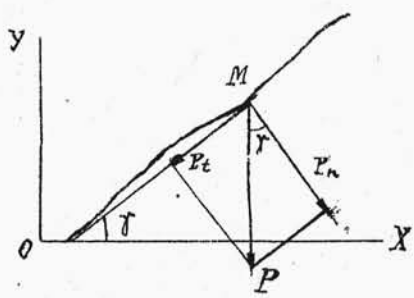
wi się wtedy jak na rys.187.

Warunki wypływające z rozpatrywania ziemi, jako środowiska sypkiego lub spoistego.

STOK NATURALNY.

§ 153. Po tych wstępnych rozważaniach co do środowiska ciągłego wogóle, przechodzimy do właściwej teorji parcia ziemi. Ziemia jest środowiskiem bardzo niejednorodnem. Dla uproszczenia weźmy pod uwagę suchy piasek.

Wiemy z doświadczenia, że piasek, swobodnie nasypany, nie może utworzyć powierzchni pionowej, lecz utworzy płaszczyznę pochyłą, nachyloną do poziomu pod pewnym kątem. Linję prostą, wskazującą to nachylenie, nazywamy "stokiem naturalnym".



Rys. 188

Tworzenie się stoku naturalnego możemy objaśnić w ten sposób: niech na cząstkę M piasku na powierzchni działa ciężar P, któ-

...y można rozłożyć na składowe P_n i P_t w kierunkach normalnym i stycznym do powierzchni. Siła P_n równoważy się z reakcją pionową, siła P_t - z siłą tarcia T. Z Mechaniki wiemy, że siła tarcia T może się zmieniać od 0 do T_{max} gdzie T_{max} równa się składowej normalnej przez spółczynnik tarcia t.j. $T_{max} = P_n \cdot f = P_n \cdot tg\,\varphi$. Wielkość f jest ułamkiem o różnej wartości, zależnej od środowiska, kąt φ nazywa się kątem tarcia. Dla suchego piasku φ wynosi około 30° - - 35°. Z powyższego widać, że cząstka M będzie w równowadze o ile

$$P_t \leqq T_{max}$$

czyli

$$P_t \leqq P_n\, tg\,\varphi .$$

Ponieważ

$$\frac{P_t}{P_n} = tg\,\gamma ,$$

powyższy warunek równowagi jest równoznaczny z następującym:

$$\gamma \leqq \varphi$$

Jeżeli kąt γ jest jednakowy dla wszystkich punktów powierzchni i równa się φ, to powierzchnia tworzy płaszczyznę, nachyloną do poziomu pod kątem φ, czyli stok naturalny. Rzeczywiście wówczas $tg(P_z,x)=tg\gamma=tg\varphi=const.$ oznaczając przez y i x rzędne punktu M, mamy $\frac{dy}{dx}=tg\varphi$, skąd po zcałkowaniu

$$y=x\,tg\,\varphi+const.$$

równanie stoku naturalnego.

ZIEMIA SYPKA.

§ 154. Suchy piasek lub wogóle środowisko sypkie /ziarna i t.p. ciała/ składają się z drobin swobodnych różnego kształtu. Uważając jednak rozmiary tych drobin za niezmiernie małe w porównaniu z objętościami ciała, z którymi mamy do czynienia, możemy dane środowisko sypkie rozpatrywać jako ciągłe. A zatem zamiast rozważać siły wewnętrzne, jako reakcje drobin w punktach zetknięcia, możemy rozpatrywać siły wewnętrzne, jako naprężenia w środowisku ciągłem o własnościach i zależnościach, wyłożonych w poprzednich §§. Prócz podanych tam równań, wyrażających równowagę wszelkiego środowiska dla środowiska sypkiego, możemy podać pewne warunki, oparte na doświadczeniu i właściwe tylko dla tego środowiska. Z samej istoty środowiska sypkiego wypływa, że w stanie równowagi nie mogą istnieć w niem ciągnienia $(t_{nn} > 0)$; gdyż środowisko nie jest w stanie okazywać oporu na ciągnienie; ponieważ zaś drobiny można uważać prawie za nieściśliwe, mogą istnieć ciśnienia $(t_{nn} < 0)$ i nawet bardzo znaczne; przynajmniej przy tych głębokościach ziemi, z jakimi mamy do czynienia w praktyce /z wyjątkiem położonych głęboko tuneli/ nie liczymy się z wytrzymałością środowiska na ściskanie. Natomiast decydujące znaczenie ma dla nas opór na ścinanie czyli ślizganie, który może stawić środowisko.

Z poprzedniego § widać, że w środowisku sypkiem ten opór wytwarza się jedynie przez tarcie cząsteczek, opór ten jest to właściwie siła tarcia. Zawdzięczając tylko istnieniu tarcia między drobinami mogą wewnątrz środowiska powstawać między poletkami reakcje styczne, czyli naprężenia styczne. Powstające w środowisku sypkiem naprężenia styczne nie mogą w stanie równowagi przekroczyć największego oporu, stawianego przez środowisko, czyli największych wartości sił tarcia, które jest zdolne do okazania dane środowisko. Wiemy, że siła tarcia nie zależy od powierzchni ciśnienia, lecz tylko od składowej normalnej; podobnie jak w poprzednim § największa siła tarcia równała się $P_n \, tg\,\varphi$, tak samo wewnątrz środowiska sypkiego największa siła tarcia $max\,T$ na jednostkę kwadratową w danem poletku Δp o normalnej n musi wynosić $max\,T = |t_{nn}| \cdot tg\,\varphi$. Równowaga w danym punkcie poletka będzie zabezpieczona, jeżeli naprężenie styczne $|t_{nt}|$ w tem poletku będzie mniejsze od $max\,T$ lub równe, t.j. jeżeli będzie spełniony warunek:

$$|t_{nt}| \leqq |t_{nn}| \cdot tg\,\varphi \quad \ldots\ldots \quad (14)$$

Jest to t.zw. warunek Rankine'a. Widzimy więc, że dla środowiska sypkiego zmienne naprężenie: $|t_{nn}| \cdot tg\,\varphi$ gra rolę podobną, jak w Wytrzymałości materjałów wytrzymałość doraźna na ścinanie.

