

54. Kształt linii magnetycznych i elektrycznych w fali elektromagnetycznej. Cały układ pól magnetycznego i elektrycznego jest oczywiście symetryczny względem osi oscylatora.

Wobec tego linie sił pola elektrycznego mają jednakowy przebieg we wszystkich płaszczyznach przechodzących przez oś oscylatora.

Linie magnetyczne mają jednakowy przebieg we wszystkich płaszczyznach prostopadłych do osi oscylatora.

Kształt linii magnetycznych jasno określają wyniki powyższego rozumowania / patrz składowe pola magnetycznego/.

Wszędzie natężenie pola magnetycznego jest prostopadłe do płaszczyzny przechodzącej przez oś oscylatora, a więc wszystkie linie magnetyczne są kołami współśrodkowymi, których środki leżą na osi oscylatora.

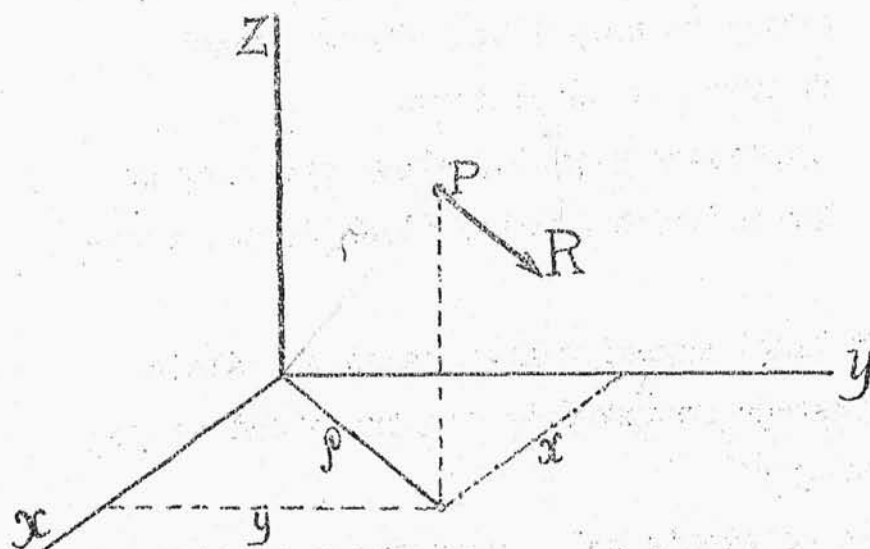
Kształt linii elektrycznych powyższy wzór przybliżony określa dobrze tylko zdala od osi oscylatora.

O całkowitym przebiegu linii elektrycznych można powziąć wyobrażenie rozważając wzory nieuproszczone.

Rozważmy na razie siły elektryczne w dowolnym punkcie P , którego odległość od osi Z wynosi ρ i przez to:
$$\rho^2 = x^2 + y^2$$

Łatwo sprawdzić różniczkowaniem, że:

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial y^2} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \cdot \frac{\partial \Pi}{\partial \rho} \right)$$



rys. 69.

Możemy więc wzór na rzut Z natężenia pola elektrycznego przedstawić wzorem: *patrz str. 164*

$$Z = y \cdot \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \cdot \frac{\partial \Pi}{\partial \rho} \right)$$

Jeżeli teraz przeniesiemy punkt P na płaszczyznę yz , to wypadnie: $\rho = y$

i wtedy:

$$Z = y \cdot \frac{1}{y} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left(y \cdot \frac{\partial \Pi}{\partial y} \right)$$

Składowa y zachowa swój wyraz:

$$y = -y \cdot \frac{\partial^2 \Pi}{\partial y \cdot \partial z}$$

Wzór na linię elektryczną znajdujemy opierając się na podstawie, że linia elektryczna jest styczna do kierunku całkowitego natężenia pola, wtedy:

$$\frac{Z}{y} = \frac{dz}{dy}$$

Stąd:

$$y dz - Z \cdot dy = 0$$

a podstawiając wyrazy na y i Z , otrzymamy:

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial y \cdot \partial z} \cdot dz + \frac{1}{y} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left(y \frac{\partial \Pi}{\partial y} \right) \cdot dy = 0$$

albo:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(y \cdot \frac{\partial \Pi}{\partial y} \right) \cdot dz + \frac{\partial}{\partial y} \left(y \frac{\partial \Pi}{\partial y} \right) dy = 0$$

Całkując otrzymamy:

