Gdzie: $\mathcal{X}_1 = L_1\omega - \frac{1}{C_1\omega}$, a $\mathcal{X}_2 = L_2\omega - \frac{1}{C_2\omega}$;

Ze wzoru na J widzimy, że prąd wzrasta do nieskończoności przy dwóch wartościach ω.

Gdy: $\omega^2 = \omega_1^2 = \frac{1}{L_1C_1}$, wtedy: $\mathcal{X}_1 = L_1\omega - \frac{1}{C_1\omega} = 0$

Gdy: $\omega^2 = \omega_2 = \frac{1}{L_2C_2}$, wtedy: $\mathcal{X}_2 = L_2\omega - \frac{1}{C_2\omega} = 0$

Prąd będzie zero, gdy:

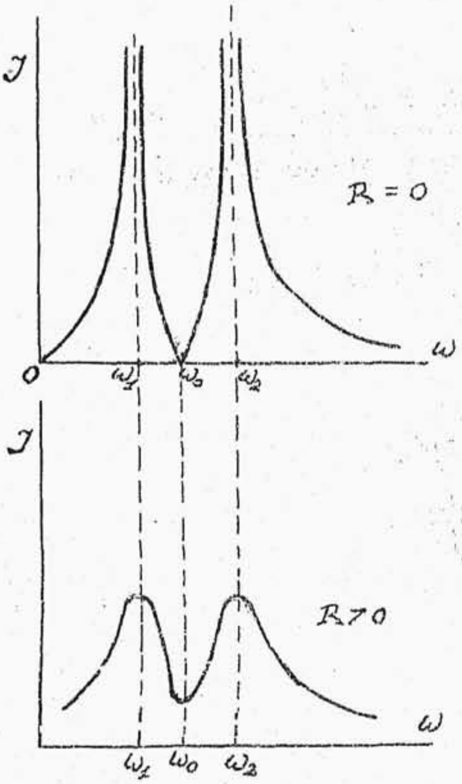
$$\omega^2 = \omega_0^2 = \frac{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}}{L_2 + L_1}$$

wtedy: $\mathcal{X}_1 + \mathcal{X}_2 = 0$

Łatwo sprawdzić, że przy: $\omega_1 < \omega_2$

$\omega_1 < \omega_0 < \omega$

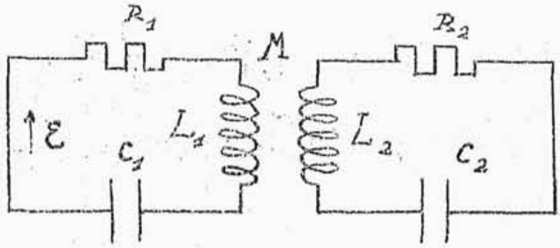
Wykres rezonansu w tym przypadku ma postać wskazaną na rys. 35.



rys. 35.

32. Wykres rezonansu dla obwodów sprzężonych indukcyjnie i zawierających R, L, i C.

Prąd w obwodzie pierwotnym jak wiadomo, wyraża się wzorem:



rys.36.

$$\mathcal{J} = \frac{\mathcal{E}}{\sqrt{(R_1+R')^2+(\mathcal{X}_1+\mathcal{X}')^2}}$$

gdzie:

$$R' = \left(\frac{M\omega}{Z_2}\right)^2 \cdot R_2 \quad i \quad \mathcal{X}' = -\left(\frac{M\omega}{Z_2}\right)^2 \cdot \mathcal{X}_2$$

Jeżeli R_1, i R_2 małe, to w przybliżeniu:

$$\mathcal{J} = \frac{\mathcal{E}}{\mathcal{X}_1+\mathcal{X}'}$$

Prąd przybiera wartość nieskończenie wielką, gdy:

$$\mathcal{X}_1 + \mathcal{X}' = 0$$

Po wprowadzeniu oznaczeń:

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}} \; ; \; \omega_2 = \frac{1}{\sqrt{L_2 C_2}}$$

oraz:

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}$$

Poprzednie równanie przybiera postać:

$$(1-k^2)\omega^4 - (\omega_1^2+\omega_2^2)\omega^2 + \omega_1^2 \cdot \omega_2^2 = 0$$

