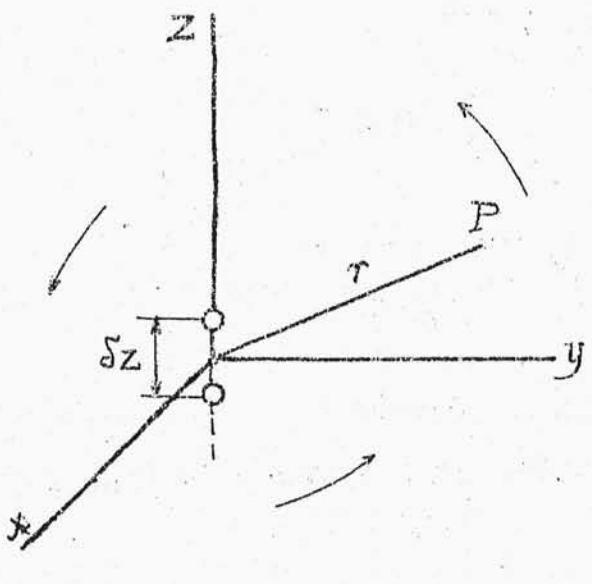
R O Z D Z I A Ł VI

P r o m i e n i o w a n i e o b w o d ó w e l e k t r y c z n y c h.

53. Pole elektromagnetyczne elementarnego oscylatora Hertza. Obieramy układ spółrzędnych podany na rys. 64 , w którym dodatnie kierunki osi odpowiada-



rys.64.

ją ruchom postępowym śrub z prawym gwintem obracanych odpowiednio w kierunkach y - z ; z - x ; x - y /patrz strzałki na rys. 64/

W środku tego układu umieszczamy elementarny oscylator Hertza, składający się z dwóch małych kulek metalowych, pomiędzy któremi odbywa się oscylacyjne wyładowanie elektryczne.

Linja prosta łącząca środki tych kulek, czyli oś oscylatora, jest skierowana wzdłuż osi Z.

Zakładamy, że ładunki na kulkach i prąd pomiędzy niemi zmieniają się sinusoidalnie.

W tych warunkach wyznaczamy wzory na natężenie pola elektromagnetycznego zdala od oscylatora.

Przy naszych wywodach opieramy się na równaniach podanych przez Maxwella dla pola elektromagnetycznego wywołanego prądami i ładunkami elektrycznemi nieruchomemi w przestrzeni.

Według teorji Maxwella prąd elektryczny zmienny wytwarza pole magnetyczne, którego natężenie daje się wyznaczyć zapomocą tak zwanego potencjału wektorowego.

Wzór elementarny potencjału wektorowego ma postać:

$$\frac{i \cdot ds}{r}$$

tu i - natężenie prądu, ds - długość odcinka drogi prądu, a r odległość punktu, w którym mamy powyższy potencjał, od środka drogi prądu.

Kierunek wektora tego potencjału jest równoległy do kierunku prądu.

Ładunki nieruchome w przestrzeni wytwarzają pole elektryczne którego natężenie wyrażamy potencjałem skalarnym, którego wzór elementarny ma postać:

$$\frac{dq}{r}$$

dq - cząstka ładunku elektrycznego, r - odległość punktu, w którym rozważamy potencjał, od środka ładunku.

W rozważanym przez nas polu elektromagnetycznem wprowadźmy następujące oznaczenia: dla wartości chwilowych:

$$X, Y, Z$$

składowe natężenie pola elektrycznego wyrażone w jednostkach bezwględnych elektrostatycznych/c.g.s.E.S./

$$\alpha, \beta, \gamma$$

składowe natężenia pola magnetycznego wyrażone w jednostkach bezwględnych elektromagnetycznych / c. g. s. E. M. /

ψ - potencjał skalarny od ładunków w c.g.s.E.S.

$$F, G, H$$

składowe potencjału wektorowego od prądu w c.g.s. E.M.

Według wywodów Maxwella *).