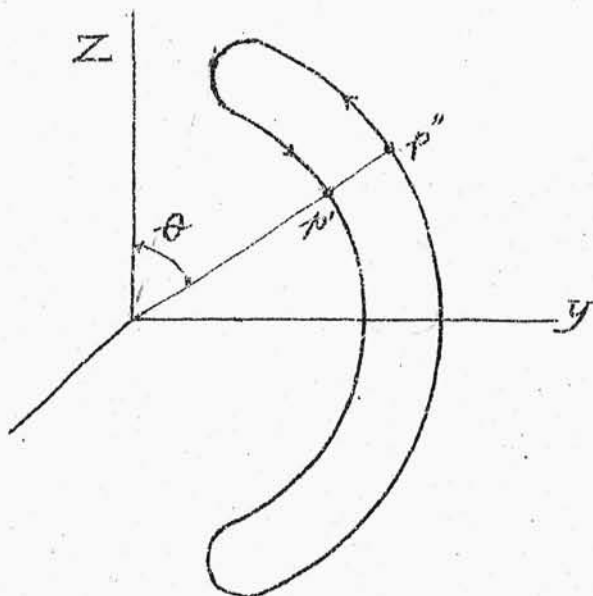
$$y \cdot \frac{\partial \Pi}{\partial y} = k$$

k - stała wielkość.

Po wykonaniu różniczkowania znajdziemy:

$$\cos(m \cdot r - \omega t) - \frac{\sin(m \cdot r - \omega t)}{m \cdot r} = \frac{k}{m \cdot \sin^2 \theta}$$

Na dużej odległości od oscylatora drugi składnik można opuścić i wtedy równanie linii elektrycznej



rys. 70.

przybierze postać:

$$\cos(m \cdot r - \omega t) = \frac{k}{m \cdot \sin^2 \theta}$$

Zakładamy t - stałe.

Jeżeli

$$\frac{k}{m \cdot \sin^2 \theta} = 1$$

$$\text{to: } m \cdot r - \omega t = 0$$

$$\text{z: } r = \frac{\omega \cdot t}{m}$$

na r wypada jedna wartość.

Jeżeli natomiast:

$$\frac{k}{m \sin^2 \theta} = a < 1 \quad , \quad \text{to } \cos(mr - \omega t) = a$$

a kąt $mr - \omega t = \pm \alpha$;

Stąd

$$r = \frac{\omega t \pm \alpha}{m} = \frac{\omega t}{m} \pm \frac{\alpha}{m} =$$

$$= \frac{\omega t}{u} \pm \frac{\alpha}{m} = u \cdot t \pm \frac{\alpha}{m}$$

r - wypada tu podwójne bo do odległości którą zaburzenia elektromagnetyczne przebyły w czasie t dodaje się lub odejmuje niewielka liczba $\frac{\alpha}{m}$

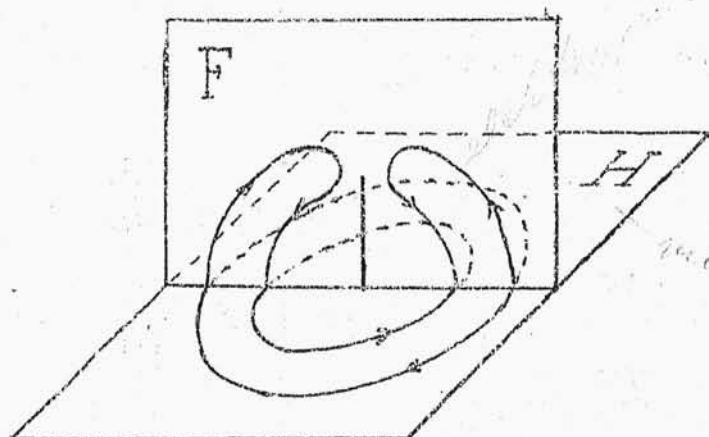
To znaczy, że linja elektryczna ma kształt pętliczki pokazanej na rys. 70.

Pętliczka ta z czasem stopniowo odsuwa się od oscylatora z szybkością światła.

Łączmy obraz linji magnetycznych i elektrycznych wokoło oscylatora elementarnego Hertza zdala od niego pokazany jest w perspektywie na rys. 71 w płaszczyznach xy i yz

