

DZIEŁA I ROZPRAWY MATEMATYCZNO-FIZYCZNE

WYDAWANE PRZEZ

A. CZAJEWICZA I S. DICKSTEINA

Z ZAPOMOZI KASY POMOCY DLA OSÓB, PRACUJĄCYCH NA POLU NAUKOWYM,
IMIENIA DR. MED. JÓZEFA MIĄNOWSKIEGO.

XII.

TEORIA PRĄDU ELEKTRYCZNEGO.

ZARYS ZASADNICZYCH PRAW
USTALONEGO I NIEUSTALONEGO PRĄDU ELEKTRYCZNEGO
I
TOWARZYSZĄCYCH MU ZAKŁÓCEŃ MAGNETYCZNYCH.

PODSTAWY ELEKTROMAGNETYCZNEJ
TEORII ŚWIATŁA.

Ἀεὶ ἔθελος γεωμετρει.

OPRACOWAŁ

HENRYK MERCYNG,

Professor Instytutu Inżynierów Komunikacji w Petersburgu.



WARSZAWA.

SKŁAD GŁÓWNY W KSIĘGARNI E. WENDE I S-ka.

1905.

Cena kóp. 75.

0.5
Warszawa

B

Nr 5105

Politechnika Warszawska

205

Niektóre inne prace autora.

1. Przyczynek do teorii uginania się światła. Warszawa, 1881.
2. O własnościach ogniskowych siatek dyfrakcyjnych. Kraków, 1882.
3. O metodach określania długości fal światła. Warszawa, 1884.
4. Sur les anomalies focales des réseaux, Comptes rendus de l'Académie des sciences. Paryż, 1883.
5. Elektromagnetyczna teoria światła. Lwów, 1886.
6. Zarys zasad fizyki na podstawie praw zachowania ilości materji i energii. Petersburg, 1888.
7. Krótki rys rozwoju astronomii. Warszawa, 1887.
8. Zasady Elektrotechniki. Warszawa, 1889.
9. Ueber Fresnels Wellenlängenmessungen, *Pogg. Ann.* 1884.
10. Ueber die Bewegung von Flüssigkeiten, Wasser und Petroleum in weiten Röhren. *Pogg. Ann.* 1890.
11. Zarys teorii matematycznej telefonowania na znaczne odległości. Warszawa, 1890.
12. O biegu w rurach wody, nafty i ropy. Warszawa, 1891.
13. Elektryczny i mechaniczny pociąg statków. Petersburg, 1894.
14. Teoria transmisji linowej. Petersburg, 1896.
15. Kurs Elektrotechniki wykładany w Inst. Inżen. Kommunik. Petersburg, 1899.
16. Dumania przyrodnika. Petersburg, 1900.
17. Kurs Hydrauliki, wykładany w Inst. Inżen. Kommunik. Petersburg, 1901.
18. Materja na podstawie hipotez Hydrodynamiki. Petersburg, 1902.



TEORIA PRĄDU ELEKTRYCZNEGO.

DZIEŁA I ROZPRAWY MATEMATYCZNO-FIZYCZNE

WYDAWANE PRZEZ

A. CZAJEWICZA I S. DICKSTEINA

Z ZPOMOGI KASY POMOCY DLA OSÓB, PRACUJĄCYCH NA POLU NAUKOWYM,
IMIENIA DR. MED. JÓZEFA MIERNOWSKIEGO.

XII.

TEORIA PRĄDU ELEKTRYCZNEGO.

ZARYS ZASADNICZYCH PRAW
USTALONEGO I NIEUSTALONEGO PRĄDU ELEKTRYCZNEGO
I
TOWARZYSZĄCYCH MU ZAKŁÓCEŃ MAGNETYCZNYCH.

PODSTAWY ELEKTROMAGNETYCZNEJ
TEORYI ŚWIATŁA.

Ἄσιν ὁ Θεὸς γεωμετρεῖ.

OPRACOWAŁ

HENRYK MERCZYNG,

Profesor Instytutu Inżynierów Komunikacji w Petersburgu.

WARSZAWA.

SKŁAD GŁÓWNY W KSIĘGARNI E. WENDE i S-ka.

1905.

BIBLIOTEKA
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ
Warszawa, Pl. Jedności Robotniczej 1

B. 5105

Доволено Цензурою.
Варшава, 23 Июня 1905 года.

Drukarnia Rubieszowskiego i Wrotnowskiego w Warszawie.

264-791 5712

SPIS RZECZY.

Wstęp	<i>Str.</i> VII
-----------------	--------------------

R O Z D Z I A Ł I.

Przypadki zasadnicze przebiegu prądu elektrycznego w obwodach, posiadających samoindukcję i pojemność.	
§ 1. Prawo Ohma oraz ogólne własności elektryczne przewodników . . .	1
§ 2. Prąd w przewodniku, posiadającym samoindukcję, wywołany przez siłę elektromotoryczną stałą	8
§ 3. Samoindukcja przy sile elektromotorycznej zmiennej	6
§ 4. Elektromotoryczna siła samoindukcji. Graficzna interpretacja całki za pomocą trójkąta promieniowego (wektoryalnego)	12
§ 5. Siła elektromotoryczna zmienna w obwodzie, zawierającym kondensator. Diagram promieniowy odnośny	14
§ 6. Siła elektromotoryczna zmienna w obwodzie, zawierającym samoindukcję oraz kondensator	19
§ 7. Rozprzestrzenianie się prądu w obwodach, w których przewodniki posiadają pojemność	22

R O Z D Z I A Ł II.

Wyładowania oscylacyjne elektryczności.	
§ 8. Równanie różniczkowe ogólne zakłócenia elektrycznego w obwodzie zawierającym samoindukcję oraz kondensator.	29
§ 9. Wyładowanie, odpowiadające wartości rzeczywistej pierwiastków . .	31
§ 10. Wyładowanie, odpowiadające pierwiastkom urojonym. Prąd oscylacyjny	34
§ 11. Wyładowanie, odpowiadające przypadkowi, gdy pierwiastki są równe	38

R O Z D Z I A Ł III.

Pole magnetyczne, wywołane przez prąd elektryczny.	
§ 12. Równania różniczkowe Maxwella dla pola magnetycznego, wywołanego przez prąd elektryczny	41
§ 13. Zastosowanie ogólnych równań Maxwella, w przypadku prądów tylko w przewodnikach rzeczywistych	47

ROZDZIAŁ IV.

Prądy dielektryczne Maxwella. Elektromagnetyczna teoria światła.

§ 14. Prądy dielektryczne w izolatorach	55
§ 15. Równania ogólne elektromagnetycznej teorii światła.	60
§ 16. Przypadek szczególny: rozchodzenie się fali płaskiej. Równanie promienia.	68
§ 17. Prędkość rozchodzenia się zakłóceń elektrycznych i magnetycznych .	66
§ 18. Fale elektromagnetyczne, odbicie, załamanie, drgania stojące	69
Załamanie światła i prędkość rozchodzenia się zakłóceń elektromagnetycznych.	74
Rezonatory elektryczne, odbicie fal, drgania stojące (fale spiętrzone) .	75
§ 19. Drogi rozchodzenia się energii elektrycznej. Teoria Poyntinga. Wyznaczenie liczbowych wartości sił elektrycznych i magnetycznych w promieniu świetlnym słonecznym. Ciśnienie światła. Komety . . .	78

ROZDZIAŁ V. (dodatkowy).

Zarys teorii elektronów w zastosowaniu do objaśnienia zjawisk elektrycznych.	86
--	----

Dostrzeżone omyłki druku.

Str. 11, w. 2 od dołu: zamiast $\frac{I_0}{R'} \sin \varphi e^{\frac{R}{L} t}$, ma być $\frac{E_0}{R'} \sin \varphi e^{-\frac{R}{L} t}$.

Str. 13, rys. 3: napis na boku AB trójkąta powinien być $\epsilon_0 = J_0 L \omega$.

Str. 65, w. 13 od dołu: zamiast równoległa ma być prostopadła.

Str. 82, w. 4 od dołu: zamiast 600, ma być 6 mikrovoltów.

Wspaniały gmach teorii zjawisk elektrycznych i magnetycznych w tym całokształcie, w którym się on nam dziś przedstawia, zbudowany został przede wszystkim dzięki usiłowaniom fizyków angielskich drugiej połowy XIX wieku. Opierając się na poglądach Faradaya co do natury pola elektrycznego i magnetycznego, Sir Wiliam Thomson (obecnie lord Kelvin) i zmarły w 1879 r. James Clark Maxwell opracowali główne podstawy teoretyczne nowej nauki. Poglądy badaczy angielskich, głównie z powodu oryginalności teorii oraz trudności ich pojmowania przez czytelnika ze zwykłym przygotowaniem matematycznym, rozszerzały się bardzo powolnie na kontynencie Europy. Lecz rozwój niezmierny nauki o zastosowaniach elektryczności, t. j. elektrotechniki, wpływał w tym razie na rozpowszechnienie wiedzy teoretycznej. Przyjęcie przez pierwszy kongres międzynarodowy elektryczny w Paryżu w 1881 r. układu bezwzględnych miar elektrycznych, oraz zastosowanie pojęć Faradaya o liniach siły i obwodach magnetycznych, jako podstawy przy obliczaniu i projektowaniu dynamomaszyn (Kapp i Hopkinson ok. r. 1880) wywołały taki popyt na te przynajmniej działy teorii zjawisk elektrycznych i magnetycznych, iż w krótkim czasie stały się one dorobkiem umysłowym szerszych kół technicznych. W tym kierunku szczególnie wiele zawdzięczamy naukowo-popularyzacyjnej działalności uczonych francuskich (Mascart i Joubert). Gdy następnie, w ostatnim dziesiętku lat ubiegłego wieku, zastosowanie prądów zmiennych tak przy telefonowaniu na znaczne odległości, jak również głównie przy przenoszeniu siły na odległość, wymagało od techników znajomości zasad teoretycznych działania tych prądów, to znowu teoria Maxwella posłużyła za podstawę i źródło wiedzy.

Stosując w interpretacji rezultatów Maxwella metody graficzne, elektrotechnika skorzystała z tych rezultatów i tym sposobem znów wpłynęła na rozpowszechnienie wśród specjalistów trudnych pojęć o roli pojemności i samoindukcyi w obwodach zmiennych, o przesuwaniu faz i t. d.



Nakoniec, w ostatnim czasie zrozumienie wynalazku telegrafu bez drutu, opartego z jednej strony na wyładowaniach wahadłowych — wibracyjnych w obwodach, a następnie na promieniowaniu zakłóceń elektrycznych, wymaga znajomości tych działów wiedzy, które do tej pory najmniej były znane technikom — teorii pola elektrycznego w dielektryku i teorii wyładowań wahadłowych w obwodach.