Patrz str. 289 i 308 Tom II J.Clerk Maxwell Lehrbuch der Elektricität und des Magnetismus. Übersetzung von Weinstein 1883 r. J.Springer

Wzory na składowe natężeń pól elektrycznego i magnetycznego mają postać:

$$X = -\frac{1}{u}\cdot\frac{\partial F}{\partial t} - \frac{\partial \Psi}{\partial x}\,; \quad \alpha = \frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial z}$$

$$Y = -\frac{1}{u}\cdot\frac{\partial G}{\partial t} - \frac{\partial \Psi}{\partial y}\,; \quad \beta = \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial x} \qquad /90/$$

$$Z = -\frac{1}{u}\cdot\frac{\partial H}{\partial t} - \frac{\partial \Psi}{\partial z}\,; \quad \gamma = \frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y}$$

u -szybkość fal elektromagnetycznych w próżni.

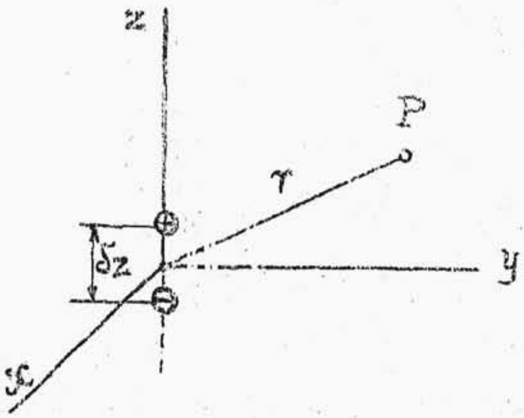
Spółczynnik $\frac{1}{u}$ został tu wprowadzony dla przekształcenia jednostek elektromagnetycznych na elektrostatyczne.

Wzór na potencjał skalarny w rozważanym zagadnieniu wyprowadzamy w sposób następujący:*)

---

*) Tu natężenie pola elektrycznego są wyrażone przez potencjał skalarny ładunków i zmienność w czasie potencjału skalarnego /odpowiednio do sił elektromotorycznych indukowanych zmiennym polem magnetycznem /. Natężenia pola magnetycznego przez potencjał wektorowy.

Bierzemy dowolny punkt P na odległości r od początku spółrzędnych i w tym punkcie wyznaczymy wzór na potencjał skalarny.



rys. 65.

Jeżeliby jakiś ładunek $-q$ znajdował się w początku spółrzędnych O to wzór na potencjał skalarny miałby postać: $\frac{q}{r}$

Musimy uwzględnić, że mamy dwa ładunki $+q$ i $-q$ przesunięte odpowiednio wzdłuż osi Z do góry i na dół na odległość $\frac{1}{2}\delta Z$ /patrz rys. 65 /

Pozatem należy pamiętać, że ładunki na kulkach są zmienne, według prawa sinusoidalnego więc:

$$q = Q \cdot \sin \omega t$$

gdzie Q - jest ładunek maximalny.

Ładunek ten nie jest jednak miarodajny do wyznaczenia potencjału w punkcie P, gdyż impulsy elektromagnetyczne dla przejścia pewnej drogi wymagają pewnego czasu, więc rozważany przez nas potencjał w punkcie P w chwili t powstanie nie pod wpływem powyższego ładunku q, lecz pod wpływem ładunku wcześniejszego:

$$q' = Q \cdot \sin\omega\left(t - \frac{r}{u}\right)$$

gdzie u - jest szybkością przenoszenia się impulsów elektromagnetycznych.

Wobec tego licznik i mianownik we wzorze na potencjał jest funkcją odległości r, wskutek więc przesunięcia kulek o 1/2 δz do góry i na dół zmiana potencjału wyrażać się będzie wzorem:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{q'}{r}\right) \cdot \delta z$$

gdyż jest równoważna zmianie jakiej uległby potencjał gdyby punkt P przesunął się o tą samą drogę w przeciwnym kierunku.*)

---

*) Uwzględnimy to przez odpowiedni znak w następnych wzorach.

