

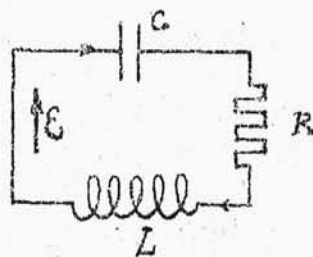
Punkty wykresu odpowiadające kropkowanej cząstce  
linji wykresu odpowiadają stanowi chwilomobwo-  
du i przez to doświadczalnie nie dają się osiągnąć.

### ROZDZIAŁ III.

#### Wykresy rezonansowe w obwodach z R, L, C.

26. Wykres rezonansu w obwodzie nierozgałęzionym  
z R, L, C, przy sile elektromotorycznej obcej  
sinusoidalnie zmiennej. / rys. 27. /

Pod wpływem sinusoidal-  
nie zmiennej obcej siły  
elektromotorycznej  
w zamkniętym obwodzie  
z R, L, C, powstaje  
w chwili rozpoczęcia



rys. 27.

się działania siły elek. prąd wymuszony składający  
się z dwóch części jednej zanikającej drugiej sta-  
łej. Po zaniknięciu części zanikającej pozostaje  
stała, z którą zwykle w praktyce mamy do czynienia.

Wartość skuteczna tego ustalonego prądu zmien-

nego wyraża się jak wiadomo wzorem:

$$J = \frac{\varepsilon}{\sqrt{R^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2}}$$

Zależność natężenia tego prądu przy zmienieniu  $\omega$  od  $\omega_0$  przy zmienionym  $L$  od  $L_0$ , a przy zmienionym  $C$  od  $C_0$  nazywamy wykresami rezonansu.

Maximum natężenia zawsze wypadnie wtedy, gdy:

$$L\omega - \frac{1}{C\omega} = 0$$

a więc:

$$\omega^2 = \frac{1}{LC}$$

$\frac{1}{LC}$  - jest to pulsacja prądów własnych swobodnych obwodu, a więc maximum prądu mamy zawsze wtedy, gdy:  $\omega^2 = \omega_0^2$

tu  $\omega_0$  jest pulsacją własnych swobodnych prądów.

Dla porównywania obwodów pod względem właściwości rezonansowych najlepiej stosować wykres:

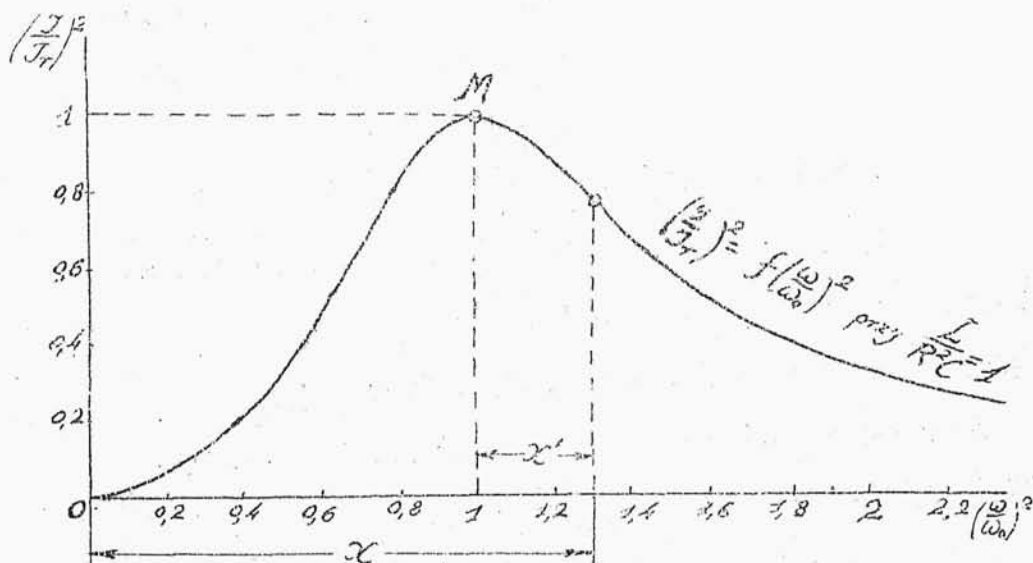
$$\left(\frac{J}{J_r}\right)^2 = \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2$$

Skośem funkcję wyrażającą zależność kwadratu stosunku danego natężenia prądu do natężenia rezonansowego prądu od stosunku pulsacji siły elektromotorycznej do pulsacji swobodnej obwodu.