Ponieważ $|t_{nt}| = |t_{nn}|\, tg\,\vartheta$, warunek /14/ można także wyrazić w postaci

$$\vartheta \leqq \varphi \quad \ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

Przy $\vartheta > \varphi$ równowaga nie mogłaby istnieć

Przy $\vartheta < \varphi$ równowaga jest stateczna, przy $\vartheta = \varphi$ równowaga jest obojętna, lub, jak przyjęto nazywać - graniczna.

ZIEMIA SPOISTA.

§ 155. Prócz ziemi sypkiej i opisanej w poprzednim § należy odróżnić drugi typ, w rodzaju piasku, zmieszanego z gliną, który posiada jeszcze i inne własności. Zdolność wywierania ciągnienia jest tutaj bardzo mała, tak że można nie przyjmować tego pod uwagę. Jednak ziemia takaposiada pewną przyczepność czyli spójność. Zdolność opierania się naprężeniom stycznym polega tutaj na tarciu i na spójności.

Przyjmujemy, że siła przyczepności czyli opór, stawiany przez tę własność, zależy jedynie od powierzchni zetknięcia, i jest skierowana tak, jak i siła tarcia odwrotnie do kierunku możliwego ruchu; oznaczmy przez C siłę przyczepności na jednostkę kwadratową / C jest więc naprężeniem/. Dla środowiska

---

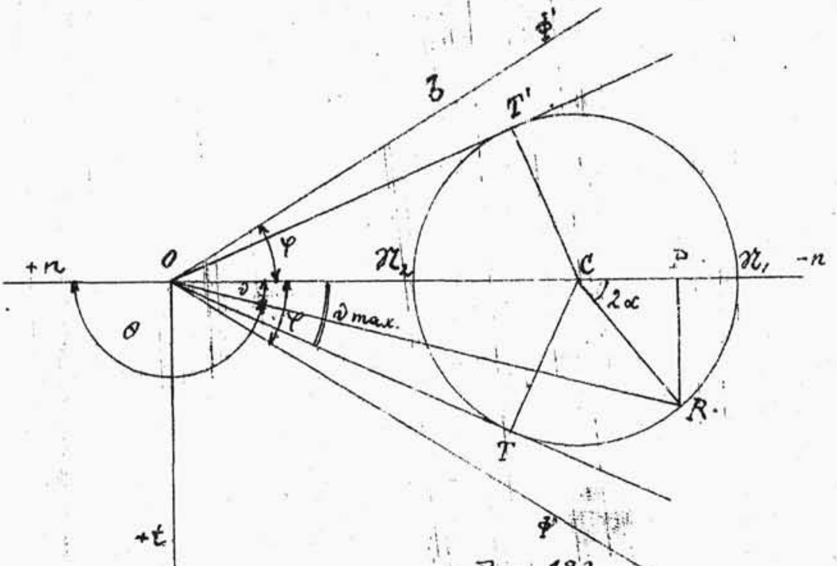
spoistego t.j. posiadającego spójność naprężenia styczne mogą być większe niż podaje warunek Rankine'a, mianowicie o siłę przyczepności. Równowaga będzie więc istnieć przy zachowaniu warunku:

$$|t_{nt}| \leq |t_{nn}| \, tg\varphi + C .$$

Jest to t.zw. warunek Coulomba /XVII stul./ Należy jednak zwrócić tu uwagę, że założenie o jednoczesnem działaniu tarcia i spójności jest tylko hypotezą.

§ 156. Dla ciał sypkich, pozbawionych spójności, o ile będziemy zmieniali kierunek poletka w punkcie A, to kąt ϑ będzie zmienny, ale zawsze musi być zachowany warunek /15/, t.j. powinno być, że $\vartheta_{max} \leq \varphi$.

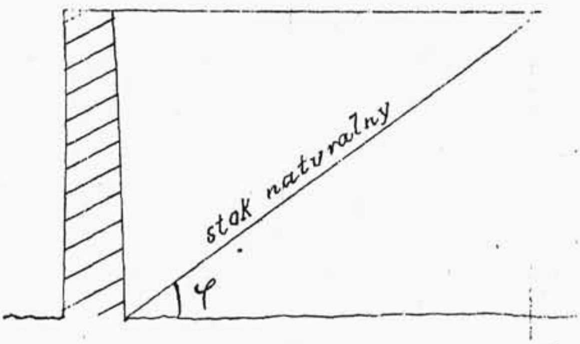
Zakładając układ płaski naprężeń warunek ten możemy przedstawić wykreślnie zapomocą koła Rankine'a. /Koło to jest dla każdego punktu inne, ponieważ naprężenia są funkcjami miejsca/. Przy granicznej wartości kąta ϑ prosta OR przechodzi w styczną OT. Skrajny ten kąt $\vartheta_{max} < \varphi$ t.j. koło Rankine'a musi być zawarte wewnątrz kąta $2\varphi = \Phi O \Phi'$.



Rys. 189

Skrajny wypadek położenia tego koła przy $\vartheta_{max} = \varphi$ będzie, gdy $\sphericalangle COT = \varphi = CO\Phi$ czyli prosta $O\Phi \equiv OT$. Wtedy mamy stan równowagi granicznej. O ile we wszystkich punktach pewnego obszaru środowiska sypkiego zachodzi ta równość, t.j. $max\ \vartheta = \varphi$, to mówimy, że obszar ten znajduje się w stanie równowagi granicznej.

Weźmy dla przykładu ściankę podporową. Ponieważ bez ścianki ziemia powyżej stoku naturalnego osypałaby się, ziemia więc wywiera na nim pewne parcie. Jeżeli wytrzymałość muru jest niedostateczna, nastąpi zawalenie muru i osypanie się ziemi. Możemy przypuścić, że w moment zawalenia się ziemia przed osypaniem się przeszła przez stan równowagi granicznej.



