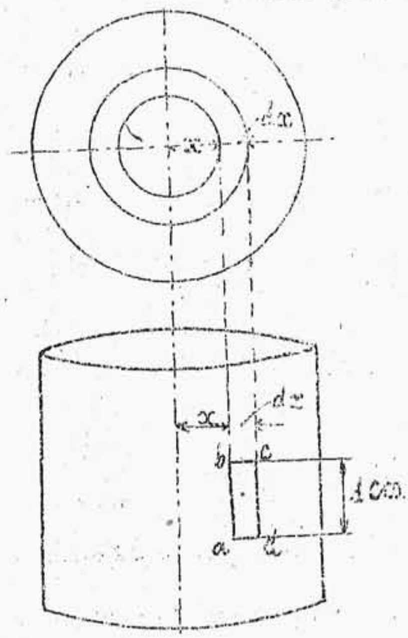
R O Z D Z I A Ł IV.

Zależność L, R, C, od częstotliwości prądu.

36. Rozkład gęstości prądu w przewodniku o przekroju okrągłym przy prądzie zmiennym.



rys. 38.

Zestawiamy dwa równania na podstawie właściwości pola elektromagnetycznego.

Równanie pierwsze otrzymuje się na zasadzie prawa:

$$4\pi i = \int_0 H\,dl \qquad /68/$$

gdzie i - jest prąd objęty zamkniętą linją sił magnetycznych, H natężenie pola magnetycznego, dl -

cząstka linji magnetycznej zamkniętej wzdłuż której bierzemy całkę.

Rozważamy przewodnik, o przekroju kołowym rys. 38 wzdłuż którego płynie prąd.

Zakładamy, że rozkład gęstości prądu jest symetryczny względem osi przewodnika i gęstość ta na odległości x od osi w chwili t wynosi $- u$.

Wypisując równanie /68/ dla obwodu koła o promieniu x i różniczkując go, otrzymamy wzór:

$$4\pi(u 2\pi x\,dx) = \frac{\partial(2\pi x H)}{\partial x}\,dx$$

albo po wyznaczeniu pochodnej od $2\pi x H$ i skróceniu, otrzymamy:

$$4\pi u x = H + x\frac{\partial H}{\partial x} \qquad /69/$$

jest to jedno równanie. Drugie równanie otrzymamy, wyznaczając wyraz na siłę elektromotoryczną powstającą w obwodzie elementarnego prostokąta $abcd$ rys. 38 mającego boki 1 cm. i dx, pod wpływem zmiennego strumienia magnetycznego objętego obwodem tego prostokąta.

Ogólny wzór na taką siłę elektromotoryczną ma postać: $\mathcal{E} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t}$

$\mathcal{E}$ - siła elektromotoryczna,

Φ - strumień magnetyczny objęty obwodem.

W rozważanym przypadku mamy strumień elementarny, więc i siła elektromotoryczna jest elementarna:

$$d\mathcal{E} = -\frac{\partial(d\Phi)}{\partial t}$$

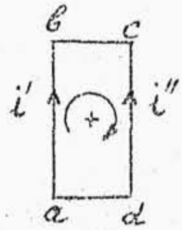
tu:

$$d\Phi = \mu H dx \cdot 1$$

więc:

$$d\mathcal{E} = -\mu dx \cdot \frac{\partial H}{\partial t} \qquad /70/$$

Według drugiego prawa Kirchhoffa dla obwodu $a\,b\,c\,d\ldots$ rys. 39.



rys.39.

$$d\mathcal{E} = i'r - i''r$$

tu:

$$ir = \varrho \cdot \frac{l}{q} \cdot qu = \varrho u l$$

a przy:

$$l = 1\,; \quad ir = \varrho u$$

a wobec tego:

$$d\mathcal{E} = \varrho u - \left(\varrho u + \frac{\partial(\varrho u)}{\partial x} dx\right)$$

albo:

$$d\mathcal{E} = -\frac{\partial(\varrho u)}{\partial x} dx$$

Uwzględniając wzór 70-ty otrzymamy równanie:

$$\mu dx \cdot \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial(\varrho u)}{\partial x} dx$$

albo:

$$\mu \cdot \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial(\varrho \cdot u)}{\partial x}$$