Ponieważ te same zjawiska są także podstawą jednego z największych uogólnień myśli ludzkiej w tej dziedzinie — teorii elektromagnetycznej światła, więc postawiliśmy sobie za zadanie w pracy niniejszej wyłożyć w formie możliwie przystępnej i zwięzłej wspomniane zagadnienia teoretyczne, t. j. teorię prądu elektrycznego i towarzyszących mu zakłóceń magnetycznych, albowiem pojedyncze działy tej teorii są nawet naukowo przygotowanym czytelnikom często mało znane.

Wykład nasz rozpoczynamy od streszczenia najważniejszych przypadków przebiegu prądu elektrycznego w obwodach, posiadających pojemność i samoindukcję, t. j. odstępujących od prostej zależności, danej przez prawo *Ohma*. W następnym rozdziale mieści się szczegółowa teoria wyładowań wahadłowych. Rozdział trzeci poświęcamy równaniom różniczkowym *Maxwella* dla zakłóceń magnetycznych i elektrycznych i stosujemy ich wyniki do wyjaśnienia zjawiska przenikania prądów zmiennych w masę przewodnika (efekt skórny — „*skin effect*“). W rozdziale czwartym, wprowadziwszy niektóre pojęcia z elektrostatyki konieczne dla zrozumienia *Maxwello*skich prądów dielektrycznych, dajemy schemat wyników teorii elektromagnetycznej światła.

Nakoniec w formie uzupełniającego dodatku, w rozdziale piątym w pobieżnym zarysie znajdzie czytelnik wykład nowego objaśnienia zjawisk elektrycznych przez teorię elektronów. Chociaż ta ostatnia teoria nie jest logicznie związana z teorią *Maxwella*, to jednak zdawało nam się, iż, traktując obecnie teorię prądu elektrycznego, nie można milczeniem pominąć teorii elektronów.

Oczywiście, iż w szczupłym zakresie tej pracy czytelnik może nie znajdzie wielu interesujących go kwestyj, lecz wykład wyczerpujący zupełnie nie był naszym zadaniem; podobnego rodzaju obszernie prace można znaleźć w literaturach obcych. Cel nasz był skromniejszy: dać czytelnikowi polskiemu, któremu nie są obce elementarne pojęcia z dziedziny elektryczności i magnetyzmu, np. w zakresie naszych „*Zasad Elektrotechniki*“¹⁾ oraz początki *Rachunku różniczkowego*, cał-

¹⁾ Warszawa 1888.

kowego i równań różniczkowych, możność poznać podstawy teorii prądu elektrycznego, któreby mu pozwoliły następnie z korzyścią dla siebie czytać te prace naukowe w językach obcych, w których rozpatrywane przez nas zagadnienia wyłożone są zupełnie szczegółowo.

Główne dzieła, na których, obok studyów klasycznych *Maxwella* i *Sir W. Thomsona*, oparliśmy się w tej pracy, wskazane są oddzielnie. Przy wykładzie staraliśmy się zwrócić uwagę szczególną na wyprowadzenie równań różniczkowych, na określenie i znaczenie fizyczne stałych dowolnych, jak również na czysto formalno przeprowadzenie całkowań. To ostatnie mogłoby się może specjalistom matematykom zdawać zbytęcznem, ponieważ jednak zagadnienia fizyczne interesują nietylko matematyków, więc zbytnia zwięzłość w formalnym wykładzie matematycznym mogłaby utrudnić czytanie naszej pracy osobom, które nie poświęcają się specjalnie badaniu równań różniczkowych.

Wszędzie, gdzie to tylko było możliwe, ogólne wnioski objaśniamy przez przykłady liczbowe, gdyż fizyk powinien sobie zdawać sprawę ze zjawiska nietylko symbolicznie, lecz i konkretnie. Tak np. w § 19 przeprowadziliśmy obrachowanie wartości liczbowej zakłóceń elektrycznych i magnetycznych w promieniu słonecznym, a także ciśnienia promieni na oświetlane powierzchnie, jako ilustracyę elektromagnetycznej teorii światła. Podobnie wskazane są także rezultaty doświadczeń, potwierdzających wyniki teoretyczne; lecz samo opisanie doświadczeń i doświadczalnego badania rozpatrywanych zjawisk zostało przez nas opuszczone, gdyż jest ono dostępne pojęciu czytelnika w każdym wykładzie i może być znalezione w rozmaitych pracach z Fizyki doświadczalnej.

Kończąc te kilka słów wstępnych, uważamy za swój miły obowiązek podziękować p. inżynierowi *Alfredowi Rundo*, asystentowi przy katedrze Elektrotechniki Instytutu Inżynierów Komunikacyi, za pomoc przy kreśleniu rysunków i korekcie.

ROZDZIAŁ I.

Przypadki zasadnicze przebiegu prądu elektrycznego w obwodach, posiadających samoindukcję i pojemność.

§ 1. Prawo Ohma oraz ogólne własności elektryczne przewodników.

Wiadomo, że, jeżeli pod wpływem jakiejś postronnej przyczyny (np. procesów chemicznych w ogniwie galwanicznym) w dwóch miejscach przestrzeni (w danym przypadku na biegunach ogniwa) będzie stale wywoływana pewna różnica potencjałów (t. j. że potencjał np. blaszki cynkowej w ogniwie jest pod wpływem rozkładów chemicznych inny, niż potencjał blaszki miedzianej); jeżeli, prócz tego, miejsca owe różnego potencjału połączymy przewodnikiem elektryczności, t. j. ciałem, w którym elektryczność może swobodnie się rozchodzić, to elektryczność zacznie po owym przewodniku przechodzić z miejsca, w którym potencjał ma wartość większą, ku miejscu, w którym potencjał ma wartość mniejszą. Rzeczywiście, potencjał w danym miejscu przestrzeni określa się jako praca mechaniczna potrzebna na to, by z nieskończoności, wbrew działaniu pozostałych stałych mas elektrycznych, przenieść w to miejsce jednostkę elektryczności dodatniej¹⁾. Jest więc rzeczą oczywistą, iż istniejący rozkład elektryczny (pole elektryczne) będzie usiłował przeprowadzić elektryczność do miejsca, gdzie owa praca będzie mniejsza, jeżeli tylko będzie dana możność rozchodzenia się stanu elektrycznego, t. j. jeżeli punkty różnego potencjału są połączone przewodnikiem. Jeżeli przytem, jakżeśmy już powiedzieli, różnica potencjału zostaje wywoływana stale, to i rozchodzenie się stanu elektrycznego w przewodniku („przepływ elektryczności“) będzie stałe, t. j. otrzymamy

¹⁾ Patrz, między innymi, nasze „Zasady Elektrotechniki“, str. 2 — 7.

prąd elektryczny. Przytem sama różnica potencyału dwóch punktów może się zmieniać; istnienie prądu wymaga tylko, by istniała choćby zmienna, lecz wogóle różna od zera, wspomniana różnica, która zresztą może mieć i chwilowe wartości równe zeru. Różnica potencyału, wywołująca prąd, nosi, jak wiadomo, nazwę siły elektrowzbudzającej czyli elektromotorycznej ¹⁾. Jak wspomniano, warunkiem powstania prądu jest również połączenie miejsc różnego potencyału przewodnikiem, t. j. ciałem, dozwalającym elektryczności swobodnie się rozchodzić. Własność przewodnictwa posiadają, jak wiadomo, różne ciała przyrody w najrozmaitszym stopniu; jedne, jak wszystkie metale, w bardzo znacznym, inne, jak np. szkło, kauczuk, powietrze (sucho), lak, wosk, w nadzwyczaj nieznacznym, tak że pierwsze zwiemy dobrými przewodnikami, drugie złymi czyli izolatorami. Wogóle jednak każde ciało, nawet dobry przewodnik, stawia pewien opór rozchodzeniu się elektryczności. Opór ten przeciwdziała w prądzie elektrycznym przebiegowi elektryczności wzdłuż przewodnika, wywołanemu przez siłę elektromotoryczną; dwie te wielkości wywierają wpływ odwrotny na ilość elektryczności, przepływającej w jednostce czasu w przewodniku, czyli na siłę prądu elektrycznego. Jeżeli tę ostatnią nazwiemy przez J , różnicę potencyałów dwóch punktów przez E , opór przewodnika między nimi przez R , to związek między temi wielkościami jest dany przez prawo Ohma:

$$J = \frac{E}{R} \quad \dots \quad (1)$$

W przypadku, gdy przewodnik nie posiada ani samoindukcyi ani też pojemności (co zresztą w rzeczywistości ściśle matematycznie nigdy nie zachodzi), prawo Ohma określa dane zjawisko w zupełności: we wszystkich częściach przewodnika w jednej i tej samej chwili powstaje i ustala się prąd J ; jeśli z biegiem czasu E ulega zmianie, to wywołane przez tę siłę elektromotoryczną zmiany wielkości J są do niej proporcjonalne (w założeniu, iż wielkość R jest stała), oraz następują jednocześnie ze zmianami wielkości E .

Na całokształt cech elektrycznych każdego przewodnika fizycznego, prócz oporu (ohmicznego), składają się jeszcze samoindukcyja oraz

¹⁾ Pojęcie siły elektromotorycznej, jako różnicy potencyału dwóch punktów, nie znajduje zastosowania w prądach, wywołanych w obwodach zamkniętych pod wpływem indukcji, gdyż tam każdy punkt obwodu zlewna się z sąsiednim. Dla tego przypadku pojęcie siły elektromotorycznej danego obwodu sprowadza się do pojęcia pracy koniecznej do przesunięcia wzdłuż obwodu jednostki elektryczności. Patrz rozdz. IV, § 12.

pojemność. Dwie ostatnie cechy znacznie zmieniają prosty stosunek zależności między wyżej wskazanymi wielkościami, wpływający z prawa O h m a.

Spółczynnik samoindukcji danego przewodnika zależny jest, jak wiadomo, od formy geometrycznej obwodu, oraz od przenikliwości magnetycznej przewodnika i otaczającego go ośrodka. W przypadku więc ogólnym współczynnik samoindukcji jest funkcją czasu, nawet gdy forma geometryczna przewodnika pozostaje niezmienna. Jeśli jednak materiał przewodnika oraz sam ośrodek jest niemagnetyczny (w przypadku zwoju drutu miedzianego bez jądra żelaznego — w powietrzu), a forma przewodnika nie podlega zmianom, współczynnik samoindukcji nie zależy od czasu (w założeniu, że prąd elektryczny rozdziela się jednostajnie w przekroju poprzecznym przewodnika).