Uwzględniając powyższe uwagi znajdziemy dla potencjału od ładunku górnego wzór:

$$\frac{q'}{r} - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{q'}{r}\right)\delta z$$

a dla potencjału od ładunku dolnego, który ma znak przeciwny i jest przesunięty w przeciwną stronę:

$$-\frac{q'}{r} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z}\left(-\frac{q'}{r}\right)\delta z$$

Cały potencjał będzie algebraiczną sumą powyższych potencjałów:

$$\psi = -\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{q'}{r}\right)\delta z$$

a podstawiając wzór na q' otrzymamy:

$$\psi = -\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\sin\omega\left(t-\frac{r}{u}\right)}{r}\right) Q\cdot\delta z$$

Wprowadzamy skróty:

$m = \frac{\bar{\omega}}{u}$, $\varphi = Q\cdot\delta z$, oraz zmieniamy kolejność wyrazów pod znakiem sinusa, wtedy otrzymamy:

$$\psi = \varphi\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\sin(mr-\omega t)}{r}\right)$$

tu ψ - oznacza tak zwany moment elektryczny oscylatora.

Wzór w nawiasach zwykle oznacza się literą pi duże, on wyraża funkcję hercowską, więc:

$$\Pi = \frac{\sin(m\cdot r - \omega t)}{r} = \frac{\sin \chi}{r} \text{ *)}$$

Wtedy:

$$\psi = \varphi \cdot \frac{\partial \Pi}{\partial z}$$

Wzór na potencjał wektorowy prądu płynącego od jednej kulki do drugiej znajdujemy w przypuszczeniu, że kulki są tak małe w porównaniu do ich odległości, że możemy uważać cały odcinek δZ, za drogę prądu, którego natężenie na całej długości δZ w danej chwili uważamy za jednakowe.

Dodatni kierunek prądu przyjmiemy z dołu do góry i zgodnie z nim kierunek wektorowego potencjału.

Wobec tego że mamy prąd tylko w kierunku osi Z, składowe F i G są w tym przypadku równe zeru, pozostaje tylko składowa H.

Prąd wyrażamy wzorem: $i = \frac{dq'}{dt}$

---

*) $m\cdot r - \omega t$ oznaczyliśmy tu przez χ / litera grecka chi./

Potencjał wektorowy w punkcie P:

$$H = \frac{i \cdot \delta z}{r}$$

a więc:

$$H = \frac{1}{r} \cdot \frac{dq'}{dt} \cdot \sigma \, \delta z$$

a ponieważ r - od czasu nie zależy, więc możemy napisać również:

$$H = \frac{d}{dt}\left(\frac{q'}{r}\right)\delta z$$

Według poprzednich rozważań:

$$q' = -Q \sin(mr - \omega t)$$

a więc:

$$H = -Q \cdot \delta z \cdot \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\sin(m \cdot r - \omega t)}{r}\right)$$

albo wprowadzając poprzednie skróty:

$$H = -\varphi \cdot \frac{\partial \Pi}{\partial t}$$

Tu φ - wyrażamy w jednostkach c.g.s.E.S., a więc i H - w tej postaci będzie w jednostkach c.g.s.E.S.

Chcąc wyrazić H w jednostkach c.g.s.E.M., zachowując dla φ jednostki c.g.s.E.S., wypadnie podzielić powyższy wzór przez $- \mathcal{U} -$ a więc w jednostkach c.g.s.E.M.

$$H = -\frac{\varphi}{\mathcal{U}} \cdot \frac{\partial \Pi}{\partial t}$$

Podstawiając wyrażenie na Ψ i H, G, F, do równań 90-tych str, 157.- otrzymamy:

$$X = -\varphi \cdot \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x \cdot \partial z} \quad ; \quad \alpha = -\frac{\varphi}{\mathcal{U}} \cdot \frac{\partial^2 \Pi}{\partial y \cdot \partial t}$$

$$Y = -\varphi \cdot \frac{\partial^2 \Pi}{\partial y \cdot \partial z} \quad ; \quad \beta = \frac{\varphi}{\mathcal{U}} \cdot \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x \cdot \partial t}$$

$$Z = +\frac{\varphi}{\mathcal{U}^2} \cdot \frac{\partial^2 \Pi}{\partial t^2} - \varphi \frac{\partial^2 \Pi}{\partial z^2}; \quad \gamma = 0$$

