oznaczmy przez μ. To samo można powiedzieć o punkcie α_m przy pozostawieniu punktu A_m na miejscu i zmniejszaniu odcinków elementarnych do zera, granicą punktu A_{m+1} będzie A_m czyli M, granic zaś punktu α_m określi się jak wyżej, będzie nią punkt μ. Zmieniając położenie punktu A_m czyli M otrzymamy miejsce geometryczne punktów μ, które nazywamy krzywą sznurową.

W ten sposób każdemu punktowi M kierownicy odpowiada punkt μ krzywej sznurowej, który to punkt jest granicą odpowiedniego punktu α_{m-1} wieloboku

---

sznurowego. Krzywa sznurowa jest więc granicą wieloboku sznurowego

Udowodnimy jeszcze, że zbudowana w powyższy sposób prosta γ^M jest styczną do krzywej sznurowej w punkcie M. Rzeczywiście przy rozdrabnianiu elementarnych odcinków i pozostawieniu punktu A_m czyli M na miejscu, kierunek siły P_m, podobnie jak i kierunek P_{m-1}, dąży do MO i punkt α_m dąży do M. Wielobok $\alpha_0 \alpha_1 \ldots \alpha_{m-1}$ dąży w granicy do krzywej sznurowej (M), każdy bok tego wieloboku $\alpha_{m-1} \alpha_m$, będący elementem wieloboku w granicy stanie się elementem łuku krzywej, czyli styczną i przejdzie, jak zauważyliśmy, przez właściwy punkt M krzywej sznurowej. Kierunek tej stycznej będzie granicą kierunku $\alpha_{m-1}\alpha_m$. Kierunek boku $\alpha_{m-1}\alpha_1$ jest to prosta $c\alpha_{m-1}$ stale równoległa do ba_m. W granicy kierunkiem boku $\alpha_{m-1}\alpha_m$ będzie granica $c\alpha_{m-1}$, czyli prosta γ^M, równoległa do bm.

Zasadnicze własności krzywej sznurowej.

§ 90. Jeżeli podzielić krzywą punktów zaczepienia sił obciążenia ciągłego na odcinki A_1A_2, $A_2A_3 \ldots$ o wartościach skończonych i takich, że dla każdego odcinka możemy ściśle wyznaczyć wypadkowe W_1, $W_2 \ldots$

i zbudować dla tych wypadkowych cząstkowych wieloboki sił i sznurowy, to:

1/ krzywa sił dla obciążenia ciągłego jest opisana na zbudowanym wieloboku sił wypadkowych cząstkowych;

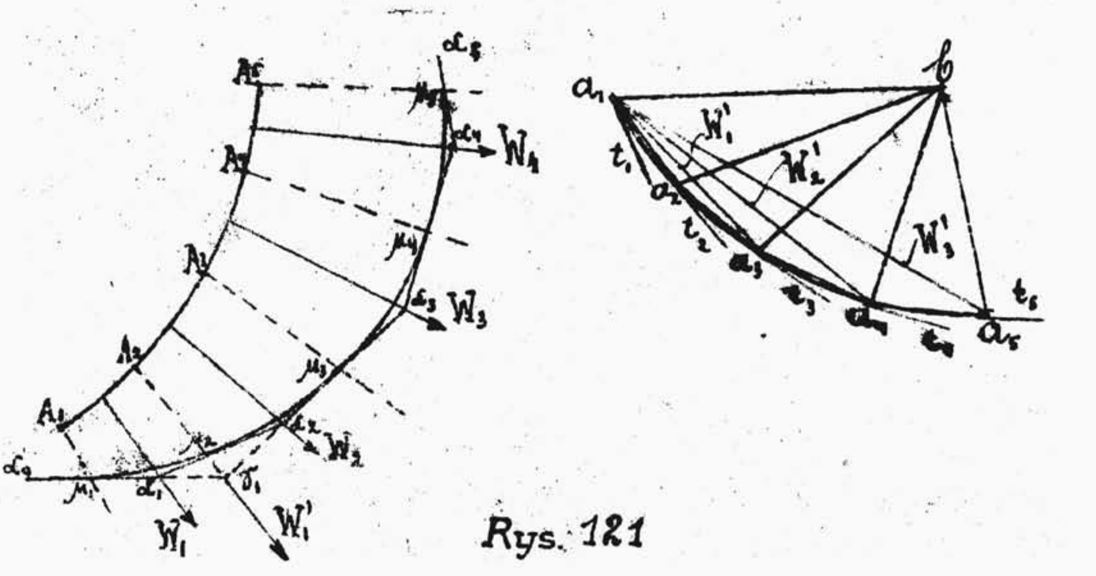
2/ krzywa sznurowa obciążenia ciągłego jest wpisaną w wielobok sznurowy, zbudowany dla wypadkowych cząstkowych;

3/ punkty styczności krzywej sznurowej i wieloboku sznurowego wyznaczają się, jako przecięcia odpowiednich boków wieloboku sznurowego z odpowiedniemi prostemi $A_1\mu_1$, $A_2\mu_2$, ..., przeprowadzonemi z punktów podziału krzywej zaczepienia sił, równolegle do stycznych do krzywej sił w punktach $a_1, a_2, \ldots$, które są wierzchołkami wieloboku sił wypadkowych W_1, W_2 .