Jeżeli założymy, że materjał, z którego jest zrobiony przewodnik, mamy jednorodny, to ϱ nie zależy od $\mathcal{X}$ i przeto:

$$\mu \cdot \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial(\varrho u)}{\partial x} \qquad /71/$$

Z dwóch równań /69/ i /71 / rugujemy H w sposób następujący:

Równanie 69-te różniczkujemy po t ,wtedy otrzymamy:

$$4\pi x \cdot \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t} + x \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial H}{\partial t}\right) \qquad /72/$$

Do otrzymanego w ten sposób równania 72-go podstawiamy z równania 71-go wyraz:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\varrho}{\mu} \cdot \frac{\partial u}{\partial x}$$

wtedy otrzymamy:

$$4\pi x \cdot \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\varrho}{\mu} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + x \cdot \frac{\varrho}{\mu} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Zmieniając porządek wyrazów i dzieląc przez $x \cdot \frac{\varrho}{\mu}$ otrzymamy równanie:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{4\pi\mu}{\varrho} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \qquad /73/$$

Zakładamy, że natężenie prądu zmienia się w zależności od czasu sinusoidalnie, a więc symbolicznie możemy napisać: $u = \bar{u} \cdot e^{j\omega t}$

tu $\bar{u}$ - oznacza wartość maximalną gęstości prądu.

w miejscu odległem o $\mathcal{X}$ od osi przewodnika.

Wprowadzając ten wyraz na u do równania 73-go otrzymamy równanie z pochodnemi pełnemi, bo $\bar{u}$ od czasu nie zależy:

$$\frac{d^2\bar{u}}{d\mathcal{X}^2}+\frac{1}{\mathcal{X}}\cdot\frac{d\bar{u}}{d\mathcal{X}}-\frac{4\pi\mu}{\rho}\cdot j\omega\bar{u}=0 \qquad /74/$$

Jest to równanie określające rozkład gęstości prądu w poprzecznym przekroju przewodnika.

Wprowadźmy skrót:

$$\alpha^2=-\frac{4\pi\mu}{\rho}\cdot j\omega$$

Wtedy powyższe równanie przybierze postać:

$$\frac{d^2\bar{u}}{d\mathcal{X}^2}+\frac{1}{\mathcal{X}}\cdot\frac{d\bar{u}}{d\mathcal{X}}+\alpha^2\bar{u}=0 \qquad /75/$$

Rozwiązanie ogólne takiego **równania różniczkowego** drugiego rzędu stanowi sumę dwóch składników wyrażających dwa rozwiązania szczególne, ze względu jednak na szczególne warunki fizyczne rozważanego zagadnienia rozwiązaniem mającem fizyczne znaczenie będzie jedno rozwiązanie szczególne, gdyż drugie przybiera dla $\mathcal{X}=0$ wartość nieskończenie wielką która nie może stanowić żadnej wielkości realnej.

Rozwiązanie takiego równania mające sens fizyczny ma postać następującą *)

$$\bar{\mathfrak{u}} = \mathfrak{A} \cdot I_{0(ax)} \qquad /76/$$

$\mathfrak{A}$ - stały spółczynnik, wartość którego dalej wyznaczymy:

$$I_{0(ax)} = 1 - \frac{a^2 x^2}{2^2} + \frac{a^4 x^4}{2^2 \cdot 4^2} - \frac{a^6 \cdot x^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \frac{a^8 \cdot x^8}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2} \cdots = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s \cdot (ax)^{2s}}{2^{2s} \cdot (s!)^2}$$

Przy tem $0!$ uważamy za 1.

Funkcja $I_{0(ax)}$ nazywa się funkcją cylindryczną pierwszego rodzaju albo funkcją Bessela, w szczególności jest to funkcja Bessela rzędu zerowego. Dla wyznaczenia stałej $\mathfrak{A}$ niezależnej ani od czasu ani od położenia punktu wewnątrz przewodnika piszemy wyraz na amplitudę całego prądu w przewodniku:

$$\bar{J}_m = \int_0^r \bar{u} \, 2\pi x \, dx = \mathfrak{A} \cdot 2\pi \int_0^r I_{0(ax)} \, x \, dx \qquad /77/$$

---

*) Matematyczne przekształcenia prowadzące do tego rozwiązania patrz: O.Breitfeld Analysis von Grundproblemen der theoretischen Wechselstromtechnik.

