

w c. g. s. E.M.

$$\rho = \frac{1}{57} \cdot \frac{10^{-2}}{10^3} \cdot 10^9 = 1755$$

$$\eta = \sqrt{\frac{4\pi \cdot u \cdot 2\pi f}{\rho}} = 1,49$$

wtedy:

$$\frac{R_z}{R_s} = 1 + \frac{1}{12} (0,745)^4 - \frac{1}{144} (0,745)^8 = 1,025$$

Przy  $f$  -większem stosunek  $\frac{R_z}{R_s}$  wypada większy, przy  $T$  większem również, natomiast  $\rho$  -wpływa odwrotnie im oporność właściwa większa tem  $\frac{R_z}{R_s}$  wypadnie mniejsze.

38. Praktyczny wzór na oporność przewodników dla prądu zmiennego przy  $\eta \cdot T \geq 70$ . Wobec tego, że szeregi wchodzące w skład wzoru Kelvina /str. 103/ są wolnozbieżne i przeto przy większych częstotliwościach do obliczeń praktycznych nie odpowiadają, stosują się różne wzory uproszczone.

U Breitfelda znajdujemy sposób przekształcania wzoru Kelvina /81/ na wzór prostszy przybliżony:

$$\frac{R_z}{R_s} = \pi \sqrt{\frac{\mu f}{\rho}} \cdot T$$

który może być stosowany przy  $\eta \cdot T \geq 70$

39. Zastępcza warstwa prądu. Przy znaczących częstotliwościach prądu zmiennego możemy sobie wystawić,

że cały prąd płynie tylko w pewnej warstwie przewodnika o grubości  $\delta$  przy powierzchni rys. 40.

Wtedy stosunek oporności da się wyrazić wzorem:

$$\frac{R_z}{R_s} = \frac{\int_0^{\delta} \frac{1}{\pi r^2 - \pi(r-\delta)^2} dr}{\int_0^{\infty} \frac{1}{\pi \cdot r^2} dr} = \frac{r^2}{2r\delta - \delta^2}$$

Wprowadźmy skrót:

$$\frac{R_z}{R_s} = \zeta$$

Wtedy poprzednie równanie przybierze postać:

$$\delta^2 - 2r\delta + \frac{r^2}{\zeta} = 0;$$

Stąd:

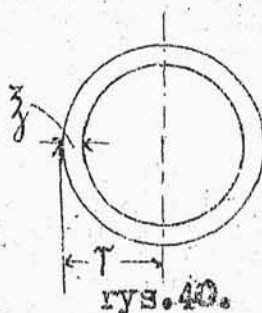
$$\delta = r \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{1}{\zeta}} \right); \quad \sqrt{1 - \frac{1}{\zeta}} \approx 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\zeta}$$

przy  $\zeta$  - dużym, więc:  $\delta = r \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\zeta}$

Jeżeli przyjmiemy wartość na  $\zeta$  z §/38/ to:

$$\delta = r \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\pi \cdot \sqrt{\frac{\mu f}{\rho}} \cdot r} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\rho}{\mu f}}$$

Taki wypada wzór na grubość tej zastępczej warstwy.



rys. 40.

40. Wzór Levasseur'a. Wzór ten dla okrągłych drutów, przy dowolnych częstotliwościach wyprowadza się na podstawie następujących przesłanek.

Według Breitfelda dokładniejszy wzór od poprzedniego /patrz § 33 / dla znacznych częstotliwości przybiera postać:

$$\frac{R_z}{R_s} = \frac{\eta r}{2} \cdot \frac{4\eta^2 r^2}{\sqrt{2} \cdot (1 + 4\eta^2 r^2) - 4\eta r}$$

Wprowadźmy skrót:  $\eta \cdot r = k$

Wtedy:

$$\begin{aligned} \frac{R_z}{R_s} &= \frac{k}{2} \cdot \frac{4k^2}{\sqrt{2} (1 + 4k^2) - 4k} = \\ &= \frac{k}{2\sqrt{2}} \cdot 4k^2 \left[ 4k^2 - \left( \frac{4}{\sqrt{2}} k - 1 \right) \right]^{-1}; \\ \left[ 4k^2 - \left( \frac{4}{\sqrt{2}} k - 1 \right) \right]^{-1} &= (4k^2)^{-1} + (4k^2)^{-2} \left( \frac{4}{\sqrt{2}} k - 1 \right) + \dots \end{aligned}$$

Stąd: po odrzuceniu dalszych małych składników:

$$\frac{R_z}{R_s} = \frac{k}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{4}$$