Stąd dwa rozwiązania mające sens fizyczny:

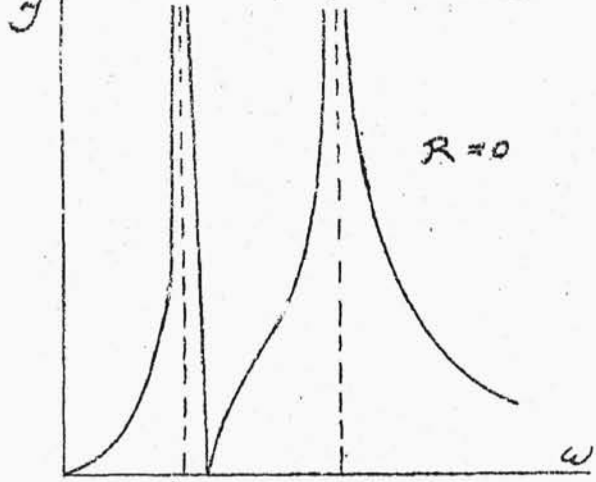
$$\omega^2 = \frac{\omega_1^2 + \omega_2^2 \pm \sqrt{(\omega_1^2 - \omega_2^2)^2 + 4K^2 \cdot \omega_1^2 \cdot \omega_2^2}}{2(1-K^2)}$$

Przy:

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega_0 \quad : \quad \omega^2 = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 \pm K}}$$

Wykres rezonansowy dla prądu J_1, przybiera postać /rys. 37 /.

33. Wyznaczenie dla obwodów sprzężonych indukcyjnie takich wartości na $\mathcal{X}_1$, i $\mathcal{X}_2$, przy których otrzymuje się maximum prądu wtórnego.



rys. 37.

Prąd wtórny J_2 ma wartość następującą:

$$J_2 = \frac{J_1 \cdot M \cdot \omega}{Z_2} = \frac{\mathcal{E} \cdot M \cdot \omega}{\sqrt{(R_1 + R')^2 + (\mathcal{X}_1 + \mathcal{X}')^2} \cdot \sqrt{R_2^2 + \mathcal{X}_2^2}}$$

Mianownik daje się łatwo przekształcić w ten sposób, że wzór na J_2 przybiera postać:

$$J_2 = \frac{\mathcal{E}\cdot M\cdot\omega}{\sqrt{(\mathcal{X}_1\cdot\mathcal{X}_2 - M^2\omega^2 - R_1R_2)^2 + (\mathcal{X}_1R_2 + \mathcal{X}_2R_1)^2}} \qquad /59/$$

Szukamy takiego $\mathcal{X}_2$ przy którym J_2 byłoby maksymum.

W tym celu wyprowadzamy wzór na pochodną

$$\frac{dJ_2}{d\mathcal{X}_2}$$

Pochodna ta będzie równa zeru wtedy, gdy będzie równa zeru pochodna od funkcji pod pierwiastkowej, znajdującej się w mianowniku.

$$\frac{d\left[(\mathcal{X}_1\mathcal{X}_2 - M^2\omega^2 - R_1R_2)^2 + (\mathcal{X}_1R_2 + \mathcal{X}_2R_1)^2\right]}{d\mathcal{X}_2} = 0;$$

Z tego równania wypada:

$$\mathcal{X}_2 = \frac{\mathcal{X}_1\cdot M^2\omega^2}{\mathcal{X}_1^2 + R_1^2} \qquad /60/$$

Podstawiając ten wyraz do wzoru /59/ na prąd J_2, po uproszczeniu otrzymamy:

$$J_{2\,max} = \frac{\mathcal{E}\cdot M\omega}{\left[\frac{M^2\omega^2R_1}{\mathcal{X}_1^2 + R_1^2} + R_2\right]\cdot\sqrt{\mathcal{X}_1^2 + R_1^2}} \qquad /61/;$$

Że to będzie wartość maksymalna prądu łatwo !! sprawdzić biorąc od wyrazu prądu, wzór /59/, drugą pochodną po $\mathcal{X}_2$ i podstawiając wyraz na $\mathcal{X}_2$, ze wzoru 60-go. Otrzymana w ten sposób wartość na

$\frac{\partial^2 J_2}{\partial \mathcal{X}_2^2}$ wypada ujemna. Mając warunek na $\mathcal{X}_2$, przy którym prąd J_2 będzie maksymalny, szukamy takiego $\mathcal{X}_1$, aby wartość w wyrażeniu /61/ przybrała wartość maksymalną.