Każdy przewodnik może posiadać pojemność dla dwóch przyczyn. Najpierw na zasadzie ogólnej własności każdego izolowanego przewodnika elektryczności, znajdującego się w polu elektrycznym, gdy inne przewodniki są nieskończenie oddalone lub też stale utrzymywane przy potencyale zerowym. Pojemność ta (zależna od rozmiarów przewodnika i jego formy geometrycznej) jest wogóle bardzo mała i może być z rozpatrywania wykluczona (np. pojemność kuli ziemskiej nie przewyższa 708 mikrofarad). Powtóre, każdy przewodnik izolowany stanowi jedną ze zbroi kondensatora; drugą stanowią inne przewodniki lub ziemia. Lecz i ten rodzaj pojemności posiada przy zwykłych rozmiarach przewodników w pracowniach nader małą wielkość i może być również pominięty. Pojemności te wszakże należy brać pod uwagę, gdy idzie o badanie długich linii lub jeszcze bardziej, gdy idzie o kable telegraficzne. (Pojemność zwykłego powietrznego drutu telegraficznego stanowi około $\frac{1}{100}$ mikrofarady na kilometr). W zwykłych więc przypadkach pojemność przewodnika może być przyjęta za zero ¹⁾.

§ 2. Prąd w przewodniku, posiadającym samoindukcję, wywołany przez siłę elektromotoryczną stałą.

Wobec uwag powyższych wprowadzamy uzupełnienia do prawa O h m a, mając na względzie li tylko obecność samoindukcji.

¹⁾ Do obwodów elektrycznych, prócz przewodników, mogą być włączone i oddzielne kondensatory — przypadek ten będzie rozpatrywany niżej; dla obwodów jednakże, złożonych z samych przewodników, pojemność ich (z wyjątkiem przypadków, wskazanych w tekście) może być uznana za nieznaczną i być pominięta.

Jeżeli L jest współczynnikiem samoindukcji obwodu, to, jak wiadomo, siłę elektromotoryczną E , wywołanej przez jakąkolwiek przyczynę zewnętrzną, w każdej danej chwili przeciwdziała pewna określona siła elektromotoryczna samoindukcji, równa

$$\varepsilon' = - \frac{d(LJ)}{dt} \dots \dots \dots (2)$$

O ile współczynnik samoindukcji jest wielkością stałą (ten właśnie przypadek jedynie rozważamy), możemy wzór powyższy przedstawić w ten sposób:

$$\varepsilon' = - L \frac{dJ}{dt} \dots \dots \dots (2a)$$

Wskutek tego w obwodzie w każdej danej chwili powstaje i ustala się prąd

$$J = \frac{E}{R} - \frac{L}{R} \frac{dJ}{dt} \dots \dots \dots (3a)$$

(ponieważ $E = RJ + L \frac{dJ}{dt} \dots \dots (3)$, przyczem

$$+ L \frac{dJ}{dt} = \varepsilon = - \varepsilon'$$

stanowi część siły elektromotorycznej źródła energii, zużywaną na przeciwdziałanie samoindukcji).

Całka równania różniczkowego (3a) winna zastąpić w danym przypadku prosty wzór, wyrażający prawo Ohma.

Podamy całkowanie równania w dwóch odmiennych założeniach:

- a) gdy siła elektromotoryczna jest stała;
- b) gdy siła elektromotoryczna jest zmienna.

W obu przypadkach całkowanie sprowadza się do wyznaczenia całki równania różniczkowego 1-go rzędu i 1-go stopnia.

W przypadku pierwszym ($E = \text{const}$) całka wyraża się wzorem (t liczymy, poczynając od chwili zamknięcia prądu):

$$J = \frac{E}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right) \dots \dots \dots (4)$$

W samej rzeczy, z równania (3a) otrzymujemy:

$$\frac{dJ}{dt} = \frac{E}{L} - \frac{R}{L} J,$$

lub

$$dt = \frac{dJ}{\frac{E}{L} - \frac{R}{L} \cdot J}.$$

Całkujemy w przypuszczeniu, iż E i R są wielkościami stałymi:

$$\begin{aligned} \int dt &= \int \frac{dJ}{\frac{E}{L} - \frac{R}{L} J} = -\frac{L}{R} \int d\left(\frac{E}{L} - \frac{R}{L} J\right) = \\ &= -\frac{L}{R} \log_e \left[\frac{E}{L} - \frac{R}{L} J \right] + C. \end{aligned}$$

Ponieważ przy $t = 0$, jest $J = 0$, dla wyznaczenia stałej dowolnej otrzymujemy równanie:

$$0 = -\frac{L}{R} \log_e \frac{E}{L} + C,$$

z którego

$$C = \frac{L}{R} \log_e \frac{E}{L}.$$

A zatem:

$$t = -\frac{L}{R} \left\{ \log_e \left[\frac{E}{L} - \frac{R}{L} J \right] - \log_e \frac{E}{L} \right\} = -\frac{L}{R} \log_e \frac{\frac{E}{L} - \frac{R}{L} J}{\frac{E}{L}};$$

w dalszym zaś ciągu:

$$e^{-\frac{R}{L} t} = 1 - \frac{R}{E} J;$$

ostatecznie wzór, wyznaczający wielkość siły prądu, której tenże dosięga po upływie czasu t , wyraża się w postaci:

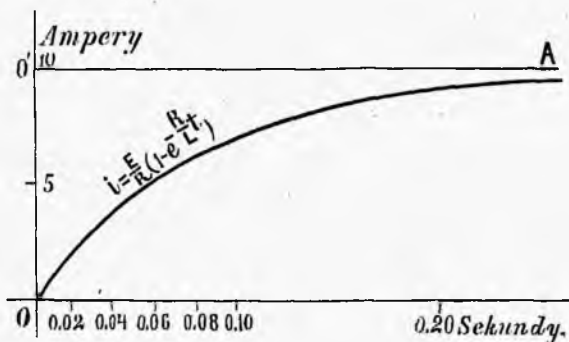
$$J = \frac{E}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L} t} \right).$$

Całka ta wskazuje, iż tylko dla $t = \infty$ prawo Ohma ściśle odzwierciedla zjawisko; innymi słowy, tylko dla momentu nieskończonego odległego od momentu początkowego zamykania prądu, siła tegoż dosięga wartości, określonej przez wzór Ohma.

Prędkość wzrastania siły prądu, jak widzimy, zależna jest od wielkości stosunku $\frac{R}{L}$; im stosunek ten jest większy, tem prędzej wzrasta siła prądu. Ponieważ przy zwykłych pomiarach laboratoryjnych mamy do czynienia z wielkościami oporu R , miarą których są ohmy, oraz z wiel-

kościami samoindukcyi, równającemi się setnym, tysięcznym lub mniejszym jeszcze częściom henry¹⁾, wzrastanie siły prądu wo wskazanych warunkach jest nader szybkie.

Rys. 1.



Rys. 1 przedstawia całą graphicznie dla wielkości $R = 0,1$ ohma, $L = 0,01$ henry.

Rysunek stwierdza, iż już po upływie $t = \frac{6}{100}$ sekundy siła prądu dobiega połowy swej siły (5 amperów²⁾).

§ 3. Samoindukcyja przy sile elektromotorycznej zmiennej.

Jeżeli siła elektromotoryczna E jest z m i e n n a, to dla rozwiązania równania (3) winniśmy za punkt wyjścia przyjąć prawo zmiany jej w zależności od czasu. Ponieważ w praktyce najdonioślejsze znaczenie posiadają siły elektromotoryczne, podległe zmianom peryodycznym, jak np.

¹⁾ Henry nosi czasem nazwę kadrana; o jednostkach elektrycznych wogóle patrz, między innymi, nasze „Zasady Elektrotechniki“.

²⁾ Zauważmy, iż jeżeli z obwodu, w którym ustalił się prąd $J = \frac{E}{R}$, wyłączymy źródło różnicy potencyału (nie rozrywając obwodu), np. stykając bieguny elementu, przerwanie prądu nie będzie natychmiastowe.

Dla wyznaczenia prawa zanikania prądu, zakładamy w równaniu (3)

$$E = 0,$$

otrzymujemy wtedy:

$$J = -\frac{L}{R} \frac{dJ}{dt} \text{ oraz}$$

$$J = \frac{E}{R} e^{-\frac{R}{L} t}.$$

W powyższym wzorze E oznacza siłę elektromotoryczną obwodu przed utworzeniem połączenia stykowego (Kurzschluss).

siły, wytwarzane przez alternatory (generatory prądu zmiennego), możemy założyć, iż E jest funkcją wstawy czasu, czyli:

$$E = E_0 \sin(\omega t), \dots \dots \dots (5)$$

przyczem

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \dots \dots \dots (6)$$

stanowi t. zw. częstotść (fréquence) prądu zmiennego ¹⁾ lub liczbę zmian na sekundę.

T oznacza okres prądu zmiennego, t. j. czas, po upływie którego siła elektromotoryczna prądu osiąga znów tę samą wartość z tym znakiem, co w początku okresu. Liczba okresów na sekundę (częstotść) prądu zmiennego, wytwarzanego przez używane w praktyce alternatory, waha się między 25 i 100, t. j. $T = \frac{1}{25}$ do $\frac{1}{100}$ sekundy. Przy wyładowywaniach oscylacyjnych (o których niżej) wielkość T jest znacznie mniejsza i dosięga milionowych a nawet bilionowych części sekundy.

Zauważmy, iż rzadko prąd zmienny w rzeczywistości wyraża się jako funkcja wstawy. Zwykle zależność ta jest bardziej złożona, lecz będąc funkcją peryodyczną, może być według prawa Fouriera rozpatrywana jako suma oddzielnych funkcji, z których każda wyraża się jako wstawa. Ograniczając się w danym przypadku na rozpatrzeniu zależności, mającej postać funkcji wstawy (5), z równania (3a) otrzymujemy:

$$J = \frac{E_0}{R} \sin(\omega t) - \frac{L}{R} \frac{dJ}{dt} \dots \dots \dots (7)$$

Całkę tego równania różniczkowego otrzymujemy jak następuje:

Na zasadzie wzoru (7) jest:

$$dJ + \frac{R}{L} J dt = \frac{E_0 \sin(\omega t)}{L} dt.$$

Zakładamy:

$$J = uv$$

gdzie u i v są zmienne dowolne, mające być wyznaczonemi.

Będzie:

$$u \left(dv + \frac{R}{L} v dt \right) + v du = \frac{E_0}{L} \sin(\omega t) dt \dots \dots \dots (a)$$

¹⁾ ω w rzeczywistości jest to iloczyn częstotści $\frac{1}{T}$ i współczynnika 2π . Z punktu widzenia fizycznego ω jest prędkością kątową zmiany kąta ωt , jak objaśnimy niżej przy rozpatrywaniu diagramu promieniowego (wektoryalnego).

Wybieramy wielkość v tak, by czyniła zadość równaniu:

$$dv + \frac{R}{L} v dt = 0;$$

skąd

$$\log v = - \int \frac{R}{L} dt + \log C_1,$$

przyczem C_1 oznacza stałą dowolną.