Dla wykazania powyższego podzielmy krzywą zaczepienia sił np. na 4 części: A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4 i A_4A_5 . Wyznaczmy wypadkowe obciążeń, przypadających na każdą z tych części W_1, W_2, W_3 i W_4 . Zbudujmy dla nich wieloboki sił $a_1\, a_2\, a_3\, a_4\, a_5$ i wielobok sznurowy $\mathcal{L}_0\, \mathcal{L}_1\, \mathcal{L}_2\, \mathcal{L}_3\, \mathcal{L}_4\, \mathcal{L}_5$.

Pierwsze z przytoczonych twierdzeń staje się oczywistem po następujących rozważaniach: odcinek wypadkowej dwóch sił W_1 i W_2 na wieloboku sił zaczyna się w punkcie a_1, a kończy się w punkcie a_3, wypadkowa 3 sił W_1, W_2 i W_3 również zaczyna się w punkcie a_1, a kończy się w punkcie a_4, podobnie wypadkowa wszystkich sił W_1, W_2, W_3 i W_4. Z określenia więc krzywej sił widać, że te punkty, w których kończą się wypadkowe W_1', W_2', W_3' muszą leżeć na krzywej sił, a więc krzywa sił przechodzi przez wierzchołki wieloboku sił, czyli jest opisana na wieloboku sił.

Dla wykazania słuszności drugiego i trzeciego twierdzenia wystarczy dowieść, że np. punkt μ_3, otrzymany jako przecięcie prostej $A_2\mu_3$ równoległej do stycznej a_3t_3 do krzywej sił w punkcie a_3, należy do krzywej sznurowej i że styczną



Rys. 121

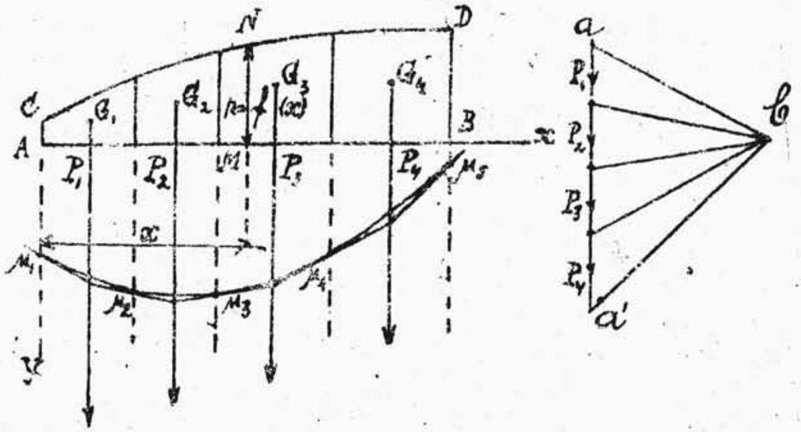
do krzywej sznurowej w punkcie μ_3 jest bok $\alpha_2\alpha_3$.

W tym celu rozpatrzmy cząstkowy układ nieskończenie małych sił, mających punkty zaczepienia na łuku $A_1 A_3$. Wypadkowa W_1' tych sił przechodzi przez punkt γ_1 w przecięciu się boków $\alpha_0\alpha_1$ i $\alpha_2\alpha_3$. Na mocy określenia krzywej sznurowej punkt μ_3 na przecięciu się prostej $\gamma_1\alpha_3$ równoległej $b a_3$ z kierunkiem $A_3\mu_3$ siły w punkcie A_3 równoległym do stycznej $a_3 t_3$ jest punktem krzywej sznurowej. Następnie, na podstawie uwagi w końcu § 89, prosta $\gamma_1\mu_3$ jest styczna do krzywej sznurowej w punkcie μ_3.

Siły równoległe.

§ 91. Szczególny przypadek obciążenia ciągłego, otrzymamy wtedy, jeżeli wszystkie nieskończenie małe siły będą równoległe do siebie; takie obciążenie np. będzie przedstawiać ciężar własny belki; również tłum ludzi przyjęto uważać za obciążenie ciągłe pionowe, obciążeniem ciągłem będzie także parcie wody na ściankę prostolinijną i t.p.