Zależność ta, jak łatwo sprawdzić wyraża się wzorem w sposób następujący:

$$\left(\frac{J}{J_r}\right)^2 = \frac{1}{1 + \frac{1}{R^2} \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}$$

Jeżeli wprowadzimy skrócone oznaczenie:  $\frac{\omega}{\omega_0} = x$



rys.28.

do powyższego wzoru i uwzględnimy, że

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

to otrzymamy:

$$\left(\frac{J}{J_r}\right)^2 = \frac{1}{1 + \frac{1}{R^2} \frac{L}{C} x^2 \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^2} \quad /54/$$

Wzór ten w tej postaci pozwala łatwo wysnuć wnioski co do ostrości wykresu rezonansu.

Im  $\left(\frac{J}{J_r}\right)^2$  będzie mniejsze przy danym  $x$  tem ostrzejszy wypadnie wykres rezonansu.

Z układu tego wzoru wynika, że wykres rezonansu będzie tem ostrzejszy im mniejsze będą  $R$  i  $C$  i większe  $L$ .

Na wykresie rys.28 linje wykresowe dla

Wszystkich obwodów przechodzą przez punkt  $M$ , odpowiadający współrzędnym  $1-j$ , a więc otracający wykres będzie leżał wewnątrz.

23. Wyznaczenie promienia krzywizny w punkcie rezonansu. Wzór /57/ str. 77 daje się przekształcić jeszcze w następujący sposób:

Przedewszystkiem zastąpimy ułamek  $\frac{L}{R^2C}$  przez wzór zawierający  $\delta$ , na podstawie następujących wywodów:

$$\delta = \alpha \cdot T = \frac{R}{2L} \cdot \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}} = \frac{\pi}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{1}{4}}}$$

a więc:

$$\frac{L}{R^2C} - \frac{1}{4} = \frac{\pi^2}{6^2}$$

albo, opuszczając  $\frac{1}{4}$  wobec  $\frac{L}{R^2C}$ , otrzymamy:

$$\frac{L}{R^2C} = \frac{\pi^2}{6^2} \quad /55/$$

Następnie przeniesiemy początek współrzędnych na linię rzędnej maksymalnej rys. 28, wtedy:

$$X = 1 + X'$$

a przeto: polewior /54/

$$X^2 \left(1 - \frac{1}{X^2}\right)^2 = \left(X - \frac{1}{X}\right)^2 = \left(\frac{X^2 - 1}{X}\right)^2 = \left[\frac{(X+1)(X-1)}{X}\right]^2 = \left[\frac{X'(2+X')}{1+X'}\right]^2$$

Wzmieniemy  $X$  w pobliżu rezonansu, tak żeby  $X'$  można było opuścić wobec 1 i 2, wtedy:

$$X^2 \left(1 - \frac{1}{X^2}\right)^2 = 4 X'^2 \quad /56/$$

Uwzględniając zależność /55/ i /56/, otrzymamy wzór /54/ przekształcony w sposób następu-

jący:

$$\left(\frac{J}{J_r}\right)^2 = \frac{1}{1 + \frac{\pi^2}{J_r^2} \cdot 4 x'^2} \quad /57/$$

Z tego wzoru można znaleźć łatwo wyraz na promień krzywizny przy wierzchołku krzywej rezonansu, korzystając ze wzoru znanego z analitycznej geometrii na promień krzywizny w danym punkcie:

$$\rho_{x'=0} = \frac{\left[1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x'}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{\partial^2 y}{\partial x'^2}}$$

