

PODSTAWY TEORJI SPRĘŻYSTOŚCI

WEDŁUG WYKŁADÓW

prof. L. KARASIŃSKIEGO



POLITECHNIKA WARSZAWSKA 1920/21R.

NAKŁADEM „KOMISJI WYDAWNICZEJ” TOW. „BRATNIA POMOC”
STUD. POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

№ 98.

917



C. 13477



NR 835

BG04A/006-30

CZĘŚĆ I.

Z A G A J N W I E

§1. WYTRZYMAŁOŚĆ TWORZYW, A TEORIA SPRĘŻYSTOŚCI.

W dotychczasowych badaniach posługiwaliśmy się metodą PRZEKROJÓW PŁASKICH, stanowiącą podwalinę WYTRZYMAŁOŚCI TWORZYW. Ta metoda okazała się bezsilną przy badaniu ŚCIANIA i SPĘCANIA, gdzie zmuszeni byliśmy dodatkowo wziąć pod uwagę układy elementarnych kostek, myślowo wyodrębnionych we wnętrzu ciała odkształconego. Posługiwaliśmy się zatem milczącą nową zupełnie metodą WYKROJÓW Z CIAŁA OD SZTAŁCONEGO stanowiącą podstawę TEORJI SPRĘŻYSTOŚCI, nauki ściślej o charakterze czysto matematycznym, osnutej na prawie HOOKE'A. TEORJA SPRĘŻYSTOŚCI posiada ^{pewną} ~~całą~~ - prowadzi bowiem naogół do nader złożonych wzorów nie ma więc owej przejrzystej prostoty, jaką odznacza się WYTRZYMAŁOŚĆ TWORZYW. To też, gdzie tylko można, posługujemy się wyłącznie WYTRZYMAŁOŚCIĄ TWORZYW, stosując TEORJĘ SPRĘŻYSTOŚCI jedynie wtedy, gdy WYTRZYMAŁOŚĆ zawodzi.

TEORJA SPRĘŻYSTOŚCI JEST WIĘC NAUKĄ O RÓWNOWADZE WEWNĘTRZNYCH WYKROJÓW CIAŁA ODKSZTAŁCONEGO.

Rozpatrzmy najprostszy szkielet statyczny to jest:

2. UKŁAD KOSTEK PROSTYCH, znikome masy, stanowią-
 dową wewnętrzną cięła odkształconego. Wyprowadzony
 olnego punktu Ω trzy wzajemnie do siebie prosto-
 osie współrzędnych $\Omega\xi, \Omega\eta, \Omega\zeta$ które na-
 y STILEMI. Przez dane CIAŁO ODKSZTAŁCONE C prze-
 dany wysłowa, potrójny szereg przekrojów płaskich,
 no równoległych do PŁASZCZYZNY $\xi\Omega\eta, \xi\Omega\zeta, \eta\Omega\zeta$, a
 no od siebie odległych. W ten sposób rozcinamy cia-
 kształcone na GROMADĘ KOSTEK PROSTYCH WEWNĘTRZNYCH.
 ziorzchni miejscami również otrzymamy kostki tego-
 3 wogóle są ZEWNETRZNE KOSTKI, STANOWIĄCE POWŁOKĘ
 ODKSZTAŁCZONEGO BĘDĄ NIOSYĆ SZESZCIEENNE, UKOŚNO ŚCIĘ-
 WNOLEGLIE DO JEDNEJ Z KRAWĘDZI A WIEDZ SZESZCIOŚCIEENNE
 E. WRESZCIE UKOŚNO ŚCIĘTE POD KĄTEM - CZWOROŚCIEENNE
 e bowiem możemy uważać zewnętrzne wycinki powierzchni
 ła odkształconego, jako płaskie, pomijając nieznacz-
 ywizną - wobec znikomej odległości płaszczyzn iną-
 Zewnętrzne kostki tylko co wymienione, ulegają ob-
 iu zewnętrznemu, działającemu na powłokę ciała od-
 kconego - wewnętrzne natomiast działają wzajem na
 e siłami wewnętrznymi, chyba że leżą tuż pod powłoką,
 dy działają również i na zewnętrzne kostki. Wskysi-
 w ogólnym wypadku ulegają ponadto działaniu sił ma-
 i, jako to: SIŁE CIĄŻENIA, BEZWAŁOWOŚCI LUB ODSRODKO-

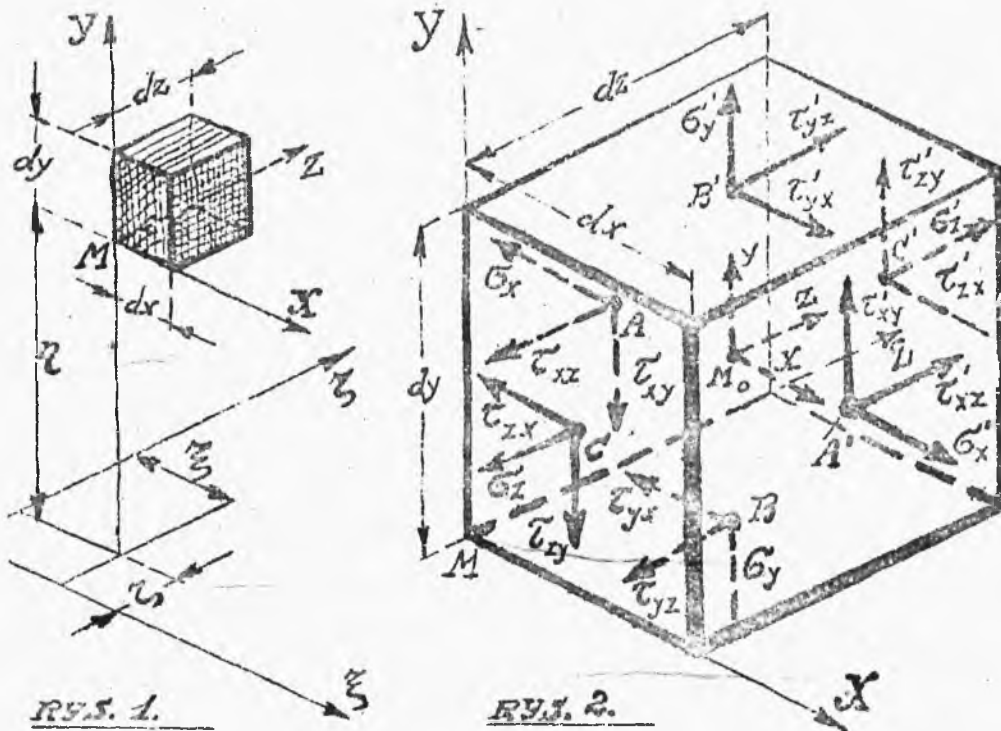
WEJ. Zjawisk magnetycznego lub elektrycznego przyciągania nie bierzemy tu pod uwagę; działanie ich bowiem jest stosunkowo nieznaczne i nie ujawnia się wytrzymałościowo. Wspomniane SIŁY ZEWNĘTRZNE I WEWNĘTRZNE DZIAŁAJĄ NA ŚCIANKI KOSTEK, SIŁY MASOWE PRZYCŁONIE SĄ DO ŚRODKA ICH MASY.

Weźmy pod uwagę, jakkolwiek KOSZKĘ WEWNĘTRZNĄ. Wobec istnienia trwałego stanu RÓWNOWAŻY WEWNĘTRZNEJ w ciele odkształconem - kostka ta również pozostaje w równowadze, a więc JEJ SIŁY MASOWE ORAZ SIŁY ZOGÓLNEGO ODDZIAŁYWANIA NA KOSTKI SASIEDNIE WZAJEMNIE SIĘ ZNOSZĄ, DAJĄC DLA ŚRODKA MASY KOSTKI WYPADKOWE SIŁ I MOMENTÓW - RÓWNE ZERO. Odrzućmy sąsiednie kostki, a równowaga zostanie zakłócona - siły wewnętrzne bowiem przestaną się znosić wzajemnie i aby ją utrzymać, NALĘŻY ZASTĄPIĆ DZIAŁANIE KOSTEK ODRZUCONYCH SIŁAMI, PRZYCŁONENIEMI DO ŚCIANEK KOSTKI ROZPACYWANEJ. Będą to niejako SIŁY ZEWNĘTRZNE KOSTKI - odkształcające, PRZYCŁONIONE DO ŚRODKÓW CIĘŻKOŚCI ŚCIANEK KOSTKI, przytem w ogólnym wypadku NA KAŻDĄ ŚCIANKĘ DZIAŁĄC BĘDZIE SKŁADOWA NORMALNA I STYCZNA, leżąca w jej płaszczyźnie. Dzieląc siły składowe przez powierzchnię ścianki otrzymamy:

§ 3. NAPRĘŻENIA JEDNOSTKOWE ŚCIAN KOSTKI WEWNĘTRZNEJ.

Weźmy pod uwagę jakikolwiek punkt $M[\xi, \eta, \zeta]$ we wnętrzu ciała odkształconego i z tego punktu, jako początku, poprowadźmy nowe OSIE SPÓRZĘDNYCH MX, MY, MZ odpowiednio

ległe do dawnych i tak samo skierowane jak one. Te osie nazywamy **MIEJSCOWYM**, dla odróżnienia od dawnych **WŁASNYCH**. Płaszczyzny osi miejscowych należą niewątpliwie



wianego wyżej szeregu przekrojów płaskich ciała od-
 oonego, tworzą one łącznie z płaszczyznami sąsiednie-
 egłomi odpowiednio o dx , dy , dz - zamkniętą **KOSTKĘ**,
LEŻNĄ DO ROZPATRYWANEGO PUNKTU. Ta kostka może być
 a jako drobina ciała odkształconego. W jej **ŚRODKU**
 M_0 PANUJE OGÓLNA SIŁA MASOWA, NA ŚCIANKACH - NAPRĘ-
NORMALNE I STYCZNE. Zazwyczaj siłę masową wyznaczamy
KOSTKACH SIŁY NA JEDNOSTKĘ OBJĘTOŚCI, a więc w postaci

SILY MASOWEJ JEDNOSTKOWEJ O SKŁADOWYCH X, Y, Z - RÓWNIEŻ
SIŁACH MASOWYCH JEDNOSTKOWYCH.

Wobec stosunkowo dużej liczby naprężeń kostkowych,
należy wprowadzić odpowiednie znakowanie rozróżniające.

A więc:

1-o NAPRĘŻENIA NORMALNE DO ŚCIANEK KOSTKI, ZBIEGAJA-
CYCH SIĘ W POCZĄTKU OSI, SPÓJRZEDNYCH OZNACZAMY PRZEZ σ ,
NAPRĘŻENIA NORMALNE DO ŚCIANEK PRZECIWIWLEGŁYCH PRZEZ σ'
STAWIĄC W OBU WYPADKACH U DOŁU ZNACZEK, MIANUJĄCY OŚ RÓW-
NOLEGŁĄ DO NAPRĘŻENIA. NAPRĘŻENIA NORMALNE ROZCIĄCAJĄCE,
A WIĘC SKIEROWANE NAZEWNĄTRZ ZNAKUJEMY WE WZORACH DODAT-
NIO - A ŚCISKAJĄCE, IDĄCE WGLĄB KOSTKI - UJEMNIE.

2-o. NAPRĘŻENIA STYCZNE, CZYLI TNĄCE, LEŻĄCE W PŁASZ-
CZYŹNIE ŚCIANKI KOSTKI, ROZKŁADAMY NA SKŁADOWE RÓWNOLEGŁE
DO RUCHOMYCH OSI; GDY NAPRĘŻENIE NORMALNE SKIEROWANE JEST
PODŁUG OSI RÓWNOLEGŁEJ, TO I LEŻĄCE W TEJ SAMEJ ŚCIANCE
NAPRĘŻENIA TNĄCE MAJĄ KIERUNKI ODNOŚNYCH OSI I NAODWRÓT.

3-o. NAPRĘŻENIA TNĄCE, LEŻĄCE W ŚCIANKACH KOSTKI, ZBIE-
GAJĄCYCH SIĘ W POCZĄTKU OSI SPÓJRZEDNYCH OZNACZAMY PRZEZ
 τ , NAPRĘŻENIA TNĄCE, PRZYNALEŻNE DO ŚCIANEK PRZECIW-
LEGŁYCH - PRZEZ τ' , STAWIĄC W OBU WYPADKACH U DOŁU DWA
ZNACZKI, PIERWSZY Z NICH MIANUJE OŚ, PROSTOPADŁĄ DO ŚCIAN-
KI, W KTÓREJ LEŻY ROZPATYWANE NAPRĘŻENIE TNĄCE, - DRUGI
WYZNACZA OŚ RÓWNOLEGŁĄ DO TEGO NAPRĘŻENIA.

W ciele JEDNOLITEM o jednostajnem budowie cząsteczko-
wej wewnętrznej - naprężenia, panujące w punktach sąsied-
nich, nieznacznie tylko się różnią od siebie; skoro więc
posuwamy się we wnętrze ciała o dx , dy lub dz ,
wkraczając w ten sposób na ścianki przeciwległe odnośnej
kostki, to znajdujemy nowe wartości naprężeń, niewiele
różne od poprzednich. Idąc dajmy na to z A do A' ujawnia-
my zmianę G_x w G_x' , przyczem $G_x' \cong G_x$, co wyrażamy pi-
sząc $G_x' = G_x + dG_x$. Ponieważ przy tem pozostałe współrzędne
nie ulegają zmianie, przeto dG_x stanowi PRZYROST CZĄ-
STECZKOWY, PRZYNALEŻNY DO dx , a przeto $G_x' = G_x + \frac{\partial G_x}{\partial x} dx$
oraz podobnież $G_y' = G_y + \frac{\partial G_y}{\partial y} dy$, $G_z' = G_z + \frac{\partial G_z}{\partial z} dz$. Ponadto
jeszcze możemy napisać zupełnie na tej samej zasadzie:

$$\begin{aligned} \tau'_{xy} &= \tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx, & \tau'_{xz} &= \tau_{xz} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} dx, & \tau'_{yz} &= \tau_{yz} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} dy, \\ \tau'_{yx} &= \tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy, & \tau'_{zx} &= \tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz, & \tau'_{zy} &= \tau_{zy} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} dz. \end{aligned}$$

Oznaczmy przez A, B, C ŚRODKI CIĘŻKOŚCI ścianek
kostki, zbiegających się w punkcie M , a przez A', B', C' -
ścianek przeciwległych. Te same znaki przypisywać będziemy
odnośnym ściankom kostki, przechodząc od naprężeń do sił
wewnętrznych cząsteczkowych znajdziemy następujący układ
18 sił. (TABLICA I).

TABLICA PIERWSZA.

PUNKT UCZĘPIENIA	SIŁY RÓWNOLEGŁE DO OSI		
	$M.X$	$M.Y$	$M.Z$
M_0	$X dx dy dz$	$Y dx dy dz$	$Z dx dy dz$
A	$G_x dy dz$	$\tilde{L}_{xy} dy dz$	$\tilde{L}_{xz} dy dz$
B	$\tilde{L}_{yx} dz dx$	$G_y dz dx$	$\tilde{L}_{yz} dz dx$
C	$\tilde{L}_{zx} dx dy$	$\tilde{L}_{zy} dx dy$	$G_z dx dy$
A'	$[G_x + \frac{\partial G_x}{\partial x} dx] dy dz$	$[\tilde{L}_{xy} + \frac{\partial \tilde{L}_{xy}}{\partial x} dx] dy dz$	$[\tilde{L}_{xz} + \frac{\partial \tilde{L}_{xz}}{\partial x} dx] dy dz$
B'	$[\tilde{L}_{yx} + \frac{\partial \tilde{L}_{yx}}{\partial y} dy] dz dx$	$[G_y + \frac{\partial G_y}{\partial y} dy] dz dx$	$[\tilde{L}_{yz} + \frac{\partial \tilde{L}_{yz}}{\partial y} dy] dz dx$
C'	$[\tilde{L}_{zx} + \frac{\partial \tilde{L}_{zx}}{\partial z} dz] dx dy$	$[\tilde{L}_{zy} + \frac{\partial \tilde{L}_{zy}}{\partial z} dz] dx dy$	$[G_z + \frac{\partial G_z}{\partial z} dz] dx dy$

§ 4. WARUNKI RÓWNOBAGI PROSTEJ KOSTKI WEWNĘTRZNEJ. Przewszystkiem przy dodawaniu składowych podanych wyżej, należy uwzględnić kierunki działania tych sił. Biorąc zatem sumę składowych równoległych do osi $M.X$ będziemy mieli kolejno $[G_x + \frac{\partial G_x}{\partial x} dx] dy dz - G_x dy dz + [\tilde{L}_{yx} + \frac{\partial \tilde{L}_{yx}}{\partial y} dy] dz dx - \tilde{L}_{yx} dz dx + [\tilde{L}_{zx} + \frac{\partial \tilde{L}_{zx}}{\partial z} dz] dx dy - \tilde{L}_{zx} dx dy + X dx dy dz = [\frac{\partial G_x}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{L}_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{L}_{zx}}{\partial z} + X] dx dy dz = 0$ i ostatecznie mamy dla trzech osi

$$\frac{\partial G_x}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{L}_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{L}_{zx}}{\partial z} + X = 0; \quad \frac{\partial G_y}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{L}_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{L}_{yz}}{\partial z} + Y = 0;$$

$$\frac{\partial G_z}{\partial z} + \frac{\partial \tilde{L}_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{L}_{yz}}{\partial y} + Z = 0.$$

Z kolei wypisujemy równania momentów branych względem osi AA', BB', CC' , przechodzących przez środek masy M_0 kostki a równoległych do odpowiednich ruchomych osi

spółrzędnych, przy czem pomijamy składowe przecinające osi rozpatrywaną lub do niej równoległe, jako nie dające momentów. W ten sposób dla osi AA' dajmy na to, mamy, rozróżniając znakiem różnoskrętność odnośnych momentów.

$$\begin{aligned} & \tilde{\tau}'_{yz} dx dx \frac{1}{2} dy + \tilde{\tau}'_{yz} dx dz \frac{1}{2} dy - \tilde{\tau}'_{zy} dx dy \frac{1}{2} dz - \tilde{\tau}'_{zy} dx dy \frac{1}{2} dz = \\ & = \frac{1}{4} [\tilde{\tau}_{yz} + \frac{\partial \tilde{\tau}_{yz}}{\partial y} dy + \tilde{\tau}_{yz} - \tilde{\tau}_{zy} - \frac{\partial \tilde{\tau}_{zy}}{\partial z} dz - \tilde{\tau}_{zy}] dx dy dz = \\ & = [\tilde{\tau}_{yz} + \frac{\partial \tilde{\tau}_{yz}}{\partial y} dy - \tilde{\tau}_{zy} - \frac{\partial \tilde{\tau}_{zy}}{\partial z} dz] dx dy dz = 0. \end{aligned}$$

Pomijając nieskończenie małe otrzymujemy ostatecznie $\tilde{\tau}_{yz} = \tilde{\tau}_{zy}$ oraz zupełnie tak samo $\tilde{\tau}_{zx} = \tilde{\tau}_{xz}$ i $\tilde{\tau}_{xy} = \tilde{\tau}_{yx}$. Te równania stanowią t.zw. TWIERDZENIA CAUCHY. Brzmi ono tak:

NAPRĘŻENIA TNĄCE, PROSTOPADLE SKIEROWANE KU TEJ SAMEJ OSI KRAWĘDZI KOSTKI, SĄ RÓWNE. Czasami dla uproszczenia pisania pomijamy podwójne znaczki, oznaczając wprost

$\tilde{\tau}_{xy} = \tilde{\tau}_{yx} = \tilde{\tau}_x$, $\tilde{\tau}_{yz} = \tilde{\tau}_{zy} = \tilde{\tau}_y$, $\tilde{\tau}_{zx} = \tilde{\tau}_{xz} = \tilde{\tau}_z$ - w danym wypadku DOLNY ZNACZEK BIAKUJE OŚ PROSTOPADŁĄ DO DANEGO NAPRĘŻENIA TNĄCEGO.

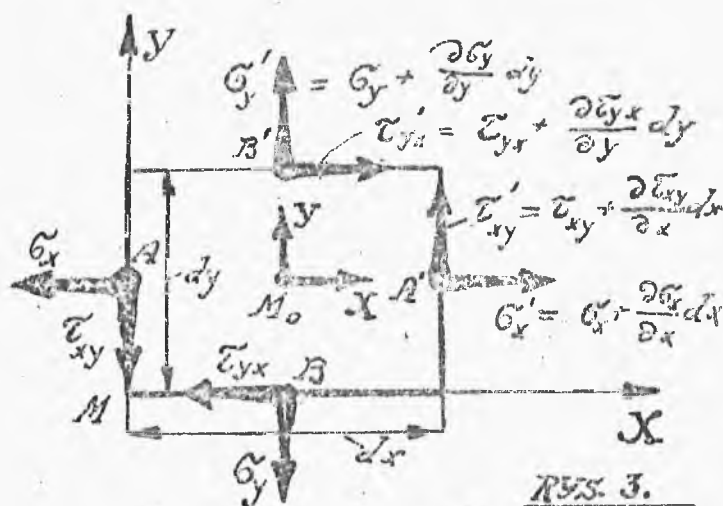
Widzimy więc, iż ilość naprężeń jednostkowych kostki sprowadza się do sześciu $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_x, \tau_y, \tau_z$ dla określenia tych naprężeń mamy wszystkie trzy równania statyki, które tu wypiszemy w postaci: $\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_z}{\partial y} + \frac{\partial \tau_y}{\partial z} + X = 0$, $\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_x}{\partial z} + \frac{\partial \tau_z}{\partial x} + Y = 0$, $\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_y}{\partial x} + \frac{\partial \tau_x}{\partial y} + Z = 0$ i oznaczymy pokrótce znakiem (R) . Tych równań jest najwidoczniej zbyt mało,

sama więc statyka nie wystarcza, aby wyznaczyć naprężenia kostki w rozpatrywanym wyżej wypadku ogólnym RÓWNOWAGI PRZESTRZENNEJ, KIEDY MAMY DO CZYNNIENIA Z NAPRĘŻENIAMI, RÓWNOLEGLIEMI DO WSZYSTKICH TRZECH OSI SPÓŁRZĘDNYCH. To samo niewątpliwie będzie również i w wypadku prostszym, KIEDY NA KOSTCE BRAK NAPRĘŻEŃ, RÓWNOLEGLYCH DO JEDNEJ Z OSI SPÓŁRZĘDNYCH, to jest, KIEDY ZACHODZI RÓWNOWAGA PŁASKA.

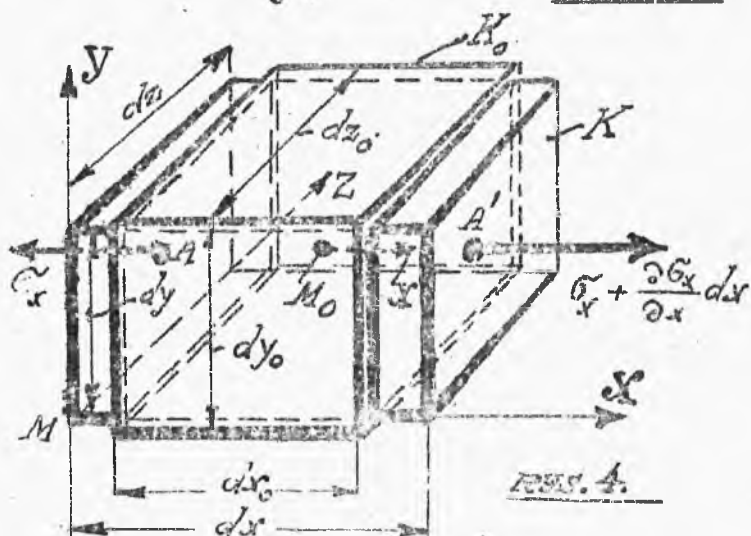
Jeżeli to ma miejsce dajmy na to dla osi MZ , to wtedy $G_z = \tau_{xz} = \tau_{zx} = \tau_{xy} = \tau_{yz} = 0$, albo jeszcze inaczej $\sigma_z = \tau_y = \tau_x = 0$, a zatem równania (R) należy wypisać w prostej postaci: $\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + X = 0$, $\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_z}{\partial x} + Y = 0$, $Z = 0$. Ostatnie równanie głosi, że SKŁADOWA SIŁY MASOWEJ JEDNOSTKOWEJ RÓWNOLEGLA DO ONEJ OSI MZ JEST RÓWNA ZERU. W danym wypadku wystarczająco jasny obraz obciążenia kostki daje środkowy jej przekrój, równoległy do płaszczyzny XY , zawiera bowiem w swej płaszczyźnie WSZYSTKIE naprężenia. Stąd nazwa równowagi PŁASKIEJ.

Gdy z kolei w kostce BRAK NAPRĘŻEŃ, RÓWNOLEGLYCH ODPOWIEDNIO DO DWÓCH OSI SPÓŁRZĘDNYCH, wtedy możliwa jest RÓWNOWAGA LINJOWA. Niech to będą, dajmy na to, osie MY i MZ , a zatem $\sigma_y = \sigma_z = \tau_x = \tau_y = \tau_z = 0$.

W danym wypadku równania (R) są nader proste. $\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + X = 0$, $Y = Z = 0$. Tutaj więc siła masowa jednostkowa WINNA BYĆ RÓWNOLEGLA DO OSI MX . Jest to zatem OGÓLNY WYPADEK ROZCIĄGANIA, gdy $\sigma_x > 0$ lub ŚCISKANIA KOST-



RYC. 3.



RYC. 4.

Ki, gdy $\sigma_x < 0$. Zazwyczaj uważamy naprężenie kłosti od odkształceń, wiążąc je PRAWEM HOOKE'A, zapożyczonym z WYTRZYMAŁOŚCI TWORZYW, gdzie to prawo ma wyraźny doświadczalny charakter.

Tutaj natomiast W TEORJI SPRĘŻYSTOŚCI NABIERA ONO DONIOSŁOŚCI ZASADY BEZWZGLEDNEJ, stanowiąc podstawę tej nauki. Stąd to niowątpliwie w sprzeczności z doświadczeniem. wiemy bowiem, że dla wielu ciał zakres stosowalności PRAWA HOOKE'A jest nader skromny. Tem niemniej jednak podlegają mu wszystkie ciała w granicach mniej lub więcej szczyplych. Drugie prawo WYTRZYMAŁOŚCI TWORZYW - ZASADA NIEZALEŻNE

GO DZIAŁANIA NAPRĘŻEŃ również bezwzględnie jest uznawane w TEORJI SPRĘŻYSTOŚCI. Oba te prawa łącznie z równaniami statyki pozwalają rozwiązać podstawowe zagadnienia TEORJI SPRĘŻYSTOŚCI w ogólnej postaci.

§5. ODKSZTAŁCENIA KOSTKI, POZOSTAJĄCEJ W RÓWNOWAŻE LINJOWEJ. W założeniu rozciągania kostki, a przypuszczenie to w niczem ogólności wywodzenia nie uszczupli, KOSTKA PIERWOTNA NIEODKSZTAŁCONA K_0 O WYMIARACH GŁÓWNYCH dx_0, dy_0, dz_0 ODKSZTAŁCA SIĘ /RYS. 3 W KOSTKĘ K RÓWNIŻ PROSTĄ O WYMIARACH ODKSZTAŁCONYCH dx, dy, dz , przyczem następuje WYDŁUŻENIE KOSTKI W KIERUNKU DZIAŁANIA NAPRĘŻEŃ G_x i $G_x' = G_x + \frac{\partial G_x}{\partial x} dx$ oraz SKURCZ POPRZECZNY. W wypadku ściskania zjawiska te zmieniają znak wraz z naprężeniami.

Oznaczmy przez $\delta dx = dx - dx_0, \delta dy = dy - dy_0, \delta dz = dz - dz_0$. Będą to dodatnie lub ujemne przyrosty głównych wymiarów kostki, ujawniające się przy odkształceniu. Stosunki tych PRZYROSTÓW do odnosnych wymiarów pierwotnych kostki nazywamy JEDNOSTKOWYMI WYDŁUŻENIAMI lub SKRÓCENIAMI, czyli WYDŁUŻENIAMI UJEMNYMI WZGLĘDEM OSI MX, MY, MZ i oznaczmy odpowiednio przez $\epsilon_x = \frac{\delta dx}{dx_0}, \epsilon_y = \frac{\delta dy}{dy_0}, \epsilon_z = \frac{\delta dz}{dz_0}$. Ponieważ, jak to wiemy już z WYTRZYMAŁOŚCI TWORZYW, ODKSZTAŁCENIA POPRZECZNE ZACHODZA JEDNAKOWO WE WSZYSTKICH KIERUNKACH, przeto $\epsilon_y = \epsilon_z$, ponadto niewątpliwie $\epsilon_y = \epsilon_z = -\frac{\epsilon_x}{m}$, co zostało zresztą wyjaśnione w teorii rozciągania i ściskania.