Całkując, otrzymujemy $v = C_1 e^{-\int \frac{R}{L} dt}$, przy stałych zaś wielkościach R i L :

$$v = C_1 e^{-\frac{R}{L} t}$$

Z drugiej strony z równania (a), doprowadzonego do postaci

$$v du = \frac{E_0}{L} \sin(\omega t) dt, \text{ otrzymujemy:}$$

$$du = \frac{1}{C_1} e^{\frac{R}{L} t} \frac{E_0}{L} \sin(\omega t) dt, \text{ i w dalszym ciągu:}$$

$$u = C_2 + \frac{1}{C_1} \cdot \frac{E_0}{L} \int e^{\frac{R}{L} t} \sin(\omega t) dt, \text{ albo, zakładając } C_1 C_2 = C,$$

$$J = C e^{-\frac{R}{L} t} + e^{-\frac{R}{L} t} \frac{E_0}{L} \int e^{\frac{R}{L} t} \sin(\omega t) dt.$$

Całkując przez części, mamy ¹⁾

$$\int e^{\frac{R}{L} t} \sin(\omega t) dt = \frac{e^{\frac{R}{L} t}}{(\omega)^2 + \left(\frac{R}{L}\right)^2} \left[\frac{R}{L} \sin(\omega t) - \omega \cos(\omega t) \right].$$

¹⁾ Rzeczywiście, oznaczając $\frac{R}{L} = a$, mamy, uważając, iż $e^{at} = a \frac{e^{at}}{a}$,

$$\int e^{at} \sin(\omega t) dt = \sin(\omega t) \frac{e^{at}}{a} - \frac{\omega}{a} \int e^{at} \cos(\omega t) dt \text{ i także}$$

$$\int e^{at} \cos(\omega t) dt = \cos(\omega t) \frac{e^{at}}{a} + \frac{\omega}{a} \int e^{at} \sin(\omega t) dt.$$

Stąd:

$$\int e^{at} \sin(\omega t) dt = \frac{e^{at}}{a^2 + \omega^2} (a \sin \omega t - \omega \cos \omega t).$$

Załóżmy:

$$\frac{\frac{R}{L} \sin(\omega t) - \omega \cos(\omega t)}{\sqrt{\omega^2 + \frac{R^2}{L^2}}} = \sin(\omega t - \varphi), \quad (b)$$

przyczem kąt φ będzie określony przez warunki:

$$\sin \varphi = \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + \frac{R^2}{L^2}}},$$

$$\cos \varphi = \frac{\frac{R}{L}}{\sqrt{\omega^2 + \frac{R^2}{L^2}}}.$$

Wówczas:

$$J = \frac{E_0}{L \sqrt{\omega^2 + \frac{R^2}{L^2}}} \sin(\omega t - \varphi) + Ce^{-\frac{R}{L}t}, \text{ albo}$$

zakładając $\frac{\omega L}{R} = \operatorname{tg} \varphi$, otrzymamy

$$J = \frac{E_0}{R \sqrt{1 + \frac{\omega^2 L^2}{R^2}}} \sin(\omega t - \varphi) + Ce^{-\frac{R}{L}t} \quad (8)$$

$Ce^{-\frac{R}{L}t}$, przy nieznacznych nawet wartościach t , stanowi wielkość nader małą.

Odrzucając wyraz ostatni wzoru (8), możemy przedstawić całkę w postaci:

$$J = \frac{E_0}{R} \cos \varphi \sin(\omega t - \varphi) \quad (8a)$$

Interpretacja fizyczna całki tej pokazuje nam:

1) Siła prądu zmienia się według funkcji wstawy, podobnie jak i wywołująca prąd siła elektromotoryczna, przyczem okres zmiany siły prądu równa się okresowi siły elektromotorycznej;

2) Krzywa siły prądu przesuwa się względem krzywej siły elektromotorycznej na kąt φ , czyli wartości zerowe siły prądu otrzymuje później niż siła elektromotoryczna;

3) Amplitudy (rzędne) krzywej siły prądu, jeżeli obwód posiada samoindukcję, są mniejsze w stosunku $\cos \varphi$, niż w przypadku, gdy samoindukcji niema.

Jeżeli obwód nie posiada samoindukcji, to krzywa siły prądu otrzymuje się ze wzoru Ohma i równania (5):

$$J = \frac{E_0}{R} \sin(\omega t) \dots \dots \dots (9)$$

Krzywa, określona równaniem (9), nie okazuje opóźnienia względem krzywej (5).

Odrzucając wyraz, zawierający funkcję wykładniczą, przedstawiamy krzywą równania (8) w postaci analogicznej z równaniem (9):

$$J = \frac{E_0}{R'} \sin(\omega t - \varphi), \dots \dots \dots (10)$$

przyczem

$$R' = R \sqrt{1 + \frac{\omega^2 L^2}{R^2}} \dots \dots \dots (11)$$

Ponieważ wielkość, znajdująca się pod znakiem pierwiastku, większa jest od jedności, okazuje się, iż obecność samoindukcji zwiększa opór ohmiczny obwodu prądu zmiennego.

Wielkość R' nosi nazwę oporu pozornego.

Dla dokładnego wyznaczenia całki (8) niezbędnem jest wprowadzenie do niej wyrazu dodatkowego $Ce^{-\frac{R}{L}t}$ oraz wyznaczenie stałej dowolnej C . Czas t przytem liczyć będziemy od chwili zamknięcia prądu, innemi słowy dla $t = 0, J = 0$. Wogóle z równania (8) otrzymujemy:

$$J = \frac{E_0}{R'} \sin(\omega t - \varphi) + Ce^{-\frac{R}{L}t}$$

Jak powiedziano wyżej, dla $t = 0$ jest $J = 0$,

a więc:
$$0 = -\frac{E_0}{R'} \sin \varphi + C,$$

$$C = \frac{E_0}{R'} \sin \varphi$$

Ostatecznie dokładna postać całki będzie następująca:

$$J = \frac{E_0}{R'} \left[\sin(\omega t - \varphi) + \sin \varphi e^{-\frac{R}{L}t} \right] \dots \dots \dots (12)$$

Rys. 2 przedstawia krzywe (9) i (12); odtwarza on przesunięcie fazy oraz zmniejszenie amplitudy prądu zmiennego dla określonego poszczególnego przykładu:

$$\omega = 100 \pi \text{ (prąd zmienny, często używany przez firmę Helios)}$$

$$R = 3 \text{ ohmom,}$$

$$L = 1/100 \text{ henry.}$$

Wówczas

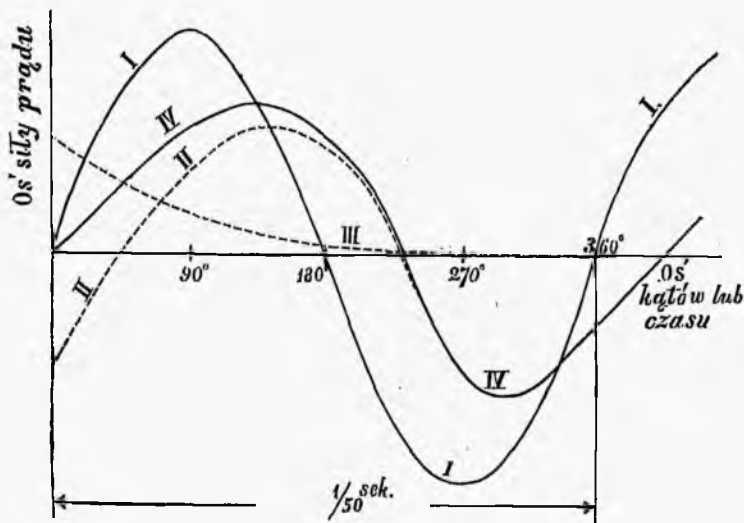
$$R' = 3 \sqrt{1 + \left(\frac{\pi}{3}\right)^2} = 3 \times 1,45 = 4,35.$$

Okazuje się więc, iż opór pozorny zwiększony jest w porównaniu z ohmicznym o 45%.

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\pi}{3}, \quad \varphi = 46\frac{1}{2}^\circ.$$

Krzywa I (pełna) określa zmianę siły elektromotorycznej (lub też siły prądu w obwodzie, pozbawionym samoindukcji). Krzywa II (kreskowana)

Rys. 2.



wyraża zmianę siły prądu według całki (8a), przy czym uwzględniamy wpływ samoindukcji, lecz bez wyrazu dodatkowego. Krzywa III przedstawia zmianę wyrazu dodatkowego $\frac{E_0}{R'} \sin \varphi e^{-\frac{R}{L}t}$. Nakoniec krzywa IV przedstawia rzeczywiste prawo zmiany prądu, jako sumę algebraiczną

krzywych II i III (całkę 12). Krzywo wykreślone są w skali. Z przedstawienia graficznego wywnioskować możemy, iż wpływ wyrazu dodatkowego wyczuwalny jest tylko w pierwszej połowie okresu (podczas $1/100$ sekundy); pozatem kreskowana krzywa II praktycznie zespala się całkowicie z krzywą prądu IV.

§ 4. Elektromotoryczna siła samoindukcji. Graficzna interpretacja całki za pomocą trójkąta promieniowego (wektorialnego).

Według wzoru (2a) siła elektromotoryczna samoindukcji równa się $\varepsilon' = -L \frac{dJ}{dt}$. Oczywiście, iż $\varepsilon = -\varepsilon' = L \frac{dJ}{dt}$ przedstawia siłę równą jej i skierowaną wprost przeciwnie, mianowicie tę siłę elektromotoryczną, którą źródło energii winno dostarczyć, by przeciwdziałać samoindukcji (dla skrócenia sile tej $\varepsilon = L \frac{dJ}{dt}$ damy również nazwę elektromotorycznej siły samoindukcji i odtąd w tem tylko znaczeniu termin ten stosować będziemy).

Po podstawieniu zamiast J całki (10) i po różniczkowaniu otrzymamy:

$$\varepsilon = \frac{E_0 L \omega}{R'} \cos(\omega t - \varphi) = \frac{E_0 L \omega}{R'} \sin(\omega t - \varphi + 90^\circ) \quad (13)$$

Wzór ten wskazuje, że siła elektromotoryczna samoindukcji podlega również zmianom według prawa funkcyj wstawy, o tej samej wielkości okresu, jak siła prądu oraz elektromotoryczna, lecz o fazie wyprzedzającej o 90° fazę siły prądu (oraz o $90^\circ - \varphi$ fazę siły elektromotorycznej).

Trzy wielkości:

1) Siła elektromotoryczna obwodu E ; 2) wywołana przez nią siła prądu w obwodzie J , oraz 3) siła elektromotoryczna samoindukcji ε tegoż obwodu są funkcjami zmiennymi czasu.