Uwzględniając, że:

$$k = \eta r = 2\sqrt{2} \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{\mu \cdot f}{\rho}} \cdot r$$

Znajdziemy:

$$\zeta = \frac{R_z}{R_s} = \pi \cdot r \cdot \sqrt{\frac{\mu \cdot f}{\rho}} + \frac{1}{4}$$

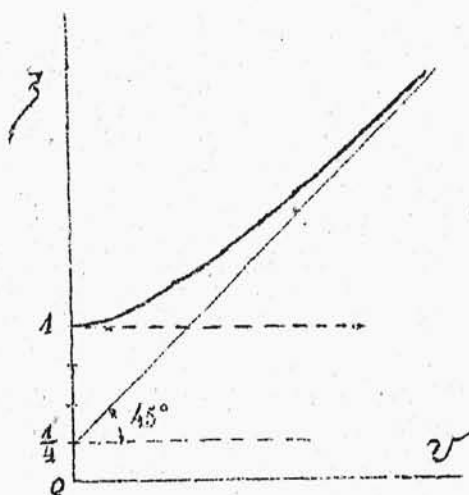
Wprowadźmy skrót.

$$\pi r \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} = v$$

wtedy:

$$\xi = v + \frac{1}{4} \quad /81a/$$

Korzystając z tych wyników i zastanawiając się nad kształtem wykresu funkcji wyrażonej wzorem Kelvina /81/ wysnuwamy następujące wnioski:



rys 41.

1. Wobec tego, że zależność  $\xi$  od  $v$  dla dużych częstotliwości, a więc dla dużych  $v$  ma postać wyrażoną wzorem /81a / wzór ten wyraża asymptotę dla funkcji

$$\xi = f(v)$$

Asymptota ta jest linią prostą poprowadzoną pod kątem  $45^\circ$  do osi  $v$  i przecinającą oś  $\xi$  przy  $\xi = \frac{1}{4}$ .

2. Ze wzoru 81-go tego Kelvina wynika, że przy  $v=0$ ;  $\xi=1$ . Z tegoż wzoru wynika również, że

przy  $V=0 \quad \frac{\partial z}{\partial V}=0.$

Wobec tego kształt naszego wykresu jest taki, że linja tego wykresu jest styczna do prostej poziomej w punkcie  $V=0$ .

Na podstawie tych trzech właściwości można dobrać wzór na rozważaną funkcję.

Wyniki dość zgodne ze wzorem Kelvina daje wzór prosty podany przez Levasseur'a :

$$z = \sqrt[6]{\left(\frac{3}{4}\right)^6 + V^6} + \frac{1}{4}$$

czyli:

$$z = \sqrt[6]{0,17798 + \left(\pi r \sqrt{\frac{\mu f}{\rho}}\right)^6} + 0,25$$

Wszystkie wielkości w jednostkach c.g.s.E.M.

Wyliczenia wskazują, że wartości na  $z$  otrzymane z tego wzoru różnią się od otrzymanych ze wzoru Kelvina nie więcej jak 0 1.15%

W celu wyzyskania całego przekroju drutów stosują się <sup>rurowy</sup> wzory, wstęgi, plecionki.

Oporność drutów zwiniętych w cewki będzie jeszcze większa.

Np. według Cohen'a stosunek oporności drutu zwiniętego szczelnie w jednowarstwową cewkę do

tego samego drutu wyprostowanego wynosi dla wysokiej częstotliwości:

$$\frac{R'_z}{R_z} = 3,06 N^2 d^2$$

$N$  - liczba zwojów na 1 cm. długości cewki,  $d$  - średnica drutu w cm.

Wzór ten można stosować tylko wtedy gdy  $Nd$  - różni się od 1.

41. Wpływ częstotliwości prądu na indukcyjność przewodników. Wobec tego, że w przewodnikach przy wzroście częstotliwości gęstość prądu maleje przy przejściu od warstw zewnętrznych do wewnętrznych, przeto maleje, natężenie pola magnetycznego wewnątrz przewodnika, zewnętrzne zaś pole pozostaje bez zmiany.

Indukcyjnością obwodu elektrycznego nazywamy współczynnik  $L$ , który pomnożony przez połowę kwadratu natężenia prądu daje energję zawartą w polu magnetycznem.

Im słabsze więc mamy pole magnetyczne przy danym prądzie, tem mniejsza będzie indukcyjność.

W miarę zwiększania się częstotliwości prądu maleje energia magnetyczna zawarta wewnątrz przewodnika, a więc maleje indukcyjność.