Całkę powyższą znajdujemy na zasadzie następujących przesłanek:

Z równania /74/ wypada:

$$x \cdot \frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{du}{dx} + a^2 \bar{u} x = 0$$

stąd:

$$\frac{d}{dx}\left(x \cdot \frac{d\bar{u}}{dx}\right) = -a^2 \bar{u} x$$

Ponieważ:

$$\bar{u} = A \cdot I_{0(ax)}$$

więc, oznaczając pochodną funkcji beselowskiej po (ax), zapomocą przecinka u góry znajdziemy:

$$\frac{d}{dx}\left[ax\, I'_{0(ax)}\right] = -a^2 I_{0(ax)} \cdot x \qquad /78/$$

Dalej:

$$I'_{0(ax)} = -I_{1(ax)}$$

Gdzie $I_{1(ax)}$ nazywa się funkcją Beselowską pierwszego rzędu, stanowi ona szereg następujący:

$$I_{1(ax)} = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s \cdot (ax)^{1+2s}}{2^{1+2s} \cdot s! \cdot (1+s)!}$$

Całkując wzór /78/ i podstawiając powyższą wartość na $I'_{0(ax)}$ znajdziemy:

$$ax I_{1(ax)} = \int a^2 I_{0(ax)}\, x\, dx$$

albo wprowadzając granice całkowania:

$$\int_0^r a^2 I_{0(ax)}\, x\, dx = a r I_{1(ar)}$$

Stąd:

$$\int_0^r I_{0(ax)}\, x\, dx = \frac{r}{a} \cdot I_{1(ar)}$$

Podstawiając ten wyraz na całkę do wzoru /77/ znajdziemy:

$$J_m = A \cdot 2\pi \cdot \frac{r}{a} I_{1(ar)}$$

Stąd:

$$A = \frac{J_m \cdot a}{2\pi r \cdot I_{1(ar)}}$$

Wobec tego:

$$\overline{\mathcal{U}} = \frac{J_m a}{2\pi r} \cdot \frac{I_{0(ax)}}{I_{1(ar)}} \qquad /79/$$

Wprowadźmy skrót:

$$z^2 = j a^2 x^2 = \frac{4\pi\mu}{\rho} \cdot \omega \cdot x^2$$

Wtedy:

$$a^2x^2 = -j z^2;\ a^4x^4 = -z^4;\ a^6x^6 = jz^6 \text{ it.d.}$$

$$I_{0(ax)} = \left(1 - \frac{z^4}{2^2 \cdot 4^2} + \frac{z^8}{2^2 4^2 6^2 8^2} - \frac{z^{12}}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2 \cdot 10^2 \cdot 12^2} + \dots\right) +$$

$$+ j\left(\frac{z^2}{2^2} - \frac{z^6}{2^2 4^2 6^2} + \frac{z^{10}}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2 \cdot 10^2} - \dots\right).$$

Albo, używając skrótów według Lorda Kelvina:

$$I_{0(ax)} = \mathrm{ber}\, z + j\, \mathrm{bei}\, z$$

W drugiej funkcji wyprowadzimy naprzód $\frac{ar}{2}$ za nawias:

$$I_{1(ar)} = \frac{ar}{2} \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s \cdot (a^2 r)^{2s}}{2^{2s} \cdot s! \cdot (1+s)!}$$

i podobnie jak poprzednio:

$$Z_1^2 = ja^2 \cdot r^2 = \frac{4\pi\mu}{\rho}\omega r^2 = \eta^2 \cdot r^2$$

wtedy otrzymamy:

$$I_{1(ar)} = \frac{ar}{2}\left[\left(1 - \frac{1}{3}\cdot\frac{Z_1^4}{2^2\cdot 4^2} + \frac{1}{5}\cdot\frac{Z_1^8}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2\cdot 8^2} - \dots\right)_{Z_1=\eta r} +\right.$$

$$\left. + j\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{Z_1^2}{2^2} - \frac{1}{4}\cdot\frac{Z_1^6}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2} + \frac{1}{6}\cdot\frac{Z_1^{10}}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2\cdot 8^2\cdot 10^2} + \dots\right)_{Z_1=\eta\cdot r}\right]$$