Jeśli pierwsza z nich jest funkcją zależną od wstawy czasu, to i dwie ostatnie wyrażone być mogą jako także funkcje wstawy, ponieważ -- zgodnie z wyżej przytoczonym -- jeśli zakładamy

$$E = E_0 \sin(\omega t),$$

to

$$J = \frac{E_0}{R'} \sin(\omega t - \varphi)$$

oraz również

$$\varepsilon = \frac{E_0 L \omega}{R'} \sin(\omega t - \varphi + 90^\circ)$$

Oznaczmy największe wartości zmiennych J i ε przez

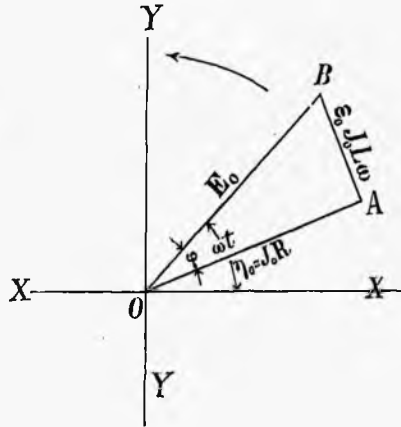
$$\left. \begin{aligned} J_0 &= \frac{E_0}{R'} \\ \varepsilon_0 &= \frac{E_0 L \omega}{R'} = J_0 L \omega. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (14)$$

Wówczas, jeżeli

$$\left. \begin{aligned} E &= E_0 \sin(\omega t), \\ J &= J_0 \sin(\omega t - \varphi) \text{ oraz} \\ \varepsilon &= \varepsilon_0 \sin(\omega t - \varphi + 90^\circ) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (15)$$

By przedstawić graficznie odpowiadającą każdej danej chwili wartość zmiennych E , J i ε , zastosujemy metodę wektorów. Jeżeli z punktu O , początku osi współrzędnych (rys. 3), przeprowadzimy promień $OB = E_0$ i nadamy mu ruch obrotowy naokoło punktu O (w kierunku przeciwnym ruchowi wskazówki zegara) o jednostajnej prędkości kątowej ω , przyczem w chwili $t = 0$ promień skierowany będzie wzdłuż osi XX , to wielkości rzutów tegoż promienia na oś YY w każdej danej chwili równać się będą $E_0 \sin(\omega t)$, gdyż kąt $BOX = \omega t$, rzuty zatem owe stanowiąc będą wartości chwilowe siły elektromotorycznej.

Rys. 3.



Ażeby otrzymać wartości chwilowe siły prądu oraz siły samoindukcyi, przeprowadzamy promienie J_0 oraz $\varepsilon_0 = J_0 L \omega$ przez punkt O , lecz w innym kierunku niż E_0 . Kierując się wzorami (15), promień J prowadzić należy pod kątem φ do promienia OB , lecz kąt ten od promienia OB przeprowadzić w kierunku przeciwnym ruchowi promieni, t. j. zgodnym z ruchem wskazówki zegarowej, ponieważ prąd opóźnia się względem wywołującej go siły elektromotorycznej; promień zaś $\varepsilon_0 = J_0 L \omega$ winien być skierowany pod kątem $90 - \varphi$ naprzód odpowiednio do E_0 , gdyż samoindukcyja wyprzedza siłę elektromotoryczną.

Zamiast prowadzić trzy owe promienie z punktu O , możemy złożyć z nich trójkąt, wprowadzając nową funkcję, a mianowicie spadek ohmiczny potencjału wywołany przez prąd o sile i , krążący w obwodzie o oporze ohmicznym r .

Oczywiście, iż spadek ten e zawsze wyraża się przez iloczyn ri , ponieważ zaś r nie jest ilością wektoryalną, czyli jest mnożnikiem, pozbawionym kierunku, to kierunek e nie różni się od kierunku i .

Założmy, iż η oznacza spadek ohmiczny potencjału w obwodzie, po którym krąży prąd zmienny J ; opór ohmiczny (nie pozorny) obwodu niech będzie R . Wówczas

$$\eta = JR = J_0 R \sin(\omega t - \varphi); \dots \dots \dots (15a)$$

największa wartość η , równa się $\eta_0 = J_0 R$. Promień η_0 analogicznie do J_0 opóźnia się względem E_0 o kąt φ . Z wzorów (15) oraz (15a) wypada, iż wartości promieni E_0 , ϵ_0 i η_0 czynią zadość równaniu:

$$E_0^2 = \epsilon^2 + \eta_0^2$$

na zasadzie stosunku równości identycznej wzorów:

$$E_0^2 = (J_0 L \omega)^2 + (J_0 R)^2 = J_0^2 (R^2 + L^2 \omega^2) = J_0^2 R'^2,$$

wypływającej z wzoru (11).

Na zasadzie powyższego wzoru wnioskujemy, iż siła elektromotoryczna obwodu E równa się sumie geometrycznej ohmicznego spadku potencjału w obwodzie oraz siły elektromotorycznej samoindukcyi. Prowadzimy promień $OB = E_0$ (rys. 3), $OA = \eta_0 = J_0 R$ i wykreślamy trójkąt prostokątny OAB , w którym $\sphericalangle BOA = \varphi$; bok AB oznaczać będzie wtedy ϵ_0 . Przy ruchu obrotowym danego trójkąta około osi O z prędkością kątową ω przeciw skazówce zegarowej otrzymamy na osi YY' rzuty boków trójkąta, równe chwilowym wartościom E , η i ϵ , zgodnie z wzorami (15) i (15a).

Wyżej wskazany związek jest podstawowy przy rozpatrywaniu za pomocą metody graficznej zjawisk, powstających w obwodzie prądu zmiennego, zawierającym samoindukcyę. Dalsze rozwinięcie tejże metody w szczegółach stanowi już dziedzinę specjalną elektrotechniki prądów zmiennych.

§ 5. Siła elektromotoryczna zmienna w obwodzie, zawierającym kondensator. Diagram promieniowy odnośny.

Jeżeli przewodnik posiada sam przez się pojemność tak znaczną, że nie może być ona przyjęta za równą zeru, to równanie prądu otrzymuje

się drogą całkowania równań różniczkowych z pochodnymi cząstkowymi. Zagadnienie to po raz pierwszy rozwiązane zostało przez Sir W. Thomsona (lorda Kelvina). Pozostawiając tymczasowo na uboczu rozwiązanie zagadnienia w tej postaci, do czego powrócimy w § 7, postaramy się obecnie rozpatrzeć przypadek mniej trudny, mianowicie gdy przewodnik sam przez się nie posiada pojemności, do obwodu natomiast włączony jest niezależny od przewodnika kondensator. W tym przypadku, pomimo, iż obwód nie przedstawia nieprzerwanego elektrycznie łańcucha, może być w nim pod wpływem zmiennej siły elektromotorycznej ustalony prąd ciągły.

Włączamy do obwodu o oporze ohmicznym R , pozbawionego atoli samoindukcyi, kondensator o pojemności C , oraz ustalamy (za pomocą generatora prądu zmiennego pewną elektromotoryczną siłę E , zakładając, że jest ona peryodyczną funkcją czasu, zmieniającą się podług prawa wstaw. Pod wpływem owej siły w obwodzie powstaje prąd J , ładujący oraz wyładowujący naprzemian wskazany wyżej kondensator.

Jeżeli w określonej chwili różnica potencjału na zbrojach kondensatora równa się e_c , to dla wartości siły elektromotorycznej źródła energii otrzymujemy wzór następujący:

$$E = e_c + RJ$$

lub równoważny $E_0 \sin(\omega t) = e_c + RJ \dots \dots \dots (16)$

Z drugiej zaś strony, jeżeli q oznacza ładunek kondensatora, to

$$q = e_c C \dots \dots \dots (17)$$

Koszttem zmiany ładunku ustala się prąd w obwodzie, równy

$$J = \frac{dq}{dt} \dots \dots \dots (18)$$

Gdy ładunek q zwiększa się, J otrzymuje wartości dodatnie, przy wyładowywaniu zaś — ujemne.

Na zasadzie wzorów (17) i (18) przez różniczkowanie otrzymujemy:

$$J = C \frac{de_c}{dt} \dots \dots \dots (19)$$

Różniczkując zaś równanie (16) względem t , mamy:

$$E_0 \omega \cos(\omega t) = \frac{de_c}{dt} + R \frac{dJ}{dt},$$

lub $E_0 \omega \cos(\omega t) = \frac{J}{C} + R \frac{dJ}{dt},$

lub ostatecznie:

$$\frac{E_0 \omega}{R} \cos(\omega t) = \frac{J}{RC} + \frac{dJ}{dt} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

Przy całkowaniu równania tego postępujemy, jak wyżej (równanie 7).
Po dokonaniu niezbędnych uproszczeń, otrzymujemy:

$$dJ + \frac{1}{RC} J dt = \frac{E_0 \omega}{R} \cos(\omega t) dt.$$

Zamiast wielkości J podstawiamy równy jej iloczyn uv :

$$u \left(dv + v \cdot \frac{1}{CR} \right) + v du = \frac{\omega}{R} E_0 \cos(\omega t) dt.$$

Wyraz, znajdujący się w nawiasie, zakładamy równym zero; wtedy:

$$v = K e^{-\frac{t}{CR}},$$

przyczem K oznacza stałą dowolną.

Z podstawienia wyrazu tego zamiast v w ostatnie równanie wynika:

$$du = \frac{\omega}{R} \frac{E_0}{K} e^{\frac{t}{CR}} \cos(\omega t) dt,$$

oraz w dalszym ciągu

$$u = \frac{\omega}{R} \cdot \frac{E_0}{K} \int e^{\frac{t}{CR}} \cos(\omega t) dt + K_1,$$

przyczem K_1 oznacza stałą dowolną.

Podstawiając, mamy:

$$J = K_1 K e^{-\frac{t}{CR}} + \frac{\omega}{R} E_0 e^{-\frac{t}{CR}} \int e^{\frac{t}{CR}} \cos(\omega t) dt.$$

Wiadomo, iż

$$\int e^{\frac{t}{CR}} \cos(\omega t) dt = \frac{\frac{1}{CR} \cos(\omega t) + \omega \sin(\omega t)}{\left(\frac{1}{CR}\right)^2 + \omega^2} e^{\frac{t}{CR}}.$$

Zakładamy,

$$\frac{\frac{1}{CR}}{\sqrt{\omega^2 + \left(\frac{1}{CR}\right)^2}} \cos(\omega t) + \frac{\omega \sin(\omega t)}{\sqrt{\omega^2 + \left(\frac{1}{CR}\right)^2}} = \sin(\omega t + \varphi)$$

przyczem

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{CR\omega} \dots \dots \dots (21)$$

Jeśli w dalszym ciągu oznaczymy K_1K przez K' , otrzymamy:

$$J = K'e^{-\frac{t}{CR}} + \frac{\omega}{R} \frac{E_0}{\sqrt{\omega^2 + \left(\frac{1}{CR}\right)^2}} \sin(\omega t + \varphi),$$

Wyraz, zawierający funkcję wykładniczą, zdążający szybko do zera, odrzucamy; po uproszczeniu tem wzór powyższy przybiera postać następującą

$$J = \frac{E_0}{R \sqrt{1 + \frac{1}{C^2 R^2 \omega^2}}} \sin(\omega t + \varphi) \dots \dots \dots (22)$$

Równanie powyższe wskazuje, iż w razie umieszczenia kondensatora w obwodzie, faza siły prądu wyprzedza fazę siły elektromotorycznej, czyli zachodzi zjawisko wprost przeciwne (odwrotne) w stosunku do wpływu samoindukcyi.

