3. Powrót do równowagi obwodu z R , L , C , w którym równowaga została naruszona przez wywołanie prądu o natężeniu i . Według rozwiązania równania różniczkowego na napięcie kondensatora:

Przy $\frac{R^2}{4L^2} < \frac{1}{LC}$

mamy $v_C = A \cdot e^{-\alpha t} \cdot \sin(\bar{\omega} t + \varphi)$ /16/

Prąd ładujący kondensator będzie:

$$i = C \frac{d v_C}{d t}$$

Podstawiając wzór na napięcie, otrzymamy:

$$i = A \cdot C e^{-\alpha t} \left[\bar{\omega} \cos(\bar{\omega} t + \varphi) - \alpha \sin(\bar{\omega} t + \varphi) \right] \qquad /17/$$

W tych wzorach /16/ i /17/ mamy dwie stałe A i φ ; które należy wyznaczyć, na podstawie założeń początkowych. W chwili $t = 0$; $v_C = 0$; $i = i_0$

Przeto:

$$A \sin \varphi = 0$$

$$A C (\bar{\omega} \cos \varphi - \alpha \sin \varphi) = i_0 \qquad /18/$$

Ponieważ A nie może równać się zeru,

więc: $\sin\varphi = 0$ *)

a więc

$$\varphi = 0$$

Przeto: $\cos\varphi = 1$

Wtedy ze wzoru /18/ otrzymamy:

$$A \cdot C \cdot \bar{\omega} = \dot{i}_o$$

Stąd:

$$A = \frac{\dot{i}_o}{C \cdot \bar{\omega}}$$

Uwzgędniając wartości dla A i φ otrzymamy po podstawieniu do równania 16, wzór na napięcie kondensatora:

$$v_c = \frac{\dot{i}_o}{C\,\bar{\omega}} \cdot e^{-\alpha t} \cdot \sin\bar{\omega}t \qquad /19/$$

a po podstawieniu do równania 17, wzór na prąd:

$$\dot{i} = \frac{\dot{i}_o}{\bar{\omega}} \cdot e^{-\alpha t} \cdot (\bar{\omega}\cos\bar{\omega}t - \alpha \sin \bar{\omega} t)$$

---

*) Inne wartości na φ prowadzą do tych samych rozwiązań.

Wprowadzając kąt φ' ,którego wartośc określa wzór:

$$tg\,\varphi' = \frac{\bar{\omega}}{\alpha}$$

oraz zastępując różnicę cosinusojdy i sinusojdy jedną sinusojdą, otrzymamy:

$$i = \frac{i_0\sqrt{\alpha^2+\bar{\omega}^2}}{\bar{\omega}} \cdot e^{-\alpha t} \sin\left[\bar{\omega}t + (\pi - \varphi')\right]$$

a uwzględniając, że $\sqrt{\alpha^2+\bar{\omega}^2} = \sqrt{\frac{1}{LC}}$ wypadnie:

$$i = \frac{i_0}{\bar{\omega}\sqrt{LC}} \cdot e^{-\alpha t} \cdot \sin\left[\bar{\omega}t + (\pi - \varphi')\right] \qquad /20/$$

Ze wzorów 19 i 20 widzimy, że napięcie i prąd zmieniają się według prawa tłumionej sinusojdy z różnicą faz $\pi - \varphi'$

4. Prądy własne swobodne. Jeżeli oporność omowa w rozważanym obwodzie będzie równa zeru,to powyższe prądy i napięcia będą sinusoidalne,trwające wiecznre, gdyż:

$$\alpha = \frac{R}{2L} = 0$$

a więc: $e^{-\alpha t} = 1$

5. Okres prądów własnych w obwodzie z R, L, C.

Z powyższych wzorów widzimy, że wszystkie rozważane napięcia i prądy mają jednakową i stałą częstotliwość zależną jedynie od właściwości obwodu. Pulsacja $\tilde{\omega}$, dla tych prądów będzie

$$\tilde{\omega} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$$

stąd:

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}}$$

a częstotliwość:

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$$

Z tego wzoru wynika że częstotliwość jest tem mniejsza im większe mamy tłumienie.

Największą częstotliwość mają prądy własne swobodne gdy $R = 0$

$$f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{LC}}$$

$$T_0 = 2\pi\sqrt{LC} \qquad /21/$$

6. Obliczenie częstotliwości własnej swobodnej i odpowiedniej długości fali. Podstawiając we wzór /21/ L w henrach a C w faradach otrzymamy T w sekundach

$$T_{(sek)} = 2\pi \cdot \sqrt{L^{(H)} \cdot C^{(F)}}$$

Uwzględniając , że

1 henr = 10^9 cm.