42. Zmniejszenie się indukcyjności 1 cm. prostego przewodnika o przekroju okrągłym. Oznaczmy przez

$L_5$  - odpowiednią indukcyjność przy prądzie stałym, a przez  $L_z$  - przy prądzie okresowo zmiennym, to według poprzednich wyjaśnień:

Energja pola magnetycznego przy prądzie stałym będzie:

$$\frac{L_5 \cdot J^2}{2}$$

Energja średnia zawarta w polu magnetycznym przy prądzie zmiennym, którego wartość skuteczna będzie równa natężeniu powyższego prądu stałego wypadnie:

$$\frac{L_z \cdot J^2}{2}$$

Według zasadniczych praw elektromagnetycznych energja w  $1 \text{ cm}^3$  pola magnetycznego wyraża się wzorem:

$$\mu \cdot \frac{H^2}{8\pi}$$

Wobec tego, oznaczając przez  $H_5$  -wartość natężenia pola magnetycznego stałego wewnątrz przewodnika na odległości  $x$  od osi, a przez  $H_z$  skuteczną wartość natężenia pola zmiennego w tem samym miejscu i uwzględniając, że element objętości przewodnika o długości  $1 \text{ cm}$ . można wyrazić w  $\text{cm}^3$  wzorem:

$$2\pi x dx \cdot 1$$

Otrzymamy:

$$\frac{L_z \cdot J^2}{2} - \frac{L_5 \cdot J^2}{2} = \frac{1}{8\pi} \mu \int_0^r (H_z^2 - H_5^2) \cdot 2\pi x dx$$

) na str. 117.

Po skróceniu:

$$L_z - L_s = \frac{1}{2j^2} \mu \int_0^r (H_z^2 - H_s^2) \cdot x dx \quad /82/$$

Całka powyższa rozkłada się oczywiście na dwie całki:

$$\int_0^r H_z^2 x dx \quad \text{oraz} \quad \int_0^r H_s^2 x dx$$

Dla pierwszej całki wchodzi w grę pole magnetyczne powstające wewnątrz przewodnika przy prądzie zmiennym.

Z dwóch równań /69/ i /71/ rugujemy  $\mu$  i otrzymujemy w podobny sposób jak poprzednio równanie na maksymalną wartość  $\bar{H}$ .

$$\frac{d^2 \bar{H}}{dx^2} + \frac{1}{x} \cdot \frac{d\bar{H}}{dx} + \left(a^2 - \frac{1}{x^2}\right) \bar{H} = 0$$

Rozwiązanie, mające sens fizyczny dla takiego równania w rozważanych warunkach przedstawia się w sposób następujący:

$$\bar{H} = B \cdot I_1(ax)$$

Uwzględniając że energia zawarta w polu zewnątrz przewodnika jest jednakowa w obu przypadkach i że promień przekroju przewodnika jest  $r$ .





$B$  - stała,  $I_1(ax)$  beselowska funkcja rzędu pierwszego od  $ax$ :

$$I_1(ax) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s (ax)^{1+2s}}{2^{1+2s} \cdot s! (1+s)!} =$$

$$= \frac{ax}{2} \left\{ 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2 x^2}{2^2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{a^4 x^4}{2^2 \cdot 4^2} - \dots \right\}$$

Stały współczynnik  $B$  wyznaczymy ze wzoru na natężenie pola magnetycznego na obwodzie przewodnika:

$$\bar{H}_r = \frac{2 \bar{J}_m}{r}$$

Z drugiej strony:

$$\bar{H}_r = B \cdot I_1(ar)$$

Więc:

$$\frac{2 \bar{J}_m}{r} = B \cdot I_1(ar); B = \frac{2 \bar{J}_m}{r} \cdot \frac{1}{I_1(ar)}$$

$$\bar{H} = \frac{2 \bar{J}_m}{r} \cdot \frac{I_1(ax)}{I_1(ar)}$$

Posługując się poprzednio wyprowadzonym skrótem patrz str. 102 napiszemy: (4.103)

$$I_1(ax) = \frac{ax}{2} (\text{ber}_1 nx + j \text{bei}_1 nx)$$

$$I_1(ar) = \frac{ar}{2} (\text{ber}_1 nr + j \text{bei}_1 nr)$$

Po podstawieniu otrzymamy:

$$\bar{H} = \frac{2 \bar{J}_m}{r} \cdot \frac{x}{r} \cdot \frac{\text{ber}_1 nx + j \text{bei}_1 nx}{\text{ber}_1 nr + j \text{bei}_1 nr}$$