Maximum wyprzedzenia odpowiada wartości oporu ohmicznego, równej zeru; wtedy $\varphi = 90^\circ$, czyli gdy siła elektromotoryczna równa jest zeru, siła prądu dobiega swego maximum, i odwrotnie.

Podobnie wyznaczyć możemy prawo zmienności siły elektromotorycznej (lub właściwie różnicy potencjału) zbroi kondensatora e_c .

Mianowicie, z wzoru (19) wypada:

$$e_c = \frac{1}{c} \int J dt = \frac{E_0}{CR''} \int \sin(\omega t + \varphi) dt = -\frac{E_0}{\omega CR''} \cos(\omega t + \varphi), (23)$$

jeżeli przez $R'' = R \sqrt{1 + \frac{1}{\omega^2 C^2 R^2}} \dots \dots \dots (24)$

oznaczymy opór pozorny obwodu, zawierającego kondensator.

Zachowując wskazane wyżej oznaczenie największej wartości siły prądu przez J_0 , otrzymujemy z wzoru (22):

$$J = J_0 \sin(\omega t + \varphi),$$

$$J_0 = \frac{E_0}{R''}$$

Maximum zaś różnicy potencjału zbroi kondensatora równa się

$$E_c = \frac{E_0}{\omega CR''} = \frac{J_0}{\omega C} \dots \dots \dots (24a)$$

Z równania (23) wypada, iż faza zmiany e_c różni się od faz J i E . Mianowicie, ponieważ:

$$\begin{aligned} -\cos(\omega t + \varphi) &= \cos(\pi - \omega t - \varphi) = \sin\left\{\frac{\pi}{2} - (\pi - \omega t - \varphi)\right\} \\ &= \sin\left\{\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2}\right\} = \sin\left[\omega t - \left\{\frac{\pi}{2} - \varphi\right\}\right], \end{aligned}$$

okazuje się, iż faza siły elektromotorycznej między zbrojami kondensatora:

- 1) spóźnia się o $\frac{\pi}{2} - \varphi$ względem fazy siły elektromotorycznej generatora elektryczności i staje się jednaką tylko przy $\varphi = 90^\circ$ czyli $R=0$;
- 2) spóźnia się o 90° względem siły prądu i spadku ohmicznego potencjału $\eta = RJ$, ponieważ wogóle faza siły prądu wyprzedza o kąt φ fazę siły elektromotorycznej źródła elektryczności.

Zwracając się do przytoczonego wyżej przykładu, w którym założyliśmy $R = 3$ ohmom, $\omega = 100\pi$ (dla prądu „Helios“), w razie gdy do obwodu włączymy kondensator o pojemności równej 1 mikrofaradzie = $1 \cdot 10^{-6}$ farady, otrzymamy

$$R'' = 3 \sqrt{1 + \frac{1}{10^4 \cdot \pi^2 \cdot 10^{-12} \cdot 3^2}} = 3 \sqrt{1 + \frac{10^8}{9\pi^2}} = \infty \frac{10^4}{\pi} = \infty 320 \text{ ohm}$$

Tak więc okazuje się, iż w zwykłych warunkach laboratoryjnych włączenie kondensatora do obwodu znacznie powiększa opór pozorny, czyli zmniejsza siłę prądu. W diagramie promieniowym, oczywiście, promień odpowiadający największej wartości siły elektromotorycznej między zbrojami kondensatora $E_c = \frac{J_0}{\omega C}$ prowadzić należy prostopadle do $\eta_0 = RJ_0$, przytem nadół (rys. 4) w kierunku przeciwnym obrotowi trójkąta promieniowego. Zakładając $OA = RJ_0$, $AB = \frac{J_0}{\omega C}$ oraz $OB = E_0$, otrzymamy miarę wartości (22), (23) i (5) w formie rzutów odnośnych promieni na oś pionową rzędnych, w przypuszczeniu, iż kierunek ruchu obrotowego trójkąta zgadza się będzie z kierunkiem strzałki wskazanej na rysunku (nadmienić należy, iż rzut OA zawiera w sobie czynnik stały R).

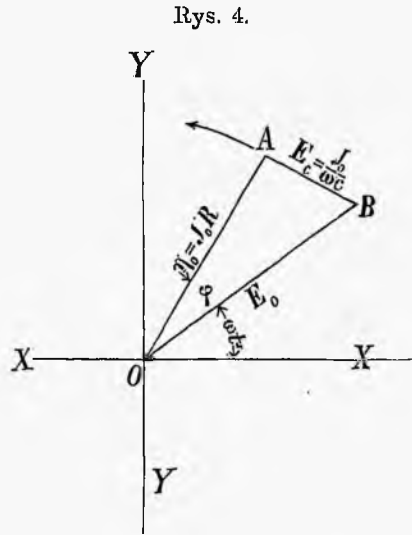
§ 6. Siła elektromotoryczna zmienna w obwodzie, zawierającym samoindukcję oraz kondensator.

Jeśli przewodnik, łączący źródło energii elektrycznej z kondensatorem, prócz oporu ohmicznego R , zawiera samoindukcję L , wzory określające siłę prądu są analogiczne ze wskazanymi wyżej (10) i (22).

Wogóle, jeżeli do obwodu prócz samoindukcji L wchodzi i kondensator o pojemności C , siła elektromotoryczna źródła energii zużywa się na zrównoważenie:

- 1) spadku ohmicznego potencjału w obwodzie RJ ;
- 2) siły elektromotorycznej samoindukcji $L \frac{dJ}{dt}$;
- 3) różnicy potencjału na zbrojach kondensatora e_c .

Zakładając zatem, że siła elektromotoryczna źródła elektryczności zmienia się w funkcji czasu podług prawa wstaw



$E = E_0 \sin(\omega t)$, otrzymujemy wzór następujący:

$$E_0 \sin(\omega t) = RJ + L \frac{dJ}{dt} + e_c \dots \dots \dots (25)$$

Różniczkując względem t , otrzymujemy:

$$L \frac{d^2J}{dt^2} + R \frac{dJ}{dt} + \frac{de_c}{dt} - E_0 \omega \cos(\omega t) = 0,$$

posiłkując się zaś wzorem (19), mamy:

$$LC \frac{d^2J}{dt^2} + RC \frac{dJ}{dt} + J - E_0 \omega C \cos(\omega t) = 0 \dots \dots (25a)$$

Jest to równanie różniczkowe 2-go rzędu odnośnie do J o współczynnikach stałych. Całkowanie według znanych zasad prowadzi do wyznaczenia $J = f(t)$ ¹⁾. Do tegoż rezultatu dojść możemy jednak drogą prostszą, mianowicie rozpatrując wzory (10) i (22).

¹⁾ Wykład całkowania drogą ogólną znajdzie czytelnik, między innymi u Bedell'a i Crehore'a, str. 96 i następn.

Wypływa z nich, iż włączenie do obwodu kondensatora o pojemności C odnośnie do siły prądu i jej fazy jest równoważne z wprowadzeniem samoindukcji $L' = -\frac{1}{C\omega^2}$.

W samej rzeczy, wzór (22) otrzymuje się bezpośrednio z wzorów (11) i (10) drogą podstawienia zamiast $\frac{\omega L}{R}$ wyrazu $-\frac{1}{CR\omega}$.

Kąt φ zmienia wówczas znak pod pierwiastkiem; zamiast

$$\left(\frac{\omega L}{R}\right)^2 \text{ otrzymujemy } \left(-\frac{1}{CR\omega}\right)^2 = \frac{1}{C^2 R^2 \omega^2}.$$

Oczywiście, iż tego rodzaju zmiana może zachodzić tylko wówczas, gdy siła elektromotoryczna jest funkcją czasu, zmieniającą się podług prawa wstaw, jak w danym przypadku.

Na tej zasadzie włączenie kondensatora możemy uważać jako wprowadzenie samoindukcji dodatkowej $L' = -\frac{1}{C\omega^2}$ (mając na uwadze, iż $\frac{\omega L'}{R} = -\frac{1}{RC\omega}$), co w ostatecznym wyniku prowadzi do następującego wzoru, wyznaczającego siłę prądu (całka równania (25a)):

$$J = \frac{E_0}{R \sqrt{1 + \frac{\omega^2}{R} (L + L')}} \sin(\omega t - \varphi)$$

lub

$$J = \frac{E_0}{R \sqrt{1 + \frac{\omega^2}{R} \left(L - \frac{1}{C\omega^2}\right)^2}} \sin(\omega t - \varphi), \quad \dots \quad (26)$$

przyczem

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\omega}{R} \left(L - \frac{1}{C\omega^2}\right) \dots \dots \dots (27)$$

Równania (26) i (27) wskazują, iż samoindukcja obwodu wprost przeciwdziała wpływowi kondensatora. Tym sposobem przez włączenie do obwodu kondensatora o określonej pojemności można usunąć całkowicie przesunięcie fazy siły prądu względem siły elektromotorycznej; przy tem spełniony być winien warunek, by otrzymać $\varphi = 0$

$$C = \frac{1}{\omega^2 L} \dots \dots \dots (28)$$

Wskazana własność kondensatorów zastosowana została w technice telefonowania na znaczne odległości (między innymi zastosował ją w swym systemacie elektrotechnik belgijski van Rys sel b e r g h e). Ponieważ główną trudność przy telefonowaniu na większe odległości stanowi odkształcanie się krzywej prądu, wywołowanego przez mikrofon pod wpływem samoindukcji przewodnika liniowego, który to wpływ wzrasta wraz z odległością, Rys sel b e r g h e oraz inni włączali do obwodu przed telefonem kondensator.

Jednakże z wzoru (28) wynika również, że pojemność, użyta do regulowania siły prądu, zależy nie tylko od samoindukcji obwodu (która jest mniej więcej stała), lecz również od kwadratu częstości (liczby okresów), ostatnia zaś równa się liczbie drgań dźwięku i jest różna dla różnych tonów muzycznych; dla dźwięków mowy ludzkiej zjawisko wikła się jeszcze bardziej, gdyż każdy dźwięk mowy składa się z całego szeregu tonów. Dobranie więc kondensatora, odpowiedniego dla wszystkich dźwięków, jest niemożliwe; przeto w nowszych systematach telefonowania na dalsze odległości odrzucono system kondensatorów, natomiast wysiłki wynalazców skierowane zostały ku ulepszeniu przesyłania fal dźwiękowych drogą zmniejszenia $\operatorname{tg}\varphi$ czyli samoindukcji L , przez zamianę drutów liniowych żelaznych na miedziane ¹⁾.