Rys. 190

Inne postacie warunku Rankine'a dla ziemi sypkiej.

§ 157. Warunek Rankine'a możemy przedstawić łatwo w funkcji naprężeń głównych w danym punkcie. Ponieważ sinusy rosną wraz z kątami, zatem $\sin \vartheta_{max} \leqq \sin \varphi$; z wykresu zaś Rankine'a /rys.189/ mamy:

$$\sin \vartheta_{max} = \frac{CT}{OC}$$

czyli

$$\frac{CT}{OC} \leqq \sin \varphi$$

albo

$$\frac{\frac{1}{2}(\mathcal{N}_1 - \mathcal{N}_2)}{\frac{1}{2}(\mathcal{N}_1 + \mathcal{N}_2)} \leqq \sin \varphi,$$

czyli

$$\frac{\mathcal{N}_1 - \mathcal{N}_2}{\mathcal{N}_1 + \mathcal{N}_2} \leqq \sin \varphi \quad \ldots (17)$$

Warunek ten dla stanu równowagi granicznej można przedstawić i w innej postaci, mianowicie przekształcając proporcję:

$$\frac{\mathcal{N}_1+\mathcal{N}_2}{\mathcal{N}_1-\mathcal{N}_2} = \frac{1}{\sin\varphi},$$

otrzymamy:

$$\frac{\mathcal{N}_2}{\mathcal{N}_1} = \frac{1-\sin\varphi}{1+\sin\varphi}, \quad \ldots\ldots \quad (18)$$

Zastępując tutaj 1 przez $\sin 90°$ i przekształcając, otrzymamy także

$$\frac{\mathcal{N}_2}{\mathcal{N}_1} = tg^2\left(45° - \frac{\varphi}{2}\right) \quad \ldots\ldots \quad (19)$$

Warunek Rankine'a jest charakterystyką fizyczną środowiska, o której mówiliśmy w końcu § 143; stanowi on uzupełnienie wyprowadzonych poprzednio równań równowagi /1/ i /2/ dla wszelkiego środowiska, dzięki czemu zadanie o równowadze środowiska sypkiego staje się określone.

By móc zestawić warunek Rankine'a z równaniami równowagi /1/ i /2/, /5/ i /6/ należy wyrazić go przez naprężenie zasadnicze N_1, N_2 i T. Z wzorów /10/ mamy:

$$\mathcal{N}_1 + \mathcal{N}_2 = N_1 + N_2$$

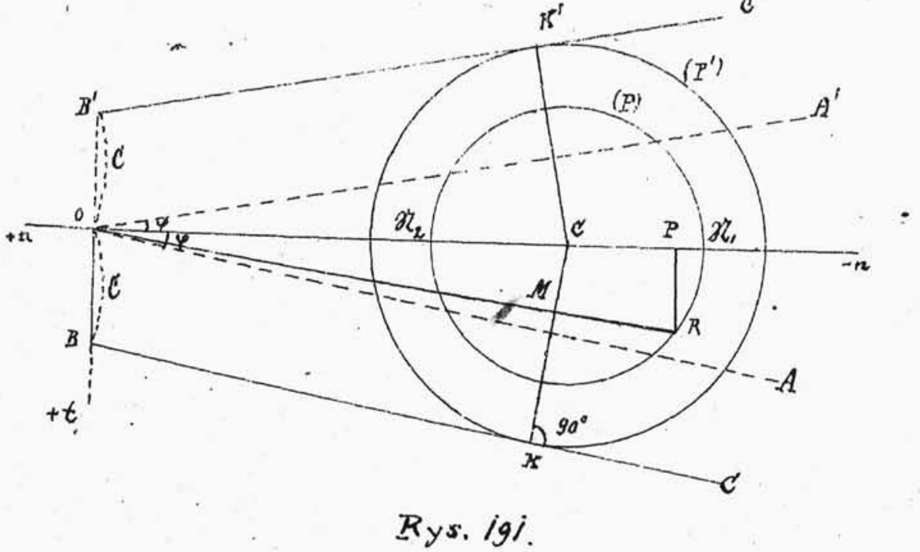
$$\mathfrak{N}_1 - \mathfrak{N}_2 = \sqrt{4T^2 + (N_1 - N_2)^2}\ ;$$

kładąc te wyrażenia w warunek /17/ i przekształcając, otrzymamy szukany warunek w postaci:

$$(N_1 - N_2)^2 + 4T^2 - (N_1 - N_2)^2 \sin^2\varphi \leqq 0 \ldots (20)$$

Koło naprężeń w wypadku ziemi spoistej i inne postacie warunku Coulomba.

§ 158. Układ naprężeń w danym punkcie ziemi spoistej może być wyrażony zapomocą koła naprężeń, podobnie jak na rys.189 uczyniono to dla ziemi sypkiej. Tutaj musi być tylko zachowany warunek /16/ dla naprężeń stycznych. Wy-



Rys. 191.

kresem naprężeń niech będzie koło ze środkiem w C o promieniu $C\mathcal{N}_1 = C\mathcal{N}_2$ przy układzie osi Ont. Naprężenia styczne t_{nt} wyrażone są przez odcinki PR - normalne przez OP. Dla każdego poletka w punkcie A powinien być zachowany warunek /16/, t.j.