Rozważając jako funkcję  $y$  wzór na  $\left(\frac{J}{J_r}\right)^2$ , otrzymamy:

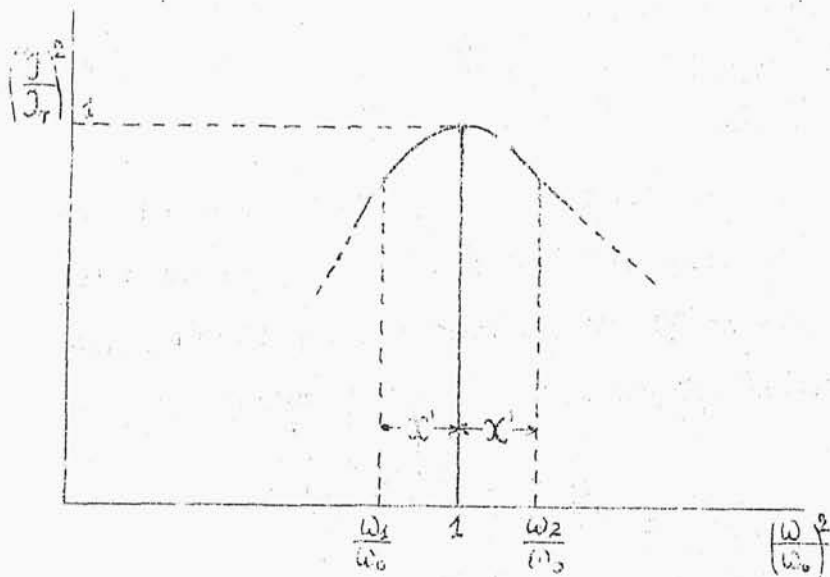
$$\rho = \frac{J_r^2}{8\pi}$$

Promień  $\rho$  charakteryzuje ostrość krzywej rezonansu. Im mniejsze wypada  $\rho$  tem ostrzejsza będzie krzywa rezonansu.

28. Wyznaczenie dekrementu logarytmicznego z wykresu rezonansu. / rys. 29 /. Ze wzoru /57/ wynika:

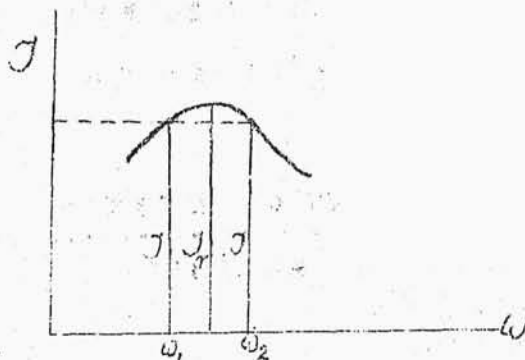
$$J = 2\pi x' \sqrt{\frac{J_r^2}{J_r^2 - J^2}}$$

Korzystając z tego wzoru można tylko biorąc  $x'$  małe w porównaniu do 1, gdyż w tym przypuszczeniu wyprowadzony został wzór /57/. Mając wykres rezonansu we współrzędnych  $J = f(\omega)$



rys.29.

Możemy skorzystać z innego wzoru, który można wyprowadzić z /58/.



Uwzględniając, że  $x'$  wyraża  $\frac{\omega_1}{\omega_0}$ , a  $+x'$  wyraża  $\frac{\omega_2}{\omega_0}$ , możemy napisać:

$$2x' = \frac{\omega_2}{\omega_0} - \frac{\omega_1}{\omega_0} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_0}$$

rys.30.