Szczegóły tego wypadku rozpatrzmy na następującym przykładzie. Niech krzywą zaczepienia sił czyli kierownicą będzie prosta AB /wyobrażająca np. oś belki prostej na dwuch podporach/rys.122. Podzielmy prostą AB na małe części $\Delta x_1, \Delta x_2 \dots$ i przypuśćmy, że na każdy z tych odcinków działa mała siła $\Delta q_1, \Delta q_2, \dots$ Dla każdego odcinka Δx obciążenie średnie na jednostkę długości będzie $p_s = \frac{\Delta q}{\Delta x}$. W granicy przy zmniejszaniu się Δx do zera, otrzymamy dla każdego punktu o odciętej x odpowiednią wielkość:



Rys. 122

$$p = \lim p_s = \lim \frac{\Delta q}{\Delta x} = \frac{dq}{dx} .$$

Wielkość ta będzie obciążeniem w danym punkcie w odniesieniu do jednostki długości. Przy obliczeniach obciążenie ciągłe mierzy się tą wielkością p t.j. siłą na jednostkę długości, a więc np. p tn/m. lub p kg/m. Wielkość p może być różna dla różnych punktów krzywej zaczepienia, wogóle więc jest funkcją odległości od jakiegokolwiek dowolnego punktu krzywej zaczepienia. W rozpatrywanym przykładzie niech będzie $p = f(x)$. Jeżeli obliczymy p w każdym miejscu prostej AB, wystawimy odpowiednio w każdym miejscu prostopadłe, na tych prostopadłych poodcinamy odcinki, zawierające tyle jednostek długości, ile jednostek wynoszą obciążenia w tych miejscach, to końce tych odcinków dadzą nam krzywą, wyrażającą prawo zmienności p. W każdym tedy punkcie M w odległości x od punktu 0 działa siła $p\,dx = f(x)\,dx = dq$.

Na pewnej długości AM działa siła $q = \int_0^x f(x)\,dx$ czyli wartość jej mierzy się polem, ograniczonym krzywą CND, pionowemi AC i MN i prostą AB czyli zawiera tyle jednostek sił, ile jednostek powierzchniowych zawiera wymienione pole. Siła ta oczywiście ma za punkt zaczepienia środek ciężkości tegoż pola.

Ustaliwszy te zasadnicze pojęcia podzielmy prostą AB na kilka części np. 4. Pole $ACDB$ podzielmy odpowiedniemi pionowemi również na 4 części, dla każdej z nich znajdźmy w jakikolwiek sposób środek ciężkości, niech to będą punkty G_1, G_2, G_3 i G_4. Przez te punkty będą przechodzić wypadkowe sił, działających na odpowiednich odcinkach prostej AB.

Przyjmijmy, że obciążenie jest pionowe, więc i wypadkowe P_1, P_2, P_3 i P_4 również są pionowe. Zbudujmy dla nich wielobok sił i wielobok sznurowy zupełnie zresztą dowolne. Wielobok sił przyjmie postać prostej. W myśl metody wskazanej w §§ 89 i 90 przejdźmy teraz do krzywej sił i krzywej sznurowej. Krzywa sił jako opisana na wieloboku sił, w danym razie pozostanie prostą, tak że styczne do niej w wierzchołkach wieloboku sił wpadną na tę prostą. Przeprowadźmy teraz przez punkty podziału prostej AB proste równoległe do odpowiednich stycznych do krzywej sił, w danym razie linje pionowe /na rysunku kreskowane/. Punkty przecięcia się tych prostych z bokami zbudowanego poprzednio wieloboku sznurowego dadzą szereg punktów M, które jak wiemy są temi punktami, w których krzywa sznurowa jest styczną do odpowiednich boków. Wystarczy teraz przeprowadzić możliwie ciągłą krzywą, styczną do boków wieloboku sznurowego w punktach M i krzywa ta będzie z pewną dokładnością przedstawiać krzywą sznurową. Oczywiście dokładność jej będzie wzrastać z powiększeniem się ilości punktów styczności M, a więc i ilości części na które dzielimy prostą AB. Im więcej tych części, tym krzywa dokładniejsza. Lecz w praktyce ilość tych części nie trzeba robić zbyt wielką, gdyż dokładność określenia punktów μ nie powinna przewyższać dokładności technicznego wykonania samej krzywej /zazwyczaj przy pomocy krzywika/.