Dla przykładu wyznaczyć możemy pojemność równoważącą dla prądu Heliosa ($\omega = 100\pi$) samoindukcję przewodnika $L = \frac{1}{100}$.

Równa się ona:

$$C = \frac{1}{\omega^2 L} = \frac{1}{10^4 \pi^2 \cdot 10^{-2}} = \frac{1}{987} \text{ farad, co stanowi około } 1000 \text{ mikrofaraad.}$$

Kondensator o tej pojemności usunie całkowicie przesunięcie fazy.

Wnioski ostatniego § mogą być przedstawione również w diagramie promieniowym, tworzącym sumę geometryczną (wypadkową) dwóch wyżej przytoczonych diagramów; analogicznie traktowane być mogą i inne szczególne przypadki, mianowicie włączenie kondensatora do bocznika obwodu lub dwóch przewodników, złączonych w szereg jako bocznik o różnych wielkościach samoindukcji i t. d.

W niniejszym wykładzie przypadki te, jako nie przedstawiające szczególnych trudności, pozostawiamy bez dalszego rozwinięcia, nadmieniamy atoli, kończąc ten ustęp, iż charakterystyczną cechą wszyst-

¹⁾ W kwestyi poruszonej w tekście znajdzie czytelnik więcej szczegółów w pracy naszej: „Zarys teorii matematycznej telefonowania na znaczne odległości,“ Warszawa 1890.

kich otrzymanych do tej pory rezultatów była jednakowość siły prądu dla wszystkich punktów obwodu w określonej chwili: zmiany siły prądu z biegiem czasu miały miejsce dla wszystkich punktów obwodu jednocześnie. Wszystkie całki przeto były zależnemi li tylko od czasu, lecz nie od współrzędnych punktów obwodu.

§ 7. Rozprzestrzenianie się prądu w obwodach, w których przewodniki posiadają pojemność.

Rozprzestrzenianie się prądów w obwodach, posiadających obok samoindukcyi i pojemności (jak np. długie linie lub kable telegraficzne), jest zjawiskiem zupełnie odskakującym od wyżej opisanych.

Rozwiązanie tej kwestyi po raz pierwszy wskazane zostało przez Sir W. Thomsona (lorda Kelvina)¹⁾. Redukuje się ono do tezy, iż siła prądu w obwodach posiadających pojemność nie jest jednakowa dla wszystkich punktów obwodu w określonej chwili. Pewna określona siła prądu istnieje w danej chwili tylko w pewnym miejscu obwodu. Innemi słowy, powstaje pojęcie o szybkości przesuwania się pewnej wartości zakłócenia elektrycznego. Wniosek ten wysnuwa się na zasadzie rozpatrywania równania różniczkowego o pochodnych cząstkowych, do którego nas doprowadza dane zagadnienie.

Dla ogólnego rozpatrzenia kwestyi, załóżmy, iż izolacja przewodnika od otaczającego ośrodka nie jest zupełna, czyli że elektryczność rozprzestrzeniać się może nie tylko wzdłuż przewodnika, lecz i w otaczającym go ośrodku. Niech σ oznacza przewodnictwo przewodnika na jednostkę długości (z czego wynika związek $R = \frac{L}{\sigma}$, gdy L oznacza długość przewodnika, a R jego opór całkowity) τ przewodnictwo izolacji, K zaś pojemność przewodnika na jednostkę długości.

Niech dalej potencjał w punkcie przewodnika oddalonym o x od początku tegoż (przyjmując przewodnik liniowy i potencjał ośrodka równym 0) w chwili t równy będzie E .

Oczywiście więc potencjał bezpośrednio blizkich punktów, odległych na $x + \frac{1}{2} dx$ oraz $x - \frac{1}{2} dx$ od początku przewodnika w tej samej chwili równy będzie:

¹⁾ W r. 1855.

$$E + \frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial x} \cdot dx \text{ oraz } E - \frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial x} dx \text{)}$$

Siła prądu w chwili t w dowolnym przekroju przewodnika równa się spadkowi potencjału na nieskończenie małym odcinku przewodnika podzielonemu przez opór, czyli

$$i = \frac{E_{x+dx} - E_x}{\frac{dx}{\sigma}} = -\sigma \frac{\partial E}{\partial x}.$$

Wobec tego siła prądu w chwili t w przekrojach $x - \frac{1}{2} dx$ oraz $x + \frac{1}{2} dx$ równać się będzie:

$$i_1 = -\sigma \frac{\partial}{\partial x} \left(E - \frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial x} dx \right) \text{ oraz}$$

$$i_2 = -\sigma \frac{\partial}{\partial x} \left(E + \frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial x} dx \right).$$

Oczywiście, iż ilość elektryczności, przechodząca przez odnośny przekrój, równa jest iloczynowi siły prądu i czasu trwania przebiegu, czyli

$$q_1 = i_1 dt, \text{ oraz } q_2 = i_2 dt.$$

Dwie te wielkości w ogólnym przypadku nie będą jednakowo, gdyż między przekrojami przewodnika $x - \frac{1}{2} dx$ oraz $x + \frac{1}{2} dx$ na przestrzeni nieskończenie małego odcinka dx zachodzi także skutek niedoskonałości czyli przewodnictwa izolacji „wyciekanie” elektryczności do ośrodka, w którym znajdują się przewodnik. Ponieważ przewodnictwo izolacji na jednostkę długości przewodnika równa się τ , a ośrodek, jak przy-

¹⁾ Ponieważ dla określonego t jest E funkcją tylko zmiennej x (potencjał w przypadku ogólnym zmienia się wzdłuż przewodnika), to zakładając $E = f(x)$, przyrost ΔE , odpowiadający przyrostowi Δx zmiennej niezależnej, wyrazić możemy w formie następującej (podług Taylora):

$$E + \Delta E = f(x) + \frac{\partial f(x)}{\partial x} \cdot \Delta x + \dots$$

Podstawiając zamiast Δx wartości $+\frac{1}{2} dx$ oraz $-\frac{1}{2} dx$, otrzymamy przytoczone wyżej wzory.

puszczamy, posiada potencjał równy zeru, więc siła prądu skierowanego ku ośrodkowi o potencyale zerowym równa jest

$$\frac{E - 0}{\frac{1}{\tau dx}} = \tau dx E^1)$$

Ilość zatem elektryczności, rozpraszanej do ośrodka w przeciągu czasu dt wynosi

$$q' = \tau dx \cdot E \cdot dt.$$

Ponieważ przypuszczamy, iż elektryczność posiada własności płynu nieściśliwego, więc ilość elektryczności q_1 , wstępująca w chwili t do przekroju $x - \frac{1}{2} dx$, równać się winna: sumie ilości q' , wpływającej do ośrodka z wycinka dx , q_2 — przechodzącej z elementu dx przez przekrój $x + \frac{1}{2} dx$ do dalszych części przewodnika, oraz q_k — ilości elektryczności pozostałej w przewodniku, jako jego ładunek (na skutek pojemności przewodnika).

Z drugiej zaś strony oczywiście, iż potencjał dx zmieni się w chwili t wskutek ładunku q_k , otrzymanego w czasie dt przez element przewodnika dx , a mianowicie powiększy się o

$$\frac{\partial E}{\partial t} \cdot dt.$$

Wobec tego

$$q_k = (k dx) \frac{\partial E}{\partial t} dt.$$

Z równania:

$$q_1 = q_2 + q' + q_k \text{ otrzymujemy}$$

$$-\sigma \left[\frac{\partial E}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} dx \right] dt = \tau dx \cdot E dt - \sigma \left[\frac{\partial E}{\partial x} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} dx \right] dt + k dx \frac{\partial E}{\partial t} dt$$

lub po uproszczeniu:

$$\sigma \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = k \frac{\partial E}{\partial t} + \tau E \dots \dots \dots (29)$$

Równanie (29) różniczkowe 2-go rzędu o pochodnych cząstkowych jest jednym z zasadniczych wzorów nader ważnych w teorii elektrycz-

¹⁾ Przewodnictwo izolacji na jednostkę długości jest τ , na przestrzeni zaś dx będzie τdx , opór zaś $\frac{1}{\tau dx}$.

ności i wogóle w fizyce matematycznej (np. w teorii przewodnictwa ciepła). Równanie to można uprościć przez wprowadzenie nowej zmiennej niezależnej E' , czyniącej zadość warunkowi

$$E = e^{-\frac{\tau}{k}t} E' \quad \dots \quad (a)$$

gdzie e , jak wszędzie w tym wykładzie, jest zasadą logarytmów naturalnych. Wówczas

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = e^{-\frac{\tau}{k}t} \frac{\partial^2 E'}{\partial x^2} \quad \dots \quad (b)$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} = e^{-\frac{\tau}{k}t} \frac{\partial E'}{\partial t} - \frac{\tau}{k} e^{-\frac{\tau}{k}t} E' \quad \dots \quad (c)$$

Podstawiając (a), (b) i (c) do równania (29), otrzymujemy:

$$\sigma \frac{\partial^2 E'}{\partial x^2} = k \frac{\partial E'}{\partial t} \quad \dots \quad (30)$$

Jeśli $\tau = 0$, czyli gdy rozpraszanie elektryczności w ośrodku jest zerem, przewodnik zatem jest doskonale izolowany, to $E = E'$ ¹⁾.

Równaniu (30) czyni zadość nieograniczona liczba funkcyj $E' = f(x, t)$. Zakładając pewne prawo zmienności zmiennej E w funkcji czasu dla danego określonego x , można zbadać, wychodząc z równania (30), zmienność wielkości E w innych punktach. Niżej podamy rozwiązanie tego zagadnienia, zakładając, iż E jest funkcją peryodyczną czasu. W zastosowaniu zaś teorii powyższej do badania przebiegu prądu w kablach telegraficznych założyliśmy, iż dla $x = 0$, $E = E_0$, stałej wartości potencjału baterji telegraficznej, dla x zaś równego L , $E = 0$, czyli koniec linii podczas przyjmowania sygnałów jest zaziemiony.

Całkując równanie (30) w powyższem założeniu, otrzymujemy prawo przebiegu zakłóceń elektrycznych w przewodnikach telegraficznych, posiadających pojemność. Nie podajemy tu całkowitego rozwiązania tego zagadnienia, nadmieniamy atoli, iż w danym przypadku potencjał określonej wartości przesuwa się wzdłuż linii z pewną szybkością zależną od pojemności linii. Wskutek tego rezultat pierwotnych prób

¹⁾ Jeśli przewodnik prócz pojemności posiada i samoindukcyę, rozwiązanie zagadnienia staje się bardziej zawilem. Czytelnik znajdzie je u Bedell'a i Crehore'a; polega ono na całkowaniu równania

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} - \lambda k \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} - \frac{k}{\sigma} \frac{\partial i}{\partial t} = 0,$$

w którym λ oznacza współczynnik samoindukcyi na jednostkę długości, i zaś siłę prądu.