Albo używając skrótów:

$$I_{1(ar)} = \frac{ar}{2}\left(ber_1 \eta r + j\, bei_1 \eta r\right)$$

Podstawiając wyrazy dla funkcji beselowskich do równania 79-go otrzymamy:

$$\bar{u} = \frac{J_m}{\pi r^2}\cdot\frac{ber\, Z + j\, bei\, Z}{ber(\eta r) + j\, bei(\eta r)}$$

tu: $\eta = \sqrt{\frac{4\pi\mu}{\rho}\omega} = 2\pi\cdot\sqrt{\frac{2\mu f}{\rho}}$

albo wprowadzając wyrazy potęgowe liczb zespolonych otrzymamy:

$$\bar{u} = \frac{\bar{J}_m}{\pi r^2}\cdot\frac{Z\cdot e^{j\varphi_1}}{K\cdot e^{j\varphi_2}} = \frac{\bar{J}_m}{\pi r^2}\cdot\frac{Z}{K}\cdot e^{j(\varphi_1-\varphi_2)}$$

Tu wprowadziliśmy skróty:

$$Z=\sqrt{(\mathrm{ber}\,Z)^2+(\mathrm{bei}\,Z)^2}\;;\;K=\sqrt{(\mathrm{ber}_1(\eta r))^2+(\mathrm{bei}_1(\eta r))^2}$$

albo prościej:

$$Z=\sqrt{\mathrm{ber}^2 Z+\mathrm{bei}^2 Z}$$

$$K=\sqrt{\mathrm{ber}_1^2(\eta r)+\mathrm{bei}^2(\eta r)}$$

Pozatem kąty φ_1 i φ_2 mają wartości określone wzorami:

$$\mathrm{tg}\,\varphi_1=\frac{\mathrm{bei}\,Z}{\mathrm{ber}\,Z} \quad i \quad \mathrm{tg}\,\varphi_2=\frac{\mathrm{bei}_1(\eta r)}{\mathrm{ber}_1(\eta r)}$$

Wprowadźmy oznaczenie:

$$\frac{I_m}{\pi r^2}\cdot\frac{Z}{K}=\bar{u}_m \qquad /80/$$

oraz: $\varphi_1-\varphi_2=\varphi$, to wzór na gęstość prądu w miejscu na odległości x od osi przewodnika w chwili t da się przedstawić wzorem: patrz str. 98. dół

$$u=\bar{u}\cdot e^{j\omega t}=\bar{u}_m\cdot e^{j\varphi}\cdot e^{j\omega t}=$$

$$=\bar{u}_m\cdot e^{j(\omega t+\varphi)}$$

Tu $\bar{u}_m$ i φ są funkcjami odległości rozważanego punktu od osi przewodnika.

Wzór ten oznacza, że gęstość prądu zmienia się w różnych punktach przekroju rozmaicie, zmiana jest wprawdzie wszędzie sinusoidalna, lecz z różnicą faz rozmaitą zależnie od położenia punktu względem osi przewodnika, pozatem amplituda $\bar{U}_{m}$ wzór /80/ rośnie w miarę oddalania się od osi przewodnika, gdyż $\bar{U}_{m}$ jak widać ze wzoru /80/ jest proporcjonalne do Z.

a $$Z = \sqrt{\mathrm{ber}^2 z + \mathrm{bei}^2 z}$$

gdzie: $$z^2 = \frac{4\pi\mu}{\rho}\cdot\omega\cdot x^2$$

37. Oporność omowa przewodnika dla prądu zmiennego.

Oporność omowa przewodnika dla prądu zmiennego jest inna niż dla prądu stałego ze względu na różną gęstość prądu w różnych warstwach przewodnika.