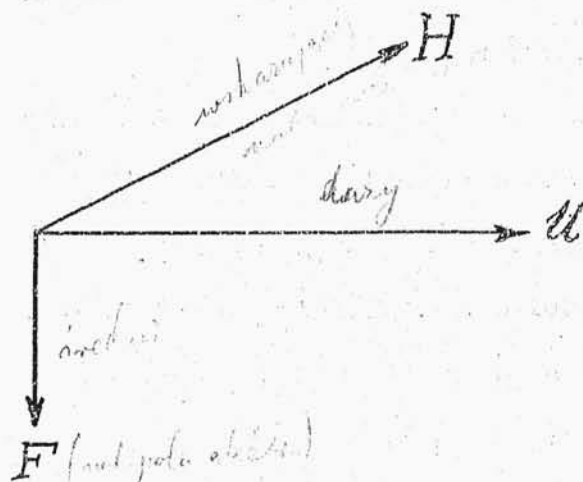
Pomiędzy kierunkami linji a kierunkiem biegu fali elektromagnetycznej zachodzi zawsze związek rys. 72

który można sobie uzmysłwić i zapamiętać zapomocą trzech palców lewej ręki.



rys. 71.

Palec wskazujący wskazuje kierunek natężenia pola



rys. 72.

magnetycznego, Palec średni wskazuje kierunek natężenia pola elektrycznego.

Palec duży - kierunek biegu fali elektromagnetycznej.

55. Twierdzenie Poynting'a. Dla wyznaczenia ilości energii którą promieniuje oscylator szukamy związku pomiędzy natężeniami pól a energią przepływającą w tym polu.

Rozważamy pewien dowolny obszar pola elektromagnetycznego.

W każdym punkcie tego obszaru ilość energii elektromagnetycznej w 1 cm^3 wyraża się według Maxwella wzorem:

$$\frac{F^2}{8\pi} + \frac{H^2}{8\pi}$$

który składa się z dwóch części elektrycznej i magnetycznej.

Wobec tego w całym obszarze ilości energii będzie:

$$W = \int \left(\frac{F^2}{8\pi} + \frac{H^2}{8\pi} \right) dv$$

Zmiana tej ilości energii w jednostkę czasu wyrażać się będzie wzorem:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{1}{4\pi} \int \left(F \cdot \frac{\partial F}{\partial t} + H \cdot \frac{\partial H}{\partial t} \right) dv$$

Wzór ten można przekształcić posiadając się zależnościami istniejącymi pomiędzy natężeniami pola magnetycznego i elektrycznego.)

Wzorami wektorowymi:

$$\frac{1}{u} \cdot \frac{\partial \bar{H}}{\partial t} = - \text{rot } \bar{F}$$

$$\frac{1}{u} \cdot \frac{\partial \bar{F}}{\partial t} = \text{rot } \bar{H}$$

Uwzględniając te zależności wypada:..)

$$\begin{aligned} \bar{F} \cdot \frac{\partial \bar{F}}{\partial t} + \bar{H} \cdot \frac{\partial \bar{H}}{\partial t} &= u (\bar{F} \cdot \text{rot } \bar{H} - \bar{H} \cdot \text{rot } \bar{F}) = \\ &= u \text{div} [\bar{H}, \bar{F}] \end{aligned}$$

Następnie uwzględniamy znaną zależność z rachunku wektorowego (twierdzenie ^{Green'a} Gruna):

$$\int_{\text{obj.}} \text{div} [\bar{H}, \bar{F}] dV = \int_{\text{pow.}} \bar{H} \bar{F} \cdot \text{sin}(\bar{H}, \bar{F}) dS \quad \dots)$$

*) Łatwo sprawdzić podstawiając wzory na α, β, γ i X, Y, Z podane na str. 163.

**) Tu \bar{F} i $\frac{\partial \bar{F}}{\partial t}$ są wektorami jednokierunkowymi, więc iloczyn ich wartości równa się wektorowemu iloczynowi skalarnemu.

...*) Patrz zarys teorii wektorów W. Pogorzelskiego str. 55

....*) " " " " " " " 39

dS - element powierzchni otaczającej obszar objęty całką objętościową. Całka powierzchniowa rozciąga się na całą powierzchnię zamkniętą otaczającą rozważany obszar.

$H \cdot F \cdot \sin(H, F)$ stanowi natężenie wektora $[\hat{H}, \hat{F}]$ prostopadłego do H i do F zwanego wektorem Poynting'a.

Uwzględniając podane tu zależności otrzymamy:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\mu}{4\pi} \cdot \int_{\text{pow.}} H \cdot F \cdot \sin(H, F) \cdot dS$$

Wzór ten wyraża twierdzenie Poynting'a.