Jest rzeczą oczywistą, że między wielobokiem sznurowym a krzywą sznurową i wielobokiem sił a krzywą sił istnieje zupełna analogja, która polega na tym, że każdemu bokowi wieloboku sił odpowiada pewna styczna do krzywej sił, bokom zaś wieloboku sznurowego odpowiadają styczne do krzywej sznurowej. Z tego powodu wszystkie twierdzenia, tyczące się wieloboków sznurowych i wieloboków sił, mają wartość i dla krzywych sznurowych i krzywych sił, należy zamienić w nich tylko wyrażenie: "bok wieloboku" przez "styczna do krzywej".

Wyznaczanie analityczne kształtu krzywej sznurowej przy siłach równoległych.

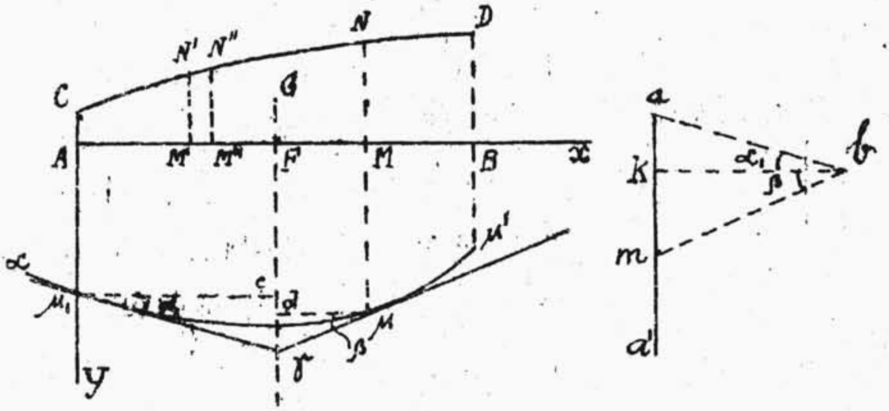
§ 92. Rozpatrzmy wypadek działania na prostolinijną kierownicę obciążenia, opisanego w § 91, t.j. działania sił równoległych w postaci obciążenia ciągłego p, mierzonego np. w tn/m i zmieniającego się od punktu do punktu kierownicy według zależności $p=f(x)$. W § 89 określiliśmy krzywą sznurową, jako miejsce geometryczne punktów μ, które otrzymujemy w ściśle określony sposób zapomocą wypadkowej cząstkowej W, prostej $M\theta$ równoległej do mt i prostej $\gamma\mu$ równoległej do mb. Skorzystamy z tego określenia, aby wyprowadzić równanie krzywej sznurowej przy osiach prostokątnych Axy, które są wskazane na rys. 122 i 123.

Na rys. 123 niech CND wyobraża krzywą obciążenia $p=f(x)$ /dodatnie wielkości p odłożone do góry niezależnie od kierunku osi Oy /. Krzywa sił jest w danym wypadku prostą aa'; a jest to punkt przyjęty dowolnie; punkt m odpowiada dowolnemu punktowi M kierownicy OB; odcinek am wyobraża wielkość wypadkowej q obciążenia na długości $AM=x$ jest to siła

$$q=\int_0^x p\,dx=\varphi(x) \quad . \; . \; . \; . \quad (a),$$

która sama jest funkcją od x.

Dla zbudowania odpowiedniego punktu μ krzywej sznurowej, przyjmujemy dowolnie biegun b i przeprowadzamy pierwszy bok wieloboku sznurowego $\mathcal{L}\mu_1$ przez dowolny punkt μ_1 na prostej Oy. Wypadkowa q jest pionową, przechodzi przez punkt G - środek ciężkości pola $ACDB$. Punkt γ jest przecięciem linji działania q i boku $\alpha\mu_1$; przeprowadzamy $\gamma\mu$ równolegle do bm do przecięcia się z pionową linją NM , która wyobraża tutaj linję równoległą do stycznej do krzywej sił w punkcie m. Prosta $\gamma\mu$ jest styczną do krzywej sznurowej w punkcie μ.



Rys. 123

Niech X i y są rzędne bieżące dowolnego punktu μ krzywej sznurowej. Z rysunku mamy:

$$y = M\mu = A\mu_1 + c\gamma - d\gamma \quad \ldots\ldots (b)$$

$$c\gamma = \mu_1 c\, tg\alpha_1 = A F\, tg\alpha_1$$

$$d\gamma = d\mu\, tg\beta = FM\, tg\beta$$

Przytem z wieloboku sił

$$tg\alpha_1 = \frac{ak}{kb}, \qquad tg\beta = \frac{km}{kb}$$

a więc:

$$c\gamma - d\gamma = AF\cdot\frac{ak}{kb} - FM\cdot\frac{km}{kb}.$$

Podstawiając tutaj: $km = am - ak$, otrzymamy:

$$c\gamma - d\gamma = \frac{1}{kb}\left[ak(AF + FM) - am \cdot FM\right]$$

$$= \frac{1}{kb}\left(ak \cdot x - q \cdot FM\right).$$

Iloczyn $(-q \cdot FM)$ ma tutaj znaczenie mechaniczne, jest to moment wypadkowej q względem punktu M i równa się sumie momentów składowych sił $M'N' \cdot M'M''$ względem punktu M czyli granicy sumy

$$-\sum M'N' \cdot M'M'' \cdot M'M \quad .$$

Bieżącą rzędną jest w tym wypadku $AM' = x'$, a rzędna AM jest tutaj stałą. Mamy więc $M'M'' = dx'$; $M'M = x - x'$; $M'N = p = f(x')$ w punkcie x' oznaczmy przez $p_{x'}$. Podstawiając te oznaczenia i przechodząc do granicy, otrzymamy:

$$q \cdot FM = \int_0^x p_{x'}(x - x')\, dx' \, .$$

W prawej części mamy całkę określoną, której wynik oznaczmy przez $\psi(x)$ t.j.

$$\int_0^x p_{x'}(x - x')\, dx = \psi(x) \ldots (c)$$

Mamy więc:

$$c\gamma - d\gamma = \frac{1}{kb}\left(ak \cdot x - \psi(x)\right) \quad .$$

Podstawiając to wyrażenie w równanie (b) otrzymamy ostatecznie równanie krzywej:

$$y = Am_1 + \frac{1}{kb}\left(ak \cdot x - \psi(x)\right) \ldots (d)$$

gdzie $\psi(x)$ jest to funkcja od x, którą się określa przez wzór (b). Równanie (d) posiada trzy stałe: $A\mu_1$, ak i kb, które posiadają ściśle określone znaczenie geometryczne. Oznaczmy te stałe przez C'', C' i $\frac{1}{C}$ i napiszmy równanie (d) tak:

$$y = C'' + C\left(C'x - \psi(x)\right) \quad \ldots\ldots (e)$$

Możemy powiedzieć, że równanie krzywej sznurowej (d) posiada wogóle pewne trzy stałe dowolne, któremi możemy się rozporządzić w sposób dowolny, np. wyznaczyć je z warunku, żeby krzywa sznurowa przechodziła przez trzy dane punkty. Ta własność krzywej sznurowej, przytem niezależnie od rodzaju obciążenia, wypływa także z tej okoliczności, że krzywa sznurowa jest granicą wielcboku sznurowego, ostatni zaś jak wiemy /§ 66/ określa się przez trzy punkty.

Zbadamy poszczególny wypadek, gdy obciążenie ciągłe jest równomierne, t.j. gdy $p = const.$ W tym wypadku

$$\psi(x) = \int_0^x p_{x'}\,(x-x')\,dx' = p\int_0^x (x-x')\,dx'$$

$$= p\left|-\frac{(x-x')^2}{2}\right|_0^x = \frac{1}{2}px^2 .$$

Podstawiając to znaczenie funkcji $\psi(x)$ w równanie (d), otrzymamy dla krzywej sznurowej równanie:

$$y = C'' + C\left(C'x - \frac{1}{2}px^2\right) .$$

Jest to równanie paraboli, której średnice są prostopadłe do kierownicy AB.

W podręcznikach często zamiast równania krzywej sznurowej w postaci skończonej (e) wyprowadzają równanie różniczkowe, z którego przez całkowanie otrzymuje się równanie (e). My możemy otrzymać równanie różniczkowe, biorąc od równania (c) pochodną:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{kb}\left(ak\, x - \psi'(x)\right);$$

$$\psi'(x) = \frac{d}{dx}\int_0^x p_{x'}(x-x')\,dx' = \int_0^x p_{x'}\,dx' = \int_0^x p\,dx^{(x)}$$

Wynik całkowania w ostatniej części oznaczmy:

$$\int_0^x p\,dx = \varphi(x),$$

mamy wtedy:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{kb}\left(ak\, x - \varphi(x)\right) \quad \ldots\ldots (f)$$

Jest to równanie różniczkowe, w którem są dwie stałe: kb i ak; biorąc pochodną jeszcze raz, otrzymamy równanie różn. 2 porządku

------

x/ Na mocy wzoru różniczkowania pod znakiem całki:

$$F(\alpha) = \int_{x_0}^{x_1} f(x,\alpha)\,dx,\ x_0 \text{ i } x_1 \text{ zależą od } \alpha;$$

$$\frac{dF}{d\alpha} = \int_{x_0}^{x_1} f'(x,\alpha)\,dx + \frac{dx_1}{d\alpha} f(x_1,\alpha) - \frac{dx_0}{d\alpha} f(x_0,\alpha).$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\varphi'(x)}{kb}$$

Tutaj:

$$\varphi'(x) = \frac{d}{dx}\int_0^x p\,dx = p \; \dots \; (g)$$

mamy więc:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{p}{kb} \; \dots\dots\dots \; (h)$$

Równanie różniczkowe w tej formie będzie dla nas w następstwie pożyteczne.