Wielkość oporności omowej określa się najściślej podług tej mocy prądu przebiegającego w przewódniku, która wytwarza ciepło Joule'a.

Wtedy gdy gęstość prądu we wszystkich warstwach przewodnika jest jednakowa, to oporność omowa dla prądu stałego będzie:

$$R = \frac{P}{J^2}$$

i $$R = \rho\cdot\frac{l}{S}$$

Jeżeli prąd jest tak wolno zmienny, że można przyjąć gęstość prądu tą samą dla całego przekroju, to powyższe wzory zachowują swą postać z zastrzeżeniem, że J wyraża skuteczne natężenie prądu, a P średnią moc prądu wytwarzającą ciepło Joule'a.

Gdy gęstość prądu będzie nie jednostajna, to oporność zawsze wypadnie większą.

Wynika to z następującego rozumowania.

Jeżeli przekrój przewodnika podzielimy na m równych cząstek ΔS, i w każdej cząstce będzie przepływał prąd ΔJ, to moc prądu wytwarzająca ciepło Joule'a wyniesie:

$$(\Delta J)^2 \cdot \rho \cdot \frac{l}{\Delta S} \cdot m$$

Jeżeli zaś jeden z cząstkowych prądów ΔJ przeniesiemy z jednej cząstki przekroju do drugiej, to będziemy mieli jedną cząstkę przewodnika pozbawioną prądu, i jedną z prądem podwójnym, wtedy rozważana moc prądu będzie:

$$(\Delta J)^2 \cdot \rho \cdot \frac{l}{\Delta S}(m-2) + (2\Delta J)^2 \cdot \rho \cdot \frac{l}{\Delta S} =$$
$$= (\Delta J)^2 \rho \cdot \frac{l}{\Delta S} \cdot (m+2)$$

ta moc jest oczywiście większa od poprzedniej.

Dla wyznaczenia wzoru na oporność okrągłego przewodnika, dla prądu zmiennego przy rozkładzie gęstości obliczonym w poprzednim paragrafie, przedewszystkiem wyprowadzimy wzór na moc prądu wytwarzającą w tym przypadku ciepło Joule'a.

Amplituda prądu zmiennego przepływającego w warstewce o grubości dx /patrz rys.38/ wyniesie:

$$\bar{u}_m \cdot 2\pi x \cdot dx$$

Prąd jest sinusoidalnie zmienny, a więc kwadrat wartości skutecznej prądu w jednej warstewce będzie:

$$\frac{(\bar{u}_m \cdot 2\pi x\, dx)^2}{2}$$

Opór omowy tej warstewki wynosi:

$$\rho \cdot \frac{l}{2\pi x\, dx}$$

Wobec tego moc prądu na jednostkę długości przewodnika wypadnie: $\rho \cdot \bar{u}_m^2 \cdot \pi x \cdot dx$

Dla całego przewodnika moc ta wyrażać się będzie całką: $P = \rho \cdot \pi \int_0^r \bar{u}_m^2\, x\, dx$

Według poprzednich wywodów:

$$\bar{u}_m = \frac{\bar{J}_m}{\pi r^2} \cdot \frac{\sqrt{\operatorname{ber}^2 z + \operatorname{bei}^2 z}}{\sqrt{\operatorname{ber}_1^2(nr) + \operatorname{bei}_1^2(nr)}}$$

Więc:

$$P=\left(\frac{J_m}{\pi r^2}\right)^2\cdot\frac{1}{ber_1^2(\eta r)+bei_1^2(\eta r)}\cdot\pi\cdot\rho\int_0^r x\{ber^2 z+bei^2 z\}dx$$

Tu $z=\eta x$ gdzie $\eta=\sqrt{\frac{4\pi\mu\omega}{\rho}}$

Wprowadzając wyraz na μ do równania /75/ można znaleźć wyrazy na poszczególne składniki powyższej całki.*)

