$$\frac{C_z}{C_s} = \frac{2}{\alpha r}\cdot\frac{\frac{\alpha r}{2}\left(1-\frac{(\alpha r)^2}{2^3}\right)}{1-\frac{(\alpha r)^2}{2^2}} = \frac{1-\frac{(\alpha r)^2}{2^2}\cdot\frac{1}{2}}{1-\frac{(\alpha r)^2}{2^2}} =$$

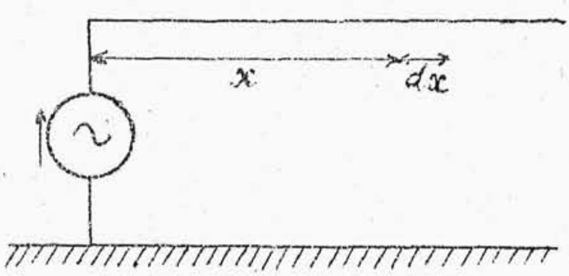
$$= 1+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha r}{2}\right)^2}{1-\left(\frac{\alpha r}{2}\right)^2} \cong 1+\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha r}{2}\right)^2 = 1+4{,}94\cdot 10^{-4} =$$

$$= 1{,}000494.$$

R O Z D Z I A Ł V.

F a l e w d r u c i e w y w o ł a n e s i n u s o i d a l n i e z m i e n n ą s i ł ą e l e k t r o m o t o r y c z n ą.

45. Napięcie i natężenie prądu w fali wymuszonej w drucie nieograniczenie długim, rozpiętym równolegle do powierzchni ziemi i uziemionym na jednym końcu.



rys. 52.

Siła elektromotoryczna wzbudzająca fale działa na przewodzie uziemiającym.

Na jeden cm. długości, drut ma pojemność C, indukcyjność L, oporność omową R i upływność A . Dla cząstki druta dx, według prawa Ohma, oznaczając przez V_1 i V_2 wartości chwilowe napięć odpowiednich punktów względem ziemi rys.53 mamy:

$$V_1 - V_2 = V - \left(V + \frac{\partial V}{\partial x} \cdot dx\right) = -\frac{\partial V}{\partial x} \cdot dx$$

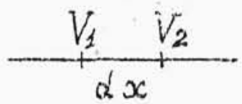
Różnica potencjałów $V_1 - V_2$, równa się sumie spadków napięć na tych odcinku, więc:

$$-\frac{\partial V}{\partial x} \cdot dx = i \cdot R\,dx + L\,dx \cdot \frac{di}{dt}$$

albo dzieląc przez dx, otrzymamy:

$$-\frac{\partial V}{\partial x} = i \cdot R + L \cdot \frac{di}{dt} \qquad /86/$$

Według prawa Kirchhoffa rys. 54:



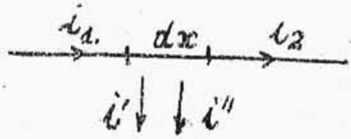
rys.53

Różnica prądów przypływającego i odpływającego z odcinka dx wzdłuż drutu wyraża się wzorem:*)

$$i_1 - i_2 = i - \left(i + \frac{\partial i}{\partial x} \cdot dx\right) = -\frac{\partial i}{\partial x} \cdot dx$$

---

*) i -wartości chwilowe.



rys. 54.

Prąd wpływowy na odcinku dx wyraża się wzorem:

$$i' = A \cdot dx \cdot v$$

Prąd pojemnościowy odcinka dx wyraża się wzorem:

$$i'' = \frac{\partial}{\partial t}(v C \cdot dx) = C \cdot dx \cdot \frac{\partial v}{\partial t}$$

A więc według prawa pierwszego Kirchhoffa.

$$i_1 - i_2 = i' + i''$$

$$-\frac{\partial i}{\partial x} \cdot dx = A \cdot dx \cdot v + C dx \cdot \frac{\partial v}{\partial t}$$

albo skracając przez dx otrzymamy:

$$-\frac{\partial i}{\partial x} = A \cdot v + C \cdot \frac{\partial v}{\partial t} \qquad /87/$$

Zakładamy, że siła elektromotoryczna źródła prądu jest sinusoidalnie zmienna, a więc: da się przedstawić wzorem symbolicznym:

$$\hat{E} = E \cdot e^{j\omega t}$$

Prąd i napięcie w drucie na odległości x od

początku linji będą różnić się w fazie od E,
przeto dla nich wzory przybiorą postać:

$$\hat{V} = V \cdot e^{j(\omega t + \varphi')} \quad \text{oraz:}$$

$$\hat{J} = J \cdot e^{j(\omega t + \varphi'')}$$

Podstawiając te wyrazy na prąd i napięcie do równań /86/ i /87/, otrzymamy wzory symboliczne:

$$-\frac{\partial \hat{V}}{\partial x} = \hat{J}(R + jL\omega)$$

$$-\frac{\partial \hat{J}}{\partial x} = \hat{V}(A + jC\omega)$$

Wprowadźmy skrót:

$$k = \sqrt{R + jL\omega} \cdot \sqrt{A + jC\omega}$$

i wyrugujemy $\hat{J}$ z powyższych równań wtedy otrzymamy:

$$\frac{\partial^2 \hat{V}}{\partial x^2} = k^2 \hat{V}$$

Ogólne rozwiązanie tego równania może być wyrażone wzorem:

$$\hat{V} = \hat{K}' \cdot e^{kx} + \hat{K}'' \cdot e^{-kx}$$

Wprowadźmy założenia graniczne:

Przy:

$$x = 0 \; \ldots\ldots \; \hat{V} = \hat{E}$$ *)

Wobec tego:

$$\hat{K}' + K'' = \hat{E}$$

Przy $x = \infty, \hat{V} = 0$ **) więc musi być $K' = 0$.

Z uwzględnieniem tych wartości na stałe czynniki, wypadnie

$$\hat{V} = \hat{E} \cdot e^{-kx}$$

k - może być przedstawione w postaci liczby zespolonej:

$$k = \sqrt{R + jL\omega} \cdot \sqrt{A + jC\omega} = \alpha + j\beta$$

Więc:

$$\hat{V} = \hat{E} \cdot e^{-\alpha x} \cdot e^{-j\beta x}$$

Ponieważ zaś:

$$\hat{E} = E \cdot e^{j\omega t}$$

a więc:

$$\hat{V} = E \cdot e^{-\alpha x} \cdot e^{j(\omega t - \beta x)}$$

Z równania:

$$-\frac{\partial \hat{V}}{\partial x} = \hat{J}(R + jL\omega)$$

---

*) Wpływ wewnętrznych własności źródła prądu pomijamy.

**) str. 139.

Znajdziemy wzór natężenia prądu:

$$\frac{\partial \hat{V}}{\partial x} = -\hat{E} \cdot k \cdot e^{-kx}$$

Więc:

$$\hat{E} \cdot k \cdot e^{-kx} = \hat{J} \cdot (R + jL\omega)$$

Stąd, uwzględniając wzór na k:

$$\hat{J} = \hat{E} \cdot \frac{\sqrt{A + jC\omega}}{\sqrt{R + jL\omega}} \cdot e^{-kx} = \hat{E} \cdot \frac{1}{Z} \cdot e^{-kx}$$

Ponieważ: $\hat{V} = \hat{E} \cdot e^{-kx}$ przeto: tak zwana oporność falowa drutu będzie:

$$\frac{\hat{V}}{\hat{J}} = \frac{\sqrt{R + jL\omega}}{\sqrt{A + jC\omega}} = Z$$

Rozwinięty wzór na prąd:

$$\hat{J} = E \cdot e^{j\omega t} \cdot \frac{1}{\hat{Z}} \cdot e^{-kx} = \frac{E}{\hat{Z}} \cdot e^{-\alpha x} \cdot e^{j(\omega t - \beta x)}$$

---

*) Przypuśćmy, że skutkiem strat w drucie prąd i napięcie w nieskończoności zanikną.

Gdy R w porównaniu do $L\omega$ jest małe i również R w porównaniu do $C\omega$ niewielkie, to można przyjąć:

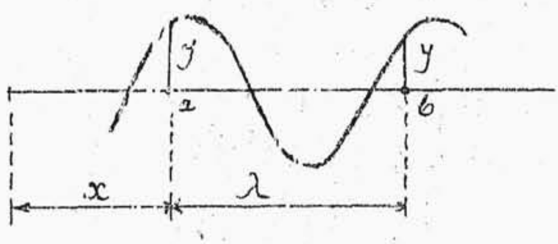
$$Z = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

Wtedy: $\alpha = 0$ i wzory na napięcie i prąd przybierają postać:

$$\hat{V} = E \cdot e^{j(\omega t - \beta x)}$$

$$\hat{J} = E \cdot \sqrt{\frac{C}{L}} \cdot e^{j(\omega t - \beta x)}$$

46. Wyznaczenie długości fali. Ze wzorów na prąd i na napięcie wynika że wielkości te układają się wzdłuż



rys.55.

drutu w postaci fali bieżącej, gdyż wartość każdej z nich w danym punkcie drutu w danej chwili zmienia się z czasem i z odległością od początku spółrzędnych.

Długością fali bieżącej nietłumionej jest odległość pomiędzy dwoma najbliższemi miejscami drutu, gdzie w danej chwili wartości np. napięcia są jednakowe.