Do postaci krzywej sznurowej w wypadku obciążenia równomiernego możemy dojść i inną drogą, ianowicie zapomocą następującego rozumowania.

Wielobok sił i wielobok sznurowy są figurami czysto geometrycznemi. Z § 52 wiemy jednak, że wielobok sznurowy ma odpowiednik zupełnie realny w postaci wieloboku przegubowego, składającego się z prętów nieważkich, połączonych przegubami, znajdującego się w równowadze pod działaniem sił przyłożonych do węzłów. Wielobok może się składać także ze sznura, jeżeli natężenia w bokach są rozciągające. Postać równowagi takiego wieloboku przegubowego lub składającego się ze sznura będzie przedstawiać właśnie wielobok sznurowy dla sił przyłożonych w węzłach. Ponieważ sznur idealny /lub nić/ możemy rozpatrywać jako taki sam wielobok, czyli łańcuch, tylko o nieskończenie wielkiej ilości nieskończenie małych ogniwek, połączonych przegubowo, więc postacią równowagi takiego sznura, analogicznie do poprzedniego, będzie właśnie krzywa sznurowa dla sił działających na sznur.

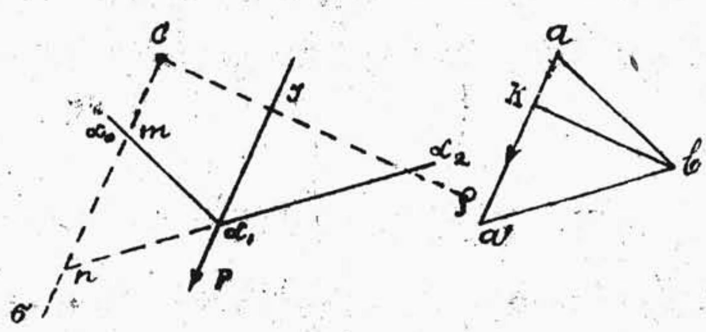
W tym wypadku obciążenia równomiernego krzywa sznurowa będzie miała taką samą postać, jaką postać przybierze w położeniu równowagi sznur idealny. który znajduje się pod działaniem sił ciągłych, takich, że do każdego elementu sznura ds jest przyłożona siła $p\,dx$, przytem p jest stałe. Z § 50 wiemy, że sznur przybierze wtedy postać paraboli, a więc i krzywa sznurowa dla obciążenia równomiernego jest parabolą.

Wykreślne wyrażenie momentów sił.

§ 93. Przy rozwiązywaniu zadań statycznych korzystaliśmy dotąd tylko z dwóch warunków równowagi, odpowiadających równaniom: $\sum X=0$, $\sum Y=0$, $\sum M=0$, mianowicie z warunków: 1/ żeby wielobok sił był zamknięty i 2/ żeby wielobok sznurowy był zamknięty. Kwestja, jak się wyraża wykreślnie moment siły lub układu sił względem jakiegokolwiek punktu nie zajmowała nas, obchodziliśmy się bez tego, korzystając z powyższych warunków równowagi. Są jednak zagadnienia statyczne, w których umiejętność wyznaczenia wykreślnie momentu układu sił względem dowolnego punktu, leżącego w płaszczyźnie sił jest potrzebna /rozpatrujemy nadal tylko układy płaskie sił/. Np. gdybyśmy chcieli wyznaczyć /wykreślnie/ natężenia w prętach kratownicy sposobem momentów czyli t.zw. sposobem Rittera /§ 41/, potrzebne by łoby wyznaczenie wykreślne momentów sił.

W Statyce Wykreślnej istnieje bardzo szczególny sposób wyrażenia wykreślnego momentu układu sił zapomocą wieloboku sznurowego. Przejdźmy teraz do zbadania tego sposobu, przyczem zaczniemy od wypadku, gdy mamy do czynienia tylko z jedną siłą.

§ 94. Niech dla pewnej siły P będzie dana jej linja działania oraz wartość w postaci wektora aa' /rys.124/. Podamy pewne wykreślne wyrażenie momentu tej siły względem dowolnego



Rys. 124

bieguna C.