Stosując oznaczenie w postaci kreski u góry dla pochodnej danej funkcji, otrzymamy po uproszczeniu:

$$P=\left(\frac{J_m}{\pi r^2}\right)^2\cdot\pi\cdot\rho\cdot\frac{r}{\eta}\cdot\frac{bei'(\eta r)\cdot ber(\eta r)-ber'(\eta r)\cdot bei(\eta r)}{ber_1^2(\eta r)+bei_1^2(\eta r)}$$

Jeżeli J -będzie wartością skuteczną prądu, to $J=\frac{J_m}{\sqrt{2}}$ i powyższy wzór da się napisać krócej:

$$P=J^2\left\{\frac{\rho}{\pi r^2}\cdot\frac{2}{r\eta}\cdot\left(\frac{bei'ber-ber'bei}{ber_1^2+bei_1^2}\right)_{(\eta r)}\right\}$$

Wobec tego oporność omowa przewodnika dla prądu zmiennego wyniesie:

$$R_z=\frac{\rho}{\pi r^2}\cdot\frac{2}{r\eta}\cdot\left(\frac{bei'ber-ber'bei}{ber_1^2+bei_1^2}\right)_{(\eta r)}$$

---

*) Patrz Breitfeld jak wyżej str. 100

W pewnej mierze wzór ten może być uproszczony, korzystając z zależności:

$$bei'z = \frac{z}{2} ber_1 z \; ; \; ber'z = -\frac{z}{2} bei_1 z$$

Wprowadzając bei' i ber' w mianowniku według powyższych zależności, otrzymamy:

$$R_z = \frac{\varrho}{\pi r^2} \cdot \frac{\eta r}{2} \cdot \left(\frac{bei'ber - ber'bei}{bei'^2 + ber'^2} \right)_{(\eta r}$$

Ten sam przewodnik dla prądu stałego ma oporność omową:
$$R_s = \frac{\varrho}{\pi r^2}$$

Wobec tego stosunek oporności dla prądu zmiennego do oprności dla prądu stałego wyniesie:

$$\frac{R_z}{R_s} = \frac{\eta r}{2} \left(\frac{bei'ber - ber'bei}{bei'^2 + ber'^2} \right)_{(\eta r)} \quad /81/$$

Gdy $\eta r \leq 2$ w przybliżeniu przyjęć można opuszczając małe składniki:

$$\frac{R_z}{R_s} = 1 + \frac{1}{12}\left(\frac{\eta r}{2}\right)^4 - \frac{1}{144}\left(\frac{\eta r}{2}\right)^8$$

Przykład. Przewodnik miedziany:

$$\mu = 1 \; ; \; r = 1cm \; ; \; f = 50$$

Obliczamy η w bezwzględnych jednostkach:

Oporność właściwa = na dług. 1cm. i przekrój 1 cm^2

w c. g. s. E.M.

$$\rho = \frac{1}{57} \cdot \frac{10^{-2}}{10^{2}} \cdot 10^{9} = 1755$$

$$\eta = \sqrt{\frac{4\pi\mu \cdot 2\pi f}{\rho}} = 1{,}49$$

wtedy:

$$\frac{R_z}{R_s} = 1 + \frac{1}{12}(0{,}745)^4 - \frac{1}{144}(0{,}745)^8 = 1{,}025$$

Przy f -większem stosunek $\frac{R_z}{R_s}$ wypada większy, przy r większem również, natomiast ρ -wpływa odwrotnie im oporność właściwa większa tem $\frac{R_z}{R_s}$ wypadnie mniejsze.

38. Praktyczny wzór na oporność przewodników dla prądu zmiennego przy $\eta \cdot r \geqslant 70$. Wobec tego, że szeregi wchodzące w skład wzoru Kelvina /str. 103/ są wolnozbieżne i przeto przy większych częstotliwościach do obliczeń praktycznych nie odpowiednie, stosują się różne wzory uproszczone.

U Breitfelda znajdujemy sposób przekształcenia wzoru Kelvina /81/ na wzór prostszy przybliżony:

$$\frac{R_z}{R_s} = \pi\sqrt{\frac{\mu f}{\rho}} \cdot r$$

który może być stosowany przy $\eta \cdot r \geqslant 70$

39. Zastępcza warstwa prądu. Przy znacznych częstotliwościach prądu zmiennego możemy sobie wystawić,