Na mocy PRAWA HOOKE'A mamy $\varepsilon_x = \alpha \sigma_x = \frac{\sigma_x}{E}$, a zatem $\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\frac{\alpha \sigma_x}{m} = -\frac{\sigma_x}{mE}$. Znak minus jest tu konieczny, ponieważ ε_x i ε_y oraz ε_x i ε_z są zawsze różnych znaków. Tylko te wypisany wzorom można nadać jeszcze inną postać, nazywając przez dV_0 - OBJĘTOŚĆ PIERWOTNA KOSTKI, a przez dV OBJĘTOŚĆ KOSTKI ODKSZTAŁCONEJ. Oznaczmy przez $\delta dV = dV - dV_0$ - dodatni lub ujemny przyrost objętości kostki, ujawniony po odkształceniu. Stosunek tego przyrostu do pierwotnej objętości kostki nazywamy JEDNOSTKOWYM PRZYROSTEM OBJĘTOŚCIOWYM i oznaczmy przez $e = \delta dV : dV_0$ ponieważ niezależnie $dV_0 = dx_0 dy_0 dz_0$ oraz $dV = dx dy dz$ a ponadto $dx = dx_0 + \delta dx = dx_0 + \varepsilon_x dx_0 = [1 + \varepsilon_x] dx_0$; i zupełnie tak samo $dy = (1 + \varepsilon_y) dy_0$, $dz = (1 + \varepsilon_z) dz_0$, zatem $dV = (1 + \varepsilon_x)(1 + \varepsilon_y)(1 + \varepsilon_z) dx_0 dy_0 dz_0 = (1 + \varepsilon_x)(1 + \varepsilon_y)(1 + \varepsilon_z) dV_0$. Wobec nader drobnych wartości wydłużeń jednostkowych możemy tutaj pomijając małe wyższych rzędów, napisać $(1 + \varepsilon_x)(1 + \varepsilon_y)(1 + \varepsilon_z) \approx 1 + \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$, a zatem $dV = (1 + \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) dV_0$ stąd $dV - dV_0 = \delta dV = [\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z] dV_0$ i ostatecznie dzieląc przez dV_0 mamy $e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z \dots$

JEDNOSTKOWY PRZYROST OBJĘTOŚCI KOSTKI STANOWI SUMĘ WYDŁUŻEŃ JEDNOSTKOWYCH W KIERUNKU OSI SPÓŁRZĘDNYCH.

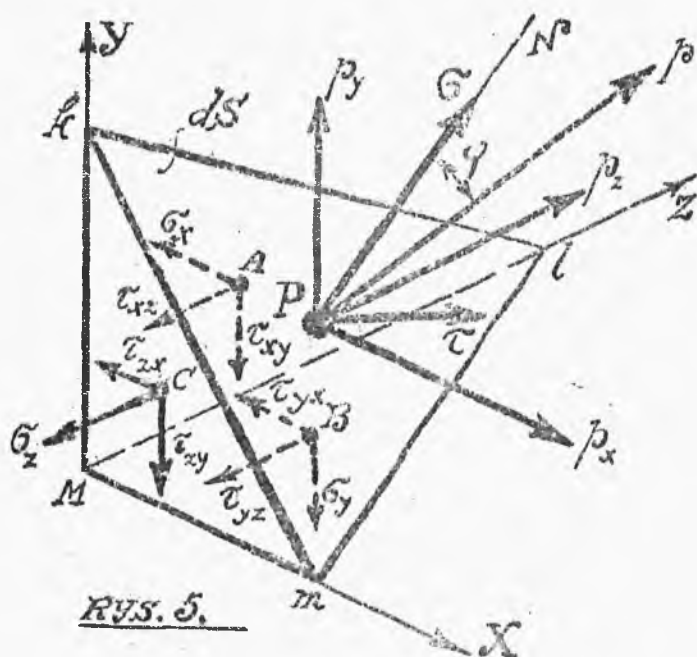
A zatem $e = \varepsilon_x - \frac{\varepsilon_x}{m} - \frac{\varepsilon_x}{m} = \frac{m-2}{m} \cdot \varepsilon_x \dots$. Stąd wniosek oczywisty, że TWORZYWA, DLA KTÓRYCH $m = 2$, NIE UJAWNIAJĄ ŻADNYCH ZMIAN OBJĘTOŚCIOWYCH PRZY ROZCIĄGANIU LUB SCIŚKANIU, wtedy bowiem $e = 0$. Tą cechą wyróżnia się pewna

odmiana kauczuku. Prawie dla wszystkich ciał $m > 2$ stąd również prosty wniosek, że prawie wszystkie **CIĘŁA POWIĘKSZAJĄ SWĄ OBJĘTOŚĆ PRZY ROZCIĄGANIU - KURCZĄ SIĘ PRZY ŚCISKANIU**, tutaj bowiem $\frac{m-2}{m} > 0$, a zatem znak e zależy od znaku ϵ_x . Stąd również $\epsilon_x = \frac{m}{m-2} \cdot e = \alpha \tilde{\epsilon}_x = \frac{\tilde{\epsilon}_x}{E'}$, oraz $\epsilon_y = \epsilon_z = -\frac{\epsilon_x}{m} = -\frac{e}{m-2}$.

Na tym kończymy badanie kostek wewnętrznych i bierzemy pod uwagę:

§ 6. WARUNKI RÓWNOWAGI KOSTKI ZEWNĘTRZNEJ. Przypuśćmy żeśmy wyznaczili naprężenia dla danej kostki wewnętrznej, potem dla sąsiedniej, przylegającej do poprzedniej wzdłuż jednej ze ścianek następnie znów dla sąsiedniej, idąc w tym samym kierunku - składowo posuwając się w ten sposób coraz dalej; wyjdziemy wreszcie na powierzchnie ciała. Ostatnią kostkę szeregu nazywamy **ZEWNĘTRZNA** - stanowi ona cząstkę powłoki ciała odkształconego. Wyżej już zaznaczyliśmy, że kostki zewnętrzne mogą być trzech rodzajów - ~~na to zwykle~~ **KOSTKI PROSTE, KLINY** lub **OSTROŚLUPY TRÓJKĄTNE**. Zewnętrzne proste kostki nie różnią się oczywiście niczym od wewnętrznych, należy zatem je rozpatrzeć warunki równowagi klinów zewnętrznych lub ostrosłupów trójkątnych. Od tych ostatnich zaczniemy, ponieważ warunki równowagi klinów można otrzymać jako szczególny wypadek równowagi ostrosłupa trójkątnego.

Rozpatrujemy przede **OSTROŚLUP TRÓJKĄTNY** *Mklm*



o trzech wzajemnie prostopadłych płaskich ściankach, zbiegających się w początku ruchomych spókrzędnych i czwartej wogóle krzywej ściance klm stanowiącej cząstkę powierzchni ciała odkształconego.

Wobec znikomych wy-

miarów ostrosłupa możemy rozpatrywać ściankę klm klina, jako PŁASKIE POLETKO ds o geometrycznym środku P , gdzie działa JEDNOSTKOWE NAPRĘŻENIE p , STANOWIĄCE CZĄSTKĘ ZEWNĘTRZNEGO OBCIĄŻENIA. W szczególnym wypadku rozpatrywane poletko może być odciążone, a wtedy $p=0$, bo siły zewnętrzne nie zawsze pokrywają całą powłokę ciała.

Budując w środku P normalną N poletka ds możemy p rozłożyć na JEDNOSTKOWE NAPRĘŻENIE σ NORMALNE, a więc prostopadłe do ds oraz na JEDNOSTKOWE NAPRĘŻENIE τ TNACNE, leżące w poletku. Ponadto, zupełnie niezależnie od tego rozkładu możemy wyznaczyć SKŁADOWE NAPRĘŻENIA

p_x, p_y, p_z , - JEDNOSTKOWE RÓWNOLEGŁE DO OSI MX, MY, MZ

A zatem $\bar{p} = \bar{c} + \bar{z} = \bar{p}_x + \bar{p}_y + \bar{p}_z$.

Ponieważ rozpatrywany ostrosłup trójkątny stanowi ostatecznie ogniwo całego szeregu kostek wewnętrznych, przeto na jego ściankach bocznych panować będą NAPIĘŻENIA JEDNOSTKOWE TAKIE SAME, JAK NA SĄSIEDNICH KOSTKACH. Najlepiej to uwypukla rysunek 5.

Oznaczmy odpowiednio przez α, β, γ KĄTY JAKIE TWORZY NORMALNA N^o Z OSIAMI MX, MY, MZ ; a zatem powierzchnie $Mkl = ds \cos \alpha, Mlm = ds \cos \beta, Mkm = ds \cos \gamma$. Ponadto niech będą odpowiednie λ, μ, ν , KĄTY NACHYLENIA ρ KU OSIOM MX, MY, MZ , a wtedy $\rho_x = \rho \cos \alpha, \rho_y = \rho \cos \mu, \rho_z = \rho \cos \nu$. Wreszcie oznaczmy przez X, Y, Z , składowe JEDNOSTKOWEJ SIŁY MASOWEJ, przyłożonej do środka masy rozpatrywanego ostrosłupa. Wobec istnienia TRWAŁEGO STANU RÓWNOWAGI ODKSZTAŁCONEJ wszystkie siły ostrosłupa wzajemnie się znoszą, a ich składowe w sumie dają zero. Wyznamy siły RÓWNOLEGŁE DO OSI MX te siły są: $-G_x ds \cos \alpha, -\tau_{yx} ds \cos \beta, -\tau_{zx} ds \cos \gamma, \rho \cos \lambda ds$ oraz $X dV$, gdzie dV oznacza objętość ostrosłupa. Siłę $X dV$ jako małą wyższego rzędu, można wobec siły pozostałych pominąć, pisząc pierwszy warunek równowagi ostrosłupa trójkątnego w postaci -

$$-G_x ds \cos \alpha - \tau_{yx} ds \cos \beta - \tau_{zx} ds \cos \gamma + \rho \cos \lambda ds = 0.$$

PODSTAWY TEORJI SPRĘŻYSTOŚCI



Po skróceniu mamy $\rho \cos \lambda = \sigma_x \cos \alpha + \tau_{yx} \cos \beta + \tau_{zx} \cos \gamma$ or
zupełnie podobnie $\rho \cos \mu = \tau_{xy} \cos \alpha + \sigma_y \cos \beta + \tau_{xy} \cos \gamma$

$\rho \cos \nu = \tau_{xz} \cos \alpha + \tau_{yz} \cos \beta + \sigma_z \cos \gamma$; ~ ~ Oznacza

te równania pokrótce przez (S') . Ponadto jeszcze nie-
pliwie będzie $\cos^2 \lambda + \cos^2 \mu + \cos^2 \nu = 1$; oraz $\cos^2 \alpha + \cos^2$
 $+ \cos^2 \gamma = 1$. ~ Równania (S) wyznaczają $\rho, \lambda, \mu,$

gdy wiadome są naprężenia i kąty α, β, γ ; tymcza-
właśnie naodwrot naprężenia są szukane a dane ρ co d
wielkości i kierunkowo, jako cząstka znanego obciążen
zewnątrznego. Zatem wyżej wypisane równania, które po-
krótce równaniami (S') zwać będziemy, są niewystarczaj-
ce. To samo miało miejsce dla kostki wewnętrznej. W ka-
dym razie równania (S') pozwalają wysnuć nader cenne
wnioski. Przedewszystkiem, gdy JEDEN Z KĄTÓW α, β :

γ JEST PROSTY - WTEDY OSTROSLUP STAJE SIĘ KLINEM,
ponieważ wtedy normalna n jest prostopadła do odno-
osi, a samo poletko ds przechodzi w prostokąt. Zatem
oddzielne rozpatrywanie równowagi klina staje się zbęd-
nem, ponieważ odnośne warunki równowagi można wprost
otrzymać z równań (S) . Wyżej widzieliśmy, iż równowagę
zwykłej kostki prostej ZEWNĘTRZNEJ warunkują wzory (R) ,
obecnie poznaliśmy równania (S') , dające warunki równo-
wagi klina i ostrosłupa trójkątnego; we wszystkie wzor
obciążenie zewnętrzne wchodzi w postaci naprężeń jedno

kowych tego samego porządku i typu, co naprężenia kostki. Stąd prosty wniosek, że SIŁY OBCIĄŻENIA ZEWNĘTRZNEGO WINNY DZIAŁAĆ NA POWŁOKĘ CIAŁA ODKSZTAŁCONEGO W POSTACI NAPRĘŻEŃ JEDNOSTKOWYCH. Przeto SIŁ SKUPIONYCH TEORJA SPRĘŻYSTOSCI NIE ROZPATRUJE ZUPEŁNIE, jeno wyłącznie SIŁY ROZŁOŻONE NA PEWNĄ BY NAJMNIEJSZĄ POWIERZCHNIĘ. Wreszcie ze wzorów tych wynika bezpośrednio, że p nie może być równe zero, gdy naprężenia kostki zewnętrznej są różne od zera, inaczej mówiąc OBCIĄŻENIE ZEWNĘTRZNE WINNO RÓWNOWAżyć WYPADKOWĄ NAPRĘŻEŃ, PANUJĄCYCH W POWŁOCE CIAŁA ODKSZTAŁCONEGO - jest to konieczne wobec istnienia trwałej równowagi odkształconej. Stąd prosty wniosek, że NAPRĘŻENIA NIE MOGĄ WYCHODZIĆ POZA POWŁOKĘ CIAŁA ODKSZTAŁCONEGO, GDY NA NIEJ NIEMA RÓWNOWAŻĄCEGO OBCIĄŻENIA ZEWNĘTRZNEGO.

Mamy więc pełny obraz rozkładu naprężeń kostkowych ciała odkształconego. Jedyny punkt wątpliwy tej zwartej całości leży w dowolności zupełnej wyboru OSI STAŁYCH. Jest to istotnie punkt wymagający wyjaśnienia, ponieważ układ kostek wewnątrz ciała budowany, zależy od kierunku stałych osi - zatem poszczególnym układom kostek odpowiadają muszą różne układy naprężeń, dające coraz to inne wyniki dla poszczególnych punktów ciała odkształconego. Po między temi wynikami musi być pewien związek, bo przecież równowaga wewnętrzna ciała odkształconego nie może być

zależna od wyboru kierunku i położenia w przestrzeni układu osi stałych.

Należy więc obrać we wnętrzu ciała odkształconego dowolny PUNKT M i zbadać jak się zmieniają naprężenia jednostkowe na ściankach KOSTKI, PRZYNALEŻNEJ do tego punktu w zależności od kierunku stałych osi OX, OY, OZ .

OX /rys. 1./ Jest to zadanie dosyć uciążliwe, możemy jednak znacznie je uprościć, rozpatrując POCHYLE PRZEKROJE jakiegokolwiek kostki, przynależnej do danego punktu, skoro dla tej kostki uprzednio już wyznaczyliśmy wszystkie naprężenia. Wszelki tego rodzaju przekrój kostki pochylony może być niewątpliwie rozpatrywany JAKO ŚCIANKA NOWEJ KOSTKI, POCHYLONEJ W STOSUNKU DO ROZPATRYWANEJ, A PRZYNALEŻNEJ DO SĄSIEDNIEGO PUNKTU, GDZIE NAPRĘŻENIA JENO ZNIKOME RÓŻNICE DAĆ MOGĄ W PORÓWNANIU DO ROZPATRYWANYCH. Słowem, chcąc poznać jednostkowe naprężenia RÓŻNOKIERUNKOWYCH PRZEKROJÓW, PRZECHODZĄCYCH PRZEZ PUNKT DANY, należy zbadać:

§7. NAPRĘŻENIA JEDNOSTKOWE UKOŚNYCH PRZEKROJÓW

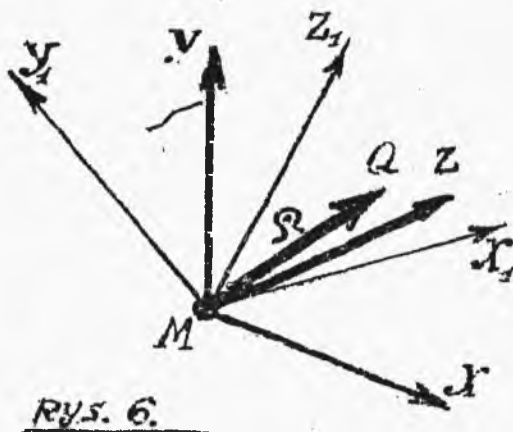
KOSTKI WEWNĘTRZNEJ. W dowolnym punkcie M ciała odkształconego budujemy /rys. 2/ prostą kostkę i zakładamy, że jej wszystkie naprężenia wyznaczyliśmy w jakikolwiek sposób. Prowadzimy przez nią dowolny PRZEKROJ PŁASKI, tworzący kąty α, β, ϕ z osiami MX, MY, MZ kostki i bierzemy pod uwagę wyłącznie część kostki odciętą, przynależną do

punktu M - pozostałą zaś odrzucamy. Wobec istnienia trwałej równowagi całej kostki i ten nowy wykrój z ciała odkształconego - ostrosłup trójkątny / rys.5/ zachować winien równowagę o ile zastąpimy działanie odrzuconej części kostki, odpowiednio obciążając powierzchnię świeżego przekroju naprężeniem jednostkowym ρ ukośnie na przekrój działającym po środku P . Wobec znikomo drobnych wymiarów dx, dy, dz kostki - w punkcie P , jako sąsiednim z M panować będą prawie te same naprężenia co i w M . Skoro więc wyznaczymy naprężenia panujące w P tym samym znajdziemy odnośnie naprężenia punktu M , różniczkowo od tamtych odrębne. Należy więc wyznaczyć ρ , lub jego składowe ρ_x, ρ_y, ρ_z . To właśnie wykonaliśmy nieco wyżej, wyznaczając wzory (5); obecnie przeto należy jeszcze znaleźć PRAWO ZMIENNOŚCI ρ dla ROZNOKIERUNKOWYCH PRZEKROJÓW dS KOSTKI rozpatrywanej, to jest dla ROŻNYCH WARTOŚCI KĄTÓW α, β, γ , przyczem zgodnie z założeniami naprężenia bocznych ścianek kostki należy uważać jako STAŁE NIEZMIENNE, bo przecież tak lub owak myślowo prowadzony przekrój nie może zmienić tych naprężeń kostki. W tym celu oznaczamy przez $x = \rho_x, y = \rho_y, z = \rho_z$ a zatem $x = \rho_x = \rho \cos \alpha = \sigma_x \cos \alpha + \tau_{yx} \cos \beta + \tau_{zx} \cos \gamma$ oraz podobnie $y = \tau_{xy} \cos \alpha + \sigma_y \cos \beta + \tau_{zy} \cos \gamma, z = \tau_{xz} \cos \alpha + \tau_{yz} \cos \beta + \sigma_z \cos \gamma$. Czyniąc tak rozpatrujemy NAPRĘ-

ZENIE PRZYNALEŻNE DO DANEGO PRZEKROJU dS , JAKO PROMIEN WODZĄCY PEWNEJ POWIERZCHNI, STANOWIĄCEJ GEOMETRYCZNE MIEJSCE KOŃCÓW ODCINKÓW ρ WEKTOROWO PRZENIESIONYCH DO PO-CZĄTKU SPÓŁRZĘDNYCH. Ponieważ naprężenia punktu M róż- niczkowo się tylko różnią od naprężeń punktu P , prze- ta będzie tu również i GEOMETRYCZNE MIEJSCE KOŃCÓW JED- NOSTKOWYCH NAPRĘŻEŃ, ROZPATRYWANYCH DLA ROŻNOKIERUNKO- WYCH PRZEKROJÓW W PUNKCIE M - KRÓCEJ: - POWIERZCHNIA NAPRĘŻEŃ JEDNOSTKOWYCH PUNKTU M . Ponieważ tylko co wypi- sane równania są linjowe względem $x, y, z, \cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ - przeto możemy z nich wyznaczyć $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ w postaci linjowych funkcji współrzędnych x, y, z ; podsta- wiając te wartości w równanie $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$; otrzymujemy zależność $\Phi(x, y, z) = 1$ gdzie niewątpli- wie znak Φ oznacza CAŁKOWITĄ FUNKCJĘ ALGEBRAICZNĄ DRU- GIEGO STOPNIA SPÓŁRZĘDNYCH x, y, z MOŻE TO BYĆ JENO ELIP- SCID, bo naprężenia ciała odkształconego nie mogą wra- stać nieograniczenie, skoro siły zewnętrzne odkształcają- ce mają wartości skończone, a naprężenia, jakieśmy to wi- dzieli wyżej, są tego samego porządku. Stąd wniosek: DO KAŻDEGO PUNKTU CIAŁA ODKSZTAŁCONEGO PRZYNALEŻY ELIPSCID NAPRĘŻEŃ JEDNOSTKOWYCH, PROMIENIE WODZĄCE TEJ POWIERZCH- NI OKREŚLAJĄ WIELKOŚCIOWO I KIERUNKOWO NAPRĘŻENIA PRZYNA- LEŻNE DO ROŻNOKIERUNKOWYCH PRZEKROJÓW W TYM PUNKCIE.

Z pośród całego roju tych naprężeń możemy przeto wyznaczyć zawsze TRZY NAPRĘŻENIA GŁÓWNE, LEŻĄCE NA GŁÓWNYCH OSIACH ELIPSOIDY NAPRĘŻEŃ; JEDNO Z NICH DA NAJWIĘKSZOŚĆ - DRUGIE NAJMNIEJSZOŚĆ NAPRĘŻEŃ PUNKTU M . Naprężenia główne są do siebie wzajem prostopadłe.

§ 8. NAPRĘŻENIA GŁÓWNE. Wyniki tylko co otrzymane, doskonałe jakościowo, nie dają jednak prostego poglądu, bo naprężenia ρ są wogóle POCHYLE WZGLĘDEM SWYCH PRZEKROJÓW, każdorazowo zatem należałoby wyliczać $\cos \alpha = \rho_x : \rho$, $\cos \beta = \rho_y : \rho$, $\cos \gamma = \rho_z : \rho$. To psuje przejrzystość obrazu. Rozłożmy przeto ρ na naprężenia NORMALNE σ i STYCZNE τ , leżące w odnośnym przekroju. Niech φ oznacza KĄT NACHYLENIA ρ KU NORMALNEJ N^o PRZEKROJU /rys.5/.
 Zatem $\sigma = \rho \cos \varphi = \rho \cos \alpha \cos \alpha + \rho \cos \beta \cos \mu + \rho \cos \gamma \cos \nu =$
 $= \rho_x \cos \alpha + \rho_y \cos \beta + \rho_z \cos \gamma = \sigma_x \cos^2 \alpha + \tau_{yx} \cos \alpha \cos \beta +$
 $+ \tau_{zx} \cos \gamma \cos \alpha + \tau_{xy} \cos \alpha \cos \beta + \sigma_y \cos^2 \beta + \tau_{zy} \cos \gamma \cos \beta +$
 $+ \tau_{xz} \cos \alpha \cos \gamma + \tau_{yz} \cos \beta \cos \gamma + \sigma_z \cos^2 \gamma = \sigma_x \cos^2 \alpha +$
 $+ \sigma_y \cos^2 \beta + \sigma_z \cos^2 \gamma + 2 \tau_{xy} \cos \alpha \cos \beta + 2 \tau_{yz} \cos \beta \cos \gamma +$
 $+ 2 \tau_{zx} \cos \gamma \cos \alpha$. Chcąc poznać PRAWA RZĄDZĄCE WARTOŚCIĄ σ DLA POSZCZEGÓLNYCH PRZEKROJÓW prowadzimy przez punkt M PROSTĄ ROWNOLEGLĄ /rys.6/ DO NORMALI PN^o DANEGO PRZEKROJU i na tej prostej odkładamy ODCINEK $\rho = \pm \sqrt{\sigma}$.
 Podwójny znak jest tu konieczny, wogóle bowiem σ może być dodatnie, gdy wychodzi nazewnątrz oraz ujemne, gdy



RYS. 6.

skierowane jest w głąb kostki. Współrzędne KOŃCA \mathcal{O} odcinka \mathcal{S} oznaczamy przez x, y, z przyczem niewątpliwie: $\cos \alpha = \frac{x}{\mathcal{S}} = x \pm \sqrt{\sigma}$, $\cos \beta = \frac{z}{\mathcal{S}} = z \pm \sqrt{\sigma}$. Podstawiając te wartości w równanie wyżej wypisane ma-

my po skróceniu przez σ obu części $\pm 1 = \sigma_x x^2 + \sigma_y y^2 + \sigma_z z^2 + 2\tilde{\sigma}_{xy} xy + 2\tilde{\sigma}_{yz} yz + 2\tilde{\sigma}_{xz} xz$ JEST TO RÓWNANIE POWIERZCHNI DRUGIEGO STOPNIA - WYZNACZAJĄCE GEOMETRYCZNE MIEJSCE KOŃCÓW ODCINKÓW \mathcal{S} RÓWNANIE TEGO TYPU DAJE POWIERZCHNIĘ O TRZECH WZAJEMNIE PROSTOPADŁYCH OSIACH GŁÓWNYCH Mx, My, Mz Przechodząc od osi dotychczasowych Mx, My, Mz do owych osi GŁÓWNYCH, otrzymamy równanie tej powierzchni w postaci $\pm 1 = \sigma_1 x_1^2 + \sigma_2 y_1^2 + \sigma_3 z_1^2$ nie zawierające wyrazów z iloczynami współrzędnych. To znaczy, że DLA KOSTKI ELEMENTARNEJ $dx_1 + dy_1 + dz_1$, ZBUDOWANEJ NA OSIACH Mx, My, Mz NAPRĘŻENIA TNĄCE ŚCIANEK, ZBIEGAJĄCYCH SIĘ W POCZĄTKU SPÓŁRZĘDNYCH SĄ RÓWNE ZERU; POZOSTANĄ WIĘC JENO NAPRĘŻENIA NORMALNE TYCH ŚCIAŃ $\sigma_1, \sigma_2,$

σ_3 A zatem W KAŻDYM PUNKCIE CIAŁA ODKSZTAŁCONEGO ISTNIEJĄ TRZY PROSTOPADŁE DO SIEBIE PRZEKROJE PŁASKIE, NIE UJAWNIAJĄCE NAPRĘŻEŃ TNĄCYCH. Są TO NIEWĄTPLIWIE

PRZEKROJE GŁÓWNE TYLKO CO WYZNACZONEJ POWIERZCHNI - PRZE-
 TO TYM PRZEKROJOM ODPOWIADAJĄ SKRAJNE WARTOŚCI ρ . Stąd
 prosty wniosek, że PRZYNALEŻNE DO TYCH PRZEKROJÓW NAPRĘ-
 ŻENIA G ZAWIERAJA SKRAJNE WARTOŚCI NAPRĘŻEN NORMALNYCH
 PUNKTU M , a zatem dla owych GŁÓWNYCH PRZEKROJÓW
 $dG = 0$ oraz $\tau = 0$. Wyżej widzieliśmy, że $\rho^2 = G^2 + \tau^2$;
 Różniczkując mamy $\rho d\rho = G dG + \tau d\tau$. Zatem dla
 owych głównych przekrojów $d\rho = 0$. Stąd prosty wniosek,
 że PRZYNALEŻNE DO GŁÓWNYCH PRZEKROJÓW NAPRĘŻENIA STANO-
 WIA SKRAJNE WARTOŚCI NAPRĘŻEN PUNKTU. Są to więc owe
 skrajne naprężenia, przynależne do osi głównych elipso-
 idy naprężeń, są to NAPRĘŻENIA GŁÓWNE. Stąd wniosek osta-
 teczny, iż W KAŻDYM PUNKCIE CIAŁA ODKSZTAŁCONEGO ISTNIE-
 JĄ TRZY PROSTOPADŁE DO SIEBIE PRZEKROJE PŁASKIE O NAPRĘ-
 ŻENIACH GŁÓWNYCH PROSTOPADŁYCH DO TYCH PRZEKROJÓW. Wśród
 nich należy szukać skrajnych naprężeń danego punktu. Aby
 wyznaczyć naprężenia główne należy przeto dla odnośnego
 przekroju uczynić $\rho = G$, $\lambda = \alpha$, $\mu = \beta$, $\nu = \gamma$ we wzorach (S)
 Stąd bezpośrednio $G \cos \alpha = G_x \cos \alpha + \tau_{yx} \cos \beta + \tau_{zx} \cos \gamma$;
 $G \cos \beta = \tau_{xy} \cos \alpha + G_y \cos \beta + \tau_{zy} \cos \gamma$; $G \cos \gamma = \tau_{xz} \cos \alpha + \tau_{yz} \cos \beta$
 $+ G_z \cos \gamma$ oraz jeszcze inaczej: $(G - G_x) \cos \alpha = \tau_z \cos \beta - \tau_y \cos \gamma =$
 $= 0$; $-\tau_z \cos \alpha + (G - G_y) \cos \beta - \tau_x \cos \gamma = 0$; $-\tau_y \cos \alpha - \tau_x \cos \beta +$
 $+ (G - G_z) \cos \gamma = 0$; gdzie oznaczyliśmy przez
 $\tau_x = \tau_{yx} = \tau_{xy}$; $\tau_y = \tau_{zx} = \tau_{xz}$; $\tau_z = \tau_{xy} = \tau_{yx}$. Aby tylko co

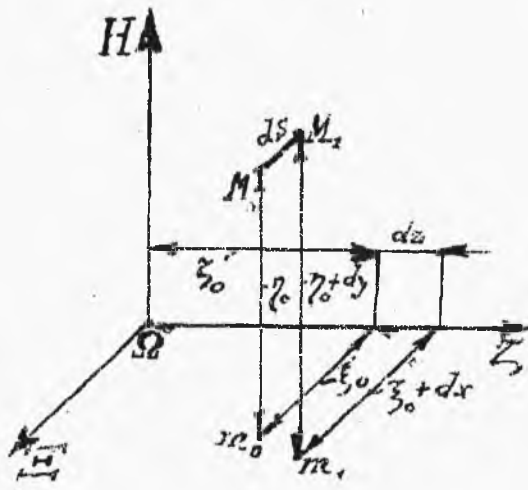
wypisane równania były współmierne, powinien ich wyznacznik Δ być równy zeru.

$$\Delta = \begin{vmatrix} \sigma - \sigma_x & -\tau_z & -\tau_y \\ -\tau_z & \sigma - \sigma_y & -\tau_x \\ -\tau_y & -\tau_x & \sigma - \sigma_z \end{vmatrix} = \sigma^3 - \sigma^2(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) + \sigma(\sigma_x \tau_x + \sigma_y \tau_y + \sigma_z \tau_z - \tau_x^2 + \tau_y^2 + \tau_z^2) + \sigma_x \tau_x^2 + \sigma_y \tau_y^2 + \sigma_z \tau_z^2 - \sigma_x \sigma_y \sigma_z - 2 \tau_x \tau_y \tau_z = 0. \quad \curvearrowright$$

W rozwinięciu daje on RÓWNANIE TRZECIEGO STOPNIA, WYZNACZAJĄCE SZUKANE TRZY NAPREŻENIA GŁÓWNE $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. Ponieważ współczynnik wszelkiego równania trzeciego stopnia, u zmiennej w drugiej potęgce równy jest sumie pierwiastków z odwrotnym znakiem wziętej, przeto $\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$. SUMA NAPREŻEŃ NORMALNYCH DO TRZECH JAKIKOLWIEK WZAJEMNIE PROSTOPADŁYCH PRZEKROJÓW JEST WIELKOŚCIĄ STAŁĄ. Jako wybitny przykład tu wyłożonej teorii rozpatrujemy:

§ 9. SPRĘŻYSTA TEORIA ODKSZTAŁCEŃ. We wnętrzu danego ciała nieodkształconego wyodrębniamy myślowo WŁÓKIENKO $M_0 M_1$ drobnych wymiarów, łączące dwie sąsiednie drobiny M_0 i M_1 . Długostkę $M_0 M_1$ w ten sposób otrzymaną oznaczamy przez ds - będzie to oczywiście PRZEKĄTNIA KOSTKI PROSTEJ, uprzednio rozpatrywanej, o PRZECIWLEGŁYCH WIERZCHOŁKACH M_0 i M_1 i KRAWĘDZIACH dx, dy, dz odpowiednio ROWNOLEGŁYCH DO STAŁYCH OSI $\Omega X, \Omega Y, \Omega Z$ gdziekolwiek poza ciałem obranych. Spółrzędne punktu M_0

RYS. 7.



oznaczymy odpowiednio przez

ξ_0, η_0, ζ_0 współrzędne punktu M_0 , sąsiedniego

przez $\xi_0 + dx, \eta_0 + dy, \zeta_0 + dz$

Po odkształceniu oba roz-

patrywane punkty PRZESUNĄ

SIĘ nieco względem stałych

osi, M_0 przejdzie w M_0'

o współrzędnych $\xi_0 + \xi$,

$\eta_0 + \eta, \zeta_0 + \zeta$ a punkt M_1

w M_1' ze współrzędnymi: $\xi_0 + dx + \xi + d\xi, \eta_0 + dy + \eta + d\eta, \zeta_0 + dz + \zeta + d\zeta$, przyczem w wypadku najogólniejszym możemy oczywiście napisać, iż $d\xi = \frac{\partial \xi}{\partial x} dx + \frac{\partial \xi}{\partial y} dy + \frac{\partial \xi}{\partial z} dz, d\eta = \frac{\partial \eta}{\partial x} dx + \frac{\partial \eta}{\partial y} dy + \frac{\partial \eta}{\partial z} dz, d\zeta = \frac{\partial \zeta}{\partial x} dx + \frac{\partial \zeta}{\partial y} dy + \frac{\partial \zeta}{\partial z} dz$.