W tym celu znowu bierzemy pochodną od J_{2max} po $\mathcal{X}_1$, i przyrównywamy do zera.

Po uproszczeniu otrzymamy równanie:

$$\mathcal{X}_1\left[R_2\left(\mathcal{X}_1^2+R_1^2\right)-M^2\omega^2R_1\right]=0$$

Stąd na $\mathcal{X}_1$, otrzymamy trzy rozwiązania:

$$\mathcal{X}_1=0\quad;\quad \mathcal{X}_1=\pm\sqrt{\frac{R_1}{R_2}\left(M^2\omega^2-R_1R_2\right)}$$

Każdemu z tych rozwiązań na $\mathcal{X}_1$, odpowiadać będzie odpowiednia wartość na $\mathcal{X}_2$, którą otrzymamy podstawiając wartości na $\mathcal{X}_1$, do wzoru 60-go.

W ten sposób otrzymamy odpowiednie wartości na $\mathcal{X}_2$ następujące:

$$\mathcal{X}_2=0\quad;\quad \mathcal{X}_2=\pm\sqrt{\frac{R_2}{R_1}\left(M^2\omega^2-R_1R_2\right)}$$

A więc maksimum prądu J_2 otrzymamy w trzech przypadkach: gdy $\mathcal{X}_1=0$ i $\mathcal{X}_2=0$

$$\mathcal{X}_1=\pm\sqrt{\frac{R_1}{R_2}\left(M^2\omega^2-R_1R_2\right)}$$

a $$\mathcal{X}_2=\pm\sqrt{\frac{R_2}{R_1}\left(M^2\omega^2-R_1R_2\right)}$$

oraz gdy:

$$\mathcal{X}_1 = -\sqrt{\frac{R_1}{R_2}\left(M^2\omega^2 - R_1R_2\right)}$$

$$\mathcal{X}_2 = -\sqrt{\frac{R_2}{R_1}\left(M^2\omega^2 - R_1R_2\right)}$$

Prąd J_2 w dwóch ostatnich przypadkach wypada jeden i ten sam. Wzór na jego wartość łatwo otrzymać podstawiając odpowiednią wartość na $\mathcal{X}_1$, do wyrażenia 61-go.

$$J'_{2max.max} = \frac{\mathcal{E}}{2\sqrt{R_1R_2}} \qquad /62/$$

Wartość tego maximum maximorum nie zależy od M.

Inny prąd maximalny otrzymamy przy: $\mathcal{X}_1 = 0$ i $\mathcal{X}_2 = 0$

Wprowadzając te wartości na $\mathcal{X}_1$, i $\mathcal{X}_2$ do wzoru 59-go otrzymamy:

$$J''_{2max.max} = \frac{\mathcal{E} M \omega}{M^2\omega^2 + R_1R_2} \quad /63/$$

Tu maximum maximorum zależy od M czyli od stopnia sprzężenia obwodów: $K = \frac{M}{\sqrt{L_1L_2}}$

Wyznaczmy M przy którem $J_{2max.max.}$ będzie największe gdy: $\frac{d(J_{2max.max})}{dM} = 0$

Znajdując $\underbrace{\text{pochodną}}_{\text{wzoru}}$ /63/ otrzymamy: $M^2 = \frac{R_1R_2}{\omega^2}$

Wtedy: $$J''_{2\,max\,max} = \frac{\mathcal{E}}{2\sqrt{R_1 \cdot R_2}}$$

a więc takie samo jak otrzymaliśmy poprzednio według wzoru /62/ dla innych wartości $\mathcal{X}_1$ i $\mathcal{X}_2$.

Z tego wynika również, że $J'_{2\,max\,max} > J''_{2\,max\,max}$ o ile $M^2 \neq \frac{R_1 R_2}{\omega^2}$.