$$/PR/ \leqq /OP/ \cdot tg\varphi + C .$$

rzędne $/OP/\, tg\varphi$ są to rzędne prostych OA i OA', zbudowanych pod kątem φ do osi $(-n)$; dodając do nich wielkości, równające się naprężeniu C, otrzymamy, że prawą część powyższego warunku przedstawiają rzędne /co do wartości bezwzgl./, prostych BC i $B'C'$. Warunek dla $/t_{nt}/ = /PR/$ będzie spełniony, o ile koło (P) znajduje się wewnątrz pola $CBB'C'$ t.j. o ile $CT \leqq CK$. Skrajny wypadek, odpowiadający znakowi równości warunku /16/ przedstawia koło (P'), styczne do BC i $B'C'$. Wyrażając odcinki CT i CK w funkcji naprężeń głównych łatwo otrzymać z warunku $CT \leqq CM + MK$ warunek Coulomb'a dla ziemi spoistej w funkcji $\mathcal{N}_1$ i $\mathcal{N}_2$, analogiczny do /17/, a mianowicie:

$$CT = -\frac{1}{2}(\mathfrak{N}_1 - \mathfrak{N}_2)$$

$$CM = -\frac{1}{2}(\mathfrak{N}_1 + \mathfrak{N}_2)\sin\varphi$$

$$MK = C\cos\varphi$$

Podstawiając te wartości w powyższy warunek i przekształcając, otrzymamy:

$$\frac{\mathfrak{N}_1 - \mathfrak{N}_2}{\mathfrak{N}_1 + \mathfrak{N}_2} \leqq \sin\varphi - \frac{2C\,ctg\,\varphi}{\mathfrak{N}_1 + \mathfrak{N}_2} \ldots (2i)$$

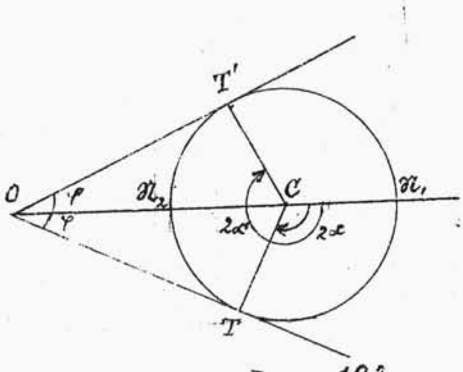
Wyrażając tutaj, jak w warunku Rankine'a, $\mathfrak{N}_1$ i $\mathfrak{N}_2$ w funkcji N_1, N_2, T otrzymamy:

$$(22) \ldots (N_1 - N_2)^2 + 4T^2 - [-(N_1 + N_2)\sin\varphi + 2C\cos\varphi]^2 \leqq 0.$$

POWIERZCHNIE ŚLIZGANIA.

§ 159. Zanim przejdziemy do rozwiązania powyższych równań zauważmy, że dla ziemi sypkiej w przypadku równowagi granicznej, t.j. gdy $\vartheta = \varphi$ kąty 2α i $2\alpha'$ /rys.192/ wyznaczają w danym punkcie pewne dwa poletka, wzdłuż których działające naprężenia styczne $/t_{nt}/$ akurat równają się oporowi $/t_{nn}/\,tg\,\varphi$, wytworzonemu przez tarcie, a więc przy minimalnem powiększeniu naprężenia nastąpiłoby ślizganie, - są to dwa poletka ślizgania. Z rys.

widać, że w każdym punkcie mamy dwa takie



Rys. 192

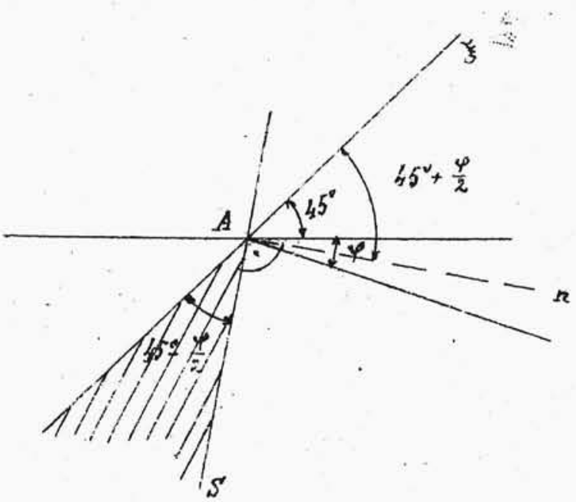
poletka S i S', poletko S określa się kątem

$2\alpha = 90^\circ + \varphi$

t.j.

$\alpha = 45^\circ + \frac{\varphi}{2}$;

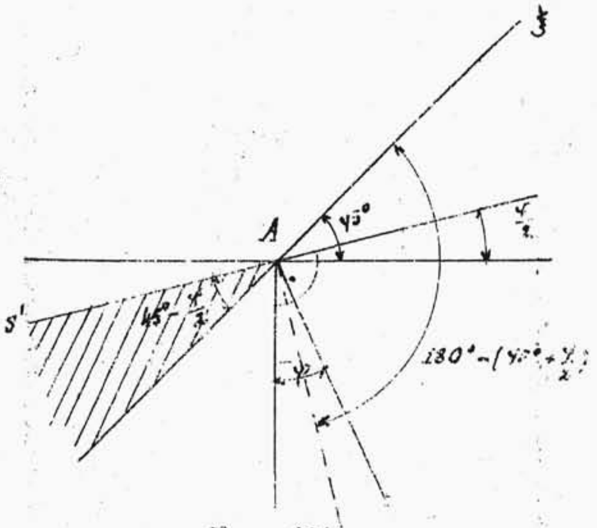
poletko S' określa się kątem $2\alpha' = 360^\circ - 2\alpha$ czyli $\alpha' = 180^\circ - \alpha = 180^\circ - (45^\circ + \frac{\varphi}{2})$.



Rys. 193

Chcąc wykreślić w danym punkcie A kierunek obydwu poletek ślizgania, odłóżmy od wiadomego kierunku ξ kąt 45° oraz kąt φ.

Dwusieczna kąta tarcia φ wyznacza normalną n, poletko S zaś jest do n prostopadłe. Będzie to właśnie poletko S, ponieważ kierunek ξ będzie tworzył z normalną kąt $45^\circ + \frac{\varphi}{2}$. W ten sam sposób możemy znaleźć położenie płaszczyzny S'. Z rysunku widać, że płaszczyzny S i S' są nachylone względem osi ξ pod jednakowym kątem $45^\circ - \frac{\varphi}{2}$, czyli



Rys. 194.