Wiadomo, że przy układach płaskich pod momentem siły względem bieguna rozumiemy wielkość algebraiczną. Wartość bezwzględna momentu siły P względem bieguna C równa się iloczynowi z wartości tej siły aa' przez ramię, w danym razie odległość CJ punktu C od linji działania siły P. Przeprowadźmy przez punkt C prostą Cn równoległą do linji działania siły P, i zauważmy punkty m i n przecięcia tej prostej z pierwszym i ostatnim bokiem wieloboku sznurowego, zbudowanego dla tej siły przy dowolnie obranym biegunie b. Przeprowadźmy jeszcze prostą bk w wieloboku sił, prostopadłą do aa'. Odcinek kb stanowiący wysokość trójkąta aba' przy podstawie aa' będziemy nazywać odległością biegunową. Jeżeli zwrócimy teraz uwagę, że 2 trójkąty ma_1n i aba' są podobne, gdyż odpowiednie boki ich są równoległe, to dla tych trójkątów będziemy mogli napisać, że ich podstawy tak się mają do siebie, jak wysokości t.j.

$$\frac{mn}{aa'} = \frac{CJ}{kb} \quad \text{czyli:} \quad aa' \times CJ = mn \times kb.$$

Otrzymaliśmy więc, że moment siły P względem dowolnego bieguna C co do wartości bezwzględne[j] równa się iloczynowi z odległości biegunowej prz[ez] odcinek mn prostej, przeprowadzonej przez punkt C równolegle do linji działania siły, zawarty między pierwszym a ostatnim bokiem wieloboku sznu[]rowego tej siły. Znak momentu może być oczywiści[e] określony w zwykły sposób, jak to czyniliśmy w Rozdz. I i jak jest przyjęte w Mechanice Teoretycznej. Podamy jednak tutaj inny sposób, który jest dogodniejszy w Statyce Wykreślnej i który da na[m] ten sam rezultat.

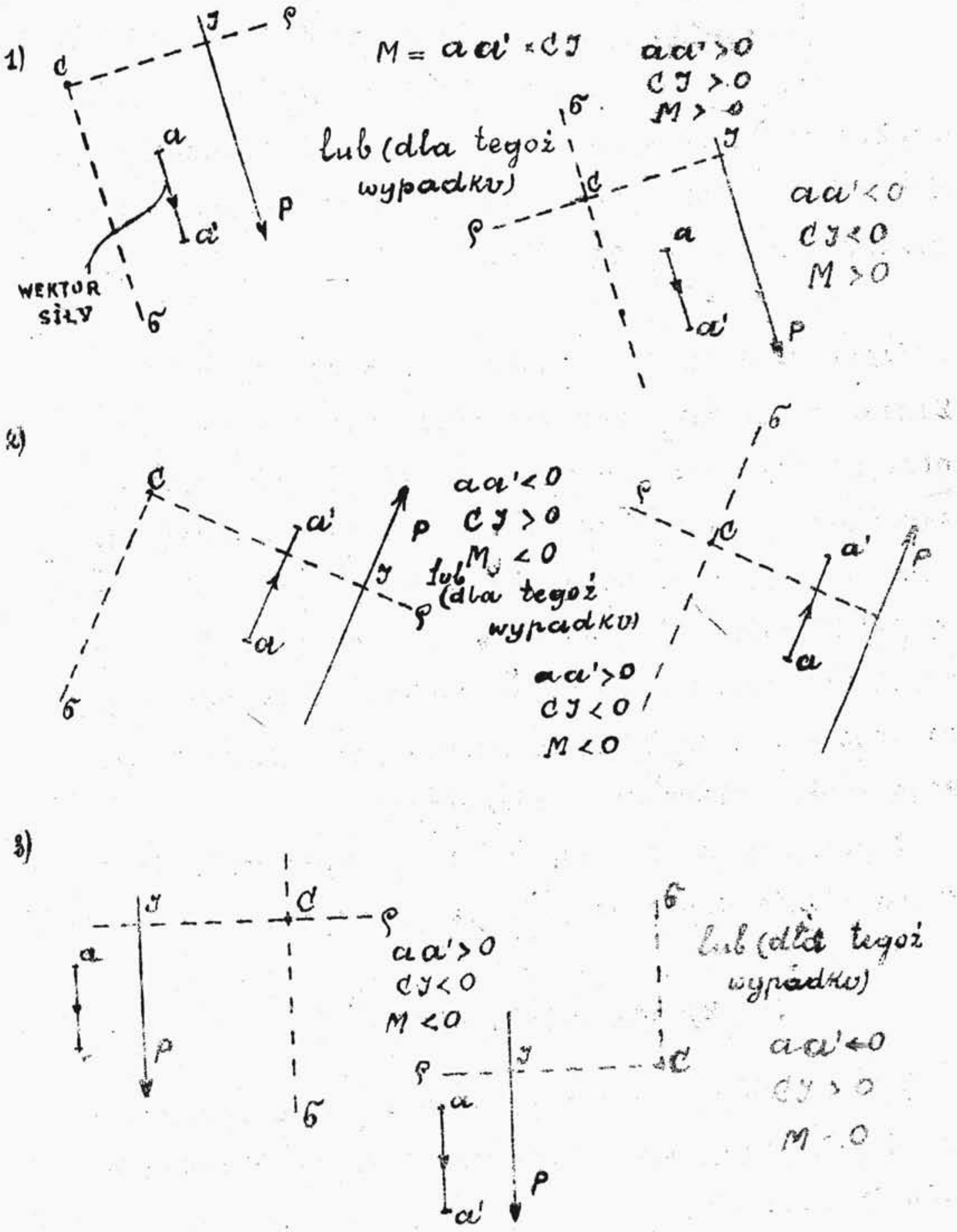
W tym celu przypiszemy odcinkom tu występu[ją]cym znaki, rozpatrując je, jako rzuty na pewne o[si]. Z tego powodu i w otrzymanym przed chwilą wzorze, kolejność liter przy oznaczaniu odcinków nie jest przypadkowa.