Przy odkształceniu długołka ds MOŻE SIĘ JENO WYDŁUŻAĆ LUB SKRÓCAĆ ORAZ POCHYLAĆ W PEWNYM KIERUNKU, łączy bowiem dwie SĄSIEDNIE drobiny, a przeto krzywić się nie może. Oznaczmy przez δds WYDŁUŻENIE DODATNIE LUB UJEMNE DŁUGOSTKI ds ; STOSUNEK $\epsilon = \delta ds : ds$ BĘDZIE JEJ WYDŁUŻENIEM JEDNOSTKOWEM, a zatem po odkształceniu otrzymamy długołkę odkształconą $ds + \delta ds = [1 + \epsilon] ds$.

Ponieważ najwidoczniej: $[1 + \epsilon]^2 ds = [(\xi_0 + dx + \xi + d\xi) - (\xi_0 + \xi)]^2 + [(\eta_0 + dy + \eta + d\eta) - (\eta_0 + \eta)]^2 + [(\zeta_0 + dz + \zeta +$

$+ d\xi - (\xi_0 + \xi)]^2 = [dx + d\xi_x]^2 + [dy + d\xi_y]^2 + [dz + d\xi_z]^2$

przeto pomijając małe RZĘDÓW WYŻSZYCH możemy napisać $ds^2 + 2\epsilon ds^2 + \dots = dx^2 + 2d\xi_x dx + \dots + dy^2 + 2d\xi_y dy + \dots + dz^2 + 2d\xi_z dz + \dots$. Wobec tego, że $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$, przeto po skróceniu dwójki będziemy mieli $\epsilon ds^2 = d\xi_x dx + d\xi_y dy + d\xi_z dz$ skąd bezpośrednio:

$$\epsilon = \frac{d\xi_x}{ds} \frac{dx}{ds} + \frac{d\xi_y}{ds} \frac{dy}{ds} + \frac{d\xi_z}{ds} \frac{dz}{ds} = \frac{\partial \xi_x}{\partial x} \left[\frac{dx}{ds} \right]^2 + \frac{\partial \xi_y}{\partial y} \left[\frac{dy}{ds} \right]^2 + \frac{\partial \xi_x}{\partial z} \left[\frac{dz}{ds} \right]^2 + \left[\frac{\partial \xi_x}{\partial y} + \frac{\partial \xi_y}{\partial x} \right] \frac{dx}{ds} \frac{dy}{ds} + \left[\frac{\partial \xi_y}{\partial z} + \frac{\partial \xi_z}{\partial y} \right] \frac{dy}{ds} \frac{dz}{ds} + \left[\frac{\partial \xi_x}{\partial x} + \frac{\partial \xi_z}{\partial z} \right] \frac{dx}{ds} \frac{dz}{ds}.$$

Oznaczmy KĄTY KIERUNKOWE DŁUGOSTKI ds odpowiednio przez α, β, γ wtedy będzie $\frac{dx}{ds} = \cos \alpha, \frac{dy}{ds} = \cos \beta, \frac{dz}{ds} = \cos \gamma$, przeto $\epsilon = \frac{\partial \xi_x}{\partial x} \cos^2 \alpha + \frac{\partial \xi_y}{\partial y} \cos^2 \beta + \frac{\partial \xi_x}{\partial z} \cos^2 \gamma + \left[\frac{\partial \xi_x}{\partial y} + \frac{\partial \xi_y}{\partial x} \right] \cos \alpha \cos \beta + \left[\frac{\partial \xi_y}{\partial z} + \frac{\partial \xi_z}{\partial y} \right] \cos \beta \cos \gamma + \left[\frac{\partial \xi_x}{\partial x} + \frac{\partial \xi_z}{\partial z} \right] \cos \alpha \cos \gamma$.

W ten sposób otrzymujemy wzór, wyznaczający wydłużenie jednostkowe dowolnej długości ds należy w nim jednak określić znaczenie poszczególnych pochodnych. W tym celu bierzemy przede wszystkim pod uwagę WYDŁUŻENIE JEDNOSTKOWE $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$ ODPOWIEDNIO ROWNOLEGŁE DO OSI STAŁYCH

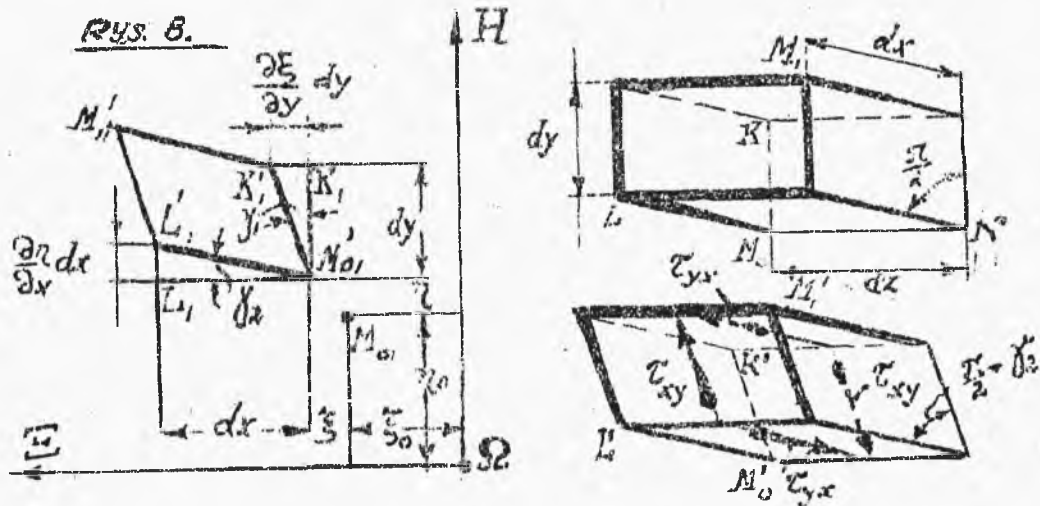
$\Omega E, \Omega H, \Omega Z$, inaczej mówiąc rozpatrujemy kolejno WYDŁUŻENIA JEDNOSTKOWE DŁUGOSTEK $ds_x = dx, ds_y = dy$ oraz

$ds_z = dz$. W pierwszym wypadku $\alpha = 0, \beta = \gamma = 90^\circ$ zatem ze wzoru tylko co otrzymanego wynika $\epsilon_x = \frac{\partial \xi_x}{\partial x}$;

w drugim wypadku $\alpha = \gamma = 90^\circ, \beta = 0$ zatem podobnie mamy

$\epsilon_y = \frac{\partial \xi_y}{\partial y}$; wreszcie w trzecim wypadku $\alpha = \beta = 90^\circ, \gamma = 0$.

zatem znów $\epsilon_z = \frac{\partial \xi}{\partial z}$. Stąd prosty wniosek POCHODNE CZĄSTKOWE $\frac{\partial \xi}{\partial x}$, $\frac{\partial \eta}{\partial y}$, $\frac{\partial \xi}{\partial z}$ DAJA WYDŁUŻENIA JEDNOSTKOWE PRZY NALEŻNE DO DANEGO PUNKTU, A RÓWNOLEGŁE DO OSI STAŁYCH. Nazwijmy je WYDŁUŻENIAMI POOSIOWEMI.



Wypada nam jeszcze zatem wyjaśnić znaczenie trzech pozostałych współczynników wzoru dla ϵ . W tym celu bierzemy pod uwagę /rys 8/ KOSTKĘ PIERWOTNIE PROSTĄ o przeciwległych wierzchołkach M_0 i M_1 , myślowo wyodrębnioną z danego ciała. W rzucie na jedną z płaszczyzn osi stałych, dajmy na to na ΩH wyznaczony punkt M_0 kostki o współrzędnych ξ_0, η_0, ζ_0 da ślad $M_{01}(\xi_0, \eta_0)$ Po odkształceniu punkt M_0 przejdzie w M_0' , a jego ślad M_{01} w M_{01}' o współrzędnych $\xi_0 + \xi, \eta_0 + \eta$ Przypuśćmy na chwilę, że na ścianach kostki wcale nie ma naprężeń - kostka zmienia jeno położenie wewnątrz ciała odkształconego, przesun-

wa się łącznie z kostkami sąsiednimi względem stałych osi zewnętrznych, lecz nie ulega odkształceniu. W tym założeniu dwie prostopadłe do siebie krawędzie kostki M_0K_0 i M_0L_0 przesuną się równolegle do siebie, dając w rzucie na $\Xi\Omega H$ proste $M_0'K_0'$, $M_0'L_0'$, również do siebie prostopadłe, przyczem po staremu $M_0'K_0' = dy$ oraz $M_0'L_0' = dx$.

Przyłożmy do bocznych ścianek kostki NAPRĘŻENIA TNĄCE ϵ_{xy} oraz ϵ_{yx} . Pod działaniem tych sił stanowiących w danym wypadku jedyne obciążenie, kostka stanie się ukośną. Ponieważ przyłożone siły tnące są równoległe do płaszczyzny $\Xi\Omega H$, przeto kostka ODKSZTAŁCI SIĘ PŁASKO, RÓWNOLEGLE DO TEJ PŁASZCZYZNY; bryłowy kąt krawędzi M_0N zaostrzy się lub stępi, punkty K_0, L_0 przejdą w K_0', L_0' , a rzuty ich K_0, L_0 w K_0', L_0' . Miarą tego odkształcenia będzie oczywiście PRZYROST KĄTA BRYŁOWEGO jakiejkolwiek krawędzi równoległej do osi Ωz , dajmy na to krawędzi M_0N . Oznaczmy ten przyrost przez γ_z . Z teorii ścianania wiemy, że $\gamma_z = \beta \tau_z$ gdzie $\tau_z = \tau_{xy} = \epsilon_{yx}$. Ponadto w rzucie widać, że $\gamma_z = \gamma_1 + \gamma_2$, gdzie γ_1 oznacza KĄT K_0, M_0', K_0' , a zaś γ_2 - KĄT L_0, M_0', L_0' . Z drugiej znów strony $\text{tg } \gamma_1 = K_0K_0' : K_0M_0'$ to jest $\text{tg } \gamma_1 = K_0K_0' : dy$ oraz $\text{tg } \gamma_2 = L_0L_0' : dx$.

Ponieważ wyznaczamy punkt H , POSUWAJĄC SIĘ z M_0 WYŁĄCZNIE W KIERUNKU OSI ΩH przeto zmieniamy jedynie

y o dy , a x i z pozostają niezmiennie dla nadego wypadku; po ODKSZTAŁCENIU TNACEM punkt H przejdzie w H' UJAWNIAJĄC JEDYNIIE PRZYROST $d\xi = H, H'$ SPÓLRZĘDNYCH, zatem $d\xi = H, H' = \frac{\partial \xi}{\partial y} dy$, bowiem w danym wypadku $dx = dz = 0$.

Rozumując zupełnie w ten sam sposób dochodzimy do wniosku, że $L, L' = dy = \frac{\partial \eta}{\partial x} dx$. Wobec stosunkowo drobnych wymiarów

μ_1 i μ_2 możemy napisać wprost $\tau \mu_1 = \mu_1 = \frac{\partial \xi}{\partial z} dz \cdot dy = \frac{\partial \xi}{\partial y}$; oraz $\mu_2 = \frac{\partial \eta}{\partial x}$. Zatem $\mu_2 = \mu_1 + \mu_2 = \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x}$. Ta suma części

stkowych pochodnych wyznacza przeto dla kostki przynależnej do danego punktu M_0 PRZESUNIĘCIE JEDNOSTKOWE, RÓW-

NOLEGLĘ DO PŁASZCZYZNY $\xi \Omega H$ a więc prostopadłe do osi

Rx . Tak samo zupełnie można dowieść, że SIŁY TNĄCE

τ_x względnie τ_y wywołując w rozpatrywanej kostce PRZE-

SUNIĘCIE JEDNOSTKOWE $\mu_x = \frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial \xi}{\partial y} = \beta \tau_x$ względnie $\mu_y = \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial z} = \beta \tau_y$

PROSTOPADŁE do osi $\Omega \xi$ względnie do osi ΩH . Stąd

wniosek bezpośredni: SUMY $\frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial \xi}{\partial y}$, $\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial z}$, $\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x}$ DAJĄ

PRZESUNIĘCIA JEDNOSTKOWE, PRZYNALEŻNE DO DANEGO PUNKTU, A

PROSTOPADŁE DO OSI STAŁYCH. Nazwijmy je PRZESUNIĘCIAMI

WOOSIOWEMI, a ostatecznie otrzymamy WZÓR $\epsilon = \epsilon_x \cos^2 \alpha +$

$\epsilon_y \cos^2 \beta + \epsilon_z \cos^2 \gamma + \mu_x \cos \beta \cos \gamma + \mu_y \cos \alpha \cos \gamma +$

$\mu_z \cos \alpha \cos \beta$ WYZNACZAJĄCY WYDŁUŻENIE JEDNOSTKOWE JAKIEJ-

OLWIEK DŁUGOSTKI $d\beta$ DANEGO CIAŁA ODKSZTAŁCANEGO W ZA-

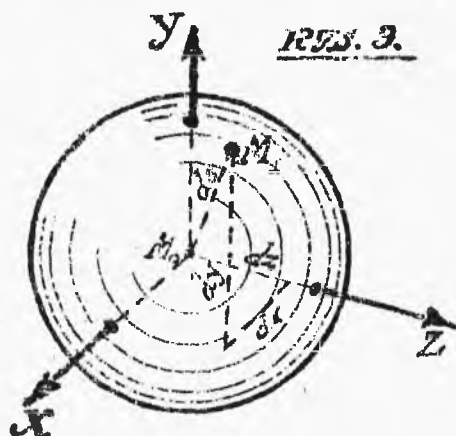
ŁĘCZNOŚCI OD SPÓŁCZYNNIKÓW KIERUNKOWYCH DŁUGOSTKI, WYDŁU-

ZEŃ JEDNOSTKOWYCH I PRZESUNIĘĆ POOSŁOWYCH

Przypomina on ukształtowaniem wyrazów poprzednio w ustępie dziewiątym podany wzór dla naprężenia normalnego

5 można zeń przeto w sposób zupełnie tożsamościowy wyprowadzić podobne wnioski, tym razem jednak dotyczące już nie 5 a 6. Przedewszystkiem więc drogą zamiany współrzędnych możemy dla każdego punktu danego ciała ODKSZTAŁCONEGO wyznaczyć jeden układ trzech płaszczyzn prostopadłych do siebie, dla których $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = 0$. Zatem W KAŻDYM PUNKCIE CIAŁA ODKSZTAŁCONEGO ISTNIEJĄ TRZY WZAJEMNIE PROSTOPADŁE KIERUNKI NIE UJAWNIAJĄCE SKRZYWIENIA. Prowadząc w tych kierunkach krawędzie kostki nieodkształconej, otrzymamy po odkształceniu kostkę również prostą, lecz nieco objętościowo różną od pierwotnej. Te trzy kierunki muszą niewątpliwie zgadzać się z kierunkami głównych osi elipsoidy naprężeń, ponieważ kostka na tych trzech kierunkach zbudowana NIE UJAWNIA WCAŁE NAPRĘŻENIA WŁASNYCH, jedyna zatem z pośród wszystkich kostek przynależących do danego punktu SKRZYWIENIA ŚCIANEK UJAWNIAĆ NIE MOŻE, jeno wyłącznie wydłużenia. Te WYDŁUŻENIA GŁÓWNE STANOWIĄ SKRAJNE WARTOŚCI WYDŁUŻEŃ W PUNKCIE ROZPATRYWANYM. Można to zresztą udowodnić z łatwością, rozpatrując w głębi CIAŁA NIEDOKSZTAŁCONEGO - kulę elementarną PRO-

MIENIEM ds z obranego punktu M_0 OPISANĄ . Spółrzędne



dx, dy, dz - jakiegokolwiek punktu M_1 , na tej kuli

czynią zadość równaniu

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2,$$

ponieważ odcinek $M_0M_1 = ds$

Oznaczmy odpowiednio przez

α, β, γ , KĄTY KIERUNKOWE

tego odcinka, a wtedy $dx = ds \cos \alpha, dy = ds \cos \beta, dz = ds \cos \gamma$,

odcinek M_0M_1 , jest zatem owym włókienkiem ds wyżej

już rozpatrywanem. Po odkształceniu osie współrzędnych

M_0X, M_0Y, M_0Z zresztą zupełnie dowolnie obrane,

choć prostopadłe do siebie, pochyłają się nieco ku sobie -

- ich układ prostokątny skrzywi się, stanie się krzywo-

kątnym, a odcinki dx, dy, dz odkształcą się odpowiednio

w $dx' = dx(1 + \epsilon_x), dy' = dy(1 + \epsilon_y), dz' = dz(1 + \epsilon_z)$. Stąd mamy

bezpośrednio $ds^2 = \frac{dx'^2}{(1 + \epsilon_x)^2} + \frac{dy'^2}{(1 + \epsilon_y)^2} + \frac{dz'^2}{(1 + \epsilon_z)^2}$, co daje

$$1 = \frac{dx'^2}{ds^2(1 + \epsilon_x)^2} + \frac{dy'^2}{ds^2(1 + \epsilon_y)^2} + \frac{dz'^2}{ds^2(1 + \epsilon_z)^2}.$$

Ponieważ odcinki dx', dy', dz' stanowią współrzędne punktu M_1 po odkształce-

niu, a tylko wypisane równanie wyznacza elipsoidę w ukła-

dzie osi krzywokątnych, przeto po odkształceniu kula ele-

mentarna stanie się elipsoidą. Jest to ELIPSOIDA WYDŁUŻEN,

analog elipsoidy naprężeń. Wzdłuż jej głównych osi zachodzą WYDŁUŻENIA GŁÓWNE, wśród nich należy szukać skrajnych wartości wydłużeń, przynależnych do danego punktu. Oznaczmy odpowiednio przez $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ - WYDŁUŻENIA GŁÓWNE, PRZYNALEŻNE DO DANEGO PUNKTU. Wyżej udowodniliśmy, że dla jakiegokolwiek układu osi prostokątnych $\epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon_z = \epsilon =$ stałej a zatem również i $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_3 = \epsilon$.

Wszystko to jednak dotyczy wyłącznie CIAŁ JEDNOLITYCH O WŁASNOŚCIACH SPREŻYSTYCH JEDNAKOWYCH DLA WSZYSTKICH KIERUNKÓW α, β, γ . Tego rodzaju CIAŁA SPREŻYSTYCH JEDNOLITYCH - cechuje JEDNOSTAJNA BUDOWA WEWNĘTRZNA. Tutaj należą przede wszystkim STAL I ŻELAZO ZLEWNE, MIEDŹ i t.p. natomiast inne tworzywa zachowują się niejednakowo we wszystkich kierunkach. WŁÓKNISTE ŻELAZO ZGRZEWNE ma dwie osie sprężystości, pręt bowiem zgrzewny składa się jakby z poszczególnych włókienek podłużnie zwartych w jedną całość, zatem jego wytrzymałość podłużna jest inna od poprzecznej, to też pręt zgrzewny inaczej się odkształca w kierunku włókien, inaczej zaś prostopadle do nich, ponieważ w ostatnim wypadku poszczególne włókna łatwo się łają rozłączać. To samo ma miejsce i przy odkształcaniu drzewa, które, jak wiadomo, składa się ze współśrodkowych słoików dorecznych, poprzedzielanych słabszym miększem, tu więc mamy aż trzy osie sprężystości czyli trzy kie-

runki - podłużny równoległy do osi słoików, doosiowy -
gdy kolejno napotykamy warstwy twardsze i miększe, wresz-
cie - styczny do słoików. W tych trzech kierunkach drzewo
zachowuje się sprężyste niejednakowo, ujawniając KIERUN-
KOWO RÓŻNE WARTOŚCI E . Zazwyczaj jednak w tablicach
podana jest jedna tylko wartość E - największa - w kie-
runku osi słoików lub włókien. Zatem wyłącznie i li tylko
w CIAŁACH JEDNOLITYCH ELIPSOIDY NAPRĘŻEŃ I WYDŁUŻEŃ PO-
SIADAJĄ OSIE WSPÓLNE, w danym bowiem wypadku skrajnym na-
prężeniom normalnym MUSZĄ odpowiadać skrajne wydłużenia,
tworzywo bowiem we wszystkich kierunkach jest jednolite.
Inaczej niewątpliwie rzecz się ma dla CIAŁ NIEJEDNOLITYCH
gdzie wobec zmienności kierunkowej E skrajne wartości
wydłużeń w wypadku ogólnym NIE ODPOWIADAJĄ skrajnym na-
prężeniom normalnym. Są to jednak zjawiska zbyt jeszcze
mało znane, zazwyczaj więc wszystkie tworzywa od biedy za-
liczamy do gromady jednolitych, a tylko zwiększamy ostroż-
ności - przy liczeniu praktycznym, stosując słabsze warto-
ści współczynników k . Bierzemy zatem wyłącznie pod uwagę:

§ 10. WYDŁUŻENIA I NAPRĘŻENIA GŁÓWNE CIAŁ JEDNOLITYCH.

W dowolnym punkcie ciała nieodkształconego budujemy pro-
stą kostkę. Podczas odkształcania powstają na jej ścian-
kach naprężenia normalne, powodujące odnośne wydłużenia,
tudzież naprężenia tnące, które dają PRZESUNIĘCIA $\gamma_x = \beta \epsilon_x$

$\mu_y = \beta \epsilon_y, \mu_x = \beta \epsilon_x$. \rightarrow Gdy poprowadzimy trzy wy-
tyczne krawędzie kostki w kierunkach głównych, to jej na-
prężenia normalne będą GŁÓWNYMI $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ przynależnymi
do punktu obranego naprężeniami, a naprężenia tnące

$\epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon_z = 0$; odkształcenia tej kostki sprowadzą się
więc do trzech WYDŁUŻEŃ GŁÓWNYCH, bo żadnych przesunięć
kostka nie ujawni. Wyżej w ustępie szóstym wyznaczyliśmy
wydłużenie kostki, pozostającej w równowadze linjowej.
Na zasadzie prawa o niezależności działania sił możemy
otrzymane wyniki dostosować do danego wypadku, zestawia-
jąc je dla łatwiejszego zrozumienia w nast. TABLICĘ DRUGĄ

Dodając podane w tej tablicy wartości WYDŁUŻEŃ GŁÓW-
NYCH, otrzymujemy $e = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 = \alpha [\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 - \frac{2}{m} (\sigma_1 + \sigma_2 +$
 $+ \sigma_3)] = \frac{\alpha}{m} (m-2) (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$. Stąd $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = e m$:
: $\alpha (m-2)$ Ponieważ zaś $\epsilon_1 = \alpha [\sigma_1 - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{m}]$, zatem $\frac{m}{\alpha} \epsilon_1 =$
 $= \sigma_1 m - \sigma_2 - \sigma_3$ Dodając otrzymujemy wprost $\sigma_1 (1+m) = \frac{m}{\alpha} [\frac{e}{m-2} + \epsilon_1]$

TABLICA DRUGA:

	WYDŁUŻENIA JEDNOSTKOWE			
	RÓWNOLEGA PRZYNALEŻNE			OSTATECZNE
ŁE DO	DO NAPRĘŻENIA			WYDŁUŻENIA GŁÓWNE
OŚI	σ_1	σ_2	σ_3	
X	$\alpha \sigma_1$	$-\frac{\alpha \sigma_1}{m}$	$-\frac{\alpha \sigma_1}{m}$	$\epsilon_1 = \alpha [\sigma_1 - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{m}]$
Y	$-\frac{\alpha \sigma_2}{m}$	$\alpha \sigma_2$	$-\frac{\alpha \sigma_2}{m}$	$\epsilon_2 = \alpha [\sigma_2 - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{m}]$
Z	$-\frac{\alpha \sigma_3}{m}$	$-\frac{\alpha \sigma_3}{m}$	$\alpha \sigma_3$	$\epsilon_3 = \alpha [\sigma_3 - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{m}]$

co daje $\sigma_1 = \frac{1}{\alpha} \frac{m}{m+1} \left[\epsilon_1 + \frac{e}{m-2} \right] = \frac{2}{\beta} \left[\epsilon_1 + \frac{e}{m-2} \right]$ bowiem, jak to już wiemy z ustępu ósmego rozdziału trzeciego, $\beta = \frac{2}{\alpha} \frac{1+m}{m} \cdot \alpha$

Podobnie również możemy wypisać $\sigma_2 = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{m}{m+1} \left[\epsilon_2 + \frac{e}{m-2} \right] = \frac{2}{\beta} \left[\epsilon_2 + \frac{e}{m-2} \right]$ oraz $\sigma_3 = \frac{1}{\alpha} \frac{m}{m+1} \left[\epsilon_3 + \frac{e}{m-2} \right] = \frac{2}{\beta} \left[\epsilon_3 + \frac{e}{m-2} \right]$.