34. Prądy wywołane w obwodzie R, L, C siłą elektromotoryczną sinusoidalną tłumioną.* Zakładamy że siła elektromotoryczna wywołująca prąd wyraża się wzorem:

$$\mathcal{E}_t = \mathcal{E}_m \cdot e^{-\alpha_1 t} \cdot \sin(\omega_1 t - \gamma)$$

Prąd czyni zadość równaniu:

$$L \cdot \frac{di}{dt} + R \cdot i + \frac{1}{C} \int i\,dt = \mathcal{E}$$

Jeżeli dla charakterystyki zjawisk tu zachodzących obierzemy zamiast natężenia prądu, napięcie na kondensatorze V, to uwzględniając zależność:

$$i = C \cdot \frac{dV_t}{dt}$$

Otrzymamy równanie:

$$\frac{d^2 V_t}{dt} + \frac{R}{L} \cdot \frac{dV_t}{dt} + \frac{V_t}{LC} = \frac{\mathcal{E}}{LC}$$

Wprowadźmy skróty:

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$$

to jest własna pulsacja obwodu: $$\alpha_2 = \frac{R}{2L}$$

---

* Patrz Bjerknes Wiedemansche Annalen 1895 r. Tom 55 str. 121.

to jest własne tłumienie obwodu; wtedy powyższe równanie przybierze postać:

$$\frac{d^2 v_t}{dt^2} + 2\alpha_2 \frac{dv_t}{dt} + (\omega_2^2 + \alpha_2^2) v_t = \frac{\mathcal{E}}{LC} \qquad /64/$$

Równaniu temu czyni zadość następujący wzór na napięcie:

$$v_t = v_{1t} + v_{2t} \qquad /65/$$

gdzie:

$$v_{1t} = V_{1m} \cdot e^{-\alpha_1 t} \cdot \sin(\omega_1 t - \gamma - \varphi_1)$$

$$v_{2t} = V_{2m} \cdot e^{-\alpha_2 t} \cdot \sin(\omega_2 t - \gamma - \varphi_2)$$

Tu v_{1t} - jest napięciem wymuszonem siłą elektromotoryczną. v_{2t} — napięcie własne wywołane tylko właściwościami obwodu.

Podstawiając wyraz na v_t wzór /65/ do równania 64-go, zauważymy że składnik v_{2t} daje z lewej strony zero, przeto przy tym podstawieniu wyznaczymy tylko:

$$V_{1m} = \frac{\mathcal{E}_m}{LC} \cdot \frac{1}{\sqrt{[\omega_2^2 - \omega_1^2 + (\alpha_2 - \alpha_1)^2]^2 + [2\omega_1(\alpha_2 - \alpha_1)]^2}}$$

$$tg\,\varphi_1 = \frac{2\omega_1(\alpha_2 - \alpha_1)}{\omega_2^2 - \omega_1^2 + (\alpha_2 - \alpha_1)^2}$$

Stałe czynniki dla v_{2t} znajdziemy uwzględniając stan początkowy obwodu:

Przy $t = 0$ mamy $v_t = 0$; $i_t = 0$ to znaczy $\frac{dv_t}{dt} = 0$

Z tych założeń, przyjmując np. $\gamma = 90^\circ$ otrzymamy:

$$\frac{V_{2m}}{V_{1m}} = -\frac{\sqrt{\omega_2^2+(\alpha_2-\alpha_1)^2}}{\omega_2}$$

oraz:

$$tg\,\varphi_2 = \frac{(\alpha_2-\alpha_1)\left[\omega_2^2+\omega_1^2+(\alpha_2-\alpha_1)^2\right]}{\omega_2\left[\omega_2^2-\omega_1^2+(\alpha_2-\alpha_1)^2\right]}$$

Wzory te prowadzą do następujących szczególnych wyników:

/1/ $\omega_1 = \omega_2$ i $\alpha_1 = \alpha_2$, t.j. przypadek izochronizmu siły elekromotorycznej z obwodem.

Wtedy: $\varphi_1 = 90^\circ$, $\varphi_2 = 90^\circ$ a $v_t = -\frac{\mathcal{E}_m}{LC2\omega}\cdot e^{-\alpha t}\cdot t\cdot \sin\omega t$

Zmienność napięcia w czasie wyraża się funkcją okresowo zmienną o początkowo wzrastających a potem malejących amplitudach.