Mianowicie układ spółrzędnych wybieramy w ten sposób, że za punkt początkowy obieramy punkt C; jedną z osi prowadzimy równolegle do linji działania siły, dowolnie zakładając jej dodatni kierunek, oznaczać ją będziemy literą σ /oś siły/. Drugą oś kierujemy prostopadle i oznaczamy liter[ą] ρ /oś ramienia/, lecz za dodatni jej kierunek uważamy nie dowolny, a taki, przy którym dodatn[i]a oś $C\varphi$ po obróceniu jej o kąt równy 90° w kierunku ruchu wskazówki zegara, wpadnie na dodatni kierunek osi $C\sigma$. Na naszym rysunku oś $C\sigma$ skierowana jest na dół, wtedy oś $C\varphi$ musi być skierowana wprawo. Przy oznaczaniu literami wektorów sił, kolejność liter jest wskazaną przez kierunek siły, ramię liczy się zawsze od punktu C do linji działania siły. Pod momentem siły P względem bieguna będziemy rozumieli i co do wielkości i co do znaku iloczyn $M = aa' \cdot CJ$.

W danym wypadku odcinek aa' jest dodatni, gdyż rzut jego na oś $C\sigma$ jest skierowany w dodatnim kierunku, również ramię CJ jest dodatnie. Moment jest więc dodatni.

Rozpatrzmy kilka przykładów, dla lepszego zorjentowania się w znakowaniu /rys.125/. Przypiszemy teraz odcinkom mn i kb znaki w następujący sposób.

Odległość biegunową będziemy liczyć <u>zawsze</u> od punktu k do bieguna, odcinek mn od punktu przecięcia się osi $C\sigma$ z <u>pierwszym</u> bokiem wieloboku sznurowego do punktu przecięcia się tejże z <u>ostatnim</u> bokiem. Znaki odcinków kb i mn będą takie,


1)
M = aa' × CJ
aa' > 0
CJ > 0
M > 0
lub (dla tegoż wypadku)
aa' < 0
CJ < 0
M > 0
WEKTOR SIŁY
2)
aa' < 0
CJ > 0
M < 0
lub (dla tegoż wypadku)
aa' > 0
CJ < 0
M < 0
3)
aa' > 0
CJ < 0
M < 0
lub (dla tegoż wypadku)
aa' < 0
CJ > 0
M < 0

Rys. 125

jakie znaki mają rzuty tych odcinków odpowiednio na osie ρ i σ. Przy takiem znakowaniu odcinków napisana wyżej proporcja jest słuszna i co do znaku. Z tego powodu moment, jako wielkość algebraiczna, może być określony także z wzoru

$$M = mn \cdot kb.$$

W danym wypadku $mn > 0$, $kb > 0$, a więc i $M > 0$. Zauważmy, że przy obranym położeniu osi ρ i σ, otrzymujemy znak dla momentu /+/, jeżeli siła względem bieguna momentu idzie z lewej strony na prawą i /–/, w wypadku przeciwnym, t.j. otrzymujemy takie znaki, jakie używaliśmy w Rozdz. I i jak przeważnie przyjęto jest w Mechanice Teoretycznej na kontynencie. W angielskich podręcznikach używają znaków przeważnie odwrotnych.

W praktyce można osi ρ i σ nie wykreślać, wystarczy je sobie oczywiście wyobrazić.

Wypadek wielu sił.

§ 95. Zasadniczo sprowadza się on do poprzedniego. Musimy tu jednak rozpatrzeć osobno 3 rodzaje układów sił:

układy sprowadzające się do wypadkowej,
układy będące w równowadze,