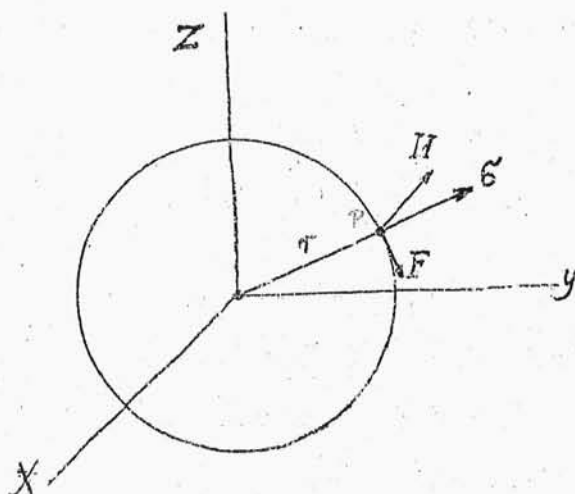
Pojmujemy go w ten sposób, że przyrost energii w jednostce czasu w pewnym obszarze pola elektromagnetycznego równa się $\frac{\mu}{4\pi}$ pomnożonemu przez całkę wektora Poynting'a względem całej powierzchni otaczającej ten obszar.

Wobec tego wzór

$$\frac{\mu}{4\pi} \cdot H \cdot F \cdot \sin(H, F)$$

może być uważany za wyrażenie ilości energii przepływającej w jednostce czasu przez 1 cm.^2 powierzchni otaczającej ten obszar, w kierunku prostopadłym do powierzchni.

56. Kierunek ruchu energii na powierzchni otaczającej oscylator Hertza. Rozważając punkt P na odległości r od środka oscylatora Hertza mamy tam pole elektromagnetyczne, którego wektory w pewnej chwili mają położenie wskazane na rys. 73.



rys. 73.

W tych warunkach dodatni wektor Poynting'a będzie skierowany do środka spókrzędnych odpowiadałoby to przyrostowi energii wewnątrz kuli zakreślonej wokóło oscylatora.

Ponieważ jednak mamy wypływ energii z powyższej kuli, więc tu $\frac{dW}{dt}$ jest ujemne, i natężenie tego wypływu wyrażać się, będzie ujemnym wektorem Poynting'a ; skierowanym od środka na zewnątrz.

57. Gęstość natężenia strumienia energii na powierzchni otaczającej oscylator Hertza. Według powyższych rozważań, uwzględniając, że

$$\chi(H, F) = 90^\circ$$

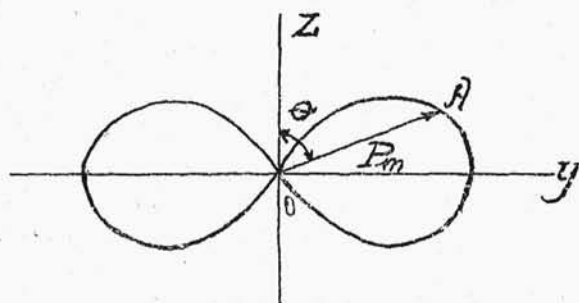
Ilość energii przepływającej w jednostkę czasu przypadająca na 1 cm^2 powierzchni kuli w punkcie P rys. 73 w chwili t będzie:

$$p_t = \frac{\mu}{4\pi} F \cdot H = \frac{\mu}{4\pi} y^2 \cdot \frac{m^4}{r^2} \cdot \sin^2 \chi \cdot \sin^2 \theta$$

Jest to gęstość natężenia strumienia energii w chwili t .

W czasie ona jest zmienna sinusoidalnie i maxima jej wynosi

$$p_m = \frac{\mu}{4\pi} y^2 \cdot \frac{m^4}{r^2} \cdot \sin^2 \theta$$



rys. 74.

Rozkład tej gęstości wokoło oscylatora w płaszczyz-

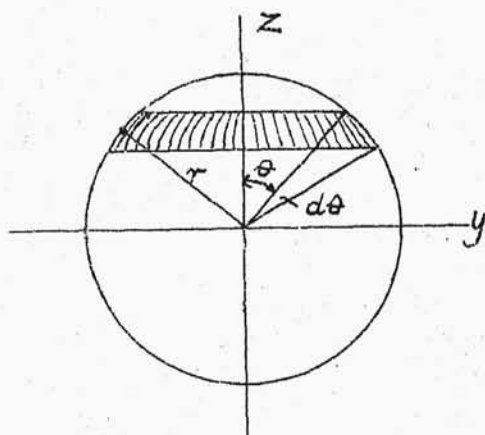
nie przechodzącej przez oś oscylatora przedstawia we współrzędnych biegunowych rys. 74 tu OA wyraża gęstość natężenia promieniowania w kierunku położonym pod kątem θ do osi Z .

Z powyższego wzoru widzimy że ta gęstość jest proporcjonalna do drugiej potęgi sinusa kąta θ .