Otrzymane tu wzory oznaczają zależność pomiędzy naprężeniami a wydłużeniami głównymi. Można je uogólnić w następujący sposób: wszelkie naprężenie normalne o współczynnikach kierunkowych α, β, γ można, jak wiemy, wyznaczyć ze wzoru $\sigma = \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \cos^2 \beta + \sigma_3 \cos^2 \gamma$, a zatem:

$$\sigma = \frac{2}{\beta} \left[\epsilon_1 \cos^2 \alpha + \epsilon_2 \cos^2 \beta + \epsilon_3 \cos^2 \gamma + \frac{e}{m-2} (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma) \right] = \frac{2}{\beta} \left[\epsilon_1 \cos^2 \alpha + \epsilon_2 \cos^2 \beta + \epsilon_3 \cos^2 \gamma + \frac{e}{m-2} \right].$$

Z drugiej znów strony wiemy, że $\sigma = \epsilon_1 \cos^2 \alpha + \epsilon_2 \cos^2 \beta + \epsilon_3 \cos^2 \gamma$ zatem ostatecznie $\sigma = \frac{2}{\beta} \left[\epsilon_1 + \frac{e}{m-2} \right] = \frac{1}{\alpha} \frac{m}{1+m} \left[\epsilon_1 + \frac{e}{m-2} \right]$. Dla jakichkolwiek zatem osi prostokątnych, przynależnych do danego dowolnego zresztą punktu będziemy mieli

$$\sigma_x = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{m}{1+m} \left[\epsilon_x + \frac{e}{m-2} \right], \quad \sigma_y = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{m}{1+m} \left[\epsilon_y + \frac{e}{m-2} \right], \quad \sigma_z = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{m}{1+m} \left[\epsilon_z + \frac{e}{m-2} \right]$$

albo jeszcze inaczej $\sigma_x = \frac{2}{\beta} \left[\epsilon_x + \frac{e}{m-2} \right], \quad \sigma_y = \frac{2}{\beta} \left[\epsilon_y + \frac{e}{m-2} \right],$

$\sigma_z = \frac{2}{\beta} \left[\epsilon_z + \frac{e}{m-2} \right]$; wzory uzależniające WYDŁUŻENIA POOSIOWE OD WŁASCIWYCH NAPRĘŻEŃ NORMALNYCH. Mnożąc

σ_y i σ_z przez $-\frac{1}{m}$ i kolejno dodając do σ_x mamy:

$$\sigma_x - \frac{\sigma_y + \sigma_z}{m} = \frac{1}{\alpha} \frac{m}{m+1} \left\{ \epsilon_x - \frac{\epsilon_y}{m} - \frac{\epsilon_z}{m} + \frac{e}{m-2} \left(1 - \frac{2}{m} \right) \right\} = \frac{1}{\alpha} \frac{m}{m+1} \cdot$$

$$\left\{ \epsilon_x - \frac{\epsilon_y}{m} - \frac{\epsilon_z}{m} + \frac{e}{m} \right\} = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{m}{m+1} \left[\epsilon_x - \frac{\epsilon_y}{m} - \frac{\epsilon_z}{m} + \frac{\epsilon_x}{m} + \frac{\epsilon_y}{m} + \frac{\epsilon_z}{m} \right]$$

bowiem jak wiadomo $\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z = e$. Stąd mamy w dalszym

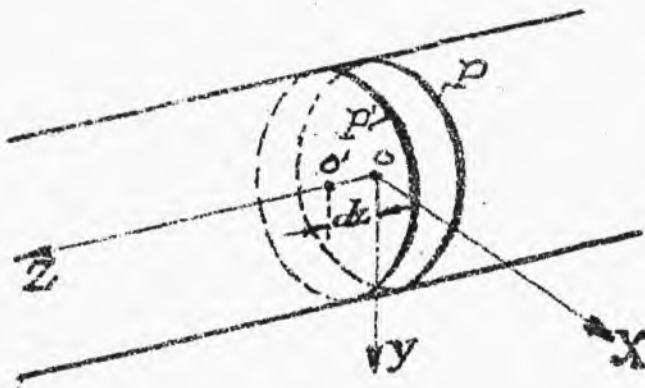
$$\text{ciągu bezpośrednio } \sigma_x - \frac{\sigma_y + \sigma_z}{m} = \frac{1}{\alpha} \frac{m}{m+1} \left[\epsilon_x + \frac{\epsilon_x}{m} \right] = \frac{\sigma_x}{\alpha}.$$

Zatem $\epsilon_x = \alpha \left[\sigma_x - \frac{\sigma_y + \sigma_z}{m} \right]$ oraz podobnie $\epsilon_y = \alpha \left[\sigma_y - \frac{\sigma_x + \sigma_z}{m} \right]$,
 $\epsilon_z = \alpha \left[\sigma_z - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{m} \right]$. Na tym kończymy TEORIĘ SPRĘŻYSTO-
 ŚCI. Jako bezpośrednie jej zastosowanie wyznaczmy:

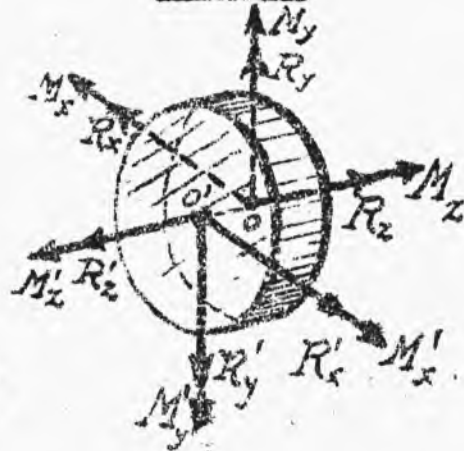
§ 11. NAPRĘŻENIA I WYDŁUŻENIA GŁÓWNE PRĘTÓW PROSTYCH.

Na danym pręcie prostym obieramy dowolny przekrój poprzeczny o środku masy O , leżącym na osi podłużnej pręta. Układ sił odkształcających przynależy do części pręta, przez którą przechodzi ujemna oś OZ , powiedzmy tylnej części pręta, sprowadzamy do punktu O , gdzie otrzymamy układ równoważny, złożony z wypadkowych SIŁ R_x, R_y, R_z i MOMENTÓW M_x, M_y, M_z , jak to zresztą najlepiej uwypukla rys. 10.

RYC. 10.



RYC. 11.



Wypadkowa R_z i moment M_p dają naprężenia normalne
 $t_z = \frac{R_z}{S} \pm \frac{M_p}{S \cdot W}$, jakśmy to już udowodnili. \curvearrowright

Pod wpływem siły R_p powstają siły tnące, leżące w przekroju, wreszcie moment M_z daje układ naprężeń tnących skręcający. Wszystkie te naprężenia kolejno zbadaliśmy w

wytrzymałości tworzyw - obecnie cheemy je ująć we wzory teorii sprężystości. W tym celu rozpatrujemy w odległości dx od punktu O nowy przekrój poprzeczny, wyodrębniając w ten sposób z pręta CIENIUTKĄ PŁYTKĘ, którą myślowo dzielimy na KOSTKI ELEMENTARNE o krawędziach równoległych do osi OX , OY , OZ . Układ sił odkształcających, przynależny do części pręta prawej w stosunku do płytki sprowadziliśmy już do punktu O ; należy zatem jeno sprowadzić układ sił obciążający lewą część pręta, poczynając się w przekroju P' płytki do środka O' tego przekroju, aby móc w ten sposób miast całego pręta - rozpatrywać jeno myślowo wyodrębnioną zeń płytkę. To sprowadzenie da wypadkowe SIŁY $R'_x = R_x + dR_x$, $R'_y = R_y + dR_y$, $R'_z = R_z + dR_z$ i MOMENTY $M'_x = M_x + dM_x$, $M'_y = M_y + dM_y$, $M'_z = M_z + dM_z$; znikomo różniące się tylko od poprzednio otrzymanych dla ośrodka sprowadzenia O . Najlepiej to uwypukla rys. 11. Wobec takiego układu sił obciążających płytkę, jakakolwiek wyodrębniona w niej elementarna kostka NIE MOŻE UJAWNIAĆ NAPRĘŻEŃ TNĄCYCH $\bar{\epsilon}_{xy}$ lub $\bar{\epsilon}_{yx}$ równoległych do obu płaskich ścian płytki, wszystkie bowiem naprężenia tnące kostki leżą na jej ściankach przedniej i tylnej - boczne czworosiły tnące muszą więc leżeć w płaszczyznach prostopadłych do obu płaskich ścian płytki. Zatem musi być $\bar{\epsilon}_{xy} = \bar{\epsilon}_{yx} = \bar{\epsilon}_z = 0$; Ponadto wypadkowa R'_z i oba momenty M'_x i M'_y leżące w przekroju P' , dadzą NAPRĘŻENIE

NORMALNE tego przekroju $t'_z = t_z + dt_z$ znikono tylko różne od t_z - wszelka zatem kostka ulega NAPRĘZENIOM NORMALNYM w kierunku osi OZ . Tym naprężeniom zazwyczaj przypisujemy ZJAWISKA DOOSIOWE, a raczej uzależniamy wydłużenia poprzeczne od podłużnych, rozpatrując ich stosunek μ , kładziemy je zatem na karb działania naprężeń normalnych, równoległych do osi podłużnej pręta. Słowem przypuszczamy zgóry, że $\sigma_x = \sigma_y = 0$; dla wszelkiej kostki w płytce. Jesteśmy poniekąd w prawie tak czynić, zazwyczaj bowiem na bocznej powierzchni pręta NIEMA SIĘ ROZCIĄGAJĄCYCH NIĘŚCISKAJĄCYCH. Mamy więc dla prętów prostych założenie SAINT VENANT'A $\sigma_x = \sigma_y = \tau_z = 0$, co ono oznacza? Ono wskazuje, że włókna podłużne płytki są niezależne od siebie, że nie wywierają na siebie wzajemnie żadnego nacisku. Poniżej granicy proporcjonalności założenie mniej więcej odpowiada istocie rzeczy - tam też stosujemy go bez zastrzeżeń, są natomiast pewne szczególne wypadki, kiedy warunki obciążenia zadają mu kłam widoczny. Jako przykład służy TU RURA ROZCIĄGANA LUB ŚCISKANA W KIERUNKU SWEJ OSI PODŁUŻNEJ I WYPEŁNIONA PARĄ POD CIŚNIENIEM. Skoro w niej myślowo wyodrębnimy płytkę pierścieniową, a w płytce elementarną kostkę, to jak to wkrótce zobaczymy na ściankach kostki naprężenia σ_x i σ_y będą panowały istotnie, nie będą więc równe zero. Tego rodzaju pręty wydrążone pozostające pod ciśnieniem będziemy zresztą rozpatrywali niżej.

Podobnie również przeczy założeniu wału, gdy oddajemy mu moment skręcający przez pośrednictwo piasty zaklinowanej. Klin równoległy do osi wału ciśnie tworzywo przekroju niesymetrycznie w kierunku bocznym - rodzi więc naprężenia $\bar{\epsilon}_{xy}$, $\bar{\epsilon}_{yx}$ różne od zera. Tego rodzaju wypadki zgóry wyłączamy.

Zatem naprężenia główne prętów prostych otrzymujemy z równania: $\begin{vmatrix} \sigma_1 & 0 & -\bar{\epsilon}_y \\ 0 & \sigma_2 & -\bar{\epsilon}_x \\ -\bar{\epsilon}_y & -\bar{\epsilon}_x & \sigma_3 \end{vmatrix} = \sigma_1[\sigma_2^2 - \sigma_3^2 - \bar{\epsilon}_x^2 - \bar{\epsilon}_y^2] = 0$.
 które daje $\sigma_1 = \frac{1}{2} \sigma_2 + \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_2^2 + 4\bar{\epsilon}^2}$, $\sigma_2 = \frac{1}{2} \sigma_2 - \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_2^2 + 4\bar{\epsilon}^2}$, $\sigma_3 = 0$
 gdzie oznaczyliśmy przez $\bar{\epsilon}^2 = \bar{\epsilon}_x^2 + \bar{\epsilon}_y^2$. Widzimy stąd, iż założenie SAINT VENANT'a daje zerową wartość jednego z głównych naprężeń dowolnego punktu przekroju poprzecznego. Stąd bezpośrednio mamy: $\epsilon_1 = \alpha[\sigma_1 - \frac{\sigma_2}{m}] = \alpha[\frac{\sigma_2}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_2^2 + 4\bar{\epsilon}^2} - \frac{\sigma_2}{2m} + \frac{1}{2m} \sqrt{\sigma_2^2 + 4\bar{\epsilon}^2}]$.
 stąd;
 $\epsilon_1 : \alpha = \frac{m-1}{2m} \cdot \sigma_2 + \frac{m+1}{2m} \sqrt{\sigma_2^2 + 4\bar{\epsilon}^2}$, $\epsilon_2 : \alpha = \frac{m-1}{2m} - \frac{m+1}{2m} \sqrt{\sigma_2^2 + 4\bar{\epsilon}^2}$, $\epsilon_3 : \alpha = -\frac{\sigma_2}{m}$. Tylko co otrzymane wzory wyznaczają wydłużenia główne prętów prostych. Są to wydłużenia skrajne, - największe z nich stanowi zazwyczaj miarę wyężenia tworzywa pręta.

§ 12. NATĘŻENIE TWORZYWA. Trwałość budowli technicznych zależy w pierwszej mierze od pewnej pracy tworzywa. Należy zatem poznać warunki właściwej ich pracy, aby ustalić miarę bezpiecznego natężenia tworzywa. Odpowiedź na to może dać wyłącznie doświadczenie, niestety jednak

przeważnie jest ono niewykonalne, daje natomiast ściśle dane w wypadku zwykłego rozciągania prętów prostych. Tu miarę bezpiecznego natężenia otrzymujemy z łatwością w postaci skrajnego dopuszczalnego naprężenia. Zatem przy rozciąganiu prętów prostych **NAPRĘŻENIE STANOWI MIARĘ NATĘŻENIA TWORZYWA**. Na tem spostrzeżeniu opiera się pierwsza teoria, która głosi, że **MIARĘ NATĘŻENIA TWORZYWA STANOWI NAJWYŻSZE JEGO NAPRĘŻENIE NORMALNE, A WIĘC NAJWIĘKSZE Z NAPRĘŻEN GŁÓWNYCH PUNKTU ROZPATRYWANEGO**. Ta teoria zawodzi jednak w wielu wypadkach, a zwłaszcza przy ściskaniu wszechstronnem przez pośrednictwo cieczy. W tym wypadku jak wykazały próby bezpośrednie, ciśnienie choćby największe nie może wywołać pęknięcia ciała jednorodnego. Ten brak teorii starano się pokryć przy pomocy innej teorii, która orzeka, że **MIARĘ NATĘŻENIA STANOWI NAJWYŻSZE JEGO NAPRĘŻENIE TNĄCE**. Ta teoria, mająca pewne pokrewieństwo z pierwszą, wyjaśnia pewną gromadę zjawisk, tłumaczy rozpadanie się sześcianna żeliwnego ściskanego na dwa kliny, zawodzi natomiast w wypadku ściskania tworzyw ciągliwych, które jak wiadomo można rozgniatać nieograniczenie nie wywołując pęknięcia. W obu powyższych teoriach miarę natężenia stanowi skrajne naprężenie tworzywa, obie nie są, jak widzimy, bez zarzutu, to też COULOMB starał się ustalić trzecią teorię,

ze MIARĄ NATEŻENIA JAWI SIĘ SKRAJNE ODKSZTAŁCENIE TNĄCE TWORZYWA, CZYLI SKRZYWIENIE KOSTKI ELEMENTARNEJ.

Jednak i ta teoria nie umie wytłomaczyć możliwości powstawania pęknięć przy wszechstronnem rozciąganiu. Stosunkowo najwięcej zwolenników dotychczas jeszcze posiada następna teoria PONCELET'a, głosząca, że MIARĄ NATEŻENIA JAWI SIĘ SKRAJNE WYDŁUŻENIE TWORZYWA, a więc największe z wydłużeń głównych w punkcie rozpatrywanym. Choć stosowana prawie wyłącznie dotychczas i ta teoria nie jest bez grzechu; przeczą jej doświadczenia FÖPPLA, który czterostronnie poddawał ciśnieniu kostkę i nie otrzymał wcale WYŻSZEJ WYTRZYMAŁOŚCI niż przy ciśnieniu zwykłym dwustronnem, choć zdawać by się mogło, że częściowe zahamowanie z dwóch stron przeciwległych boczego rozszerzenia kostki powinno podnieść jej wytrzymałość.

Mimo ten zarzut, zresztą dość poważny, teoria wydaje się oczywistą, bo największemu wydłużeniu miejscowemu odpowiadać chyba powinno największe rozszerzenie tworzywa, to jest mówiąc nieco ściślej najznaczniejsze rozsuniecie się jego cząsteczek, połączone z koniecznem osłabieniem sił wiążących międzycząsteczkowych, mogącem wywołać pęknięcie. To też dotychczas w wytrzymałości tworzyw ta teoria ma prawo obywatelstwa. Odrzuca ją MOHR, twórca własnej teorii, stanowiącej nader udatne i dowcipne połącze-

nie obu ostatnich tu rozpatrywanych oraz profesor lwowskiej politechniki M. Huber, który, rozwijając pomysł BELTRAMI'ego dochodzi do przekonania, że o NATEŻENIU TWORZYWA STANOWI CAŁOKSZTAŁT MIEJSCOWYCH NAPRĘŻEŃ^{x/}, A MIARA NATEŻENIA MOŻE BYĆ, JEDYNIĘ PRACA ODKSZTAŁCENIA, o której wkrótce posłyszemy.

I te dwie najnowsze teorie mają zresztą swe braki, póki więc bliższe badania nie ustalą ostatecznej - zmuszeni jesteśmy iść za większością, dotychczas jeszcze uznającą teorię PONCELET'a. Ją też bierzemy pod uwagę.

Zresztą wszystkie podane tu teorie nie uwzględniają wcale ZJAWISK DRGAŃ CZĄSTECZKOWYCH - niewątpliwie grających nader ważną, a może nawet wprost jedyną rolę przy pojawianiu się pęknięć w tworzywie. Ostatecznie więc MIARA WYTEŻENIA STANOWI NAJWYKSZE WYDŁUŻENIE GŁÓWNE MIEJSCOWE TWORZYWA.

§ 13. NAPRĘŻENIA ZASTĘPCZE. W ustępie dziesiątym wyznaczaliśmy wydłużenia główne dla prętów prostych, wychodząc z założenia $\sigma_x = \sigma_y = \varepsilon_z = 0$. \rightarrow Śród tych wydłużeń szukamy największego wydłużenia, stanowiącego miarę wyteżenia materiału. Tą drogą idziemy wyłącznie jeno w wypadkach obciążenia złożonego, ponieważ w zwykłych wypadkach

x/ Patrz: Prof. M. T. HUBER: "Właściwa praca odkształcania, jako miara wyteżenia materiału" - Lwów 1904.

rozciągania, ściskania, ścinania, skręcania, wyginania i wybaczania przywykliśmy mierzyć natężenie tworzywa wartością skrajnego dopuszczalnego naprężenia k i według niego wyznaczać wystarczająco mocne wymiary. Z tego jedynie powodu, chcąc ujenostajnić rachunek wymiarów w wypadku obciążenia głównego, przypisujemy i tutaj skrajne wydłużenie pewnemu domniemanemu zresztą naprężeniu normalnemu σ_w , które ma jakoby wywołać owo największe wydłużenie główne w myśl prawa HOOKE'a: $\sigma_w = E \epsilon_w = \frac{1}{\alpha} \cdot \epsilon_w$, gdzie przez ϵ_w oznaczyliśmy bezwzględnie największe wydłużenie główne.

W ten sposób określone NAPRĘŻENIE ZASTĘPCZE rozpatrujemy jako miarę właściwą natężenia danego tworzywa. Ten nowowprowadzony sposób, wyznaczania skrajnego dopuszczalnego naprężenia zastępczego σ_w winien być uzgodnionym z dawnym. Należy zatem sprawdzić, czy nie zawiera sprzeczności wewnętrznej w zastosowaniu do wyżej wymienionych prostych rodzajów obciążenia. Przy rozciąganiu, ściskaniu, wyginaniu i wybaczaniu prętów prostych powstają naprężenia normalne równoległe do osi pręta, a więc σ_z podczas gdy $\tau = 0$. Wobec tego będziemy mieli $\frac{\epsilon_1}{\alpha} = \sigma_z$, $\frac{\epsilon_2}{\alpha} = -\frac{\epsilon_3}{m} = \frac{\epsilon_3}{\alpha}$, zatem $\sigma_w = \epsilon_1$, a naprężenie zastępcze będzie $\sigma_w = \frac{\epsilon_1}{\alpha} = \sigma_z$. W wypadkach rozciągania, ściskania, gięcia i wybaczania skrajna wartość naprężenia normalnego daje naprężenie zastępcze, należy ją za-

tem uczynić równą k - dopuszczalnemu naprężeniu danego tworzywa, pisząc $\sigma_N = \sigma_Z = k_\sigma$, gdzie k_σ oznacza k_r, k_n, k_g lub k_w . Tutaj więc nowy sposób sprzeczności nie ujawnia.

W pozostałych wypadkach ścinania i skręcania $\sigma_Z = 0$; a naprężenia tnące, według starego sposobu, nie powinno przekraczać k_τ , gdzie przez k_τ oznaczyliśmy k_t lub k_k . Zatem musi być $\varepsilon = k_\tau$. Ponieważ jednak przy $\sigma_Z = 0$, $\frac{\varepsilon_1}{\alpha} = \frac{m+1}{m} \cdot \varepsilon$, $\frac{\varepsilon_2}{\alpha} = -\frac{m+1}{m} \cdot \varepsilon$, $\varepsilon_3 = 0$ \curvearrowright , przeto $\sigma_N = \frac{m+1}{m} \cdot \varepsilon$ czyli $\sigma_N = \frac{m+1}{m} k_\tau$. Jest to pozorna sprzeczność, bo przecież we wszystkich bowiem tylko co rozpatrywanych wypadkach miara natężenia tworzywa winna być jednokowa! Że tak jest istotnie możemy się natychmiast przekonać, zważywszy, że $k_\sigma = \frac{m+1}{m} \cdot k_\tau$, jakieśmy to w teorii ścinania w ustępie ósmym udowodnili dla ciał jednolitych.

Dla ciał niejednorodnych $k_\sigma \neq \frac{m+1}{m} \cdot k_\tau$ możemy przeto napisać $k_\sigma = \frac{m+1}{m} \cdot \alpha_0 k_\tau$, gdzie $\alpha_0 = k_\sigma : \left[\frac{m+1}{m} \right] \cdot k_\tau$, a przeto we wzorach należy wszędzie pisać $\alpha_0 \varepsilon$ miast: ε co da $\frac{\varepsilon_1}{\alpha} = \frac{m-1}{m} \cdot \sigma_Z + \frac{m+1}{m} \cdot \sqrt{\sigma_Z^2 + 4(\alpha_0 \varepsilon)^2}$, $\frac{\varepsilon_2}{\alpha} = \frac{m-1}{m} \cdot \sigma_Z - \frac{m+1}{m} \cdot \sqrt{\sigma_Z^2 + 4(\alpha_0 \varepsilon)^2}$, $\frac{\varepsilon_3}{\alpha} = -\frac{\sigma_Z}{m}$ \curvearrowright \curvearrowright \curvearrowright

Ten współczynnik jest zatem we wzorach konieczny, gdy rozpatrujemy tworzywo niejednorodne, nadto jest on konieczny również i wtedy, gdy naprężenia σ_Z i ε nie są jednorodnych rodzajów, gdy dajmy na to σ_Z pochodzi od sił typu II a ε od obciążenia typu III, jak to najczęściej ma miejsce. Myśl wprowadzenia współczynnika poprawkowego α_0

awdzięczamy BACHOWI. Dla tworzyw jednolitych i obciążeń jednego typu $\alpha_0 = 1$.

Jako przykład zastosowania tylko co wprowadzonych wzorów rozpatrujemy:

§ 14. ŚCINANIE I SKRĘCANIE PRĘTÓW O PRZEKROJU KOŁOWYM.

w ustępie jedynastym tego rozdziału wyznaczyliśmy skraj-

wartość naprężenia tnącego dla przekroju kołowego w

staci $\tau_M = \frac{4}{3} \cdot \frac{R_p}{S}$. Panować ona będzie wzdłuż

średnicy prostopadłej do kierunku siły tnącej R_p prze-

roju. U skrajów tej średnicy mamy nadto skrajną wartość

naprężenia wirowego $\tau_w = \frac{M_z \cdot R}{J_0}$. Jako jednokierunkowe

ją naprężenia wypadkowe: $\tau = \frac{4}{3} \frac{R_p}{S} + \frac{M_z R}{J_0} = \frac{4}{3} \cdot \frac{4R_p}{\pi D^2} +$

$\frac{32M_z}{\pi D^3} \cdot \frac{D}{2} = \frac{16}{\pi D^2} \left[\frac{R_p}{3} + \frac{M_z}{D} \right]$, które nie powinno przekra-

ść odpowiedniej wartości dopuszczalnego naprężenia k_k

§ 15. SKRĘCANIE I ROZCIĄGANIE LUB SKRĘCANIE I ŚCISKANIE

PRETÓW O PRZEKROJU KOŁOWYM. Tutaj w obu razach, naj-

szsza wartość naprężenia wirowego wynosi na obwodzie

$\frac{M_z}{J_0} \cdot R$, nadto przy rozciąganiu $\sigma_z = \frac{R_z}{S}$, pod-

s gdy przy ściskaniu $\sigma_z = -\frac{R_z}{S}$. W pierwszym wy-

ku będziemy zatem mieli $\sigma_w = \frac{\epsilon_1}{\alpha} = \frac{m-1}{2m} \cdot \frac{R_z}{S} + \frac{m+1}{2m} \cdot$

$\frac{R_z^2 + 4(\alpha_0 \frac{M_z}{W_0})^2}{S^2}$, gdzie $\alpha_0 = \frac{m \cdot k_r}{(1+m) \cdot k_k}$

drugim $\sigma_w = \frac{\epsilon_2}{\alpha} = -\frac{m-1}{2m} \cdot \frac{R_z}{S} - \frac{m+1}{2m} \sqrt{\frac{R_z^2 + 4(\alpha_0 \frac{M_z}{W_0})^2}{S^2}}$.

ie: $\alpha_0 = \frac{m \cdot k_r}{(1+m) \cdot k_k}$, to są bowiem największe bez-

względnie wartości wydłużeń głównych. Dla stali i żelaza zlewne $m = \frac{10}{3}$, zatem odpowiednio mamy: $\sigma_H = 0,35 \frac{R_z}{S} + 0,65 \sqrt{\frac{R_z^2}{S^2} + 4(\alpha_0 \frac{M_z}{W_0})^2}$, gdzie $\alpha_0 = \frac{k_r}{1,3k_k}$ oraz: $\sigma_H = -0,35 \frac{R_z}{S} - 0,65 \sqrt{\frac{R_z^2}{S^2} + 4(\alpha_0 \frac{M_z}{W_0})^2}$ gdzie $\alpha_0 = \frac{k_n}{1,3k_k}$

W obu wypadkach σ_H nie powinno przekraczać skrajnej dopuszczalnej wartości odpowiedniego naprężenia normalnego - przy rozciąganiu i skręcaniu $\sigma_H \leq k_r$, a przy ścisaniu i skręcaniu $\sigma_H \leq k_n$

§ 16. ZGINANIE I SKRĘCANIE PRĘTÓW O PRZEKROJU KOŁOWYM.

I tu najwyższa wartość naprężenia wirowego wynosi na obwodzie $\tau_{MAX} = \frac{M_z}{W_0} = \tau$, a skrajna wartość naprężenia gnącego na powierzchni pręta $\sigma_{MAX} = \frac{M_g}{W} = \sigma_z$, zatem dla stali i żelaza zlewne będziemy mieli $\sigma_H = 0,35 \frac{M_g}{W} +$

$+ 0,65 \sqrt{\frac{M_g^2}{W^2} + 4(\alpha_0 \frac{M_z}{W_0})^2}$, gdzie $\alpha_0 = \frac{k_g}{1,3k_k}$. I tu znów należy w skrajnym wypadku uczynić $\sigma_H = k_g$. Ponieważ dla prętów o przekroju kołowym $W = \frac{\pi D^3}{32}$ a $W_0 = \frac{\pi D^3}{16}$, zatem $W_0 = 2W$, skąd $W \cdot k_g = [0,35 M_g + 0,65 \sqrt{M_g^2 + \alpha_0^2 M_z^2}]$ ostatecznie otrzymujemy wzór gięcia w zwykłej postaci pisząc $W \cdot k_g = M_H$, gdzie przez $M_H = 0,35 M_g + 0,65 \sqrt{M_g^2 + \alpha_0^2 M_z^2}$ oznaczyliśmy t.zw. moment zastępczy. W ten sposób zagadnienie wytrzymałości złożonej dla prętów kołowych w wypadku skręcania połączonego ze zginaniem prowadzamy sztucznie do wypadku prostego zginania, wprowadzając moment zastępczy.

§ 17. SKRĘCANIE ZE ZGINANIEM I ŚCINANIEM PRĘTÓW O PRZEKROJU KOŁOWYM. Tutaj skrajne naprężenie tnące będzie na obwodzie: $\tau = \frac{16}{\pi D^2} \left[\frac{R_p}{3} + \frac{M_x}{D} \right]$, nadto najwyższe naprężenie gnące na powierzchni pręta $\sigma_z = \frac{M_y}{W} = \frac{32 M_y}{\pi D^3}$. Stąd dla stali i żelaza zlewnego $\sigma_w = 0,35 \frac{M_y}{W} + 0,65 \sqrt{\frac{M_y^2}{W^2} + 4 \left\{ \alpha_0 \frac{16}{\pi D^2} \left[\frac{R_p}{3} + \frac{M_x}{D} \right] \right\}^2}$, przyczem: $\sigma_w = k_g$, a $\alpha_0 = \frac{k_g}{1,5 k_R}$.

§ 18. ZGINANIE PRZY UWZGLĘDNIENIU SIŁ TNĄCYCH.

W ustępie jedenastym niniejszego rozdziału wyznaczyliśmy wartość naprężenia tnącego $\tau = \frac{T F}{2 X J \cos \varphi}$ dla przekroju symetrycznego względem osi Y , w wypadku gięcia płaskiego, kiedy działa moment M_x i siła tnąca $R_y - T$. Ponieważ przy wyginaniu powstają naprężenia normalne $t_g = \frac{M_x}{J_x} \cdot y$, o skrajnej wartości $t_M = \frac{M_x}{W_x}$, zatem największe wydłużenie główne otrzymamy dla prętów żelaznych lub stalowych zlewnych, pisząc: $\frac{\epsilon_{MAX}}{\alpha} = 0,35 \frac{M_x}{W_x} + 0,65 \sqrt{\frac{M_x^2}{W_x^2} + 4 \alpha_0^2 \left[\frac{R_y F}{2 X J \cos \varphi} \right]^2}$ gdzie $\alpha_0 = \frac{k_g}{1,5 k_R}$. Skąd naprężenie zastępcze $\sigma_w = \frac{\epsilon_{MAX}}{\alpha}$ należy zatem uczynić $\sigma_w = k_g$, aby pręt czynił zadość wymogom bezpieczeństwa. By uwypuklić wpływ naprężenia tnącego na σ_w BACH wyznaczył wartości t_g i σ_w dla prętów różnej długości o przekroju prostokątnym i kołowym. Okazało się, że SIŁY TNĄCE WYRAŹNIE ZAZNACZAJĄ SWÓJ WPŁYW LI

TYLKO W WYPADKU PRĘTÓW KRÓTKICH - należy je zatem uwzględnić li tylko wtedy.