1 farad = 9.10^{11} cm.

możemy wyrazić okres T podstawiając na L wartość wyrażoną w jednostkach c.g.s.E.M. , a na C wartość w jednostkach c.g.s.E.S. do następującego równania:

$$T_{sek.} = \frac{2\pi}{3\cdot 10^{10}} \cdot \sqrt{L^{(cm.)} \cdot C^{(cm.)}}$$

Liczba 3.10^{10} jest liczbą mianowaną wyraża szybkość światła w cm. na sekundę. Wprowadzając zależność pomiędzy okresem prądu zmiennego, a długością fali wywołanej tym prądem w przestrzeni otaczającej, otrzymamy:

$$\lambda = u \cdot T$$

λ ...... długość fali elektromagnetycznej

u ...... szybkość biegu tych fal wpróżni

$$\lambda^{(cm)} = 3 \cdot 10^{10} \cdot T^{(sek)}$$

Stąd:

$$\lambda^{(cm)} = 3 \cdot 10^{10} \cdot 2\pi\sqrt{L^{(H)} \cdot C^{(F)}}$$

Albo:

$$\lambda^{(cm)} = 2\pi\sqrt{L^{(cm)} \cdot C^{(cm)}} \qquad /22/$$

7. Tłumienie. Stopień tłumienia prądów zmiennych własnych rozważanych w poprzednich paragrafach określa się za pomocą dwóch liczb:

$$\alpha = \frac{R}{2L}$$ - spółczynnik tłumienia.

$$\alpha T = \delta$$ -logarytmiczny dekrement.

Liczby te pośrednio określają stosunek kolejnych amplitud tego samego znaku np.

$$\frac{J_3}{J_1} = e^{-\alpha T} = e^{-\delta}$$

Wzór na δ wypada następujący:

$$\delta = \frac{R}{2L} \cdot \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{4L}{R^2C} - 1}}$$

albo wprowadzając krytyczny opór: patrz str. 11. pkt. 2.

$$R_k^2 = \frac{4L}{C}$$

$$\delta = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{R_k^2}{R^2} - 1}}$$

Przy małem tłumieniu stosowany bywa prostszy wzór przybliżony, gdy można opuścić $\frac{R^2}{4L^2}$ w porównaniu do $\frac{1}{LC}$; wtedy:

$$\delta = \frac{R}{2L} \cdot \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{LC}}}$$

a po uproszczeniu:

$$\delta = \pi \cdot R \sqrt{\frac{C}{L}} \qquad /23/$$

Bywa również stosowany przybliżony wzór na δ , który otrzymuje się ze wzoru /23/ przez podstawienie zamiast L , długości fali λ w metrach i pojemności C w cm.

Ze wzoru /22/ mamy:

$$L^{(cm)} = \frac{\lambda^2}{4\pi^2 C^{(cm)}}$$

więc:

$$\delta = \pi \cdot R \cdot \sqrt{\frac{4\pi^2 (C^{(cm)})^2 \cdot 10^9}{9 \cdot 10^{11} \cdot \lambda^2}}$$

$$\delta = \frac{\pi^2}{15} \cdot \frac{C^{(m.)} \cdot R^{(\Omega)}}{\lambda^{(cm.)}}$$

w zaokrągleniu:

$$\delta = \frac{1}{150} \cdot \frac{C^{(cm.)} \cdot R^{(\Omega)}}{\lambda^{(m.)}}$$

8. Wzór na okres zmienności prądów własnych tłumionych w zależności od dekrementu logarytmicznego. Z poprzednich rozważań mamy:

$$T = 2\pi \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}} \qquad /24/$$

Oznaczmy przez T_0 okres prądów własnych swobodnych i uwzględnijmy następujące równości:

$$\frac{1}{LC} = \frac{4\pi^2}{T_0^2}$$

$$\frac{R^2}{4L^2} = \alpha^2 = \frac{\delta^2}{T^2}$$

Wtedy wzór /24/ przybierze postać:

$$T = T_0 \sqrt{1 + \left(\frac{\delta}{2\pi}\right)^2} \qquad /25/$$

Z tego wzoru obliczamy, że nawet przy znacznem tłumieniu gdy $\delta = 0,6$.

$$T = T_0 \cdot 1{,}008$$

9. Wzór na wartość skuteczną tłumionego prądu zmiennego. Załóżmy, że zapomocą odpowiedniego urządzenia wywołujemy prądy zmienne tłumione, powtarzające się w równych odstępach czasu, m żmijek prądu na sekundę, wtedy przyjąć możemy że wartość skuteczna prądu, stanowiącego taki ciągły szereg prądów tłumionych szybko zanikających, da się wyrazić wzorem:

$$J = \sqrt{\frac{1}{t} \cdot \int_0^t i_t^2 \cdot dt} = \sqrt{m \cdot \int_0^\infty i_t^2 \, dt}$$

przy tem:

$$i_t = J_p \cdot e^{-\alpha t} \cdot \sin \bar{\omega} \cdot t$$

Wyznaczmy wartość całki znajdującej się pod pierwiastkiem.