że oś główna naprężeń ξ, odpowiadająca większemu co do wartości bezwzględnej naprężeniu głównemu, jest dwusieczną kąta $90^\circ - \varphi$ między poletkami ślizgania. Podobnie jak szereg następujących po sobie poletek głównych tworzy tor naprężenia głównego, tak samo szereg następujących po sobie poletek ślizgania utworzy powierzchnię ślizgania. Przez każdy punkt przechodzą dwie powierzchnie ślizgania. Ślady tych powierzchni na płaszczyźnie Oxy tworzą siatkę trajektoryj, przecinających się pod kątem $90^\circ - \varphi$. Krzywe te są nachylone pod kątem $45^\circ - \frac{1}{2}\varphi$ do torów naprężenia głównego większego co do wartości bezwzględnej t.j. do torów ξ.

Dla ziemi spoistej równowaga graniczna następuje, gdy

$$|t_{nt}| = |t_{nn}| \cdot tg\,\varphi + C$$

Rozkład naprężeń w danym punkcie A ziemi wyraża koło (P') /rys. 191 /. Powyższa równość ma miejsce nie dla wszystkich poletek w punkcie A, lecz tylko dla dwóch, odpowiadających na wykresie kątom:

$$\sphericalangle\ \mathfrak{N}_1 C K = 2\alpha = 90^\circ + C$$

$$\sphericalangle\ \mathfrak{N}_1 C K' = 2\alpha' = 360^\circ - 2\alpha\ .$$

Są to więc takie same kąty, jak w wypadku ziemi sypkiej, a więc poletka ślizgania są w tym wypadku tak samo położone względem naprężeń głównych.

Położenie poletek ślizgania oraz warunki /17/, /20/, /21/ i /22/ mogą być wyprowadzone analitycznie bez koła naprężeń z następującego rozważania. Warunki /14/ i /16/ można napisać w takiej postaci:

$$|t_{nt}| - |t_{nn}| \cdot tg\varphi \leqq 0 \quad \ldots \ldots (14')$$

$$|t_{nt}| - |t_{nn}| \cdot tg\varphi \leqq C \quad \ldots \ldots (16')$$

Lewa część tych nierówności przedstawia pewną funkcję $f(\alpha)$, gdzie $\alpha = \sphericalangle(\xi, n)$ lub $\sphericalangle(x, n)$, dla uproszczenia wywodów lepiej jednak używać jako spółrzędne osie główne. Warunek /14'/ dla ziemi sypkiej można rozumieć, że $f(\alpha)$ przybiera max przy pewnych wartościach kąt α, przytem $\max f(\alpha) = 0$, podobnie warunek /16'/ wyraża, że $f(\alpha)$ przybiera max. przy pewnych wartościach α, przytem $\max f(\alpha) = C$.

Zastosować ten sposób w następujących ćwiczeniach.

Ćwiczenie 9. Znaleźć analitycznie z warunku /14'/ położenie poletek ślizgania oraz warunki /17/ i /20/ dla ziemi sypkiej.

Ćwiczenie 10. Znaleźć analitycznie z warunku /16'/ położenie poletek ślizgania w ziemi spoistej oraz warunki /21/ i /22/.

Wyznaczenie analityczne naprężeń N_1, N_2, T w środowisku sypkiem w wypadku naziomu płaskiego.

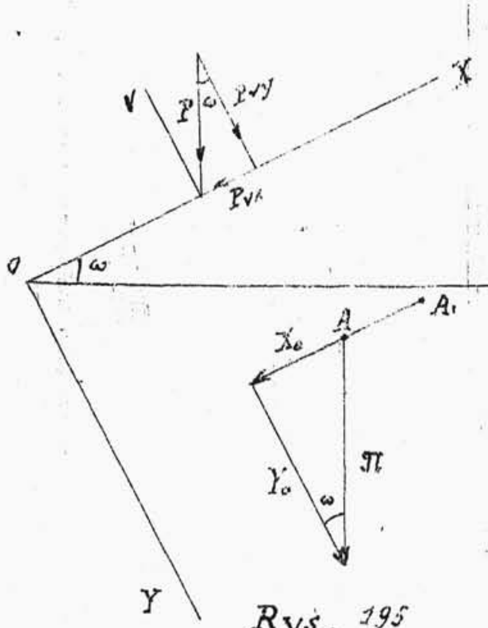
§ 160. Przechodzimy teraz do głównego zadania, mianowicie do wyznaczenia funkcyj N_1, N_2 i T, przytem weźmiemy pod uwagę wypadek, gdy środowisko sypkie jest ograniczone naziomem płaskim, pozatem jest nieskończone w innych kierunkach.

Mamy do rozwiązania układ równań /1/ i /2/ i warunek /20/ przy uwzględnieniu warunków /5/ i /6/ na powierzchni.

Jako siły zewnętrzne mamy siłę ciężkości /siła objętościowa/ i siły na powierzchni naziomu; załóżmy, że te siły powierzchniowe stanowią obciążenie równomierne p = const.

Rozwiązanie układu powyższych równań, jako układu równań różniczkowych w pochodnych cząstkowych jest wogóle skomplikowane. W danym jednak wypadku rozwiązanie to można nadzwyczajnie uprościć, przyjmując osie Oxy, skierowane wzdłuż płaszczyzny naziomu, oraz wzdłuż normalnej do naziomu /rys.195/. Niech płaszczyzna naziomu będzie nachylona do poziomu pod kątem ω mniejszym od kąta φ, niech π będzie ciężar gatunkowy ziemi. W każdym punkcie środowiska działa siła objętościowa π, którą możemy rozłożyć wzdłuż osi x i y na dwie składowe X, Y : z trójkąta sił otrzymujemy: $X = -\pi \sin \omega$,

$Y = \pi \cos \omega$.



Rys. 195

Podobnie rozkładamy naprężenie powierzchniowe p na dwie składowe p_{vx} i p_{vy}, z trójkąta sił mamy:

$p_{vx} = -p \sin \omega$,

$p_{vy} = p \cos \omega$.