Po przeprowadzeniu działań *) **wzory na składowe** pola **natężenia elektrycznego, wypadną:**

---

*) r **-jest funkcją od** x, y, z **i** $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} \quad \text{i.t.d.}$$

$$X = -\varphi\cdot\left\{-m^2\cdot\frac{\sin\chi}{r} - 3m\cdot\frac{\cos\chi}{r^2} + 3\frac{\sin\chi}{r^3}\right\}\cdot\frac{x\cdot z}{r\cdot r}$$

$$Y = -\varphi\cdot\left\{-m^2\cdot\frac{\sin\chi}{r} - 3m\cdot\frac{\cos\chi}{r^2} + 3\frac{\sin\chi}{r^3}\right\}\cdot\frac{y}{r}\cdot\frac{z}{r}$$

Wzór na Z najpierw przekształcamy na zasadzie zależności, którą łatwo sprawdzić:

$$\frac{1}{u^2}\cdot\frac{\partial^2\Pi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2\Pi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Pi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Pi}{\partial z^2}$$

Uwzględniając tą zależność znajdziemy:

$$Z = \varphi\cdot\frac{\partial^2\Pi}{\partial x^2} + \varphi\cdot\frac{\partial^2\Pi}{\partial y^2}$$

Stąd:
$$Z = \varphi\cdot\left\{2m\cdot\frac{\cos\chi}{r^2} - 2\frac{\sin\chi}{r^3} + \right.$$

$$\left. -\left(m^2\frac{\sin\chi}{r} + 3m\cdot\frac{\cos\chi}{r^2} - 3\frac{\sin\chi}{r^3}\right)\cdot\frac{x^2+y^2}{r^2}\right\}$$

Na składowe natężenia pola magnetycznego wypadną wzory:

$$\alpha = -\frac{\varphi}{u}\cdot\bar{\omega}\cdot\left(m\cdot\frac{\sin x}{r}+\frac{\cos x}{r^2}\right)\cdot\frac{y}{r}$$

$$\beta = \frac{\varphi}{u}\cdot\bar{\omega}\left(m\cdot\frac{\sin x}{r}+\frac{\cos x}{r^2}\right)\cdot\frac{x}{r}$$

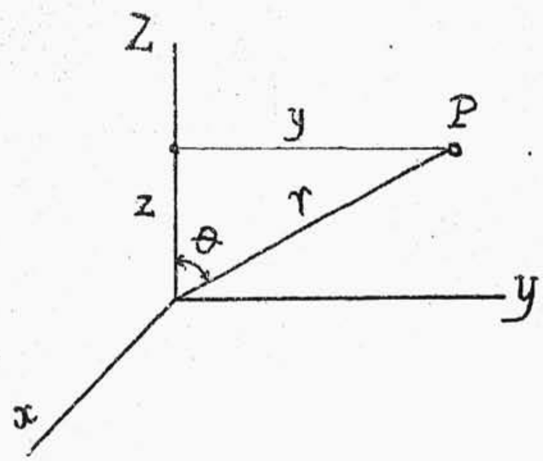
$$\gamma = 0$$

Jeżeli punkt P w którym rozważamy natężenia pól umieścimy na płaszczyźnie yZ rys.66 i oznaczymy kąt, pomiędzy Z i r przez θ to wypadnie: $x=0$

$$\frac{y}{r} = \sin\theta$$

$$\frac{Z}{r} = \cos\theta$$

Załóżmy że punkt P znajduje się zdala od oscylatora, tak że składniki z drugiemi i wyższemi potęgami r w mianowniku można opuścić wobec składników z pierwszemi potęgami, wtedy wzory na składowe natężeń pól przybiorą postać:



rys.66.