Jeżeli taką odległość oznaczymy przez λ rys. 55 - to napięcie w punkcie a na drucie będzie przy $d=0$ *):

$$\hat{V}_a = E \cdot e^{j(\omega t - \beta x)} = E \cdot e^{j\omega t} \cdot e^{-j\beta x}$$

a w punkcie b na drucie będzie:

$$\hat{V}_b = E \cdot e^{j[\omega t - \beta(x+\lambda)]} = E \cdot e^{j\omega t} \cdot e^{-j\beta(x+\lambda)}$$

Jeżeli: $\hat{V}_a = \hat{V}_b$

to: $$e^{-j\beta x} = e^{-j\beta(x+\lambda)}$$

albo: $$e^{-j\beta x} = e^{-j\beta x} \cdot e^{-j\beta\lambda}$$

a więc: $$e^{-j\beta\lambda} = 1$$

---

*) Przy prądach szybkozmiennych R i G małe wobec ωL i ωC.

rozwijając znaczenie powyższego wyrazu otrzymamy:

$$\cos(\beta\lambda) - j\sin(\beta\lambda) = 1$$

Temu równaniu czyni zadość następna liczba po zerze:

$$\beta\lambda = 2\pi$$

a więc:

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta}$$

Przy $\alpha = 0$; gdy $F_1 = 0$ i $A = 0$

$$\beta = \omega\sqrt{L_1 C} \text{ a więc } \lambda = \frac{2\pi}{\omega\sqrt{L_1 C}}$$

Jeżeli rozważamy falę tłumioną to nazwiemy połową długości fali odległość pomiędzy dwoma najbliższemi miejscami drutu, gdzie np. napięcie przybiera wartość zero, a więc np. rys. 55.

$$\hat{V}_a = 0 \text{ i } \hat{V}_b = 0$$

Wtedy uwzględniając wzór str. 138

$$\hat{V} = E \cdot e^{-\alpha x} \cdot e^{j(\bar{\omega}t - \beta x)}$$

$$e^{j(\omega t - \beta x)} = 0 \text{ i } e^{j[\omega t - \beta(x+\lambda)]} = 0$$

a więc dla dowolnych t

$$e^{-j\beta x} = 0 \quad \text{oraz} \quad e^{-j\beta(x+\lambda)} = 0$$

rozwijając te wzory otrzymamy:

$$\cos(\beta x) - j\sin(\beta x) = 0$$

$$\cos[\beta(x+\lambda)] - j\sin[\beta(x+\lambda)] = 0$$

Stąd rozwijając równanie drugie i uwzględniając pierwsze wypadnie:

$$\beta\lambda = 2\pi$$

Przeto:

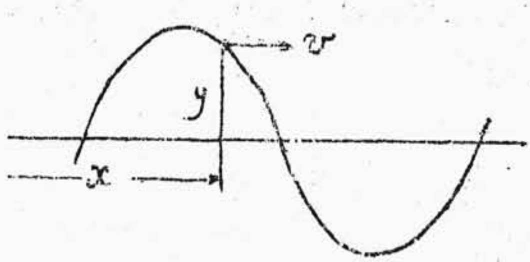
$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta}$$

47. Wyznaczenie szybkości ruchu fali bieżącej.

Wyobraźmy sobie stałą rzędną y rys. 56 fali bieżącej, wziętą na odległości x od początku spółrzędnych i zastanówmy się jaka zależność musi istnieć pomiędzy odległością x , a czasem, aby ta rzędna była stała.

Wyobraźmy sobie np. że jest to fala napięcia, wtedy uwzględniając wzór na napięcie dla fali nietłumionej, wypadnie:

$$e^{j(\omega t-\beta x)}=K=\mathrm{const.}$$



rys. 56.

a więc i:

$$\omega t-\beta x=K'=\mathrm{Const.}$$

Stąd:

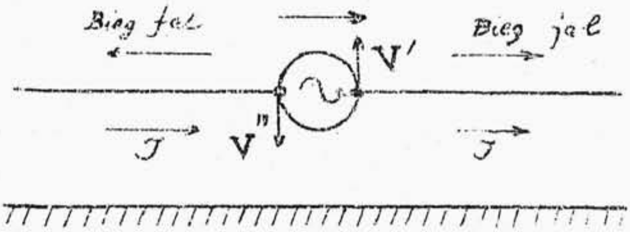
$$x=\frac{\omega t-K'}{\beta}$$

a szybkość zmiany x z czasem będzie szybkością ruchu fali:

$$v=\frac{dx}{dt}=\frac{\bar{\omega}}{\beta}=\frac{\bar{\omega}}{\bar{\omega}\sqrt{LC}}=\frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Dla fali tłumionej biorąc rzędną zerową otrzymamy również:
$$v = \frac{\omega}{\beta}$$
tylko że β teraz będzie inne.

49. Fale w drucie nieograniczenie długim z siłą elektromotoryczną pośrodku. Przyjmujemy że środek



rys. 57.

źródła prądu ma potencjał ziemi, wtedy siła elektromotoryczna równa różnicy potencjałów na końcówkach źródła *) wywoła dwie fale biegnące: jedna pobiegnie w prawo druga w lewo, każda z nich będzie wywołana napięciem odpowiedniej końcówki względem ziemi, napięcia te będą ~~różne~~ równe o znakach przeciwnych:
$$E = V' - (-V'') = V' + V'' \; ; \; V' = V''$$
więc:
$$V' = V'' = \frac{E}{2}$$

*) Pomijamy wewnętrzne opory omowe i indukcyjne.