Kąt α między normalną zewnętrzną V a osią x jest /-90°/, a zatym w równaniach /5/ i /6/ będzie $\cos \alpha = 0$ i $\sin \alpha = 0$.

Kładąc powyższe wyrażenia i wartości w ogólne równanie /1/, /2/, /5/, /6/, otrzymamy, że w rozważanym wypadku przechodzą one na następujące:

$$\frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial y} - \pi \sin \omega = 0 \quad \ldots \ldots (1')$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial N_2}{\partial y} + \pi \cos \omega = 0 \quad \ldots \ldots (2')$$

$$-p \sin \omega = -T_{(y=0)} \quad \ldots \ldots (5')$$

$$p \cos \omega = -N_{2\,(y=0)} \quad \ldots \ldots (6')$$

Warunek /10/ pozostaje oczywiście niezmieniony.

Uproszczenie w rozwiązaniu układu równań przy obranym kierunku osi polega na tem, że ciało sypkie jest nieograniczone w kierunku osi Ox . Wobec tego, gdziekolwiek weźmiemy punkt A_1 na prostej AA_1 , równoległej do Ox , to będzie on w jednakowych warunkach z punktem A /bo oba te punkty są jednakowo odległe od nieskończenie dalekich brzegów/. Zatem naprężenia N_1, N_2, T w punktach A i A_1 są jednakowe i nie zależą od spółrzędnej x . Dzięki temu wszystkie pochodne cząstkowe względem x są równe 0, mianowicie:

$$\frac{\partial N_1}{\partial x} = 0; \qquad \frac{\partial N_2}{\partial x} = 0; \qquad \frac{\partial T}{\partial x} = 0.$$

Funkcje N_1, N_2, T ogólnie od dwóch zmiennych x i y są tutaj funkcjami jedynie y, pochodne cząstkowe względem y przechodzą na pochodne zwyczajne i równania /1'/ i /2'/, przechodzą na następujące:

$$\frac{dT}{dy} - \pi \sin\omega = 0 \ldots (1'') \quad i \quad \frac{dN_2}{dy} + \pi \cos\omega = 0 \ldots (2'')$$

Równania te nie są już układem i każde z nich jest osobnem równaniem z jedną niewiadomą funkcją; całkując te równania otrzymujemy:

$$T = \pi y \sin\omega + C_1, \quad N_2 = -\pi y \cos\omega + C_2$$

stałe C_1 i C_2 określimy z warunków /5'/ i /6'/. Mianowicie na podstawie /5'/ $T_{(y=0)} = p \sin\omega$, kładąc więc w rozwiązaniu na T zmienną $y=0$, otrzymamy $T_{(y=0)} = C_1 = p \sin\omega$.

Na podstawie warunku /6'/ $N_{2(y=0)} = -p\cos\omega$; kładąc zatem w rozwiązaniu na N_2 zmienną $y=0$, otrzymamy:

$$N_{2(y=0)} = C_2 = -p\cos\omega.$$

Przyjmując pod uwagę te wartości stałych, otrzymamy ostatecznie na N_2 i T rozwiązania:

$$N_2 = -(p+\pi y)\cos\omega, \quad T = (p+\pi y)\sin\omega.$$

Dla symetrji we wzorach oznaczmy $p = \frac{\pi}{2}$, wtedy będziemy mieli.....(23)

$$N_2 = -\pi(y+e)\cos\omega = -\pi Y\cos\omega$$

Równania /1'/ i /2'/ czyli przekształcone /1"/ i /2"/ żadnej wskazówki co do N_1 , prócz tej, że N_1 jest funkcją Y nie dają. Mamy jednak jeszcze niewykorzystany warunek Rankine'a /10/, który posłuży do wyznaczenia N_1 .

§ 161. Mając wyrażenia na N_2 i T możemy wyznaczyć N_1 , korzystając z warunku Rankine'a. W tym celu zastąpimy w warunku /10/ N_2 i T przez wyrażenie /23/ i /24/. Otrzymamy w ten sposób warunek na N_1 , mianowicie

$$(N_1+\pi Y\cos\omega)^2+4\pi^2Y^2\sin^2\omega-(N_1-\pi Y\cos\omega)^2\sin^2\varphi \leqq 0$$

lub

$$U = Y^2\left[\left(\frac{N_1}{Y}+\pi\cos\omega\right)^2+4\pi^2\sin^2\omega-\left(\frac{N_1}{Y}-\pi\cos\omega\right)^2\sin^2\varphi\right] \leqq 0$$

oznaczmy $\frac{N_1}{Y}$ przez $(-A)$, A będzie dodatnie, gdyż z góry wiadomo, iż w środowisku sypkim mogą być tylko ciśnienia t.j. $N_1 < 0$, wielkość zaś $Y = K+y$ zgodnie z położeniem osi jest większa od 0. Zważając na podstawienie $N_1 = -A\cdot Y$ nasz warunek przepiszemy w postaci;

$$U \equiv y^2[(-A+\pi\cos\omega)^2 + 4\pi^2\sin^2\omega - (-A-\pi\cos\omega)^2\sin^2\varphi] \leqq 0,$$

lub po zredukowaniu wielomianu w nawiasie i podzieleniu obu części nierówności przez y^2 - w postaci:

$$\frac{U}{y^2} \equiv aA^2 - 2bA + c \leqq 0,$$

gdzie

$$a = \cos^2\varphi$$
$$b = \pi\cos\omega\,(1+\sin^2\varphi)$$
$$c = \pi^2(\cos^2\omega\,\cos^2\varphi + 4\sin^2\omega)$$

W wypadku równowagi granicznej ma miejsce tylko znak równości; odpowiednie wartości A, które jednocześnie są pierwiastkami trójmianu $\frac{U}{y^2}$, wyznaczamy z równania:

$$aA^2 - 2bA + c = 0,$$

mianowicie

$$\left.\begin{matrix} A_1 \\ A_2 \end{matrix}\right\} = \frac{b \mp \sqrt{b^2 - ac}}{a}$$