Na tej zasadzie Bach wyowiada wniosek ogólny, iż krótkie pręty należy liczyć wyłącznie biorąc pod uwagę naprężenia tnące z pominięciem gnących - podczas gdy pręty długie można liczyć tylko na gięcie. Granicę obu wypadków ustala BACH dla prętów o przekroju kołowym stałym zamocowanych jednostronnie a drugostronnie w końcu obciążonych siłą P gnącą, radząc korzystać ze wzoru gięcia płaskiego $PL: \frac{\pi d^3}{32} = k_g$, gdy długość pręta

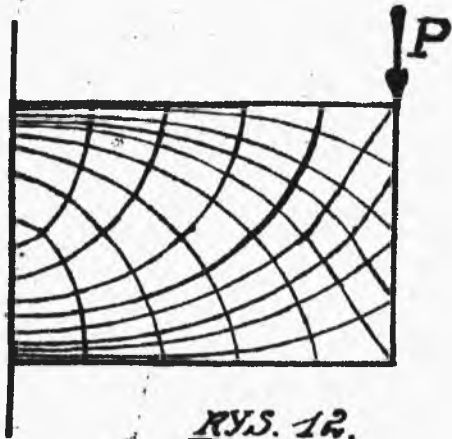
L jest większa od ćwierci jego średnicy d ; oraz ze wzoru $\frac{4}{3} \frac{P}{\pi d^2} = k_t$ gdy $L < \frac{d}{4}$.

W wypadku pręta o przekroju prostokątnym $b \times h$ tak samo obciążonego należy korzystać ze wzoru na gięcie

$PL: \frac{bh^2}{6} = k_g$, gdy $L > 0,325 h$, w razie przeciwnym - liczyć pręt wyłącznie tylko na ścinanie według wzoru: $\frac{3}{4} \cdot \frac{P}{bh} = k_t$.

W obu wypadkach skrajne wartości leżą nader nisko, tak krótkie pręty są nader rzadko używane, możemy zatem śmiało pomijać siły tnące przy rozpatrywaniu zwykłych zagadnień praktycznych. Natomiast w wypadkach szczególnych przy nader nieznacznej długości prętów należy każdorazowo uwzględnić wpływ sił tnących i o ile są znaczne, włączyć do rachunku. Dla krótkiego pręta o przekroju prostokątnym prof. BLUMENTHAL wyznaczył oba

główne naprężenia dla całego szeregu punktów i połączył jednoimienne naprężenia jednakowe krzywymi. Wynik tej pracy podaje rys.12. Widzimy tu dwa roje krzywych, przecinających się pod kątem prostym, co jest oczywiście konieczne, bo naprężenia główne są zawsze prostopadłe do siebie. Ten zatem układ naprężeń zasadniczo odbiega od zwykłego układu naprężeń



RYŚ. 12.

gnących - tutaj bowiem linie równych naprężeń wyraźnie pochyłają się ku środkowi pręta na tle działania sił tnących, podczas gdy w wypadku prostego zginania linie równych naprężeń biegną równoległe do osi pręta o stałym przekroju. Taki sam zmacony obraz naprężeń gnących ujawniają skrajne końcowe przekroje każdego pręta zginanego w sąsiedztwie podpór, tam bowiem wartość momentu gnącego jest stosunkowo jeszcze nie wielka wobec nieznaczących wymiarów ramienia, a siła tnąca działa w całej pełni.

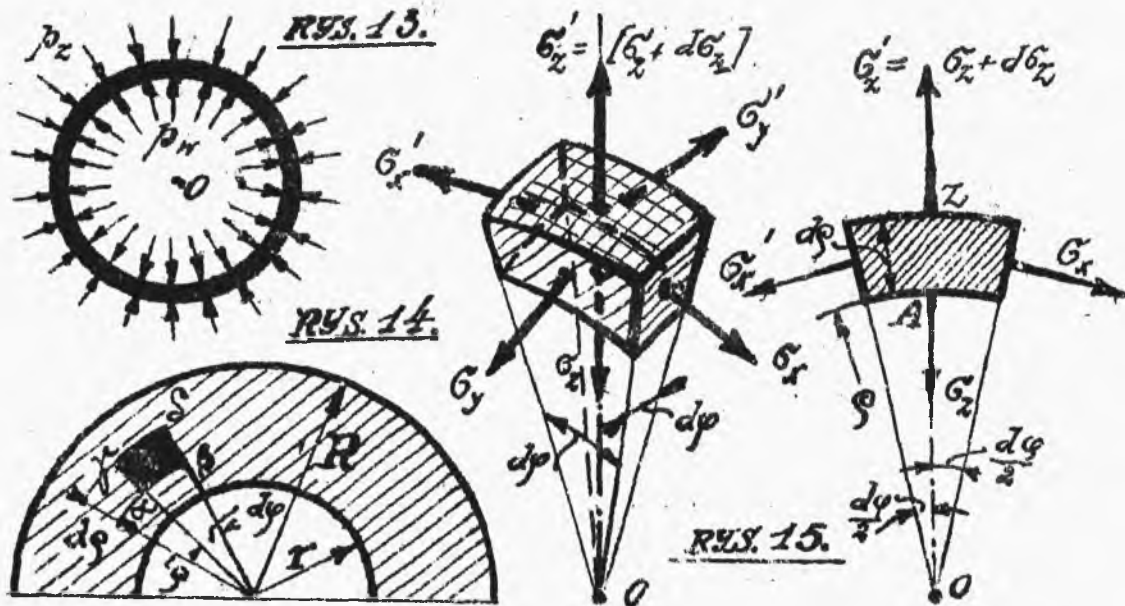
Stąd prawo praktyczne, że na końcach prętów zginanych w sąsiedztwie podpór należy brać pod uwagę naprężenia tnące przy wyznaczaniu bezpiecznych wymiarów pręta. Dotyczy to zwłaszcza czopów wałów zginanych.

C Z Ę Ś Ć II.

NACZYNIA i POWŁOKI.

A. NACZYNIA GRUBOŚCIENNE.

1. NACZYNIA KULISTE /rys.14/. Zewnętrzny promień naczynia oznaczamy przez R , wewnętrzny przez r ; z wnętrza ścianki wykrawamy myślowo kostkę elementarną /rys.15/ prowadząc cztery płaszczyzny środkowe tworzące



ostrosłup i przecinając go dwoma powierzchniami kulistymi o promieniach ρ i $\rho + d\rho$.

Ogólny widok kostki podaje rys.15, obok widzimy przekrój środkowy przez oś OZ . Krawędzie boczne kostki tworzą kąty wierzchołkowe $d\phi$, ścianki boczne przeciwległe pochylone są ku sobie pod tym samym kątem, cała

kostka zatem jest symetryczna względem osi OZ , przechodzącej przez środki obu ścianek kulistych kostki. Wobec zupełnej symetryczności obciążenia kuli, nie mogą w jej ściankach powstawać skrzywienia, świadczące o działaniu naprężeń tnących, należy przeto ściankom naszej kostki przypisać wyłącznie naprężenia normalne, będziemy mieli zatem na czterech bocznych ściankach płaskich naprężenia σ_x i σ'_x , σ_y i σ'_y a na wypukłej kulistej, σ'_z wreszcie na kulistej wklęsłej σ_z . Wspomniana wyżej symetria obciążenia kuli zmusza do uznania zupełnej symetrii naprężeń bocznych, należy przeto założyć $\sigma'_x = \sigma_x = \sigma'_y = \sigma_y = \sigma$ nadto $\sigma'_z = \sigma_z + d\sigma_z = \sigma_z + \frac{d\sigma_z}{ds} ds$, ponieważ niewątpliwie w danym wypadku stanowi jedyną zmienną. Pod działaniem tylko co nazwanych naprężeń kostka pozostaje w równowadze, należy zatem wypisać równanie statyki, przechodząc od naprężeń do sił jednostkowych. Dość będzie przeto rozpatrzyć jedynie sumę rzutów na oś jej podłużną OZ , w innych bowiem kierunkach zgóry możemy się upewnić o istnieniu równowagi rzutów wobec symetrii obciążenia kostki. Zatem na boczne cztery ścianki działają jednakowe siły jednostkowe $\sigma ds ds ds$, powierzchnia bowiem bocznej ścianki jest oczywiście równa $ds ds ds$. W rzucie na oś środkową każda z tych sił da składową $\sigma ds ds ds \sin \frac{d\varphi}{2} = \frac{1}{2} \sigma ds ds ds$, skierowaną ku środkowi kuli. Składowe

wszystkich czterech sił bocznych będzie przeto:

$2G_2 d\varrho d\varphi^2$. Te siły równoważyć musi różnica sił jednostkowych obu pozostałych ścianek kostki - na dolną wklęsłą działa oczywiście siła $G_2 \varrho d\varphi \varrho d\varphi = G_2 \varrho^2 d\varphi^2$ na górną $G_2 \varrho^2 d\varphi^2 + d[G_2 \varrho^2 d\varphi^2]$. W ten sposób ujęliśmy już siły wszystkie. Warunkiem ich równowagi będzie: $G_2 \varrho^2 d\varphi^2 + d[G_2 \varrho^2 d\varphi^2] - G_2 \varrho^2 d\varphi^2 = 2G_2 d\varrho d\varphi^2$. Stąd bezpośrednio: $d[G_2 \varrho^2 d\varphi^2] = d\varphi^2 d[G_2 \varrho^2] = 2G_2 d\varrho d\varphi^2$ a po skróceniu przez $d\varphi^2$ i podzieleniu przez $d\varrho$ - będziemy mieli

$$2G_2 = \frac{d}{d\varrho} [G_2 \varrho^2].$$

Tyle daje statyka. Chcąc skorzystać z tego równania należy wprowadzić odkształcenia. Oznaczmy przez W przesunięcie się punktu A w kierunku promienia $AO = \varrho$ ujawnione przy odkształceniu. Będzie ono pewną funkcją promienia ϱ , którą należy wyznaczyć z warunków zadania. Zatem $W = f(\varrho)$; wobec tego przesunięcie się punktu Z , końcowego punktu promienia $\varrho + d\varrho = OZ$ będzie odpowiednio $W' = f(\varrho + d\varrho) = f(\varrho) + df(\varrho) = u + du$. Wynika stąd że odcinek $d\varrho$ wydłuży się o $W' - W = du$ zatem wydłużenie jednostkowe odcinka $d\varrho$ będzie $\frac{du}{d\varrho} = \epsilon_z$ zachodzi bowiem w kierunku osi OZ naszej kostki rozpatrywanej. Aby wyznaczyć pozostałe wydłużenia zważmy, że wszystkie punkty, które pierwotnie przed odkształceniem leżały na kole promienia ϱ , po odkształceniu znajdą się na kole promienia

$\rho + u$, inaczej bowiem kula musiałaby się skrzywić lub sfałdować, co jest nie do pomyślenia wobec symetryczności obciążenia. Obwody tych kół obu mają się jak promienie, zatem obwód odkształcony będzie miał się do obwodu pierwotnego jak $\frac{\rho + u}{\rho}$. Zatem obwód pierwotny ujawni wydłużenie jednostkowe równe różnicy obu obwodów, dzielonej przez obwód pierwotny nieodkształcony. To wydłużenie poprzeczne nie zależy oczywiście od kierunku, możemy go przeto oznaczyć przez ϵ_x lub ϵ_y dowolnie. Stąd $\epsilon_x = \epsilon_y = \frac{\rho + u - \rho}{\rho} = \frac{u}{\rho}$. A zatem $\epsilon_z = \frac{du}{d\rho} = \alpha (\sigma_z - \frac{\sigma_x}{m} - \frac{\sigma_y}{m}) = \alpha (\sigma_z - 2\frac{\sigma}{m})$; $\epsilon_x = \epsilon_y = \frac{u}{\rho} = \alpha (\sigma_x - \frac{\sigma_y}{m} - \frac{\sigma_z}{m}) = \frac{\alpha}{m} [(m-1)\sigma - \sigma_z]$. Z tych dwóch równań z łatwością wyznaczyć możemy: $\sigma_x = \sigma_y = \sigma = \frac{mE}{m^2 - m - 2} [\epsilon_z + m\epsilon_x]$; $\sigma_z = \frac{mE}{m^2 - m - 2} [(m-1)\epsilon_z + 2\epsilon_x]$.

Po podstawieniu w wyżej otrzymane równanie otrzymamy

$$2\rho \frac{mE}{m^2 - m - 2} [\epsilon_z + m\epsilon_x] = \frac{d}{d\rho} \left\{ \rho^2 \frac{mE}{m^2 - m - 2} [(m-1)\epsilon_z + 2\epsilon_x] \right\}.$$

czyli po skróceniu stałej i podstawieniu wartości dla ϵ_z i ϵ_x : $2\rho \frac{du}{d\rho} + 2\rho m \frac{u}{\rho} = \frac{d}{d\rho} \left[(m-1)\rho^2 \frac{du}{d\rho} + 2\rho^2 \frac{u}{\rho} \right]$ stąd różniczkując: $2\rho \frac{du}{d\rho} + 2m\rho = 2(m-1)\rho \frac{du}{d\rho} + (m-1)\rho^2 \frac{d^2u}{d\rho^2} + 2u + 2\rho \frac{du}{d\rho}$; ostatecznie po skróceniu przez $(m-1)$

$$\rho^2 \frac{d^2u}{d\rho^2} + 2\rho \frac{du}{d\rho} - 2u = 0.$$

Całka tego równania jest $u = A\rho + \frac{B}{\rho^2}$. Stąd kolejno $\epsilon_x = \epsilon_y = A + \frac{B}{\rho^3}$; $\epsilon_z = \frac{du}{d\rho} = A - \frac{2B}{\rho^3}$ oraz

$$\sigma_z = \frac{mE}{m^2 - m - 2} \left\{ (m-1)A - (m-1)\frac{2B}{\rho^3} + 2A + \frac{2B}{\rho^3} \right\} = \frac{mE}{m^2 - m - 2} \left\{ (m+1)A - (m-2)\frac{2B}{\rho^3} \right\}.$$

Na obu powierzchniach naczyń, naprężenie σ_z musi równoważyć odnośne ciśnienia zewnętrzne, musimy mieć zatem następujące dwa równania warunkowe dla wyznaczenia A i B :

$$p_z + [\sigma_z]_{\varrho=R} = p_z + \frac{mE}{m^2-m-2} \left\{ (m+1)A - (m-2) \frac{2B}{R^3} \right\} = 0. \quad \curvearrowright$$

$$p_w + [\sigma_z]_{\varrho=r} = p_w + \frac{mE}{m^2-m-2} \left\{ (m+1)A - (m-2) \frac{2B}{r^3} \right\} = 0. \quad \curvearrowright$$

Stąd otrzymamy: $A = -\frac{m-2}{Em} \cdot \frac{R^3 p_z - r^3 p_w}{R^3 - r^3}$; $B = -\frac{m+1}{2Em} \cdot \frac{p_z - p_w}{R^3 - r^3} \cdot R r^3$ ostatecznie: $\sigma_z = -\frac{R^3 p_z - r^3 p_w}{R^3 - r^3} + \frac{p_z - p_w}{R^3 - r^3} \cdot \frac{R^3 r^3}{\varrho^3}$; $\sigma_x = \sigma_y = -\frac{R^3 p_z - r^3 p_w}{R^3 - r^3} - \frac{p_z - p_w}{R^3 - r^3} \cdot \frac{R^3 r^3}{\varrho^3}$.

Stąd otrzymamy wydłużenia:

$$E \epsilon_z = \sigma_z - \frac{2}{m} \sigma_x = -\frac{m-2}{m} \cdot \frac{R^3 p_z - r^3 p_w}{R^3 - r^3} + \frac{m+1}{m} \cdot \frac{p_z - p_w}{R^3 - r^3} \cdot \frac{R^3 r^3}{\varrho^3}$$

$$E \epsilon_x = E \epsilon_y = \frac{m-1}{m} \sigma_x - \frac{\sigma_z}{m} = -\frac{m-2}{m} \cdot \frac{R^3 p_z - r^3 p_w}{R^3 - r^3} - \frac{m+1}{2m} \cdot \frac{p_z - p_w}{R^3 - r^3} \cdot \frac{R^3 r^3}{\varrho^3}$$

Otrzymane tu wzory rozwiązują zagadnienie w całej rozciągłości. W wypadku CIŚNIENIA WEWNĘTRZNEGO należy w nich

założyć $p_z = 0$ stąd: $E \epsilon_x = E \epsilon_y = \frac{m-2}{m} \cdot \frac{r^3 p_w}{R^3 - r^3} + \frac{m+1}{2m}$.

$$\frac{p_w R^3 r^3}{(R^3 - r^3) \varrho^3}; \quad E \epsilon_z = \frac{m-2}{m} \cdot \frac{r^3 p_w}{R^3 - r^3} - \frac{m+1}{m} \cdot \frac{p_w R^3 r^3}{(R^3 - r^3) \varrho^3}$$

U wewnętrznego kraju ścianki przy $\varrho = r$ wydłużenia za-

chodzą największe, możemy zatem upodobnić tym skrajnym

wydłużeniom naprężenia zastępcze $\sigma_w = E \epsilon_{\text{MAXIMUM}}$ Te napręże-

nia zastępcze nie mogą, jak wiemy, przekraczać skrajnych

dopuszczalnych współczynników dla danego tworzywa. W danym

wypadku będziemy mieli przeto:

$$E \epsilon_{x \text{ MAX}} = \frac{m-2}{m} \cdot \frac{r^3 p_w}{R^3 - r^3} + \frac{m+1}{2m} \cdot \frac{R^3 p_w}{R^3 - r^3} = k_r \quad \curvearrowright$$

$$-E \epsilon_{z \text{ MAX}} = -\frac{m-2}{m} \cdot \frac{r^3 p_w}{R^3 - r^3} + \frac{m+1}{m} \cdot \frac{p_w R^3}{R^3 - r^3} = k_n \quad \curvearrowright$$

ponieważ pierwsze naprężenie zastępcze jest niewątpli-
wie dodatnie, a więc rozciągające, a drugie oczywiście u-
jemne, a więc ściskające. Stąd mamy warunki konieczne:

$$R = r \sqrt[3]{\frac{k_r + \frac{m-2}{m} p_H}{k_r - \frac{m+1}{m} p_H}} \quad \text{oraz} \quad R = r \sqrt[3]{\frac{k_n - \frac{m-2}{m} p_H}{k_n - \frac{m+1}{m} p_H}} \quad \dots$$

Oba te warunki należy wypełnić. Ponieważ dla tworzyw,
z których zwykle robią naczynia kuliste $k_n \geq k_r$, przeto
miarodajnym jest pierwszy warunek, jako dający większy wy-
miar średnicy zewnętrznej w stosunku do wewnętrznej. Możemy
przeto drugi warunek pominąć. Nadto być musi $k_r > \frac{m+1}{m} p_H$
inaczej bowiem R nie da się wyznaczyć ze zworu. Stąd
wnioskujemy, że WYTRZYMAŁOŚĆ naczyń KULISTYCH NA CIŚNIENIE
WEWNĘTRZNE MA SWE GRANICE, musi być bowiem $p_H < \frac{m \cdot k_r}{m+1}$.

W wypadku natomiast CIŚNIENIA ZEWNĘTRZNEGO kiedy $p_H = 0$;
będziemy mieli podobnie zupełnie:

$$-E \epsilon_{1 \text{ MAX}} = \frac{m-2}{m} \cdot \frac{R^3 p_z}{R^3 - r^3} + \frac{m+1}{2m} \cdot \frac{R^3 p_z}{R^3 - r^3} = k_n \quad \dots$$

$$E \epsilon_{2 \text{ MAX}} = -\frac{m-2}{m} \cdot \frac{R^3 p_z}{R^3 - r^3} + \frac{m+1}{m} \cdot \frac{R^3 p_z}{R^3 - r^3} = k_r \quad \dots$$

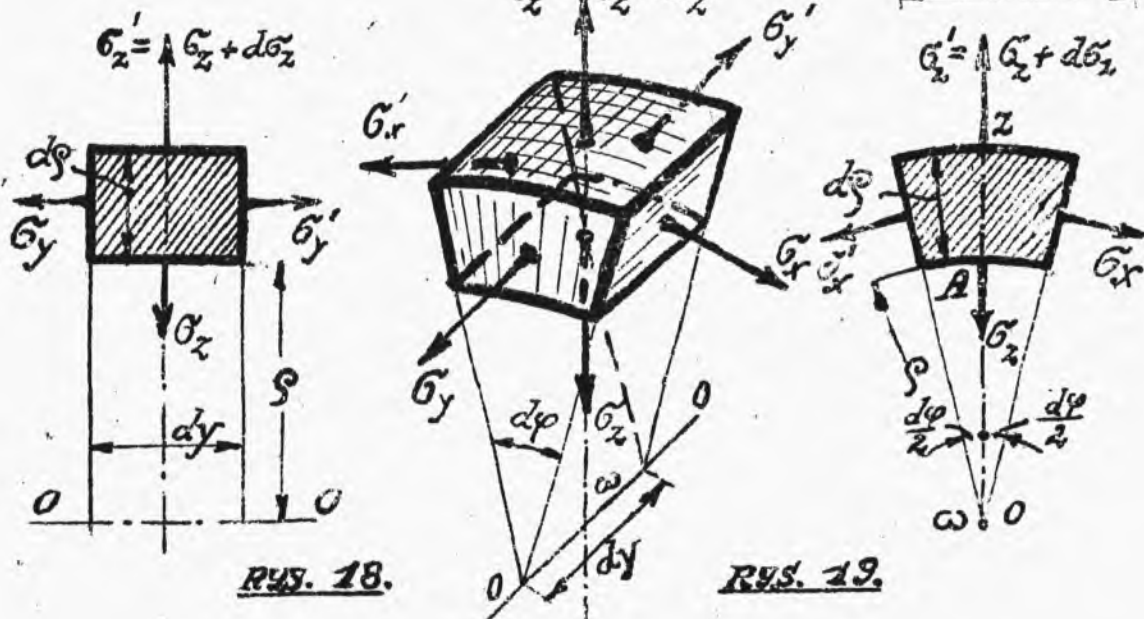
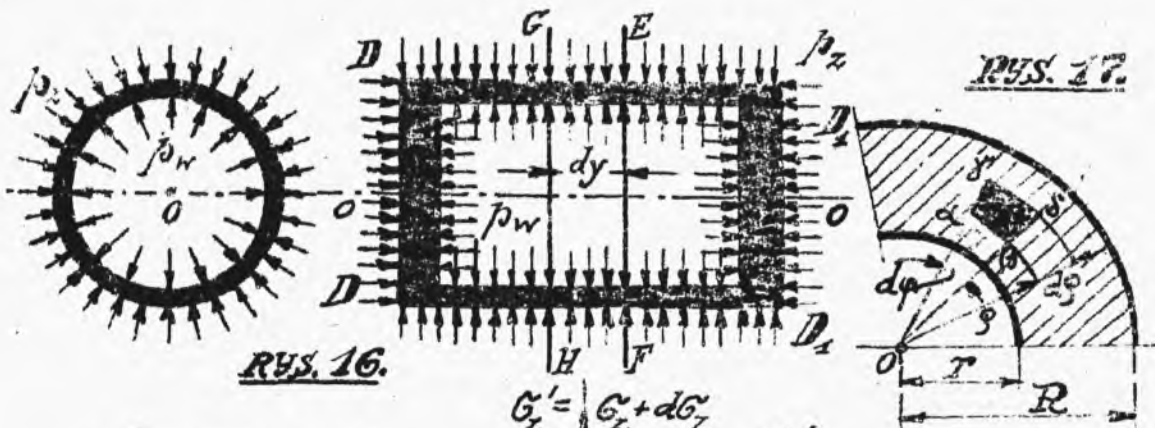
ponieważ pierwsze naprężenie zastępcze jest oczywiście
ujemne, a drugie dodatnie. Stąd znów:

$$R = \frac{r}{\sqrt[3]{1 - \frac{3}{2} \cdot \frac{m-1}{m} \cdot \frac{p_z}{k_n}}}, \quad \text{oraz} \quad R = \frac{r}{\sqrt[3]{1 - \frac{3}{m} \cdot \frac{p_z}{k_n}}}$$

I tu również oba warunki muszą być wypełnione. Ponieważ
dla tworzyw, z których zwykle robią naczynia kuliste

$k_n \gg k_r$, przeto miarodajnym jest pierwszy warunek, jako dający większą wartość stosunku $\frac{R}{r}$. Możemy przeto i w danym wypadku pominąć drugi warunek. Nadto być musi $1 > \frac{3}{2} \cdot \frac{m-1}{m} \cdot \frac{\beta_x}{k_n}$ i tu zatem widzimy, iż wytrzymałość naczyń kulistych na ciśnienie zewnętrzne jest ograniczona; musi być bowiem $\beta_x < \frac{2m \cdot k_n}{3(m-1)}$. \curvearrowright

2. NACZYŃIA CYLINDRYCZNE /rys.16/. Zewnętrzny promień naczynia oznaczamy przez R , wewnętrzny przez r . Obustronnie zamykamy je dnami D i D_1 , dość daleko od siebie, aby środkową część rury uniezależnić od zjawisk wtórnych, ponieważ najwidoczniej w pobliżu dna ścianki rury rozszerzać się swobodnie nie mogą. Dno stanowi przeto usztywnienie naczynia cylindrycznego. Jak i poprzednio wykrawamy myślowo z wnętrza ścianki naczynia kostkę elementarną /rys.17/, prowadząc dwie płaszczyzny poprzeczne prostopadłe do osi naczynia OO podłużnej znikomo odległe o dy , dwie płaszczyzny osiowo nachylone pod kątem $d\varphi$, oraz dwie powierzchnie cylindryczne o promieniach ϱ i $\varrho + d\varrho$. W ten sposób strzymana kostka $\alpha\beta\delta\gamma$ posiada cztery boczne ściany płaskie oraz dwie cylindryczne - wklęsłą i wypukłą. Dwie ściany boczne są równoległe, dwie tworzą kąt $d\varphi$, zawarty między swymi płaszczyznami. Wobec zupełnej symetryczności obciążenia względem osi podłużnej naczynia OO nie mogą w jej ściankach oddalonych od obu denek powstawać skrzy-



wienia świadczące o istnieniu naprężeń tnących, należy przeto ściankom naszej kostki przypisywać wyłącznie naprężenia normalne, a mianowicie równoległym ściankom bocznym σ_y i σ_y' , pochylonym ściankom bocznym σ_x i σ_x' a cylindrycznym σ_z i σ_z' /rys.18 i 19/. Wspomniana powyżej symetryczność obciążenia względem osi podłużnej naczyni zmusza nas do uznania zupełnej symetrii naprężeń σ_x i σ_x' , należy zatem założyć $\sigma_x = \sigma_x'$. Nadto symetria ob

den upoważnia do wnioskowania o symetrii naprężeń σ_y i σ_y' również należy zatem założyć $\sigma_y = \sigma_y'$. Pozostałe σ_x i σ_x' różnią się nieco, oznaczmy przeto $\sigma_x' = \sigma_x + d\sigma_x = \sigma_x + \frac{d\sigma_x}{d\varrho} d\varrho$ ponieważ niewątpliwie w danym wypadku ϱ stanowi jedyną zmienną. Pod działaniem tyłkoco nazwanych naprężeń kostka pozostaje w równowadze, należy zatem wypisać równania statyki, przechodząc od naprężeń do sił jednostkowych. Dość będzie przytem rozpatrzyć sumę rzutów na środkową oś ωz przecięcia się płaszczyzn symetrii kostki, w innych bowiem kierunkach naprężenia znoszą się wzajemnie. Zatem na boczne ścianki równoległe do tej osi działają siły jednostkowe $\sigma_y \varrho d\varphi d\varrho$, znoszące się wzajemnie, a prostopadłe do ωz , możemy je przeto chwilowo pominąć. Na boczne ścianki pochylone ku sobie pod kątem $d\varphi$ działają siły jednostkowe $\sigma_x d\varrho d\varphi$, dające w rzucie na oś ωz składowe $\sigma_x d\varrho d\varphi \sin \frac{d\varphi}{2} = \frac{1}{2} \sigma_x d\varrho d\varphi d\varphi$; wypadkowa tych składowych będzie więc $\sigma_x d\varrho d\varphi d\varphi$, skierowana ku osi OO naczynia. Tę siłę równoważyć musi różnica sił jednostkowych obu pozostałych ścianek kostki - na wklęsłą działa siła $\sigma_z \varrho d\varphi dy$ - na wypukłą $\sigma_z \varrho d\varphi dy + d[\sigma_z \varrho d\varphi dy]$. Równowaga zatem wymaga, aby $\sigma_z \varrho d\varphi dy + d[\sigma_z \varrho d\varphi dy] - \sigma_z \varrho d\varphi dy = \sigma_x d\varrho d\varphi d\varphi$. Stąd bezpośrednio $d[\sigma_z \varrho d\varphi dy] = d[\sigma_z \varrho] d\varphi dy = \sigma_x d\varrho d\varphi dy$. Po skróceniu przez $d\varphi dy$ i podzieleniu przez $d\varrho$ mamy $\sigma_x = \frac{d}{d\varrho} [\sigma_z \varrho]$. Tyle tu daje sta-

tyka. Nadto powtarzające słowo w słowo rozumowania przytoczone w ustępie poprzedzającym dojdziemy do przekonania, że tutaj również $\epsilon_x = \frac{du}{d\rho}$ oraz $\epsilon_x = \frac{u}{\rho}$, gdzie u oznacza przesunięcie się punktu A - końca promienia ρ w kierunku tego promienia; trzecie wydłużenie jednostkowe

tymczasowo pozostawiamy bez uwagi. A zatem mamy: $\epsilon_x = \alpha \left[\sigma_x - \frac{\sigma_y}{m} - \frac{\sigma_z}{m} \right] = \frac{u}{\rho}$; $\epsilon_y = \alpha \left[\sigma_y - \frac{\sigma_z}{m} - \frac{\sigma_x}{m} \right]$; $\epsilon_z = \alpha \left[\sigma_z - \frac{\sigma_x}{m} - \frac{\sigma_y}{m} \right] = \frac{du}{d\rho}$;

Z równań dla ϵ_x i ϵ_z z łatwością wyznaczymy $\sigma_x = \frac{E m}{m^2 - 1} (m \epsilon_x + \epsilon_z) + \frac{\sigma_y}{m - 1}$; $\sigma_z = \frac{E m}{m^2 - 1} (\epsilon_x + m \epsilon_z) + \frac{\sigma_y}{m - 1}$.