$$\int_0^\infty i_t^2 \, dt = J_p^2 \int_0^\infty e^{-2\alpha t} \cdot \sin^2 \bar{\omega} t \cdot dt =$$

$$= \frac{1}{2} J_p^2 \left[\int_0^\infty e^{-2\alpha t} \, dt - \int_0^\infty e^{-2\alpha t} \cdot \cos 2\bar{\omega} t \, dt \right] =$$

$$= J_p^2 \cdot \frac{1}{4\alpha} \cdot \frac{1}{\frac{\alpha^2}{\bar{\omega}^2} + 1} \quad {}^{\cdot)}$$

Przy małem tłumieniu i dużej częstotliwości:

$\frac{\alpha^2}{\bar{\omega}^2}$ można opuścić wobec 1.

Przeto:

$$\int_0^\infty i_t^2 \, dt = J_p^2 \cdot \frac{1}{4\alpha}$$

A więc:

$$J \doteq \frac{1}{2} J_p \sqrt{\frac{m}{\alpha}}$$

albo wprowadzając częstotliwość prądu f i dekrement logarytmiczny δ otrzymamy:

$$\alpha = \frac{\delta}{T} = \delta \cdot f$$

przeto:

$$J = \frac{1}{2} J_p \sqrt{\frac{m}{\delta \cdot f}} \qquad /26/$$

$^{\cdot)}$ $\int e^{-2\alpha t} \cos 2\bar{\omega} t \cdot dt = e^{-2\alpha t} \cdot \frac{2\bar{\omega} \sin 2\bar{\omega} t - 2\alpha \cos 2\bar{\omega} t}{4(\alpha^2 + \bar{\omega}^2)}$

10. Energietyka obwodu z L i C. W takim obwodzie prądy własne są ciągłe, nie tłumione.

Gdy równowaga została naruszona przez naładowanie kondensatora, to mieliśmy wzory na napięcie kondensatora i prąd /14/ i /15/, które tu przytaczamy:

$$V_c = \frac{V_0}{\bar{\omega}\sqrt{LC}} \cdot e^{-\alpha t} \cdot \sin(\bar{\omega} t + \varphi)$$

$$i = \frac{V_0}{\bar{\omega} L} \cdot e^{-\alpha t} \cdot \sin \bar{\omega} t$$

W rozważanym obecnie przypadku $R = 0$, więc:

$$\alpha = 0 \qquad a \quad \bar{\omega} = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\bar{\omega}}{\alpha} = \infty$$

więc $\qquad \sphericalangle \varphi = 90^\circ$

Przeto:

$$V_c = V_0 \sin\left(\bar{\omega} t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$i = \frac{V_0}{\sqrt{\frac{L}{C}}} \cdot \sin \omega t$$

Oporność pozorna obwodu wynosi $\sqrt{\frac{L}{C}}$.

Ponieważ pomiędzy prądem i napięciem mamy r różnicę faz 90^0 , więc przy maksymalnem napięciu na kondensatorze prąd będzie zero i odwrotnie.

Wobec tego w chwili gdy prąd będzie maksymalny cała energja będzie skupiona w polu magnetycznem.

Natomiast przy maksymalnym napięciu cała energja będzie skupiona w polu elektrycznem.

Ilości tych energji wyrażają się znanemi wzorami:

$$\frac{V_m^2 \cdot C}{2} \quad i \quad \frac{J_m^2 \cdot L}{2}$$

Uwzględniając, że

$$V_m = V_0 \quad i \quad J_m = \frac{V_0}{\sqrt{\frac{L}{C}}}$$

Łatwo spostrzedz, że te ilości energji są równe, a więc energja przelewa się naprzemian z cewki do kondensatora i odwrotnie.

Gdy jest tłumienie, część energji przy każdej przemianie zamienia się na ciepło i w ten sposób stopniowo wyczerpuje się:

11. Ogólne zasady wzniecania zmiennych prądów własnych w obwodach z R, L, C

Do obwodu z R, L, C, można dostarczać energję dawkami, dając następną, dopiero po wyczerpaniu się poprzedniej.

Wtedy prąd w obwodzie stanowi szereg kolejno zanikających prądów zmiennych tłumionych, których wielkość skuteczna zależy od ilości energji dostarczonej w poszczególnych dawkach i od liczby tych dawek w jednostce czasu.

Inny rodzaj prądów własnych mianowicie prądy zmienne o amplitudzie stałej dają się wywołać tylko przy ciągłem dostarczaniu energji za każdym okresem zmienności prądu.

Okres zmienności prądu zależy zawsze tylko od właściwości obwodu z C, R, L, a więc wynosi:

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}}$$