Pierwiastki będą rzeczywiste, jeżeli wyróżnik $\Delta = b^2 - ac$ będzie dodatni; mamy dla niego wyrażenie następujące:

$$\frac{\Delta}{\pi^2} = \cos^2\omega(1+\sin^2\varphi)^2 - \cos^2\varphi\,(\cos^2\omega\cos^2\varphi + 4\sin^2\omega) =$$

$$= \cos^2\omega\,[(1+\sin^2\varphi)^2-\cos^4\varphi]-4\cos^2\varphi\,\sin^2\omega =$$

$$= 4\cos^2\omega\,\sin^2\varphi-4\cos^2\varphi\,\sin^2\omega = 4\sin(\varphi+\omega)\cdot\sin(\varphi-\omega).$$

Stąd widać, że $\Delta > 0$ jeżeli tylko $\omega < \varphi$ t.j. nachylenie naziomu jest mniejsze od nachylenia stoku naturalnego, co oczywiście przy równowadze zawsze ma miejsce. Pierwiastki A_1 i A_2 będą:

$$/25/\quad \left.\begin{matrix} A_1 \\ A_2 \end{matrix}\right\} = \frac{\pi}{\cos^2\varphi}\left[\cos\omega\,(1+\sin^2\varphi)\mp\sqrt{4\sin(\varphi+\omega)\sin(\varphi-\omega)}\right]$$

przytem $A_1 < A_2$.

Mamy więc w wypadku równowagi granicznej dwa możliwe stany równowagi, jeden odpowiada pierwiastkowi A_1, drugi - A_2. W obu stanach N_2 i T są jednakowe, N_1 zaś różne, mianowicie: w pierwszym stanie:

$$/26/\quad N_1 = -A_1 Y = -A_1(y+e),$$

w drugim:

$$/27/\quad N_1 = -A_2 Y = A_2(y+e)$$

t.j. $/N_1/$ w pierwszym stanie jest mniejsze od $/N_1/$ w drugim; pierwszy stan nazywa się stanem czynnym lub parcia, drugi - stanem biernym lub odporu.

Poza powyższemi dwoma stanami równowagi granicznej może być stan równowagi stateczej, odpowiadający warunkowi $\frac{U}{V^2} < 0$. Pierwiastki trójmianu

$\frac{U}{y^2}$ są A_1 i A_2, rozważany więc warunek może być przedstawiony w postaci:

$$a(A-A_1)(A-A_2)<0$$

tutaj $a=\cos^2\varphi>0$, $A_1<A_2$, lewa strona będzie więc zawsze <0, jeżeli A będzie czynić zadość warunkowi

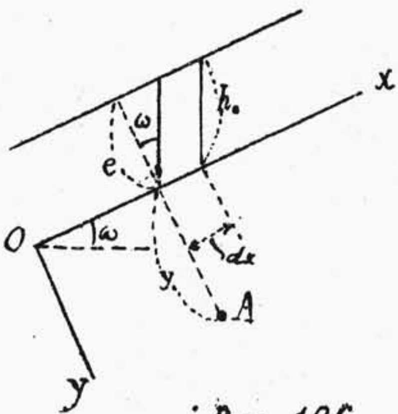
$$A_1<A<A_2$$

Takich wartości A może być nieskończenie wiele i odpowiednio istnieje nieskończenie wiele stanów równowagi, spółczynnik A, a zatem i $N_1=-AY$ są tutaj nieokreślone. Jak widzieliśmy powyżej zadanie jest określone tylko dla dwóch stanów równowagi granicznej.

Mając N_1, N_2 i T można uważać zadanie za kompletnie rozwiązane, gdyż na podstawie wyłożonej powyżej ogólnej teorji naprężeń wszelkie inne elementy stanu naprężonego wyrażają się w funkcji N_1, N_2 i T.

Pozostaje jeszcze zrobić niektóre uwagi, co uczynimy w następnych §§.

§ 162. Jeżeli powierzchnia ziemi jest nieobciążona, to w powyższych równaniach $p=0$, $e=0$ i $Y=y$ powyższe wzory pozostają te same z zamianą Y na y Wzory na naprężenia przy obciążeniu równomiernem powierzchni można otrzymać ze wzorów przy powierzchni nieobciążonej, powiększając rzędną y o wielkość e, t.j. jakgdyby powierzchnia ziemi leżała wyżej od osi Ox o odległość e, czyli, jak gdyby nad Ox była jeszcze warstwa ziemi o grubości e. Rzeczywiście obciążenie równomierne p można sobie wyobrazić /rys.196/ jako pochodzące od warstwy ziemi o wysokości h_0, mianowicie



Rys. 196

$$p\,dx \cdot 1 = \pi \cdot h_0 \cdot dx \cos\omega \cdot 1$$

stąd

$$p = \pi h_0 \cos\omega = \pi e,$$

a zatem $e = h_0 \cos\omega$.

§ 163. W wypadku poszczególnym, gdy $\omega = \varphi$, pierwiastek kwadratowy we wzorze /25/ równa się zeru i mamy:

$$A_1 = A_2 = \pi \cos\omega \frac{1+\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi}$$

Dwa skrajne stany równowagi granicznej stają się tutaj jednakowe, a znaczy się, $A = A_1 = A_2$ t.j. istnieje w tym wypadku tylko jeden stan równowagi granicznej.