Wobec tego :

$$J = J_r \cdot \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_0} \cdot \sqrt{\frac{J^2}{J_r^2 - J^2}}$$

Wyberzmy punkty na wykresie /rys.30/ po obu stronach punktu rezonansu tak aby:

$$J = \frac{J_r}{\sqrt{2}}$$

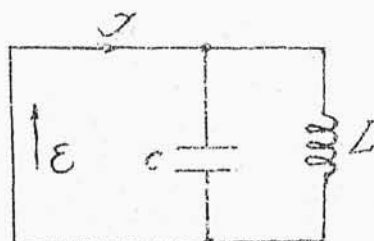
Wtedy:  $\frac{I^2}{I_r^2} - I^2 = 1$

a więc:  $S = \pi \cdot \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_0}$

Wyznaczone w ten sposób  $S$  charakteryzuje całość strat energii jakie zachodzą w danym obwodzie.

29. Wykres rezonansowy w obwodzie z równoległe połączonymi  $L$  i  $C$ . / rys.31. /

Sila elektromotoryczna  $\mathcal{E}$  okresowo zmienna o stałej amplitudzie wywołuje prąd w obwodzie rozgałęzionym z  $L$  i  $C$  połączonymi równolegle.



Przez dodawanie przewodności znajdziemy wzór na prąd przed rozgałęzieniem w postaci:  $\hat{J} = \hat{\mathcal{E}} \cdot (jC\omega - j \cdot \frac{1}{L\omega})$

Stąd:  $J = \mathcal{E} \cdot (C\omega - \frac{1}{L\omega})$

Stąd wykres rezonansu:  $J = f(\omega)$

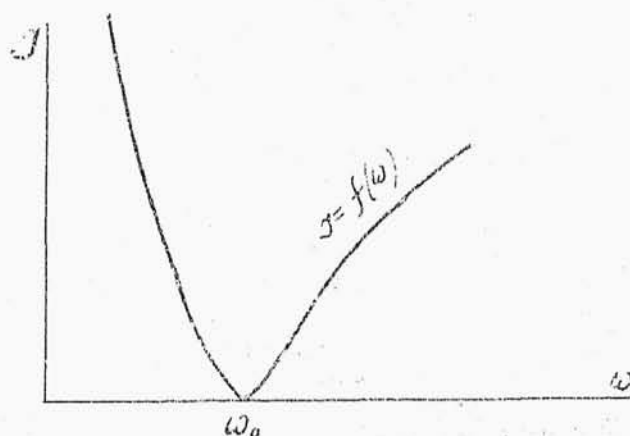
Na rysunku /32/ pokazano zależność wartości absolutnej  $J$  od  $\omega$ .

Przy  $\omega = 0$  i  $\omega = \infty$

prąd  $J = \infty$

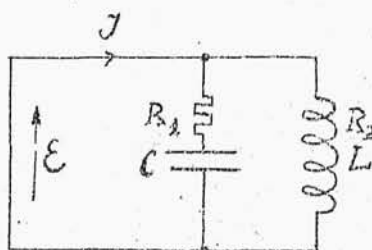
Przy  $\omega^2 = \frac{1}{L \cdot C}$

prąd  $J = 0$  w many antiresonans.



rys. 32.

30. Wykres rezonansowy w obwodzie z  $R, C$  połączonym równolegle z  $R, L$ . /rys. 33/



rys. 33.

Prąd przed rozgałęzieniem przedstawia się wzorem:

$$J = \varepsilon \cdot \sqrt{(g_1 + g_2)^2 + (b_1 + b_2)^2}$$

Rozważmy przypadek szczególny gdy:



$$R_1 = R_2 = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

Wtedy:  $g_1 + g_2 = \frac{\sqrt{\frac{L}{C}}}{\frac{L}{C} + \left(\frac{1}{C\omega}\right)^2} + \frac{\sqrt{\frac{L}{C}}}{\frac{L}{C} + (L\omega)^2} = \sqrt{\frac{C}{L}}$