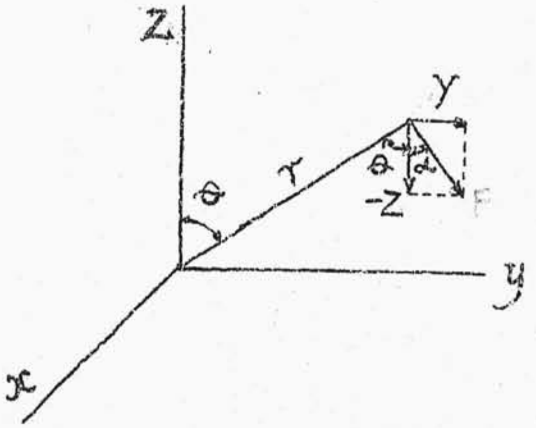
$$X = 0 \quad ; \quad \alpha = -\frac{\varphi}{u}\,\omega \cdot \frac{m}{r}\,\sin\chi \cdot \sin\theta$$

$$Y = \varphi \cdot \frac{m^2}{r}\,\sin\chi\,\sin\theta \cdot \cos\theta \quad ; \quad \beta = 0$$

$$Z = -\varphi \cdot \frac{m^2}{r} \cdot \sin\chi \cdot \sin^2\theta \;^{*)} \quad ; \quad \gamma = 0$$

Całe natężenie pola elektrycznego wypadnie:

$$F = \sqrt{Y^2 + Z^2} = \varphi\,\frac{m^2}{r} \cdot \sin\chi \cdot \sin\theta$$



rys.67.

---

*) Tu zostawiamy największy składnik z nawiasów uwzględniając punkty przestrzeni gdzie $\frac{y^2}{r^2}$ nie jest zbyt małe.

Kierunek natężenia pola elektrycznego względem promienia r wyznaczymy określając kąt α pomiędzy F i Y tang tego kąta będzie:

$$tg\alpha = \frac{Y}{Z} = \frac{\varphi\cdot\frac{m^2}{r}\sin\chi\cdot\sin\theta\cdot\cos\theta}{\varphi\cdot\frac{m^2}{r}\cdot\sin\chi\cdot\sin^2\theta} =$$

$$= \frac{1}{tg\theta} = \cot g\,\theta = tg(90^\circ - \theta)$$

więc:

$$\alpha = 90^\circ - \theta$$

Przeto kąt pomiędzy F i r wynosi 90°.

To znaczy że natężenie pola elektrycznego jest skierowane prostopadle do promienia, poprowadzonego od początku spółrzędnych do rozważanego punktu.

Natężenie pola magnetycznego ma tylko jedną składową równoległą do osi X, więc całe natężenie pola magnetycznego:

$$H = \alpha = -\frac{\varphi}{u}\cdot\bar{\omega}\cdot\frac{m}{r}\cdot\sin\chi\cdot\sin\theta$$

a uwzględniając, że:

$$\frac{\bar{\omega}}{u} = m.$$

otrzymamy, opuszczając znak:

$$H = \varphi\cdot\frac{m^2}{r}\cdot\sin\chi\cdot\sin\theta$$

tu: $\chi = m\cdot r - \bar{\omega}t$

Widzimy więc że dla natężeń pól w chwili t w punkcie P mamy dwa zupełnie jednakowe wzory.

$$F = \varphi \cdot \frac{m^2}{r} \cdot \sin(mr - \omega t) \cdot \sin\theta$$

$$H = \varphi \cdot \frac{m^2}{r} \cdot \sin(mr - \omega t) \cdot \sin\theta$$

W tych obu wzorach φ jest wyrażonew c.g.s.E.S., ~~natomiast~~ F jest wyrażone w c.g.s.E.S., a H w c.g.s.E.M.*) Wobec tego, że wartości na H i F zależą jednocześnie od t i od r, więc tworzą się fale sinusoidalne biegnące w fazie, to znaczy, że tam gdzie jest maximum natężenia pola elektrycznego tam jest również maximum natężenia pola magnetycznego.

Szybkość biegu tych fal wyznacza się zakładając że $mr - \omega t$ jest wielkością stałą np. K.