Ponieważ warunek równowagi kostki $\sigma_x = \frac{d}{d\rho} [\sigma_z \rho]$ naprężeń σ_y nie zawiera, przeto mamy zupełne prawo przypuścić, iż nie zależy ono od ρ - inaczej mówiąc mamy prawo rozpatrywać przekroje poprzeczne naczyń, jak jednostajnie naprężone. W samej rzeczy weźmy pod uwagę jakikolwiek przekrój poprzeczny $E F$, wskazany na rys. 16.

Panują w nim naprężenia σ_y niezależne od ρ , a zatem jednostajnie rozłożone po całym przekroju $\pi R^2 - \pi r^2$. Wypadkowa tych naprężeń $\sigma_y (\pi R^2 - \pi r^2)$ musi oczywiście równoważyć wypadkową przężności działających na lewe dno, a ta jest równa $\pi R^2 p_z - \pi r^2 p_w$, stąd mamy $-\sigma_y (\pi R^2 - \pi r^2) = \pi R^2 p_z - \pi r^2 p_w$, co daje $\sigma_y = -[R^2 p_z - r^2 p_w] : [R^2 - r^2]$. Znak minus jest tu konieczny, bo gdy wypadkowa przężności zewnętrznych $\pi R^2 p_z$ jest większa od wypadkowej przężności wewnętrznych $\pi r^2 p_w$ - rura jest oczywiście ściskana

wzdłuż swej osi OO , zatem musi być $\sigma_y < 0$ mimo to, ze $\pi R^2 p_z - \pi r^2 p_w > 0$ oraz $\pi(R^2 - \pi r^2) > 0$ Ostatecznie więc:

$$\sigma_x = \frac{E m}{m^2 - 1} \left[m \frac{u}{\rho} + \frac{du}{d\rho} \right] - \frac{R^2 p_z - r^2 p_w}{(m-1)(R^2 - r^2)}$$

$$\sigma_z = \frac{E m}{m^2 - 1} \left[\frac{u}{\rho} + m \frac{du}{d\rho} \right] - \frac{R^2 p_z - r^2 p_w}{(m-1)(R^2 - r^2)} \quad \curvearrowright$$

i po podstawieniu w równanie wyżej otrzymane:

$$\begin{aligned} & \frac{E m}{m^2 - 1} \left[m \frac{u}{\rho} + \frac{du}{d\rho} \right] - \frac{R^2 p_z - r^2 p_w}{(m-1)(R^2 - r^2)} = \\ & = \frac{d}{d\rho} \left[\frac{E m}{m^2 - 1} \left(u + m \rho \frac{du}{d\rho} \right) - \frac{\rho}{m-1} \cdot \frac{(R^2 p_z - r^2 p_w)}{R^2 - r^2} \right] = \\ & = \frac{E m}{m^2 - 1} \cdot \frac{du}{d\rho} + \frac{E m^2}{m^2 - 1} \frac{du}{d\rho} + \frac{E m^2}{m^2 - 1} \rho \frac{d^2 u}{d\rho^2} - \frac{R^2 p_z - r^2 p_w}{(m-1)(R^2 - r^2)}; \end{aligned}$$

skąd po skróceniu przez $\frac{E m^2}{m^2 - 1}$ otrzymamy $\rho \frac{d^2 u}{d\rho^2} + \frac{du}{d\rho} - \frac{u}{\rho} = 0$. Całka tego równania jest $u = A\rho + \frac{B}{\rho}$ stąd

$$\begin{aligned} \epsilon_x = \frac{u}{\rho} = A + \frac{B}{\rho^2}, \quad \epsilon_z = \frac{du}{d\rho} = A - \frac{B}{\rho^2} \text{ a zatem: } \sigma_z = \frac{E m}{m^2 - 1} \left(A + \frac{B}{\rho^2} + mA - \frac{mB}{\rho^2} \right) + \frac{\sigma_y}{m-1} = \frac{E m}{m^2 - 1} \left[(m+1)A + (1-m)\frac{B}{\rho^2} \right] + \frac{\sigma_y}{m-1} = \\ = \frac{E m}{m-1} A - \frac{E m}{m+1} \frac{B}{\rho^2} + \frac{\sigma_y}{m-1} \quad \curvearrowright \end{aligned}$$

Na obu powierzchniach ścianki naczynia naprężenie σ_z winno równoważyć odnośne ciśnienie. Muszą zatem zachodzić następujące warunki równowagi:

$$p_z + [\sigma_z]_{\rho=R} = p_z + \frac{E m A}{m-1} - \frac{E m}{m+1} \frac{B}{R^2} + \frac{\sigma_y}{m-1} = 0;$$

$$p_w + [\sigma_z]_{\rho=r} = p_w + \frac{E m A}{m-1} - \frac{E m}{m-1} \frac{B}{r^2} + \frac{\sigma_y}{m-1} = 0. \quad \curvearrowright$$

Stąd mamy: $A = -\frac{m-2}{E m} \cdot \frac{R^2 p_z - r^2 p_w}{E(R^2 - r^2)}$; $B = -\frac{m-1}{E m} \cdot \frac{p_z - p_w R^2 r^2}{R^2 r^2}$

i ostatecznie: $\sigma_x = -\frac{R^2 p_z - r^2 p_w}{R^2 - r^2} - \frac{p_z - p_w}{R^2 r^2} \cdot \frac{R^2 r^2}{\rho^2}$ \curvearrowright

$$\sigma_y = -\frac{R^2 p_z - r^2 p_w}{R^2 - r^2}; \quad \sigma_z = -\frac{R^2 p_z - r^2 p_w}{R^2 - r^2} + \frac{p_z - p_w}{R^2 r^2} \cdot \frac{R^2 r^2}{\rho^2} \quad \curvearrowright$$

Zatem wzory dla wydłużeń jednostkowych otrzymują następującą postać ostateczną:

$$\sigma_{\epsilon} = -\frac{m-2}{m} \cdot \frac{R^2 \rho_z - r^2 \rho_w}{R^2 - r^2} - \frac{m+1}{m} \cdot \frac{\rho_z - \rho_w}{R^2 - r^2} \cdot \frac{R^2 r^2}{\rho_z};$$

$$\sigma_{\epsilon_y} = -\frac{m-2}{m} \cdot \frac{R^2 \rho_z - r^2 \rho_w}{R^2 - r^2};$$

$$\sigma_{\epsilon_z} = -\frac{m-2}{m} \cdot \frac{R^2 \rho_z - r^2 \rho_w}{R^2 - r^2} + \frac{m+1}{m} \cdot \frac{\rho_z - \rho_w}{R^2 - r^2} \cdot \frac{R^2 r^2}{\rho_z} \quad \curvearrowright$$

I tu znów w wypadku CIŚNIENIA WEWNĘTRZNEGO należy uczy-
nić $\rho_z = 0$ a otrzymamy $\sigma_{\epsilon_{MAX}} = +\frac{m-2}{m} \cdot \frac{r^2 \rho_w}{R^2 - r^2} +$

$$+ \frac{m+1}{m} \cdot \frac{R^2 \rho_w}{R^2 - r^2}; \quad \sigma_{\epsilon_{yMAX}} = \frac{m-2}{m} \cdot \frac{r^2 \rho_w}{R^2 - r^2}; \quad \sigma_{\epsilon_{zMAX}} =$$

$$= \frac{m-2}{m} \cdot \frac{r^2 \rho_w}{R^2 - r^2} - \frac{m+1}{m} \cdot \frac{R^2 \rho_w}{R^2 - r^2} \quad \curvearrowright$$

Ponieważ oczywiście w danym wypadku $\sigma_{\epsilon_{MAX}} > \sigma_{\epsilon_{yMAX}} > 0$ zatem
wystarczy założyć $\sigma_{\epsilon_{MAX}} = k_r$, nadto również $\sigma_{\epsilon_{zMAX}} > 0$

a przeto skrajne naprężenia zastępcze będą tu:

$$\sigma_{\epsilon_{MAX}} = \frac{m-2}{m} \cdot \frac{r^2 \rho_w}{R^2 - r^2} + \frac{m+1}{m} \cdot \frac{R^2 \rho_w}{R^2 - r^2} = k_r; \quad \curvearrowright$$

$$-\sigma_{\epsilon_{zMAX}} = -\frac{m-2}{m} \cdot \frac{r^2 \rho_w}{R^2 - r^2} + \frac{m+1}{m} \cdot \frac{R^2 \rho_w}{R^2 - r^2} = k_n \quad \curvearrowright$$

Stąd mamy warunki konieczne:

$$R = r \sqrt{\frac{k_r + \frac{m-2}{m} \rho_w}{k_r - \frac{m+1}{m} \rho_w}} \quad \text{oraz} \quad R = r \sqrt{\frac{k_n - \frac{m-2}{m} \rho_w}{k_n - \frac{m+1}{m} \rho_w}} \quad \curvearrowright$$

Pierwszy warunek daje większą wartość stosunku $\frac{R}{r}$ za-
tem możemy drugi pominąć zupełnie. Nadto być musi

$k_r - \frac{m+1}{m} \rho_w > 0$, skąd otrzymujemy warunek $\rho_w < \frac{m k_r}{m+1}$
wskazujący że wytrzymałość naczyń cylindrycznych ma swoje
granice.

W wypadku CIŚNIENIA ZEWNĘTRZNEGO, kiedy $\rho_w = 0$ będącemy
mieli znów:

$$\int_0^1 \epsilon_{x \max} = - \frac{m-2}{m} \cdot \frac{R^2 \rho_z}{R^2 - r^2} - \frac{m+1}{m} \cdot \frac{R^2 \rho_z}{R^2 - r^2} \quad \curvearrowright$$

$$\int_0^1 \epsilon_{y \max} = - \frac{m-2}{m} \cdot \frac{R^2 \rho_z}{R^2 - r^2} \quad \curvearrowright$$

$$\int_0^1 \epsilon_{z \max} = - \frac{m-2}{m} \cdot \frac{R^2 \rho_z}{R^2 - r^2} + \frac{m+1}{m} \cdot \frac{R^2 \rho_z}{R^2 - r^2} \quad \curvearrowright$$

Ponieważ oczywiście: $-\int_0^1 \epsilon_{x \max} > -\int_0^1 \epsilon_{y \max} > 0$ oraz $\int_0^1 \epsilon_{z \max} > 0$
zatem w danym wypadku należy założyć:

$$-\int_0^1 \epsilon_{x \max} = \frac{m-2}{m} \cdot \frac{R^2 \rho_z}{R^2 - r^2} + \frac{m+1}{m} \cdot \frac{R^2 \rho_z}{R^2 - r^2} = k_n \quad \curvearrowright$$

$$\int_0^1 \epsilon_{z \max} = - \frac{m-2}{m} \cdot \frac{R^2 \rho_z}{R^2 - r^2} + \frac{m+1}{m} \cdot \frac{R^2 \rho_z}{R^2 - r^2} = k_r \quad \curvearrowright$$

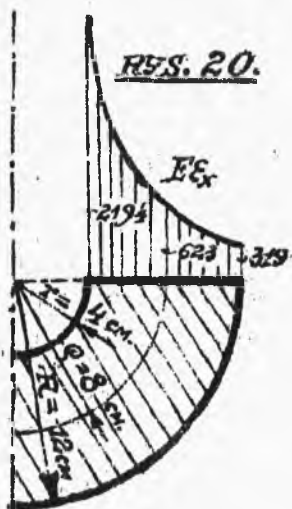
Stąd mamy znowu nowe dwa warunki konieczne:

$$R = \frac{r}{\sqrt{1 - \frac{2m-1}{m} \frac{\rho_z}{k_n}}} \quad \text{oraz} \quad R = \frac{r}{\sqrt{1 - \frac{3}{m} \frac{\rho_z}{k_r}}} \quad \curvearrowright$$

Ponieważ dla tworzyw, z których budujemy rury $k_n > k_r$ przeto miarodajny jest pierwszy warunek, jako dający większy stosunek $\frac{R}{r}$. Możemy przeto i w danym wypadku pominąć zgoła warunek drugi. Nadto być musi $1 - \frac{2m-1}{m} \frac{\rho_z}{k_n} > 0$, co daje nowy warunek $\rho_z < \frac{m k_n}{2m-1}$, wskazujący, że wytrzymałość naczyń cylindrycznych na ciśnienie zewnętrzne również ma swoje granice. Podobne warunki mieliśmy również i dla naczyń kulistych. Pora wyjaśnić ich rolę. W tym celu bierzemy przykład typowy rury o średnicy wewnętrznej 8 cm. i zewnętrznej 24 cm. Prężność wewnętrzna wynosi 1500 kg/cm². Po podstawieniu wartości $r=4\text{cm}$, $R=12\text{cm}$ oraz $\rho_w=1500\text{kg/cm}^2$ w odnośne wzory otrzymamy: $[\epsilon_{\epsilon_x}]_{s=4\text{cm}} = 2194 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$; $[\epsilon_{\epsilon_x}]_{s=8} = 623 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$ wreszcie $[\epsilon_{\epsilon_z}]_{s=12\text{cm}} = 319 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$. Odnośny wykres wartości podaje rys. 20.

Wnioskujemy żeń o nader nierównomiernym rozkładzie naprę-

zeń zastępczych. Zewnętrzne cząsteczki materiału są nader



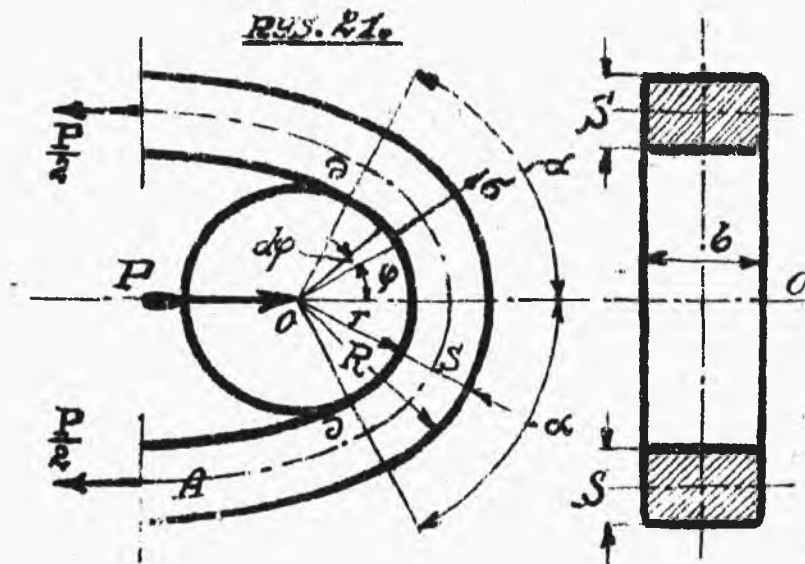
słabo naprężone, podczas gdy wewnętrzne wytrzymują naprężenia prawie sześćkroć razy większe. Tworzywo jest źle wyzyskane, pracuje nieodpowiednio. Stąd jasnym się staje, dlaczego dalsze zgrubianie ścianki nie prowadzi do celu: im ścianka grubsza, tem różnica pomiędzy naprężeniami zastępczymi wewnętrznymi i zewnętrznymi staje się wybitniejsza, tem tworzywo gorzej pracuje. To też zazwyczaj rury armatnie, narażone na wysokie ciśnienia wewnętrzne budują z kilku tulei nasadzonych jedna na drugą pod ciśnieniem dość znacznym. Promień wewnętrzny tulei zewnętrznej ro-
bia przytem nieco mniejszym od promienia zewnętrznego tulei następnej wewnętrznej - przy nasadzaniu zewnętrzna wywiera znaczny nacisk na wewnętrzną, tworząc w ten sposób przeciwciśnienie w kierunku dośrodkowym. Istnienie tych ciśnień pierwotnych umożliwia lepszy rozkład naprężeń w chwili strzału. Powstająca nagle prędkość wybuchu udziela się przedewszystkiem tulei wewnętrznej, uciskanej przez zewnętrzne dalsze tuleje. Ten jej nacisk zewnętrzny przeciwstawia się wewnętrznej prędkości wybuchu, obniżając

PODSTAWY TEORJI SPRĘŻYSTOSCI. Arkusz 5-ty.

naprężenia ścianki wewnętrznej. Korzystając ze wzorów powyżej podanych łatwo można wyliczyć różnicę średnic, jaką otrzymać należy przy toczeniu tulei w celu prawidłowego działania całości. ~

B. OGNIWA.

§3. Trzpień O ochwytuje wzdłuż łuku dotyku $R\alpha$ ogniwo A . Połowę ogniwa z przekrojem trzpienia widzimy na rys. 21. Nacisk wywierany na ogniwo niech będzie P . Na tle działania tej siły w powierzchni dotyku $\alpha\alpha$ rozwija się ciśnienie σ odśrodkowe i jak się okazuje z



prób - jedn-
stajnie rez-
łożone wzdł-
całej po-
wierzchni d-
tyku. Chcąc
wyznaczyć
wartość σ
rozpatrujem
siłę jednos-

kową $\sigma b dp$, przynależną do elementarnej powierzchni dotyku $b \alpha dp$ ogniwa. Rzut jej na oś działania siły P będzie $\sigma r b \cos \alpha dp$, a wypadkowa wszystkich tych sił rów-

na oczywiście sile P będzie:

$$\int_{-\alpha}^{+\alpha} G r b \cos \varphi d\varphi = r b G \int_{-\alpha}^{+\alpha} \cos \varphi d\varphi = 2 r b G \sin \alpha = P. \infty$$

Stąd

$$G = \frac{P}{2 r b \sin \alpha};$$

W ten sposób wzdłuż powierzchni dotyku $\partial \partial$ ogniwo można upodobnić do naczynia cylindrycznego grubościennego, dla którego $p_H = G = \frac{P}{2 r b \sin \alpha}$, oraz $p_Z = 0$. Ponieważ na boczne ścianki ogniwa nie działa żadne obciążenie, przeto:

$G_y = 0, G_{z_{max}} = -G$ wreszcie:

$$G_x = \frac{r^2 p_H}{R^2 - r^2} + \frac{p_H}{R^2 - r^2} \cdot \frac{R^2 r^2}{\varrho^2} \text{ stąd } G_{x_{max}} = [G_x]_{\varrho=r} =$$

$$= \frac{R^2 r^2}{R^2 - r^2} p_H = \frac{R^2 r^2}{R^2 - r^2} \cdot \frac{P}{2 r b \sin \alpha} = k_r. \infty$$

Według tego wzoru należy obliczać ogniwa. Jest on ściśle jedynie dla ogniw o przekroju prostokątnym. Dla ogniw łanouchowych spawanych z drutu okrągłego możemy również korzystać z tego wzoru, rozpatrując przekrój fikcyjny kwadratowy ogniwa. Wysokość tego przekroju bierzemy równą średnicy przekroju ogniwa, a szerokość b dobieramy tak, aby pola obu przekrojów były jednakowe. Musi być zatem $\frac{\pi d^2}{4} = b d$ stąd $b = \frac{\pi d}{4}$. Podstawiając we wzór wyżej wyprowadzony, zważywszy, że dla łanoucha $r = \frac{d}{2}$; $\alpha = \frac{d}{2} + d = 1,5d$ otrzymamy:

$$G = p_H = \frac{P}{2r\beta \sin\alpha} = \frac{P}{2 \frac{d}{2} \frac{\pi d}{4} \sin\alpha} = \frac{P}{\frac{\pi d^2}{4} \sin\alpha} \dots$$

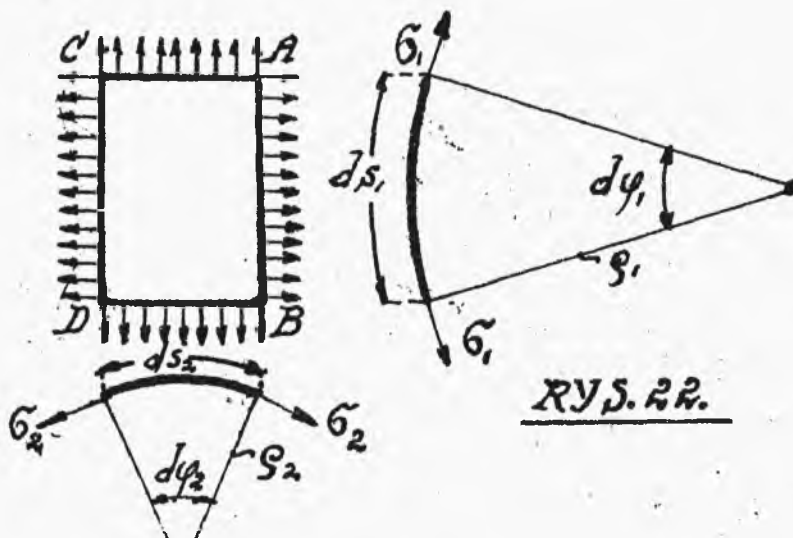
Stąd

$$\frac{R^2 + r^2}{R^2 - r^2} \cdot \frac{P}{\frac{\pi d^2}{4} \sin\alpha} = \frac{1.5^2 + 0.5^2}{1.5^2 - 0.5^2} \cdot \frac{P}{\frac{\pi d^2}{4} \sin\alpha} = \frac{5}{4} \cdot \frac{P}{\frac{\pi d^2}{4} \sin\alpha} = k_p \dots$$

Wyniki otrzymane z tego wzoru są zgodne z doświadczeniem.

C. ZBIORNIKI.

§4. WZOR ZASADNICZY. Wzory podane dla naczyń grubościennych są zbyt złożone i trudne w użyciu, zwłaszcza gdy chodzi o zbiornik lub kocioł cienkościenny, wypełniony gazem lub cieczą o nadciśnieniu $p \text{ kg/cm}^2$. Oznaczmy przez s grubość ścianki zbiornika. W dowolnym punkcie



ścianki zbiornika określamy główne promienie krzywizny ρ_1 ,

i ρ_2 powłoki i wyodrębniamy myślowo element $ABCD$ /rys.22/ powłoki o wymiarach $ds_1 \times ds_2$, przy czym $ds_1 = \rho_1 d\varphi_1$; $ds_2 = \rho_2 d\varphi_2$. Wobec nieznaczonej grubości ścianki zbiornika, naprężenia σ_1 i σ_2 , zastępujące działanie sąsiednich drobin powłoki zbiornika, możemy uważać jako stałe wzdłuż równoległych ścianek wykroju.

W wypadkach działania nadciśnienia p wewnętrznego σ_1 i σ_2 są oczywiście dodatnie, to nadciśnienie bowiem stara się wyrwać element $ds_1 \times ds_2$ z powłoki zbiornika, działając nań z siłą $p \cdot ds_1 \cdot ds_2$, wywołującą sprzeciw sprężysty w postaci owych naprężeń rozciągających

σ_1 i σ_2 . Godzi się tu zaznaczyć, że σ_1 panuje wzdłuż przekrojów prostopadłych do płaszczyzny krzywizny ρ_1 , podczas gdy σ_2 działa w przekrojach prostopadłych do poprzednich, a zatem i do płaszczyzny krzywizny promienia ρ_2 . Wypadkowe naprężenie będą więc

$\sigma_1 s ds_2$ oraz $\sigma_2 s ds_1$, a ich składowe w kierunku działania wypadkowej $p ds_1 ds_2$ będą odpowiednio:

$$2\sigma_1 s ds_2 \sin(\frac{1}{2} d\varphi_1) = \sigma_1 s ds_2 d\varphi_1 \quad \text{oraz}$$

$$2\sigma_2 s ds_1 \sin(\frac{1}{2} d\varphi_2) = \sigma_2 s ds_1 d\varphi_2 \quad \sim \sim$$

zatem warunek równowagi odkształconej:

$$p ds_1 ds_2 = \sigma_1 s ds_2 d\varphi_1 + \sigma_2 s ds_1 d\varphi_2$$

Dzieląc wzór tylko co otrzymany przez $s ds_1 ds_2$ otrzymamy po uwzględnieniu wartości dla ρ_1 i ρ_2 wzór ostatecz-

ny:
$$\frac{p}{s} = \frac{G_1}{S_1} + \frac{G_2}{S_2} . \quad \sim \quad \sim$$

Ten wzór ogólny ma rozliczne zastosowanie.

§ 5. ZBIERNIKI DO GAZU. Weźmy przedewszystkiem zbiornik kulisty o promieniu wewnętrznym r , wypełniony gazem. W danym wypadku, wobec nieznaczonej wartości s , możemy rozpatrywać r jako promień średni powłoki, zatem dla kuli $S_1 = S_2 = r$. Wobec zupełnej symetrii warunków obciążenia $G_1 = G_2 = G$ i ostatecznie otrzymamy ze wzoru ogólnego $\frac{p}{s} = \frac{2G}{r}$, skąd właściwa grubość ścianki kuli

$$s = \frac{p \cdot r}{2G};$$

Ponieważ oczywiście G jest naprężeniem rozciągającym, przeto czyniąc w tym $G = k_r$, otrzymamy wzór

$s = \frac{1}{2} \frac{r \cdot p_m}{k_r}$, wyznaczający bezpieczną grubość ścianki. Nadto ze względu na możliwość osłabienia wytrzymałości ścianki przez nity wprowadzamy zazwyczaj współczynnik poprawczy, pisząc: $s = \frac{1}{2} \frac{r \cdot p_m}{\varphi \cdot k_r}$, gdzie φ jest mniejsze od jedności.

Rozumowanie powyższe nie traci oczywiście swej mocy, gdy na kulę działa prężność zewnętrzna p_z . Zupełnie w ten sam sposób otrzymamy wzór $s = \frac{1}{2} \frac{R \cdot p_z}{k_n}$, tutaj bowiem ciśnienie działa na zewnętrzną powierzchnię kulistą naczyń o promieniu R , powodując naprężenie ściskające

6 w przekroju płaskim środkowym. I tu również wprowadzić należy współczynnik φ , uwzględniający osłabienie blachy przez nity. Mimo to wzór tylko co otrzymany nie jest pewny, nigdy bowiem NIE MOŻEMY ZGÓRY PRZEWIDZIEĆ, CZY KSZTAŁT KULISTY NACZYŃIA JEST DOSKONAŁY. Każde choćby najdrobniejsze zakłębienie, pochodzące z niestarannego wyrobu, zwiększa się pod ciśnieniem zewnętrznym i powoduje spłaszczenie się kuli, a w tym wypadku wzór powyższy przestaje oczywiście być prawdziwym. Zupełnie inaczej zachowuje się naczynie kuliste pod ciśnieniem wewnętrznym, sprzyjającym samemu swemu działaniu zachowaniu kształtu ściśle kulistego, to też wzór poprzedni jest pewny zupełnie. Z tego względu w wypadku prężności zewnętrznej lepiej nadawać niskie wartości współczynnikowi ϵ_n w tylko co otrzymanym wzorze. ω

Z kolei rozpatrujemy zbiornik cylindryczny o średnim promieniu powłoki r i grubości nieznaczej s . W danym wypadku $R_1 = r$; $R_2 = \infty$, zatem wprost z ogólnego wzoru otrzymamy $\frac{\sigma_1}{r} = \frac{p}{s}$ i ostatecznie $s = \frac{p \cdot r}{\sigma_1}$. Chcąc wyznaczyć naprężenie σ_2 prowadzimy myślowo przekrój poprzeczny, prostopadły do osi podłużnej cylindra. Wewnętrzne naciśnienie p daje dwie wypadkowe $p \cdot \pi r^2$, przyłożone do środków obu den zbiornika. Siły te starają się rozzerwać zbiornik wzdłuż tylko co poprowadzonego przekro-

ju, wywołując w nim sprzeciw sprężysty w postaci naprężeń rozciągających σ_r . Ich wypadkowe σ_r $2\mu r s$ muszą niewątpliwie równoważyć siły ρr^2 , a przeto $s = \frac{\rho r}{2\sigma_r}$. W danym wypadku oba naprężenia σ_r i σ_z są rozciągające. Skrajna ich wartość musi być równa k_r , zatem ostatni wzór da nam grubość ścianki dwa razy mniejszą, należy przeto wyznaczyć s ze wzoru $s = \frac{\rho r}{k_r}$.

Ten sam wzór najwidoczniej stosuje się również i w wypadku prężności zewnętrznej. Wtedy jednak mamy do czynienia z naprężeniem σ_r ściskającym i wzór wypisany być winien w postaci $s = \frac{R \rho_z}{k_r}$. Wszelakoż w tym wypadku BACH radzi w obawie spłaszczenia rury pod jarzmem prężności zewnętrznej - stosować wzór czysto doświadczalny:

$$s = \frac{R \rho_z}{2 k_r} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{A}{\rho_z} \cdot \frac{L}{L + 2R}} \right]$$

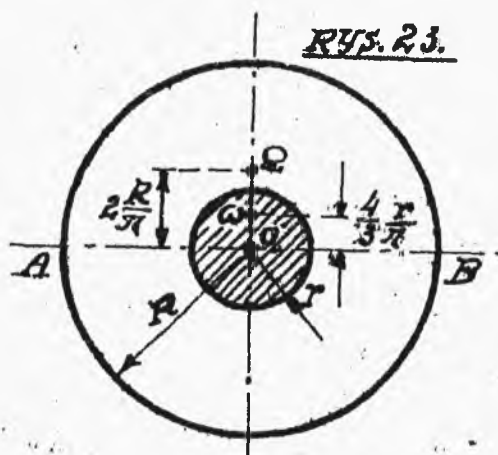
gdzie L oznacza długość swobodną naczynia pomiędzy dnami, lub pomiędzy wzmocnieniami poprzecznymi, a współczynnik A wyznacza się doświadczalnie.

D. PŁYTY.

26. USTALENIE POJĘĆ ZASADNICZYCH. Dział płyt najmniej wyczerpująco został opracowany w wytrzymałości tworzyw ze względu na olbrzymie trudności całkowania, a wzory po dziś dzień znane, niezbyt ściśle odpowiadają

danym doświadczalnym. Podajemy wobec tego teorię przybliżoną płyt C. v. BACHA, jako stosunkowo najprostszą, a bodaj czy nie najlepiej odpowiadającą wynikiem doświadczalnym.