58. Cała energia wypromieniowana przez oscylator Hertza w ciągu jednego okresu. Wobec symetrycznego rozkładu gęstości natężenia strumienia energii względem osi Z , możemy za element powierzchni wziąć pasek przedstawiony na rys. 75.

Powierzchnia tego paska wynosi:

$$2\pi \cdot r \cdot \sin\theta \cdot r d\theta = 2\pi r^2 \sin\theta \cdot d\theta$$



rys. 75.

Wobec tego natężenie całego strumienia energii

w obwili t będzie:

$$P_t = \frac{1}{2} u \varphi^2 m^4 \sin^2 \chi \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta$$

$$\begin{aligned} \int \sin^3 \theta d\theta &= \int \sin \theta d\theta - \int \cos^2 \theta \sin \theta d\theta = \\ &= -\cos \theta + \frac{1}{3} \cos^3 \theta \text{ czyli: } \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

$$P_t = \frac{2}{3} u \varphi^2 m^4 \sin^2 \chi$$

Cała energia wypromieniowana przez oscylator
w ciągu jednego okresu zmienności ładunków będzie:

$$W_T = \int_0^T P_t dt = \frac{2}{3} u \varphi^2 m^4 \int_0^T \sin^2 \chi dt$$

$$\int_0^T \sin^2 \chi dt = \int_0^T \sin^2(mr - \omega t) dt =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^T dt - \frac{1}{2} \int_0^T \cos 2(mr - \omega t) dt$$

$$\frac{1}{2} \int_0^T dt = \frac{T}{2}$$

$$\frac{1}{2} \int_0^T \cos 2(mr - \omega t) dt = \frac{1}{2} [\sin 2(mr - \omega t)]_0^T \cdot \frac{1}{2\omega}$$

$$= \frac{1}{4\omega} [\sin 2(m \cdot r - \omega t) - \sin 2m r]$$

$$m \cdot r - \omega \cdot T = m \left(r - \frac{\omega T}{m} \right) = m \cdot (r - \lambda)$$

tu $\lambda = u \cdot T$ - jest długością fali elektromagnetycznej.

Rozważamy przepływ energii na znacznej odległości od oscylatora w porównaniu do długości fali.

T - jest małe - prędy szybkozmienne.

Z temi zastrzeżeniami można przyjąć w przybliżeniu:

$$m \cdot (r - \lambda) \cong m \cdot r$$

wtedy druga część rozważanej całki staje się równa zero i

$$\int_0^T \sin^2 x \cdot dt \cong \frac{T}{2}$$

W takim razie:
$$W_T = \frac{2}{3} \cdot u \cdot \varphi^2 \cdot m^4 \cdot \frac{T}{2}$$

Uwzględniając, że:

$$m = \frac{\omega}{u} = \frac{2\pi}{u \cdot T}, \text{ a } \lambda = u \cdot T$$

Otrzymamy:

$$W_T = \frac{16 \cdot \pi^4 \cdot \varphi^2}{3 \lambda^3} \text{ ergów.}$$

Ilość energii wypromieniowana, jak widzimy, jest

wprost proporcjonalna do drugiej potęgi momentu elektrycznego elementarnego oscylatora i odwrotnie proporcjonalna do trzeciej potęgi długości fali.

59. Średnia moc promieniowania elementarnego oscylatora Hertza. Średnią moc znajdziemy dzieląc powyższą energię przez odpowiedni czas.

$$P = \frac{W_T}{T} = \frac{16\pi^4 y^2 u}{3\lambda^4} = 16 \cdot 10^{10} \frac{\pi^4 y^2}{\lambda^4} \frac{\text{erg}}{\text{sek.}}$$

gdzie $T = \frac{\lambda}{u}$, a $u = 3 \cdot 10^{10} \frac{\text{cm}}{\text{sek.}}$

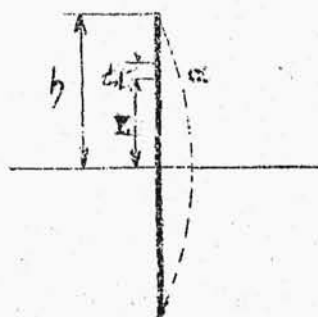
W watach będzie:

$$P = 160000 \cdot \frac{\pi^4 y^2}{\lambda^4}$$

60. Promieniowanie oscylatora linjowego. Wyobraźmy

sobie pręt metalowy, w którym zostały wywołane fale stojące jest to oscylator linjowy.

Najdłuższa fala będzie dwa razy dłuższą od pręta. rys 76 brzusiec prądu będzie w środku.



rys. 76.

W punkcie na odległości Z od początku współrzędnych