---

*) Chcąc mieć natężenia obu pól w jednostkach elektromagnetycznych, możymy powyższy wzór dla F przez u i wtedy wypadnie:

$$F = u \cdot \varphi \cdot \frac{m^2}{r} \cdot \sin(mr - \omega t) \cdot \sin\theta$$

$$H = \varphi \cdot \frac{m^2}{r} \cdot \sin(mr - \omega t) \cdot \sin\theta$$

Wtedy: $$m\cdot r - \omega t = K$$

Stąd: $$r = \frac{K+\omega t}{m}$$

a szybkość posuwania się miejsca, gdzie zachowuje się powyższa stała wielkość będzie:

$$\frac{\partial r}{\partial t} = \frac{\omega}{m} = \frac{\omega}{\frac{\omega}{u}} = u$$

a więc fale te posuwają się z szybkością przenoszenia się wpływów elektromagnetycznych, która była założona na początku rozumowania.

Długość fali otrzymamy obliczając taki przyrost λ dla r, przy którym wartość kąta $mr - \omega t$ przy stałem t zmieni się o 2π, a więc takie aby:

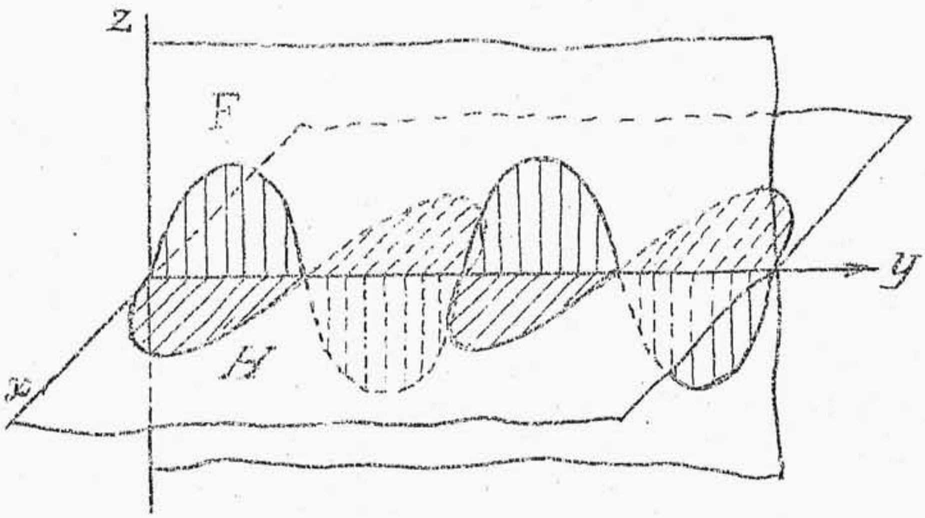
$$m(r+\lambda) - \omega t = m\cdot r - \omega t + 2\pi$$

Stąd: $$m\cdot\lambda = 2\pi$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{m} = \frac{2\pi\cdot u}{\omega} = \frac{2\pi\cdot u}{2\pi\cdot f} = \frac{u}{f} = u\cdot T$$

T - okres zmian ładunków na kulkach oscylatora i prądu pomiędzy niemi.

Położenie wektorów H i F względem siebie jest prostopadłe, gdyż wektor F leży w płaszczyźnie yz, a wektor H jest prostopadły do tej płaszczyzny rys. 68



rys.68.

Amplitudy wektorów F i H wyrażają się następującemi wzorami:

$$\bar{F} = \varphi \cdot \frac{m^2}{r} \cdot \sin\theta$$

$$\bar{H} = \varphi \cdot \frac{m^2}{r} \cdot \sin\theta$$

Amplitudy te jak widzimy zmniejszają się odwrotnie proporcjonalnie do odległości rozważanego punktu od środka oscylatora w pierwszej potędze.

Pozatem wielkość tej amplitudy zależy od kąta θ. Maximum aplitudy będzie w płaszczyźnie prostopadłej do osi oscylatora.

Na osi oscylatora oba pola zanikają, tu amplitudy wypadają równe zeru.