§ 7. PŁYTA OKRĄGLEA /rys.23/. Rozpatrujemy płytę okrągłą o promieniu R , podpartą na całym obwodzie, a obciążoną jednostajnie w stosunku q klg. na centymetr kwadratowy pola koła współśrodkowe zatoczonego ze środka płyty promieniem $r \leq R$. Przetnijmy płytę średnicowo wzdłuż AB na dwie półkolistę części. Obciążenia jednej z nich stanowić będzie siła $\frac{1}{2} q \pi r^2$ zogniskowana w środku ciężkości ω połowy kręgu o promieniu r , a więc w punkcie leżącym na średnicy prostopadłej do AB w od-



ległości $O\omega = \frac{4r}{3\pi}$. Nadto płytę podpartą na całym obwodzie ulega działaniu sił odporowych, jednostajnie po całym obwodzie rozsianych. Że tak jest istotnie, nie wiemy - tylko przy-

puszczamy w braku innych danych dokładniejszych. Zatem na półkole AB przypada połowa wszystkich sił odporowych o wypadkowej $\frac{1}{2} q \pi r^2$, zogniskowanej w środku ciężkości półkola, a więc w punkcie ω , leżącym na średnicy

prostopadłej do AB w odległości $OS = \frac{2R}{\pi}$. Te dwie wypadkowe dają zatem w stosunku do AB momenty różno-
skrotne: odporowy $\frac{1}{2} \pi r^2 \frac{2R}{\pi}$ i odkształcający $\frac{1}{2} \pi r^2 \frac{4}{3} \frac{r}{\pi}$. Ich wypadkowy moment $M = \pi r^2 \frac{R}{\pi} \left[1 - \frac{2}{3} \frac{r}{R} \right]$
stanowi niewątpliwie obciążenie gnące płyty w stosunku
do przekroju AB . Ten przekrój stanowi oczywiście
prostokąt o powierzchni $2R \times h$, gdzie przez h ozna-
czyliśmy grubość płyty. Moment wytrzymałościowy tego
przekroju będzie: $\frac{1}{6} 2R h^3 = \frac{1}{3} R h^3$, możemy przeto na-
pisać: $\frac{1}{3} R h^3 k_y = \mu \pi r^2 \left[1 - \frac{2}{3} \frac{r}{R} \right] \frac{R}{\pi}$, przyczem wobec
zbytnej dorywczości całej tej teorii wprowadziliśmy we
wzór tylko co wypisany współczynnik μ , czysto do-
świadczalny, aby w ten sposób ściślej dostosować się
do warunków istotnie zachodzących, niewątpliwie bowiem
siły odporowe nie są rozłożone jednostajnie po obwodzie
płyty, jakieśmy to zakładali.

Zatem: $k_y = \mu \frac{3}{\pi} \left[1 - \frac{2}{3} \frac{r}{R} \right] \frac{\pi r^2}{h^3}$
przyczem jak z doświadczenia BACHA wynika: $\mu = 1,5$.

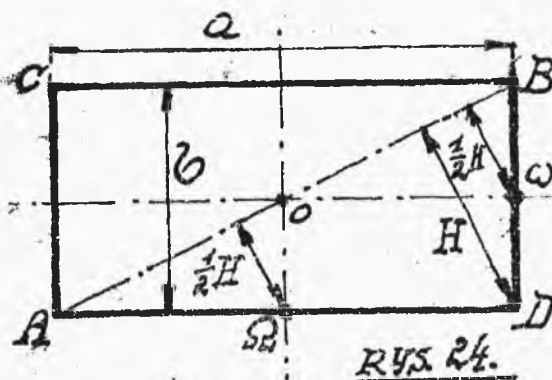
W szczególnym wypadku, gdy płyta jest obciążona jed-
nostajnie na całej swej powierzchni $r = R$, a wtedy:
 $k_y = \mu \frac{R^2}{h^3}$, gdzie $\mu = 0,8$ dla płyt wspartych,
oraz $\mu = 1,2$, dla płyt zamocowanych na obwodzie.

W obu wypadkach strzałka ugięcia płyty pośrodku,
jak to BACH ustalił za pomocą doświadczeń, może być
wyznaczona ze wzoru $f = \psi \frac{R^2}{h^3} \frac{q}{r^2}$, przyczem gdy $r < R$
wtedy $\psi = 0,1 \div 0,5$. Gdy zaś $r = R$, wtedy $f =$

= 75 =

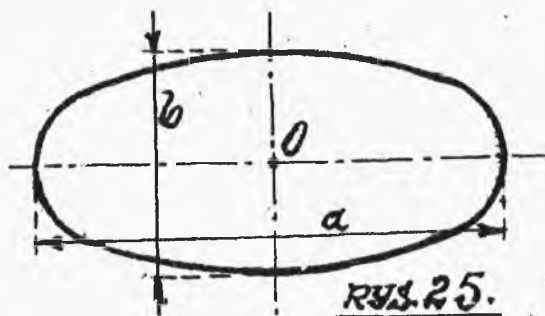
$= 45 \pi \frac{R^4}{EH^3} q = \theta \frac{R^4}{EH^3} q$ — gdzie $\theta = 0,167$ dla płyt wspartych, oraz $\theta = 0,6$ dla płyt zamocowanych na obwodzie.

§ 8. PŁYTA PROSTOKĄTNA. Doświadczenie uczy, że płyta prostokątna obciążona jednostajnie lub siłą skupioną po środku — łamie się mniej więcej wzdłuż przekątnej. Zatem należy wyznaczyć obciążenie płyty w stosunku do jej przekątnej AB , przy obciążeniu jednostajnym q kg. na jednostkę pola płyty. Całkowite obciążenie płyty a długoj i b szerokiej będzie tedy qab , a przeto obciążenie trójkąta ABD wyniesie $\frac{1}{2} qab$. Siła ta będzie oczywiście skupiona w środku ciężkości trójkąta, a więc w odległości $\frac{1}{3} H$ od przekątnej AB . Da ona przeto moment odkształcający $\frac{1}{2} qab \cdot \frac{1}{3} H$. Aby otrzymać moment odporowy zakładamy, iż płyta podparta jest na całym swym obwodzie, a siły odporowe jednostajnie



wzdłuż obwodu rozsi-
ne. W ten sposób wy-
padkowa odpór skupie-
nych wzdłuż boku AD
działać będzie po-
środku w punkcie Ω ,
a wypadkowa odpór

działających na bok AD w punkcie ω środkowym tego boku. Odległości obu tych punktów od AB są równe: $\frac{1}{2} H$



zatem odpory dadzą moment $\frac{1}{2} q a b \frac{1}{2} H =$
 $= \frac{1}{4} q a b H$ Wypadkowy moment będzie więc

$$M = \frac{1}{4} q a b H - \frac{1}{6} q a b H = \frac{1}{12} q a b H. \circ$$

Ponieważ pole płyty jest równe $a b$ oraz $H \times AB$ czyli $H \sqrt{a^2 + b^2}$, zatem $H = \frac{a b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ i ostatecznie

$$M = \frac{q}{12} \cdot \frac{a^2 b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}} \circ. \text{ Ten moment wypadkowy stara się}$$

złamać płytę w przekroju AB po przekątnej. Oznaczmy przez h grubość płyty, a wtedy moment wytrzymałości

$$\text{przekroju } AB \text{ wyrazi się w postaci: } \frac{1}{6} \times AB \times h^2 =$$

$$= \frac{1}{6} h^2 \sqrt{a^2 + b^2}. \text{ Możemy przeto napisać:}$$

$$\frac{1}{6} h^2 \sqrt{a^2 + b^2} = \mu \frac{q}{12} \cdot \frac{a^2 b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}} \circ$$

gdzie również wprowadziliśmy współczynnik poprawczy μ ze względu na pewną dowolność naszych założeń, dotyczących rozkładu sił odporowych na obwodzie płyty, które oczywiście nie są rozsiane jednostajnie wzdłuż boków.

Stąd mamy:

$$k_g = \frac{1}{2} \mu \frac{1}{1 + \frac{b^2}{a^2}} \cdot \frac{b^2}{h^2} \cdot q \circ$$

gdzie dla płyt opartych $\mu = 0,75$ oraz $\mu = 1,12$ dla płyt zamocowanych na obwodzie. \circ

Gdy obciążenie płyty stanowi siła skupiona P , dzia-


łająca po środku płyty w punkcie O , będziemy mieli, zachowując te same założenia co do sił odporowych:

$$M = \frac{1}{2} P \cdot \frac{1}{2} H \text{ a zatem jak poprzednio: } \frac{1}{6} k^2 \sqrt{a^2 + b^2} = \\ = \mu \frac{P}{4} \cdot \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ Stąd mamy: } k_g = \frac{3}{2} \mu \frac{P}{\left[\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right] k^2} \circ$$

przezem $\mu = 4,75$ dla płyt opartych i $\mu = 2,00$ - dla płyt zamocowanych na obwodzie. W szczególnym wypadku gdy $a = b$ otrzymujemy $k_g = \frac{1}{4} \mu \frac{a^2}{h^2} q$; dla płyty kwadratowej podpartej, oraz $k_g = \frac{3}{4} \mu \frac{P}{h^2}$ dla płyty kwadratowej zamocowanej na obwodzie.

§9. PŁYTA OWALNA. W wypadku jednostajnego obciążenia w stosunku q *KLa*. na jednostkę pola płyta owalna /rys. 25/ zachowuje się jak prostokątna o tych samych wymiarach zasadniczych - długości a i szerokości b , możemy zatem napisać: $k_g = \frac{1}{2} \mu \frac{1}{1 + \frac{b^2}{a^2}} \cdot \frac{b^2}{h^2} q$, przezem $\mu = 0,67$ dla płyty owalnej opartej, a $\mu = 1,12$ dla płyty owalnej, zamocowanej na obwodzie. Gdy jednak płyta jest obciążona siłą skupioną P , działającą pośrodku w punkcie O , wtedy jak głoszą doświadczenia BACHA:

$$k_g = \frac{8}{5\pi} \mu \frac{8 + 4\frac{b^2}{a^2} + 3\frac{b^4}{a^4}}{3 + 2\frac{b^2}{a^2} + 3\frac{b^4}{a^4}} \cdot \frac{b}{a} \cdot \frac{P}{h^2} \circ$$

gdzie $\mu = 1,5$ dla płyty owalnej podpartej, a $\mu = 4,67$ dla płyty zamocowanej na całym obwodzie. Na tem kończymy teorię płyt. 

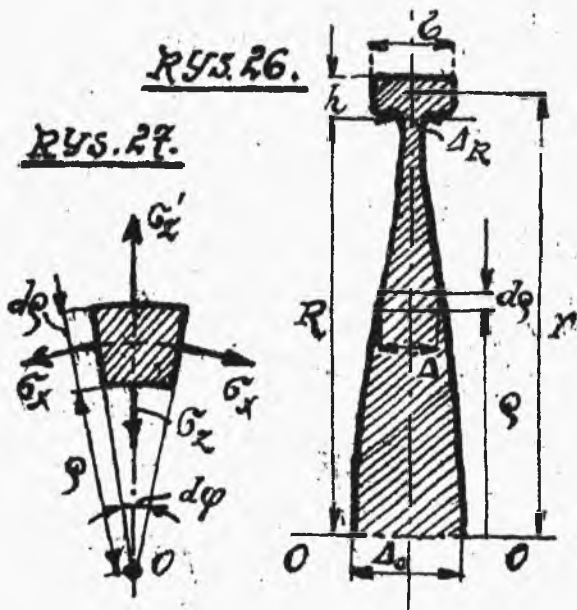
C Z Ę Ś Ć III.

WIRNIKI.

§ 1. NAPRĘŻENIA WIRNIKÓW, czyli TARGZ SZYBKOWIRUJĄCYCH.

Weźmy pod uwagę wirnik /rys.26/, jaki zazwyczaj pracuje

w turbinach de LA-VAL'a. Oś obrotową oznaczmy przez OO , przez ω szybkość kątową wirowania stałą. W odległości ρ od osi wirowania oznaczmy grubość wirnika przez Δ i wycinamy myślowo kostkę, prowadząc dwie po-



wierzchnie cylindryczne o promieniach ρ i $\rho + d\rho$ oraz dwie środkowe płaszczyzny przekroju pod kątem $d\varphi$, przechodzące przez oś obrotu. Wytworzona w ten sposób kostka będzie miała objętość $d\rho \cdot \rho \cdot d\varphi \cdot \Delta$ i masę $\frac{\gamma}{g} \Delta \cdot \rho \cdot d\rho \cdot d\varphi$.
 Rozwinie ona siłę odśrodkową: $\frac{\gamma}{g} \rho^2 \cdot d\rho \cdot d\varphi \cdot \omega^2$,
 która wywrze nacisk na górne włókna wirnika. Oznaczmy naprężenie panujące na dośrodkowej ścianie wyodrębnionej kostki przez σ_z , na odśrodkowej będzie więc σ_z' . Na bocznych ściankach ze względu na symetrię obciążenia będziemy mieli σ_r , wreszcie na ściankach zewnętrznych kost-

ki $\sigma_y = 0$, tu bowiem niema obciążenia zewnętrznego /rys.27/. Wobec skończonej wartości wymiaru Δ powinniśmy właściwie wziąć pod uwagę cały szereg kostek, przebijający na wylot wirnik w punkcie rozpatrywanym, a wtedy $\sigma_y = 0$ miałyby miejsce jeno dla ścianek zewnętrznych obu skrajnych kostek szeregu, dla pozostałych σ_y miałyby wartość zmienną i dla głębszych kostek szeregu dość znacznie wogóle różną od zera. Chcąc jednak zadanie uprościć zakładamy, iż dla wszystkich kostek $\sigma_y = 0$, umożliwia to nam rozpatrywanie całego szeregu miasto jednej kostki składowej. Przy nieznacznych grubościach wirnika jest to zupełnie dopuszczalne i niewątpliwie tym prawdziwsze, im wirnik cieńszy. W tym założeniu na boczne ścianki szeregu działają dwie równe siły $\sigma_x \Delta d\varphi$, dające składową wspólną w kierunku działania naprężeń σ_x i σ_x' równą $2\sigma_x \Delta d\varphi \sin \frac{d\varphi}{2} \approx \sigma_x \Delta d\varphi d\varphi$. Na dośrodkową ściankę kostki działa siła $\sigma_z \Delta \varphi d\varphi$, wreszcie na ściankę odśrodkową siła $\sigma_z \Delta \varphi d\varphi + d[\sigma_z \Delta \varphi d\varphi]$. Wobec istnienia trwałej równowagi odkształconej możemy wypisać równania statyki. Dwa z nich wypełniają się same przez się na tle symetrii obciążenia - pozostałe dają warunek równowagi sił rzuconych na kierunek naprężeń σ_x i σ_x' . To równanie daje:

$$\sigma_z \Delta \varphi d\varphi + d[\sigma_z \Delta \varphi d\varphi] - \sigma_z \Delta \varphi d\varphi - \sigma_x \Delta d\varphi d\varphi + \frac{\rho}{g} \Delta \varphi^2 d\varphi d\varphi \omega^2 = 0. \quad \curvearrowright$$

skąd

$$d[\sigma_z \Delta \varphi] - \sigma_x \Delta d\varphi + \frac{\rho}{g} \Delta \varphi^2 \omega^2 d\varphi = 0 \quad \curvearrowright$$

Tyle nam daje statyka. Dalsze wyniki zależą od kształtu wirnika. Weźmy pod uwagę przedewszystkiem:

A. WIRNIK O STAŁEJ WYTRZYMAŁOŚCI. Załóżmy $G_x = G_y = G$ a będziemy mieli wirnik o tworzywie jednakowo natężonem w kierunku promienia i prostopadłym do niego. Wtedy równanie da nam:

$$\frac{d}{d\varrho} [\Delta \varrho] - \Delta + \frac{\rho}{g} \frac{1}{6} \omega^2 = \rho \frac{d\Delta}{d\varrho} + \Delta - \Delta + \frac{\rho}{g} \frac{\Delta \varrho^2 \omega^2}{6} = 0.$$

Skąd $\frac{1}{\Delta} \frac{d\Delta}{d\varrho} = -\frac{\rho}{g} \cdot \frac{\omega^2 \varrho}{6}$ Stąd całkując otrzymamy.

$$\Delta = C e^{-\frac{\rho}{g} \frac{\omega^2 \varrho^2}{6}}$$

Zazwyczaj stała całkowania określa się z warunków wykonania wirnika, który u góry znagła się rozszerza (rys. 27.), tworząc obwód nieco szerszy, dźwigający wieńiec łopatek. Szerokość tego obwodu δ zależy od rodzaju łopatek. Oznaczmy promień wewnętrzny pierścienia obwodu przez R - tutaj wirnik rozszerza się znagła, przechodząc od grubości Δ_R do δ , przyczem częste praktyczne względy stanowią o właściwej dopuszczalnej wartości stosunku $\delta : \Delta_R$, zatem

$$\Delta_R = C e^{-\frac{\rho}{g} \frac{\omega^2 R^2}{6}}$$

stąd dzieląc otrzymamy:

$$\Delta = \Delta_R e^{-\frac{\rho}{g} \frac{\omega^2}{6} [R^2 - \varrho^2]}$$

Tego rodzaju wirniki zazwyczaj są pełne, a więc nie posiadają otworu środkowego. Czyniąc przeto $\varrho = 0$ otrzy-

mamy ze wzoru ich grubość środkową:

$$\Delta_0 = \Delta_R e^{\frac{1}{2} \frac{r}{R} \frac{\omega^2 R^2}{G}} ;$$

która przy znacznych szybkościach obrotowych $\omega R = v$ wirnika przestaje być "nieznaczną". Dobrze o tem pamiętać należy, w ten sposób bowiem stajemy w sprzeczności jasnej z założeniem zasadniczym i wzory tracą swą wartość.

Wobec równości naprężeń $\sigma_x = \sigma_y = \sigma$ otrzymujemy wydłużenia główne $\epsilon_x = \epsilon_y = \alpha \left(\sigma - \frac{\sigma}{m} \right) = \frac{\sigma}{E} \frac{m-1}{m} = \epsilon$ jednakowe dla wszystkich kostek wirnika. Należy przeto obliczać wymiary wirnika, biorąc pod uwagę naprężenie następcze: $E\epsilon = \sigma \frac{m-1}{m} = K_x$.

Wobec stałej wartości wydłużeń jednostkowych ϵ wirnik rozszerza się jednostajnie w kierunku promienia, a ujawniając przyrost $\Delta R = R\epsilon = \frac{m-1}{m} \sigma R$. To samo wydłużenie musi dać również i pierścień zewnętrzny, aby się wirnik mógł rozszerzać swobodnie. Zazwyczaj grubość h pierścienia jest nader mała w stosunku do jego średniego promienia $r = R \frac{h}{R}$, możemy go więc uważać jako wirujący wazki pierścień uprzednio już przez nas badany. Pierścień tego rodzaju pracuje wyłącznie i li tylko na rozciąganie, każdy bowiem jego przekrój poprzeczny obciąża siła podłużna K_z , jak to już zresztą udowodniliśmy poprzednio. Wyodrębniwszy myślowo dwa jego przekroje sąsiednie, płaskie, pochylone pod kątem $d\varphi$,

a tworzące kostkę znikomą o objętości $r dy \times b \times h$.

Boczne ścianki tej kostki są pozbawione obciążenia, na środki obu przekrojów działają siły R_z rozciągające; na ściankę wewnętrzną wklęsłą wywiera nacisk wirnik z siłą $\sigma \Delta R R dy \approx \sigma \Delta R (r - \frac{h}{2}) dy \approx \sigma \Delta R r dy$;

zewnątrzna wypukła ścianka dźwiga na sobie łopatki, podlega więc jarzmu siły: $\sigma' b (r + \frac{h}{2}) dy \approx \sigma' b r dy$ równomiernie rozłożonej po całym obwodzie w postaci ciśnienia σ' odśrodkowego, wreszcie masa $\frac{\rho}{g} b h r dy$ kostki rozwija siłę odśrodkową $\frac{\rho}{g} b h r^2 \omega^2 dy$. Wszystkie te siły równoważą się wzajemnie, dając jedyne równanie statyki

$$-2R_z \sin \frac{dy}{R} - \sigma \Delta R r dy + \sigma' b r dy + \frac{\rho}{g} b h r^2 \omega^2 dy = 0.$$

w którym siły odśrodkowe znakujemy dodatnio a dośrodkowe ujemnie. Napięcia przekrojów poprzecznych będą tu $t_z = R_z$ i $S = R_z \cdot b h$ w założeniu jednostajnego rozkładu, odpowiadającego jak wiemy mniej więcej warunkom istotnym dla wązkich pierścieni o nieznaczących wymiarach, czyli tak zwanych pierścieni wązkich. Stąd:

$$-2t_z b h \frac{dy}{R} - \sigma \Delta R r dy + \sigma' b r dy + \frac{\rho}{g} b h r^2 \omega^2 dy = 0;$$

co daje $t_z = \frac{\rho}{g} r^2 \omega^2 + \sigma' \frac{r}{h} - \sigma \frac{\Delta R}{b} \frac{r}{h}$.

To naprężenie rozciągające da wydłużenie jednostkowe $\epsilon = \frac{t_z}{E}$, a promień pierścienia średni r ujawni przyrost $\Delta r = \epsilon r = \frac{r}{E} \left[\frac{\rho}{g} r^2 \omega^2 + \sigma' \frac{r}{h} - \sigma \frac{\Delta R}{b} \frac{r}{h} \right]$

musimy zatem mieć zgodnie z tem, cośmy powiedzieli wyżej $\Delta r = \Delta R$ to jest $\frac{r}{E} \left[\frac{\rho}{g} r^2 \omega^2 + \sigma' \frac{r}{h} - \sigma \frac{\Delta R}{b} \frac{r}{h} \right] =$
 $= \frac{m-1}{m} \sigma \frac{R}{E} = k_r \frac{R}{E} = k_r \frac{r - \frac{h}{2}}{E} \approx k_r \frac{r}{E}$.

Stąd ostatecznie

$$\frac{\rho}{g} r^2 \omega^2 + \sigma' \frac{r}{h} - \sigma \frac{\Delta R r}{b h} = K_r$$

co da równanie

$$h = \frac{\frac{\sigma \Delta R}{b} - \sigma'}{\frac{\rho}{g} r^2 \omega^2 - K_r} r.$$

uzależniające h od b , W ten sposób możemy obliczyć wszystkie ważniejsze wymiary wirnika. Tylko co podany wzór oparty jest jednak na założeniu milcząco wykluczającym pojawienie się naprężeń dodatkowych w przekroju tyczącym wirnika z pierścieniem, a niewątpliwie istniejącym wobec nagłego uskoku grubości. Należy przeto owo przejście od ΔR do b złągodzić zaokrągleniami odpowiednimi, inaczej bowiem wzory tu wyprowadzone będą w sprzeczności z warunkami zachodzącymi istotnie.

Z kolei bierzemy pod uwagę:

B. WIRNIK O STAŁEJ GRUBOŚCI.

Gzyniejąc we wzorze zasadniczym $\Delta = \text{stałej}$, otrzymamy po podzieleniu przez $g \Delta d\varphi$:

$$\frac{d\sigma_z}{d\varphi} + \frac{1}{g} (\sigma_z - \sigma_x) + \frac{\rho}{g} \omega^2 \varphi = 0. \quad \infty$$

Podobnie jak to czyniliśmy przy rozpatrywaniu naczyń walcowych grubościennych, możemy i tu, wobec $\sigma_y = 0 \quad \infty$

napisać, zachowując odpowiednie znakowania $\xi_x = \alpha \left[\sigma_x - \frac{\sigma_x}{m} \right] = \frac{u}{g}$; $\xi_y = \alpha \left[-\frac{\sigma_x + \sigma_z}{m} \right]$; $\xi_z = \alpha \left[\sigma_z - \frac{\sigma_x}{m} \right] = \frac{du}{d\varphi}$;

Stąd bezpośrednio możemy otrzymać

$$\sigma_x = \frac{E m}{m^2 - 1} \left[\frac{du}{d\varphi} + m \frac{u}{g} \right]; \quad \sigma_z = \frac{E_1 m}{m^2 - 1} \left[m \frac{du}{d\varphi} + \frac{u}{g} \right];$$

i podstawiając w równanie wyżej otrzymane:

$$\frac{Em}{m^2-1} \left[m \frac{d^2 u}{d\varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{du}{d\varrho} - \frac{u}{\varrho^2} \right] + \frac{Em}{m^2-1} \left[\frac{m}{\varrho} \frac{du}{d\varrho} + \frac{u}{\varrho^2} - \frac{1}{\varrho} \frac{du}{d\varrho} - \frac{m u}{\varrho^2} \right] + \frac{\sigma}{\varrho} \omega^2 \varrho = 0. \quad \infty$$

Oznaczmy przez $q = \frac{\sigma}{\varrho} \frac{m^2-1}{Em^2} \omega^2$ a otrzymamy równanie

$$\frac{d^2 u}{d\varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{du}{d\varrho} - \frac{u}{\varrho^2} + q\varrho = 0,$$

którego całka

$$u = -\frac{1}{8} q \varrho^3 + \frac{A}{2} \varrho + \frac{B}{\varrho}. \quad \infty$$

Stąd mamy

$$\sigma_x = \frac{Em}{m^2-1} \left[-\frac{m+3}{8} q \varrho^2 + \frac{m+1}{2} A + \frac{m-1}{\varrho^2} B \right].$$

$$\sigma_z = \frac{Em}{m^2-1} \left[-\frac{3m+1}{8} q \varrho^2 + \frac{m+1}{2} A - \frac{m-1}{\varrho^2} B \right].$$

Aby wyznaczyć stałe całkowania rozpatrujemy ogólny wypadek wirnika, nasadzonego pod ciśnieniem lub na gorąco na wał, a więc pozostającego pod ciśnieniem równomiernie obciążającym obwód wirnika wewnętrznego. Nadto wirniki zazwyczaj dźwigają na obwodzie zewnętrznym wieńce łopatek. Siła odśrodkowa łopatek stanowi obciążenie rozciągające wirnika, równomiernie na obwodzie zewnętrznym rozłożone w postaci ciśnienia σ . Oznaczmy przez r promień wewnętrzny, a przez R promień zewnętrzny wirnika. Warunki równowagi odkształconej wymagają aby:

$$[\sigma_x]_{\varrho=r} = \frac{Em}{m^2-1} \left[-\frac{3m+1}{8} q r^2 + \frac{m+1}{2} A - \frac{m-1}{r^2} B \right] = -\sigma_0.$$

$$[\sigma_x]_{\varrho=R} = \frac{Em}{m^2-1} \left[-\frac{3m+1}{8} q R^2 + \frac{m+1}{2} A - \frac{m-1}{R^2} B \right] = \sigma.$$

Stąd mamy:

$$A = \frac{3m+1}{4(m+1)} q (R^2 + r^2) + \frac{2(m^2-1)}{Em(m+1)} \frac{\sigma R^2 + \sigma_0 r^2}{R^2 - r^2}.$$

$$B = \frac{3m+1}{8m-1} q R^2 r^2 + \frac{m^2-1}{Em(m-1)} \frac{\sigma + \sigma_0}{R^2 - r^2} R^2 r^2.$$

co daje

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\delta \omega^2}{8g} \left\{ \left(3 + \frac{1}{m}\right) \left[R^2 + r^2 + \frac{R^2 r^2}{\rho^2} \right] - \left(1 + \frac{3}{m}\right) \rho^2 \right\} + \\ &+ \frac{6R^2 + 6_0 r^2 (6_0 + 6) \frac{R^2 r^2}{\rho^2}}{R^2 - r^2}; \quad \sigma_z = \frac{\delta \omega^2}{8g} \left\{ R^2 + r^2 - \frac{R^2 r^2}{\rho^2} - \right. \\ &\left. - \rho^2 \right\} \left(3 + \frac{1}{m}\right) + \frac{6R^2 + 6_0 r^2 (6_0 + 6) \frac{R^2 r^2}{\rho^2}}{R^2 - r^2}. \end{aligned}$$

A zatem wydłużenia:

$$\begin{aligned} \frac{\epsilon_x}{L} &= \frac{\delta \omega^2}{8g} \left\{ \left(3 + \frac{1}{m}\right) \left[\left(1 - \frac{1}{m}\right) (R^2 + r^2) + \left(1 + \frac{1}{m}\right) \frac{R^2 r^2}{\rho^2} \right] - \right. \\ &\quad \left. - \left(1 - \frac{1}{m}\right) \rho^2 \right\} + \left[\left(1 - \frac{1}{m}\right) (6R^2 + 6_0 r^2) + \right. \\ &\quad \left. + \left(1 + \frac{1}{m}\right) (6 + 6_0) \frac{R^2 r^2}{\rho^2} \right] : (R^2 - r^2) \\ \frac{\epsilon_y}{L} &= \frac{\delta \omega^2}{8g} \left\{ - \frac{\rho}{m} \left(3 + \frac{1}{m}\right) (R^2 + r^2) + \frac{4}{m} \left(1 + \frac{1}{m}\right) \rho^2 \right\} - \\ &\quad - \frac{2(6R^2 + 6_0 r^2)}{m(R^2 - r^2)} \\ \frac{\epsilon_z}{L} &= \frac{\delta \omega^2}{8g} \left\{ \left(3 + \frac{1}{m}\right) \left[\left(1 - \frac{1}{m}\right) (R^2 + r^2) - \left(1 + \frac{1}{m}\right) \frac{R^2 r^2}{\rho^2} \right] - \right. \\ &\quad \left. - 3 \left(1 - \frac{1}{m}\right) \rho^2 \right\} + \left[\left(1 - \frac{1}{m}\right) (6R^2 + 6_0 r^2) - \right. \\ &\quad \left. - \left(1 + \frac{1}{m}\right) (6 + 6_0) \frac{R^2 r^2}{\rho^2} \right] : (R^2 - r^2). \end{aligned}$$

Z tych wzorów odrazu spostrzec się daje bezwzględna wartość $\frac{\epsilon_x}{L}$ jest większa od pozostałych. Należy przeto przy obliczeniu wirnika uczynić $\left[\frac{\epsilon_x}{L} \right]_{MAX} = k_r$. Mamy tu bowiem niewątpliwie do czynienia z NAPRĘŻENIAMI ZASTĘPCZYMI rozciągającymi. Ponieważ skrajna wartość $\frac{\epsilon_x}{L}$ niewątpliwie zachodzi dla wewnętrznego obwodu, gdzie $\rho = r$, przeto dla wirników wytoczonych po środku mamy:

$$\begin{aligned} \left[\frac{\epsilon_x}{L} \right]_M &= \left[\frac{\epsilon_x}{L} \right]_{\rho=r} = \frac{\delta \omega^2}{4g} \left\{ \left(3 + \frac{1}{m}\right) R^2 + \left(1 + \frac{1}{m}\right) r^2 \right\} + \\ &+ \frac{\left(1 - \frac{1}{m}\right) (6R^2 + 6_0 r^2) + \left(1 + \frac{1}{m}\right) (6 + 6_0) R^2}{R^2 - r^2}. \end{aligned}$$

podczas gdy na obwodzie zewnętrznym, gdzie $\rho = R$ mamy

$$\text{jeno: } \left[\frac{\xi_x}{\alpha} \right]_{\rho=R} = \frac{\delta \omega^2}{4g} \left\{ \left(3 + \frac{1}{m}\right) r^2 + \left(1 - \frac{1}{m}\right) R^2 \right\} + \\ + \frac{\left(1 - \frac{1}{m}\right)(6R^2 + 6_0 r^2) + \left(1 + \frac{1}{m}\right)(6 + 6_0) r^2}{R^2 - r^2}$$

Gdy otwór środkowy jest nieznaczny $r = 0$, zatem dla przedziurawionego środkowo wirnika będziemy mieli dla ścianek owego nieznacznego otworu środkowego:

$$\left[\frac{\xi_x}{\alpha} \right]_{\rho=r=0} = \frac{\delta \omega^2}{4g} \left(3 + \frac{1}{m}\right) R^2 + \left(1 - \frac{1}{m}\right) 6 + \left(1 + \frac{1}{m}\right)(6 + 6_0) \\ = 0,825 \frac{\delta}{g} R^2 \omega^2 + 2,6 + 1,36_0.$$

podczas gdy dla obwodu zewnętrznego:

$$\left[\frac{\xi_x}{\alpha} \right]_{\rho=R} = \frac{\delta \omega^2}{4g} \left(1 - \frac{1}{m}\right) R^2 + \left(1 - \frac{1}{m}\right) 6 = \\ = 0,175 \frac{\delta}{g} R^2 \omega^2 + 0,76. \curvearrowright$$

przyczem założyliśmy: $m = \frac{10}{3}. \curvearrowright$

I tu zatem obwód wewnętrzny jest najbardziej naprężony.