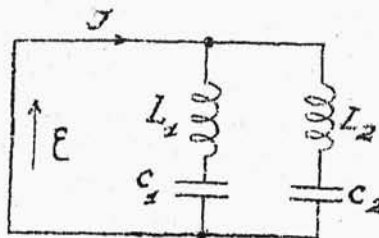
więc:  $b_1 + b_2 = \frac{-\frac{1}{C\omega}}{\frac{L}{C} + \left(\frac{1}{C\omega}\right)^2} + \frac{L\omega}{\frac{L}{C} + (L\omega)^2} = 0$

$$J = \mathcal{E} \cdot (g_1 + g_2) = \mathcal{E} \cdot \sqrt{\frac{C}{L}}$$

Tu natężenie prądu przed rozgałęzieniem nie-  
zależy od częstotliwości.

31. Wykres rezonansowy w obwodzie z  $L_1$ ,  $C_1$ , połą-  
czonemi równolegle z  $L_2$  i  $C_2$ . Prąd przed rozgałęzie-  
niem będzie:

$$J = \mathcal{E} \cdot \sqrt{(g_1 + g_2)^2 + (b_1 + b_2)^2}$$



rys. 34.

$$g_1 \text{ i } g_2 = 0$$

tu:

$$b_1 + b_2 = \frac{X_1 + X_2}{X_1 \cdot X_2}$$

więc:

$$J = \mathcal{E} \cdot \frac{X_1 + X_2}{X_1 \cdot X_2}$$

Gdzie:  $X_1 = L_1 \omega - \frac{1}{C_1 \omega}$ , a  $X_2 = L_2 \omega - \frac{1}{C_2 \omega}$ ;

Ze wzoru na  $J$  widzimy, że prąd wzrasta do nieskończoności przy dwóch wartościach  $\omega$ .

Gdy:  $\omega^2 = \omega_1^2 = \frac{1}{L_1 C_1}$ , wtedy:  $X_1 = L_1 \omega - \frac{1}{C_1 \omega} = 0$

Gdy:  $\omega^2 = \omega_2^2 = \frac{1}{L_2 C_2}$ , wtedy:  $X_2 = L_2 \omega - \frac{1}{C_2 \omega} = 0$

Prąd będzie zero, gdy:

$$\omega^2 = \omega_0^2 = \frac{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}}{L_2 + L_1}$$

wtedy:  $X_1 + X_2 = 0$

Łatwo sprawdzić,

że przy:  $\omega_1 < \omega_2$

$$\omega_1 < \omega_0 < \omega_2$$

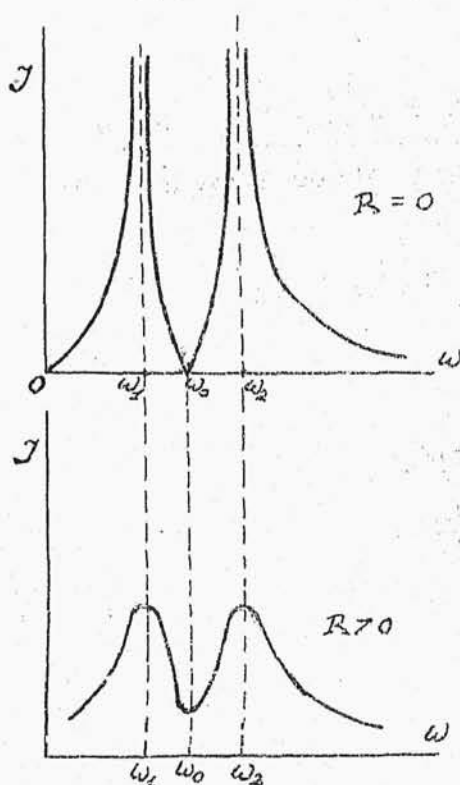
Wykres rezonansu

w tym przypadku ma postać wskazaną na rys. 35.

32. Wykres rezonansu

dla obwodów sprzężonych indukcyjnie i zawierających  $R$ ,  $L$ , i  $C$ .

Prąd w obwodzie pierwotnym jak wiadomo, wyraża się wzorem:



rys. 35.