/ 2/. $\omega_1=\omega_2$ ale $\alpha_1 \neq \alpha_2$, jednak $\alpha_1-\alpha_2$ jest małe w porównaniu do ω.

Wtedy:

$$v_t = -V_m\left(e^{-\alpha_1 t} - e^{-\alpha_2 t}\right)\sin\omega t$$

Przebieg tej funkcji jest podobny do poprzedniej.

/3/. $\omega_1 \neq \omega_2$, ale $\alpha_1 = \alpha_2$.

Wtedy:

$$v_t = V_m\cdot e^{-\alpha t}\left[\sin(\omega_1 t-\gamma)-\sin(\omega_2 t-\gamma)\right]$$

Funkcja ma podwójną częstotliwość, mamy więc dudnienia bardzo wyraźne .

/4/. $\omega_1 \neq \omega_2$ i również $\alpha_1 \neq \alpha_2$ tu będą także dudnienia lecz mniej wyraźne.

35. Skuteczna wartość prądu wywołanego w obwodzie z R, L, C, zapomocą siły elektromotorycznej sinusoidalnej tłumionej. Według wzoru na napięcie z powyższego paragrafu możemy wyznaczyć prąd według zależności:

$$i_t = C \cdot \frac{d v_t}{d t}$$

Następnie zakładając że mamy jedną żmijkę prądu na sekundę, wyznaczymy wartość skuteczną prądu ze wzoru:

$$J = \sqrt{\int_0^\infty i_t^2 \, dt}$$

Jeżeli wprowadzimy skróty:

$$m = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \qquad \mu = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}$$

$$n = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \qquad \gamma = \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2}$$

i założymy, że n^2, μ^2 i γ^2 są liczby bardzo małe w porównaniu do ω^2 i m^2, to według wywodu Bjerknes'a otrzymamy:

$$J^2 = \frac{\mathcal{E}_m^2}{16 L^2} \cdot \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{\alpha_1 \cdot \alpha_2} \cdot \frac{1}{(\omega_1 - \omega_2)^2 + (\alpha_1 + \alpha_2)^2} \quad /66/$$

36. Wyznaczenie sumy dekrementów logarytmicznych $\delta_1 + \delta_2$ dla powyższego prądu. Ze wzoru /66/ wypada że otrzymamy maximum prądu gdy $\omega_1 = \omega_2$

$$J_r^2 = \frac{\mathcal{E}_m^2}{16L^2} \cdot \frac{1}{\alpha_1 \cdot \alpha_2 (\alpha_1 + \alpha_2)}$$

$$\left(\frac{J}{J_r}\right)^2 = \frac{(\alpha_1 + \alpha_2)^2}{(\omega_1 - \omega_2)^2 + (\alpha_1 + \alpha_2)^2} \qquad /67/$$

na podstawie tego wzoru możemy narysować wykres rezonansowy: $\left(\frac{J}{J_r}\right)^2 = f\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)$

Suma dekrementów będzie:

$$\delta_1 + \delta_2 = \frac{2\pi}{\omega_1} \alpha_1 + \frac{2\pi}{\omega_2} \alpha_2 = \frac{2\pi}{\omega_1}\left(\alpha_1 + \frac{\omega_1}{\omega_2}\alpha_2\right)$$

ale

$\frac{\omega_1}{\omega_2} \cong 1$ w pobliżu rezonansu więc:

$$\delta_1 + \delta_2 = \frac{2\pi}{\omega_1}(\alpha_1 + \alpha_2)$$

Wprowadźmy oznaczenie:

$$\frac{\omega_1 - \omega_2}{\omega_1} = \varkappa$$

Uwzględniając te wzory przekształcimy wzór /66/ na:

$$\frac{J^2}{J_r^2} = \frac{1}{1 + \frac{4\pi^2 \cdot \varkappa^2}{(\delta_1 + \delta_2)^2}}$$

a stąd:

$$\delta_1 + \delta_2 = 2\pi\varkappa \cdot \sqrt{\frac{J^2}{J_r^2 - J^2}}$$