Drugi poszczególny ciekawy wypadek jest, gdy $\omega = 0$, t.j. naziom jest poziomy; wtedy wzór /25/ przechodzi na następujący:

$$\left.\begin{matrix} A_1 \\ A_2 \end{matrix}\right\} = \frac{\pi}{\cos^2\varphi}\left(1+\sin^2\varphi \mp 2\sin\varphi\right) = \frac{\pi(1\mp\sin\varphi)^2}{\cos^2\varphi} =$$

$$= \pi\frac{(1\mp\sin\varphi)^2(1\pm\sin\varphi)}{\cos^2\varphi(1\pm\sin\varphi)} = \pi\,\frac{1\mp\sin\varphi}{1\pm\sin\varphi}$$

W tym wypadku z wzoru /22/ widać, że $T=0$, a zatem w każdym punkcie osie główne ξ i η są równoległe do osi x i y. Będziemy mieli w wypadku parcia (A_1):

$$/28/\quad \begin{cases} N_2 = -\pi y \\ N_1 = -A_1 y = -\pi y\dfrac{1-\sin\varphi}{1+\sin\varphi} \end{cases}$$

t.j. $|N_1| < |N_2|$, czyli $N_2 < N_1$. Chcąc oznaczyć przez $\mathfrak{N}_1$ naprężenie większe od $\mathfrak{N}_2$ co do bezwzględnej wartości, należy przyjąć

$$\mathfrak{N}_1 = N_2 \quad , \quad \mathfrak{N}_2 = N_1 \ ,$$

t.j. w tym wypadku oś ξ będzie miała kierunek osi y, oś η kierunek osi $(-x)$.

W wypadku odporu otrzymamy odwrotnie:

$$/29/\quad \begin{cases} \mathfrak{N}_1 = N_1 = -\pi y\ \dfrac{1+\sin\varphi}{1-\sin\varphi} \\ \mathfrak{N}_2 = N_2 = -\pi y. \end{cases}$$

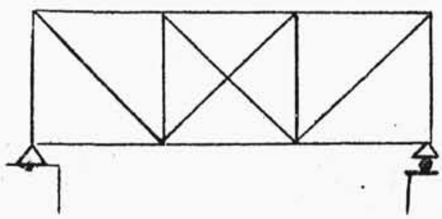
Wzory /28/ i /29/ zgadzają się oczywiście z wzorem /18/.

Dla porównania naprężeń w wypadku parcia i odporu przy naziomie poziomym połóżmy np. $\varphi = 30°$; Otrzymamy odpowiednie naprężenia:

$$N_1^{(n)} = -\pi y \cdot \tfrac{1}{3} \; ; \quad N_1^{(o)} = -\pi y \cdot 3 \; ;$$

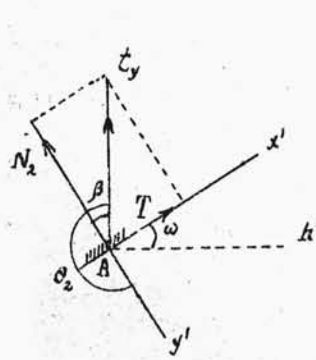
t.j. różnica jest bardzo znaczna.

§ 164. Zwróćmy uwagę na następującą okoliczność przy rozwiązywaniu powyższego zagadnienia. Wspomnieliśmy już w § 144, że równania dla środowiska ciągłego /1/ i /2/ z warunkami /5/ i /6/ jako 2 równania z 3 niewiadomemi funkcjami są niewystarczające i że należy je uzupełnić warunkiem, lub równaniem, określającem własność fizyczną środowiska, takiem uzupełnieniem służył nam dla środowiska sypkiego warunek Rankine'a. Przy bliższem jednak wniknięciu w rzecz /§ 160/ wyjaśniło się, że można wyznaczyć funkcje N_2 i T, nie posiłkując się warunkiem Rankine'a; stąd widać, że wyrażenia /23/ i /24/ na N_2 i T są słuszne dla wszelkiego środowiska ciągłego i rzeczywiście w wyrażenia te nie wchodzi, stała φ - kąt tarcia, charakteryzujący środowisko sypkie; jedynie funkcja N_1 zależy od warunku Rankine'a, a więc i od stałej φ. Jak widać zadanie powyższe w zastosowaniu do środowiska ciągłego jest nieokreślone, ale tylko częściowo. Z podobnemi wypadkami spotykamy się i przy rozważeniu układów ciał sztywnych np. wyznaczenie natężeń w kratownicy na rys.197 jest zadaniem nieokreślonem, gdyż $a+b>2n$ jednak nieokreśloność ta jest tylko częściowa - dotyczy tylko prętów pola środkowego, w bocznych polach natężenia są określone.



Rys. 197

Wracając do powyższego rozwiązania, zauważymy, że N_1 i T są składowemi naprężenia t_y na kierunki x' i y', równoległe do osi x i y /rys. 198/. Ze wzorów /23/ i /24/ mamy:



Rys. 198

/30/... $t_y = +\sqrt{N_1^2+T^2} = \pi Y$;

następnie z rys. mamy:

$$tng\,\beta = \frac{|T|}{|N_1|} = tng\,\omega,$$

t.j. $\beta = \omega$, a więc $t_y \perp Ak'$ t.j. naprężenie t_y jest pionowe; kąt $\theta_2 = \sphericalangle(y', t_y)$ jest

$$/31/ \quad \theta_2 = 180° + \omega$$

Widzimy więc, że we wszelkiem środowisku ciągłem, ważkiem i ograniczonem naziomem płaskiem naprężenie na wszelkiem poletku równoległem do naziomu jest pionowe i określa się wzorem /30/, niezależnie od natury środowiska.

Elementarne rozwiązanie zadania o równowadze ziemi sypkiej w wypadku naziomu płaskiego.

§ 165. W §§ 160 i 161 pokazaliśmy, jak rozwiązać zadanie o równowadze ziemi sypkiej, ograniczonej naziomem płaskim, zapomocą metody ogólnej, polegającej na całkowaniu ogólnym równań równowagi; mieliśmy przytem więcej na względzie zapoznać się z tą metodą, niż rozwiązanie praktyczne, albowiem całkowite rozwiązanie w danym wypadku może być otrzymane drogą elementarnych rozważań, mianowicie jak następuje.

Rozpatrzmy ziemię sypką o naziomie płaskim i nachylonym do poziomu pod kątem ω /rys.199/. Wyobraźmy sobie prostopadłościan $ABCDA'B'C'D'$, wycięty ze środowiska za pomocą płaszczyzn pionowych $ABA'B'$ i $DCD'C'$ oraz - $BCB'C'$ równoleg-