Przekształcając na wzory potęgowe otrzymamy:

$$\bar{H} = \frac{2 \bar{J}_m}{r^2} \cdot x \cdot \frac{\sqrt{\text{ber}_1^2(nx) + \text{bei}_1^2(nx)}}{\sqrt{\text{ber}_1^2(nr) + \text{bei}_1^2(nr)}} e^{j\varphi}$$

A więc wartość amplitudy pola będzie:

$$H_m = \frac{2 \bar{J}_m}{r^2} \cdot x \cdot \frac{\sqrt{\text{ber}_1^2(nx) + \text{bei}_1^2(nx)}}{\sqrt{\text{ber}_1^2(nr) + \text{bei}_1^2(nr)}}$$

Do wartości skutecznych przejdziemy dzieląc obie strony przez  $\sqrt{2}$ .

Wtedy kwadrat wartości skutecznej będzie  $H_z^2$  według oznaczenia str. 117.

$$H_z^2 = x^2 \cdot \frac{4}{r^4} \cdot J^2 \cdot \frac{\text{ber}_1^2(nx) + \text{bei}_1^2(nx)}{\text{ber}_1^2(nr) + \text{bei}_1^2(nr)}$$

Uwzględniając ogólne zależności:

$$\text{ber}_1^2 z = \frac{4}{z^2} \cdot \text{bei}_1^2 z$$

$$\text{ber}_1^2 Z = \frac{4}{Z^2} \cdot \text{bei}'^2 Z$$

gdzie przecinki oznaczają pochodne otrzymane

$$\int_0^r H_Z^2 x dx = \frac{4J^2}{r^2} \cdot \frac{1}{\text{ber}'^2(nr) + \text{bei}'^2(nr)} \cdot \int_0^r x \{ \text{ber}'^2(nx) + \text{bei}'^2(nx) \} dx$$

Po przeprowadzeniu całkowania otrzymujemy:

$$\int_0^r H_Z^2 x dx = \frac{4J^2}{nr} \cdot \left( \frac{\text{ber} \cdot \text{ber}' + \text{bei} \cdot \text{bei}'}{\text{ber}'^2 + \text{bei}'^2} \right)_{(nr)}$$

Druga całka rozwiązuje się bardzo prosto.

Natężenie pola magnetycznego na odległości

X od środka wyznacza się ze wzoru: patrz str. 95 wzór 68

$$4\pi \cdot u \cdot \pi x^2 = \int H_s dx = H_s \cdot 2\pi x$$

$$H_s = 2\pi u x$$

Przy równomiernym rozkładzie prądu:

$$u = \frac{J}{\pi r^2}$$

Więc:

$$H_s = 2J \cdot \frac{x}{r^2}$$

Wobec tego całka rozwiązuje się w sposób następu-

jący :

$$\int_0^r H_s^2 x dx = \frac{4J^2}{r^4} \cdot \int_0^r x^3 dx = J^2 ;$$

Wprowadzając znalezione wartości całek do wzoru /82/ na str. 117 otrzymamy:

$$L_z - L_s = \mu \cdot \left\{ \frac{2}{\pi \cdot r} \left( \frac{\text{ber} \cdot \text{ber}' + \text{bei} \cdot \text{bei}'}{\text{ber}^2 + \text{bei}^2} \right) - \frac{1}{(\pi r)^2} \right\}$$

Stąd dla  $\pi \cdot r \leq 2$  w przybliżeniu:

$$L_z = L_s - \frac{1}{48} \left( \frac{\pi r}{2} \right)^4 + \frac{13}{8640} \left( \frac{\pi r}{2} \right)^6$$

Dla znacznych wartości  $\pi r$ , otrzymuje się wzór przybliżony Zenneck'a:

$$L_z = L_s + \mu \left\{ \frac{1,424}{\pi \cdot r} - \frac{0,160}{(\pi r)^2} - 0,5 \right\}$$

43. Cewka w obwodzie prądu szybkozmiennego. Cewki utworzone ze zwojów drutu jednowarstwowe lub kilka warstwowe mają własności, które nie wyczerpują się indukcyjnością i opornością omową.

Poszczególne zwoje cewki stanowią przewodniki oddzielone od siebie izolacją. Pomiedzy przyległymi zwojami mamy różnice potencjałów elektrycznych, a więc nieodzownie objawia się pojemność elektryczna w takich układach.

Poszczególne warstwy cewki wielowarstwowej