Wogóle więc wirniki o stałej grubości środkowo wytoczone są najbardziej naprężone na obwodzie wewnętrznym. To nam nasuwa myśl o wirniku pełnym bez otworu wewnętrznego. Dla takiego wirnika należy stałe całkowania wyznaczyć ponownie. Wykonamy to z łatwością, zważywszy, że w środku tarczy nieprzedziurawionej musi być $\sigma_x = \sigma_y$, ze względu na zupełną symetrię obciążenia tego punktu. Nadto środek tarczy jako ośrodek ruchu obrotowego nie zmienia swego położenia podczas odkształcania się wirnika. musi być przeto $[u]_{\rho=0} = 0$. Oba te warunki dają

jeden i ten sam wynik - wymagają bowiem, aby $B=0$,
jak to z łatwością możemy zauważyć rozpatrując wzory dla
 G_x i G_y . Nadto na zewnętrznym obwodzie pełnego wir-
nika panuje obciążenie σ , zatem:

$$[G_x]_{s=R} = \frac{E m}{m^2-1} \left[-\frac{3m+1}{8} \rho R^2 + \frac{m+1}{2} A \right] = \sigma;$$

czyli $A = \frac{3m+1}{4(m+1)} \rho R^2 + \frac{m^2-1}{4m(m+1)} \sigma;$

stąd mamy: $G_x = \frac{\rho \omega^2}{8} \left[(3+\frac{1}{m}) R^2 - (1+\frac{1}{m}) s^2 \right] + \sigma;$

$$G_y = \frac{\rho \omega^2}{8} (3+\frac{1}{m}) (R^2 - s^2) + \sigma;$$

Tylko co otrzymane wzory wskazują przedewszystkiem,
iż obciążenie zewnętrzne σ , równomiernie rozłożone po
całym obwodzie zewnętrznym wirnika pełnego przenika w głąb
tarczy jako składowa obu naprężeń G_x i G_y , jednako-
wa dla wszystkich kostek wirnika. Nadto wychodząc z tych
wzorów możemy napisać:

$$\frac{\xi_x}{L} = \frac{\rho \omega^2}{8 \rho} \left\{ (3+\frac{1}{m}) (1-\frac{1}{m}) R^2 - (1-\frac{1}{m^2}) s^2 \right\} + \sigma (1-\frac{1}{m});$$

$$\frac{\xi_y}{L} = \frac{\rho \omega^2}{8 \rho} \left\{ -\frac{2}{m} (3+\frac{1}{m}) R^2 + \frac{4}{m} (1+\frac{1}{m}) s^2 \right\} - \frac{2\sigma}{m};$$

$$\frac{\xi_z}{L} = \frac{\rho \omega^2}{8 \rho} \left\{ (3+\frac{1}{m}) (1-\frac{1}{m}) R^2 - 3(1-\frac{1}{m}) s^2 \right\} + \sigma (1-\frac{1}{m});$$

I tu znów bezwzględna wartość $\frac{\xi_x}{L}$ jest wyższa od
pozostałych, a $[\frac{\xi_x}{L}]_{MAX}$ zachodzi dla środka wirnika,
gdzie $s=0$. Stąd:

$$[\frac{\xi_x}{L}]_M = [\frac{\xi_x}{L}]_{s=0} = \frac{\rho \omega^2}{8 \rho} (3+\frac{1}{m}) (1-\frac{1}{m}) R^2 +$$

$$+ \sigma (1-\frac{1}{m}) = 0,289 \frac{\rho}{\rho} R^2 \omega^2 + 0,76$$

podczas gdy dla obwodu zewnętrznego:

$$\left[\frac{\sigma_x}{\alpha} \right]_{\rho=R} = \frac{\delta \omega^2}{4g} \left(1 - \frac{1}{m}\right) R^2 + 6 \left(1 - \frac{1}{m}\right) = 0,175 \frac{\delta}{g} R^2 \omega^2 + 0,76;$$

przyczem i tu założyliśmy $m = \frac{40}{3}$.

Porównanie wyżej otrzymanych wyników pozwala wypowiedzieć następujące wnioski ogólne:

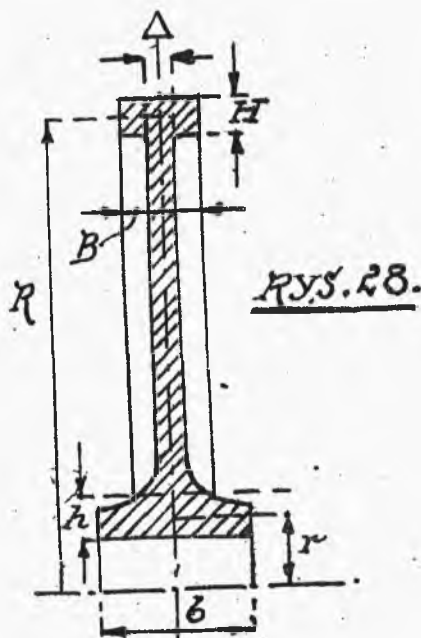
1°. Nacisk wału na wirnik zwiększa naprężenie tworzywa. Tak samo działa obciążenie pochodzące od łopatek na obwodzie zewnętrznym.

2°. Naprężenia wzrastają ku środkowi.

3°. Wirnik przedziurawiony po środku ujawnia wyższe naprężenie na ściankach otworu niż wirnik tożsamościowo pełny.

Wszystko to świadczy o zgubnem oddziaływaniu otworów środkowych wirnika, to też zazwyczaj wirniki szybciej wirujące są pełne. Czynnica $G = G_0 = 0$ otrzymamy wirnik wirujący swobodnie, a ujawniający własności zupełnie podobne.

Wydoby powyższe posiadają jednak pewną wadę, zazwyczaj bowiem wirniki o stałej grubości Δ posiadają zgrubienia u nasady i wieńce w postaci wąskich pierścieni /rys. 28/. Oznaczmy średni promień zewnętrznego pierścienia przez R , szerokość przez B i wysokość przez H , podobnie średni promień wewnętrznego niech będzie r , szerokość b i wysokość h . Przewodząc dwie średnicowe płaszczyzny pod kątem $d\varphi$ wytniemy z obu pierścieni po kostce. Obciążenie kostki



pierścienia zewnętrznego obejmuje naprężenie i siły następujące: na zewnętrzną wypukłą ściankę kostki działa siła

$$6B(R + \frac{H}{2}) d\varphi \approx 6Bhd\varphi$$

jaka łopatki chcą się oderwać od wieńca; wewnętrzną wklęsłą ściankę ściągają na szerokości

Δ wirnik z siłą:

$6_z \Delta (R - \frac{H}{2}) d\varphi \approx 6_z \Delta R d\varphi$
nie dając pierścieniowi rozszerzać się swobodnie, wreszcie

kostka rozwija siłę odśrodkową $\frac{1}{2} BHR^2 \omega^2 d\varphi \approx \odot$.

Wypadkową tych wszystkich sił równoważą składowe naprężenia bocznych ścianek kostki, gdzie panują naprężenia rozciągające t_x , jako że pierścień jest wazki. Te wypadkowe są $t_x BH \sin \frac{d\varphi}{2}$, a zatem równanie równowagi będzie:

$$2t_x BH \sin \frac{d\varphi}{2} = t_x BH d\varphi = 6BR d\varphi + \frac{1}{2} BHR^2 \omega^2 d\varphi.$$

stąd otrzymamy:

$$t_x = \frac{6R}{H} + \frac{r\omega^2 R^2}{2} - \frac{6_z \Delta R}{BH} \approx \odot$$

To naprężenie da wydłużenie jednostkowe $\epsilon = \alpha t_x$

całego wieńca; na jego tle otrzymamy przyrost

$$\Delta R = \epsilon R = \frac{R}{E} \left[\frac{6R}{H} + \frac{r\omega^2 R^2}{2} - \frac{6_z \Delta R}{BH} \right] \approx \odot$$

Zupełnie w podobny sposób ustalimy obciążenie kostki wieńca wewnętrznego. Na jej ściankę wewnętrzną wklęsłą ciśnię waz z siłą $6_0 b (r - \frac{h}{2}) d\varphi \approx 6_0 b r d\varphi$ na ściankę

zewnętrzną wypukłą na szerokości Δ wywiera swój nacisk tarcza wirnika, hamując swobodne rozszerzenie się pierścienia z siłą $\sigma_{z0} \Delta \left(r + \frac{h}{2}\right) d\varphi \cong \sigma_{z0} \Delta r d\varphi$; wreszcie sama kostka rozwija siłę odśrodkową

$\frac{r}{g} b h r^2 \omega^2 d\varphi$, możemy przeto wypisać jak pierwej wzór

$$t_x = \frac{\sigma_0 r}{h} + \frac{r \omega^2 r^2}{g} - \frac{\sigma_{z0} \Delta r}{b h} \quad \text{---} \textcircled{1}$$

dający naprężenie rozciągające pierścienia. Odnośne wydłużenie jednostkowe będzie niewątpliwie $\xi = \alpha t_{x0}$, da ono przyrost:

$$\Delta r = \xi r = \frac{r}{E} \left[\frac{\sigma_0 r}{h} + \frac{r \omega^2 r^2}{g} - \frac{\sigma_{z0} \Delta r}{b h} \right] \quad \text{---} \textcircled{2}$$

Oba te przyrosty ujawniać oczywiście również musi i sama tarcza wirnika, który tu rozpatrujemy jako wirnik stałej grubości Δ o promieniu zewnętrznym R i wewnętrznym r , obciążony dodatkowo od wewnątrz ciśnieniem σ_{z0} , od zewnątrz σ_z . Wyżej już mieliśmy wzory dla $\left[\frac{\xi_x}{\alpha}\right]_{\rho=r}$ i $\left[\frac{\xi_x}{\alpha}\right]_{\rho=R}$ należy przeto jedynie zmienić w nich σ na σ_x i σ_0 na σ_{z0} , aby otrzymać wydłużenia jednostkowe $[\xi_x]_r$ i $[\xi_x]_R$ jednakowe dla wszystkich kostek odnośnych obwodów. Na tle tych wydłużeń zwiększą się odpowiednio obwody, a zarazem i promienie tych obwodów w tym samym stosunku, będziemy mieli przeto $\Delta r = [\xi_x]_r \cdot r$ oraz $\Delta R = [\xi_x]_R \cdot R$ a przeto otrzymamy dwa równania:

$$(1) \quad \frac{\sigma \omega^2}{4g} \left\{ \left(3 + \frac{1}{m}\right) R^2 + \left(1 - \frac{1}{m}\right) r^2 \right\} +$$

$$+ \frac{\left(1 - \frac{1}{m}\right) (\sigma_z R^2 + \sigma_{z0} r^2) + \left(1 + \frac{1}{m}\right) (\sigma_z + \sigma_{z0}) R^2}{R^2 - r^2} = \frac{\sigma_0 r^2}{h} + \frac{\sigma_0 r^2 \omega^2}{g} - \frac{\sigma_{z0} \Delta r}{b h}$$

- 91 -

$$(2.) \frac{\rho \omega^2}{4g} \left\{ \left(3 + \frac{1}{m}\right) R^2 + \left(1 - \frac{1}{m}\right) r^2 \right\} +$$

$$+ \frac{\left(1 - \frac{1}{m}\right) (\sigma_z R^2 + \sigma_{z0} r^2) + \left(1 + \frac{1}{m}\right) (\sigma_z + \sigma_{z0}) r^2}{R^2 - r^2} \frac{\sigma R}{H} + \frac{\rho \omega^2 R^2}{g} - \frac{\sigma_z \Delta R}{BH}$$

Pozostałe równania otrzymamy z warunków wytrzymałości tworzywa, należy bowiem naprężenie zastąpić

$\left[\frac{\sigma_x}{\sigma} \right]_{MAX}$ tarczy uczynić równym skrajnemu dopuszczalnemu naprężeniu rozciągającemu K_r tworzywa. Da to nowy związek:

$$(3.) \frac{\rho \omega^2}{4g} \left\{ \left(3 + \frac{1}{m}\right) R^2 + \left(1 - \frac{1}{m}\right) r^2 \right\} +$$

$$+ \frac{\left(1 - \frac{1}{m}\right) (\sigma_z R^2 + \sigma_{z0} r^2) + \left(1 + \frac{1}{m}\right) (\sigma_z + \sigma_{z0}) r^2}{R^2 - r^2} = K_r \dots$$

a pozostałe dwa otrzymamy, czyniąc podobnie:

$$\tau_z = \tau_{z0} = K_r;$$

$$(4.) \frac{\sigma R}{H} + \frac{\rho \omega^2 R^2}{g} - \frac{\sigma_z \Delta R}{BH} = K_r; \quad (5.) \frac{\sigma_0 r}{h} + \frac{\rho \omega^2 r^2}{g} - \frac{\sigma_{z0} \Delta r}{bh} = K_r$$

Te pięć równań wiąże niewiadome zadania $\sigma_z, \sigma_{z0}, \Delta, b, h, B, H$ promień bowiem r i R należy uważać jako dane zasadnicze. Widzimy przeto, iż dwie niewiadome są dowolne - okoliczność nader szczęśliwa, możemy bowiem dobrać odpowiednio B podług wymiaru łopatek, oraz b według przestrzeni rozporządzalnej na wale turbiny. Tylko co wyprowadzone wzory dotyczą wirników o stałych wymiarach h i H - w tym bowiem założeniu rozpatrywaliśmy oba pierścienie, licząc je jako "wązkie". Odpowiada to zazwyczaj istocie rzeczy

w stosunku do wieńca zewnętrznego, - wewnętrzny nieraz wykonywany bywa jako krzepka piasty, czyli pierścień szeroki. Oznaczmy promień otworu piasty przez r_0 , a promień zewnętrznego styku z wirnikiem przez r . Nacisk wału na obwód wewnętrzny piasty niech będzie jak dawniej σ_0 , a nacisk tarczy wirnikowej $\sigma_{z0} \cdot \frac{\Delta}{b}$, zachodzi bowiem nie na całej szerokości b piasty, a na jej części środkowej, równej Δ . W danym wypadku przeto wartość $[\frac{\sigma_x}{\sigma}]$ dla obu obwodów piasty otrzymamy z ogólnych wzorów, pisząc w nich r miasto R , r_0 miasto r oraz $\sigma_{z0} \frac{\Delta}{b}$ miasto σ . W ten sposób zamiast równania /1/ otrzymamy:

$$\frac{\sigma \omega^2}{4g} [(3 + \frac{1}{m})R^2 + (1 - \frac{1}{m})r^2] + \frac{(1 - \frac{1}{m})(\sigma R^2 + \sigma_0 r^2) + (1 + \frac{1}{m})(\sigma + \sigma_0)R^2}{R^2 - r^2} = \frac{\sigma \omega^2 [(3 + \frac{1}{m})r^2 + (1 - \frac{1}{m})r_0^2] + \frac{(1 - \frac{1}{m})[\frac{\Delta}{b} \sigma_{z0} r^2 + \sigma_0 r_0^2] + (1 + \frac{1}{m})[\frac{\Delta}{b} \sigma_{z0} + \sigma_0]r^2}{r^2 - r_0^2}}{R^2 - r^2}$$

Równania /2/ /3/ i /4/ pozostaną w swej mocy, natomiast zamiast równania /5/ będziemy mieli:

$$\frac{\sigma \omega^2 [(3 + \frac{1}{m})r^2 + (1 - \frac{1}{m})r_0^2] + \frac{(1 - \frac{1}{m})[\frac{\Delta}{b} \sigma_{z0} r^2 + \sigma_0 r_0^2] + (1 + \frac{1}{m})[\frac{\Delta}{b} \sigma_{z0} + \sigma_0]r^2}{r^2 - r_0^2}}{r^2 - r_0^2} = K_r$$

Znowu więc mamy pięć równań wiążących niewiadome

$\sigma_x, \sigma_{z0}, \Delta, r, b, B, H$, dwie z nich możemy obrać dowolnie. Godzi się tu zaznaczyć, że styki tarczy wirnika z piastą i wieńcem należy wykonywać stopniowo, łagodząc ostre przejścia za pomocą odpowiednich zaokrągleń.

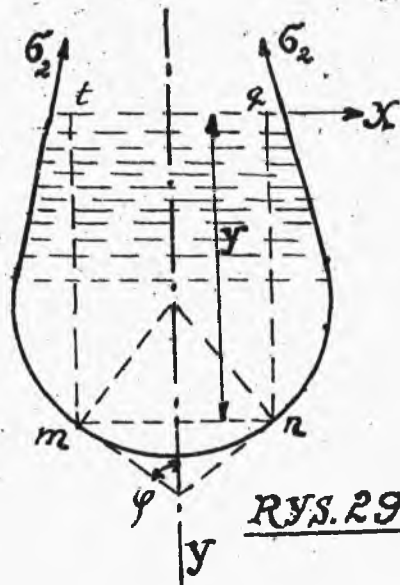
Na tem kończymy teorię wirników, ciał, dla których siła odśrodkowa była źródłem naprężeń ruchu.



ZBIORNIKI DO PŁYNÓW.

Dodatek do części II.

§1. Idąc za Timoszenką podamy tu sposoby wyznaczania właściwej grubości ścianek tego rodzaju zbiorników. Weźmy pod uwagę zbiornik w kształcie bryły obrotowej /rys.29/ wypełniony po brzegi cieczą o ciężarze właściwym γ . Równowagę naczynia utrzymują naprężenia σ_2 rozłożone



RYŚ. 29.

wzdłuż wolnego obwodu i skierowane według stycznych do przekroju osiowego podłużnego. Wyznamy naprężenia odpowiadające punktom dowolnego równoleżnika mn . Niech r będzie promieniem tego równoleżnika, a y - odległość płaszczyzny tego

okręgu od powierzchni cieczy. Naprężenie rozciągające znajdziemy tak jak w poprzednim zadaniu. Zróbmy wykrój normalną powierzchnią stożkową według koła mn , jako

podstawy. Naprężenia rozciągające σ_2 rozłożone są równomiernie na wykonanym przekroju ścianki naczynia i dadzą jedną wypadkową, działającą w kierunku osi OY . Wielkość tej wypadkowej:

$$P = h \pi r s \sigma_2 \cos \varphi.$$

Siła ta winna być równa ciężarowi Q objętości cieczy, ograniczonej powierzchnią cylindryczną $mnt\varphi$ i dnem danego naczynia. Oczywiście

$$Q = h \pi r \int_0^r xy dx \cdot \sim$$

skąd

$$\sigma_2 = \frac{\rho}{s \cos \varphi} \cdot \frac{1}{r} \int_0^r xy dx \cdot \sim$$

Mając równanie przekroju osiowego powierzchni obrotowej będziemy mogli wyznaczyć $\int_0^r xy dx$, a więc i σ_2

W celu określenia σ_1 , posługujemy się równaniem zasadniczym:

$$\frac{\sigma_1}{\rho_1} + \frac{\sigma_2}{\rho_2} = \frac{\rho}{s}.$$

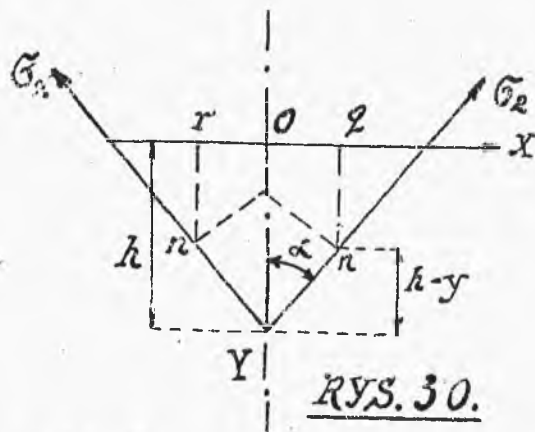
§2. Zastosujemy tu ogólne rozważania do prostego wypadku, kiedy naczynie ma kształt stożka /rys.30/. Określimy naprężenia w punktach równoleżnika nn na głębokości y . Jeden z głównych promieni krzywizny staje się w danym wypadku nieskończonością, zaś drugi:

$$\rho_1 = r_n = \frac{h-y}{\cos \alpha} \cdot \operatorname{tg} \alpha.$$

Równanie zasadnicze przyjmie kształt:

$$\frac{\sigma_1}{\rho_1} = \frac{y \rho}{s} \quad \text{skąd}$$

$$\sigma_1 = \rho_1 y \frac{\rho}{s} = y (h-y) \frac{\rho}{s} \operatorname{tg} \alpha \cdot \sim$$



Naprężenie σ_1 usiłuje rozzerwać naczyńnię stożkowe według tworzącej. Dla $y=0$; i $y=h$, t.j. na powierzchni cieczy i wierzchołku stożka $\sigma_1 = 0$. Przy wartościach pośrednich

$y = 0 \div h$ naprężenie σ_1 zmienia się według prawa paraboli i osiąga maximum przy $y = \frac{h}{2}$:

$$\sigma_{1, \max} = \frac{h^2 \gamma \cdot \operatorname{tg} \alpha}{4s \cdot \cos \alpha} \cdot \infty$$

Znajdźmy teraz naprężenie σ_2 , działające w przekrojach normalnych do tworzących stożka. Naprężenia te skierowane są według tworzących; wielkość ich dla równoleżnika nn znajdziemy, jak wyżej, z warunku równowagi objętości cieczy $Ynrqrn$:

$$\sigma_2 = \frac{\gamma}{s \cdot \cos \alpha} \cdot \frac{1}{r} \int_0^r x(h - x \operatorname{tg} \alpha) dx = \frac{\gamma}{s \cdot \cos \alpha} \cdot r \left(\frac{h}{2} - \frac{r}{3} \operatorname{ctg} \alpha \right).$$

Ponieważ :

$$r = (h - y) \operatorname{tg} \alpha$$

to

$$\sigma_2 = \frac{\gamma}{s} \cdot \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\cos \alpha} (h - y)(h + \frac{2}{3}y). \infty$$

a zatem naprężenie σ_2 na różnych głębokościach zmienia się także według prawa paraboli. Dla $y=h$ t.j. w wierzchołku stożka $\sigma_2 = 0$. Oczywiście jest, że σ_2 osiągnie maximum przy $y = \frac{h}{4}$:

$$(\sigma_2)_{MAX} = \frac{3}{16} \frac{\sigma}{s} h^2 \frac{\tan \alpha}{\cos \alpha} \cdot \infty$$

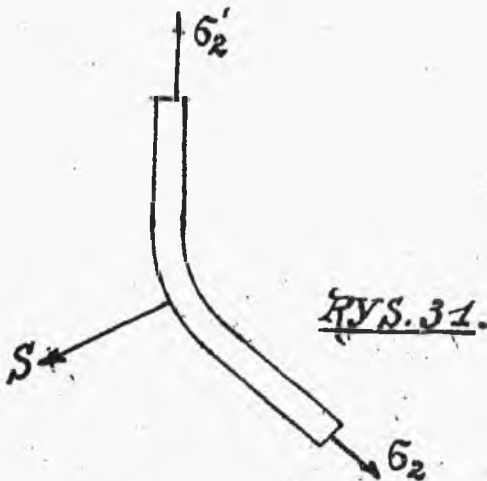
Jeżeli naczynie posiada wygięcie /rys.31,32/, to promień krzywizny $\rho_2 = 0$ i równanie zasadnicze przyjmuje kształt:

$$\frac{\sigma_1}{\rho_1} + \frac{\sigma_2}{0} = \frac{\rho}{s} \cdot \infty$$

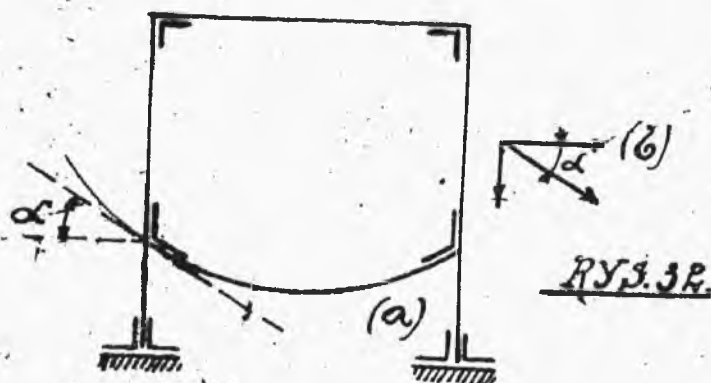
Jeżeli $\sigma_2 \neq 0$, to $\sigma_1 = \infty$

Wynik ten wskazuje, że równowaga w miejscu rozpatrywanym przy zachowaniu założeń dotyczących naprężeń w ściankach naczynia możliwa jest tylko w tym wypadku, gdy na obwodzie koła odpowiadającego wygięciu przyłożone będą siły S' .

Jeśli takich sił niema, to w miejscu wygięcia powstaje znaczne odkształcenie ścianki naczynia.



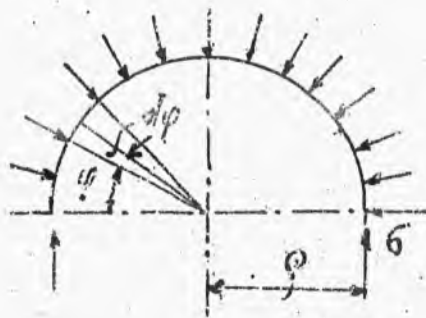
nia.



W celu uniknięcia w praktyce tych odkształceń, zwykle w miejscu wygięcia umieszcza się pierścień usztywniający. Jako przykład takiego naczynia widzimy

rys. 32 zwykły typ zbiornika, używanego przy wodociągach kolejowych. Dno kształtu kulistego jest złączone ścianką cylindryczną za pomocą kątowników, wskazanych rys. 32 w miejscach A i B . Kątowniki te stanowią ramię usztywniający, przeciwdziałający znaczniejszym odkształceniom.

Zajmiemy się teraz rachunkiem przybliżonym pierścienia usztywniającego, zakładając że w miejscu umocowania pierścienia nie ma przegięcia i że ścianki naczynia pracują tylko na rozciąganie. Naprężenia rozciągające, działające zbiornika są skierowane pod kątem α do pier-



RYS. 33.

ścienia usztywniającego i mogą być rozłożone na składowe: poziome i pionowe. Składowe pionowe działają wzdłuż ścianki cylindrycznej, zaś poziome wywołują ściskanie pierścienia usztywniającego. Na jedno-

długości pierścienia przypada ciśnienie

$$R = 6_2 p \cos \alpha . \quad \text{D}$$

Dla określenia naprężeń ściskających w pierścieniu, myślowo przekrój pierścienia według średnicy /rys. i rozpatrzmy równowagę odkształconą jednej połowy. Każdy element pierścienia, odpowiadający kątowi

$d\varphi$ przypada ciśnienie zewnętrzne $\sigma_2 s \cos \alpha \rho d\varphi$
Oznaczmy przez P siłę ściskającą, zastępującą działanie dolnej części pierścienia na górną i rzucmy wszystkie siły na kierunek pionowy. Otrzymamy:

$$2P = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho s \rho d\varphi \sin \varphi = 2 \rho s \rho \cdot \pi$$

Skąd

$$P = \rho s \rho = \sigma_2 s \cos \alpha \cdot \rho$$

Z ostatniego równania z łatwością wyznaczymy naprężenia ściskające pierścienia.

K O N I E C .



nr 835