(w połowie XIX stulecia), mających na celu wyznaczenie prędkości przebiegu prądu w długich liniach telegraficznych, pozbawionym był wartości naukowej ¹⁾.

W. Thomson podał całą równania (30) dla przewodnika o długości skończonej w postaci następującej: (J_2 oznacza siłę prądu, powstającego na końcu przewodnika, po upływie czasu t od chwili połączenia go ze źródłem energii elektrycznej o potencyale E)

$$J_2 = \frac{E}{R} \left[1 - 2(u - u^1 + u^2 - \dots + u^{n-1} \pm \dots) \right] \dots \quad (31)$$

przyczem

$$u = e^{-\frac{\pi^2}{KR} t} \dots \dots \dots \quad (32)$$

n oznacza szereg liczb naturalnych 1, 2, 3, 4 i t. d., zaś R oraz K oznaczają opór ohmiczny oraz pojemność przewodnika.

Przy $t=0$, $u=1$, wskutek czego suma wyrazów szeregu nieskończonego, zawarta w nawiasie, równa jest $\frac{1}{2}$ ²⁾, przeto $J_2=0$, czyli przy zamknięciu prądu w punkcie początkowym linii, do końca takowej prąd jeszcze nie dobiega. Im większe jest t , tem mniejsze u , a więc większe J_2 .

Thomson wskazał jednakże, iż suma wyrazów naszego szeregu wtedy jedynie różni się znacznie od $\frac{1}{2}$, czyli J_2 od zera, gdy $u < \frac{3}{4}$.

Przy $u = \frac{3}{4}$, $J_2 = \frac{1}{1000} \frac{E}{R}$, czyli dla pewnej chwili (określonej z równania (32)) siła prądu na końcu linii dobiega zaledwie $\frac{1}{1000}$ wartości, odpowiadającej pojemności zerowej.

Czas, upływający od chwili połączenia początku linii ze źródłem E do chwili, gdy prąd w końcu linii osiągnie wartość $\frac{1}{1000}$ normalnej, wyznacza się z równania:

¹⁾ Zupełne rozwiązanie równania (30) z zachowaniem wskazanych założeń patrz Bedell i Crehore oraz Vaschy. Borgmann podaje tylko ostateczny rezultat. Szczegółowe rozwiązanie równania (30) w formie ogólnej wskazane jest w dziełach Fouriera: „Théorie analytique de la chaleur“, oraz Webera (Riemanna) „Die partiellen Differentialgleichungen der Physik“.

²⁾ Dowód tego ważnego twierdzenia znajdzie czytelnik w traktatach Analizy wyższej oraz teorii szeregów nieskończonych.

$$\frac{3}{4} = e^{-\frac{\pi^2}{KR} t_1}$$

$$t_1 = \frac{K \cdot R}{\pi^2} \cdot \log\left(\frac{4}{3}\right) = 0,0292 KR \text{ sekundy.}$$

Przykład. Długość linii telegraficznej powietrznej o pojemności $\frac{1}{100}$ mikrofarady na kilometr niech stanowi 1000 kilometrów, opór zaś 10 ohmów na kilometr bieżący. Czas t_1 (liczony od chwili zamknięcia prądu), odpowiadający wartości siły prądu na końcu linii równej $\frac{1}{1000}$ tej, którą wywołałby potencjał baterji, gdyby pojemności nie było (i gdy elektryczność nie rozprasa się w ośrodku), będzie:

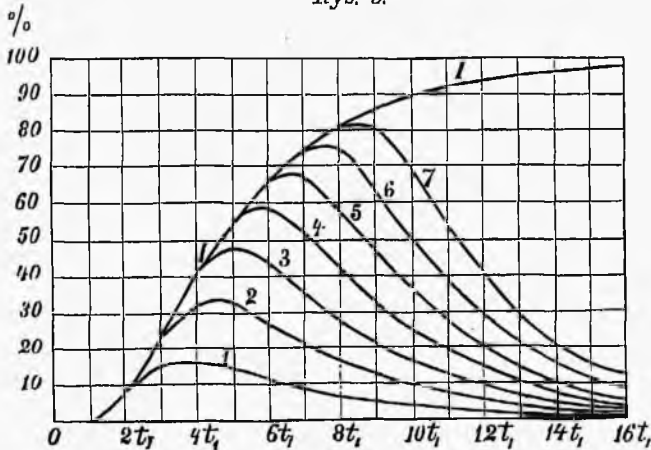
$$t_1 = \infty 0,03 \left(1000 \times \frac{1}{100} \times 10^{-6} \right) (1000 \times 10) = \infty \frac{3}{1000} = \infty \frac{1}{300} \text{ sek.}$$

Jeśli przeciąg czasu określony przez t_1 dla danej linii uważać będziemy za stały, to dla wszelkiej innej wartości t , funkcja u z równania (31) wyznacza się przez

$$u = e^{-\frac{\pi^2 t_1}{KR} \cdot \frac{t}{t_1}} = \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{t}{t_1}} \dots \dots \dots (33)$$

Sumowanie szeregu o znakach zmiennych dla różnych wartości u przedstawia dość znaczne trudności, Thomson przeto przedstawił szukaną całkę graficznie (rys. 5).

Rys. 5.



Wzdłuż osi odciętych odcinamy czas, poczynając od chwili zamknięcia prądu na początku linii, wzdłuż zaś osi rzędnych procentowe

wartości $\frac{E}{R}$; wówczas krzywa I przedstawia wzrost prądu w końcu linii w zależności od czasu. Diagram wskazuje, iż po upływie $5 t_1$ prąd dobiega połowy swojej wartości; a więc dla naszego przykładu (długość linii 1000 kilometrów) w przybliżeniu po upływie $\frac{1}{60}$ sekundy po zamknięciu prądu w punkcie początkowym.

Krzywe 1, 2, 3 i t. d. przedstawiają zmianę siły prądu na końcu linii w przypadku, gdy zetknięcie linii z baterią na początku linii przerwane zostało po upływie $t_1, 2t_1, 3t_1$ i t. d. czasu. Jeśli np. zetknięcie linii z baterią na początku linii trwało $7t_1$, czyli w naszym przykładzie $\frac{1}{40}$ sek., to maximum siły prądu na końcu linii mieć będzie miejsce po upływie czasu nie $7t_1$, lecz $8t_1$. Innymi słowy, na stacyi odbiorczej prąd wzrastać będzie przez chwilę jeszcze po przerwaniu go na stacyi przesyłającej i t. d.

ROZDZIAŁ II.

Wyładowania oscylacyjne elektryczności.

§ 8. Równanie różniczkowe ogólne zakłócenia elektrycznego w obwodzie, zawierającym samoindukcję oraz kondensator.

Jeden z najciekawszych, z punktu widzenia teorii, przypadków przebiegu zakłóceń elektrycznych w przewodnikach stanowi t. z. wyładowanie oscylacyjne, powstające w obwodzie przy włączeniu kondensatora oraz samoindukcji. Przy zachowaniu pewnych warunków fizycznych wywołać możemy w przewodniku prąd, dla którego liczba zmian kierunku w sekundę dosięga milionów, podczas gdy zwykły sposób techniczny otrzymywania prądu za pomocą alternatorów zapewnia częstotliwość, nie przewyższającą setki na sekundę.

W § 6 pokazano, iż w obwodzie o oporze R oraz samoindukcji L przy włączeniu kondensatora o pojemności C pod wpływem różnicy potencjałów E , zmieniającej się peryodycznie $E = E_0 \sin(\omega t)$, siła prądu wyznacza się ze wzoru (25a). Jeśli jednakże siła elektromotoryczna podlega innemu prawu zmienności lub jeśli jest stała, wnioski powyższe ulegają oczywiście zmianie. Wobec tego jest pożądane rozwiązanie zagadnienia w formie najogólniejszej, po odrzuceniu wszelkich przypuszczeń, dotyczących prawa zmienności wielkości E . Równanie (25a) przedstawi wówczas przypadek szczególny rozwiązania powyższego.

Zauważymy, że zagadnienie o wyznaczeniu siły prądu w obwodzie z samoindukcją oraz kondensatorem, w formie ogólnej rozpada się właściwie na dwa: pierwsze polega na wyznaczeniu siły prądu podczas ładowania kondensatora, drugie na zbadaniu tegoż zjawiska podczas wyładowania. Pierwsze odpowiada wyznaczeniu wartości siły prądu w obwodzie, poczynając od chwili włączenia doń źródła energii, drugie temuż, poczynając od wyłączenia tego źródła z pozostawieniem

w obwodzie kondensatora, przyczem jedynem źródłem prądu staje się wtedy wyładowanie owego kondensatora. Niżej rozpatrzmy drugie z poszczególnych zagadnień o wyładowaniu kondensatora ogólne rozwiązanie obu zagadnień znajdzie czytelnik w dziele Bedella i Crehore'a¹⁾.

Roztrząsamy zatem tylko przypadek powstania prądu w obwodzie wskutek wyładowania kondensatora o pojemności C po wyłączeniu z obwodu źródła różnicy potencjału, czyli przy $E = 0$; opór obwodu równa się R , samoindukcja w nim zawarta niech będzie L . Ilustrację fizyczną tego przypadku stanowi wyładowanie butelki lejdejskiej.

Niech w chwili określonej potencjał na zbrojach kondensatora będzie odpowiednio V_A oraz V_B , wówczas ładunek kondensatora q wyraża się przez

$$q = C(V_A - V_B) \dots \dots \dots (a)$$

Z drugiej zaś strony jest oczywistem, iż ta sama różnica potencjału wywołuje w przewodniku, łączącym zbroję kondensatora, prąd o sile J . Wobec tego

$$V_A - V_B = RJ + L \frac{dJ}{dt} \dots \dots \dots (b)$$

Oczywiście także, siła prądu w obwodzie równa się prędkości, z jaką ubywa ładunek, t. j. ujemnej pochodnej ładunku względem czasu, czyli

$$J = - \frac{dq}{dt} \dots \dots \dots (c)$$

Po podstawieniu warunków (a) oraz (c) w równanie (b) otrzymujemy:

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0 \dots \dots \dots (1)$$

Równanie (1) jest równaniem różniczkowem 2-go rzędu; rozwiązując je względem q , znajdziemy szukaną zależność na q . Korzystając zaś z wyrażenia (c), możemy otrzymać i zależność siły prądu od czasu.

Zagadnienie to po raz pierwszy rozwiązane zostało przez Sir W. Thomsona (Lorda Kelvina) w roku 1853.

Dzieląc równanie (1) przez L , znajdujemy:

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + q \cdot \frac{1}{LC} = 0 \dots \dots \dots (1a)$$

1) Dzieło wskazane wyżej w wykazie literatury, rozdz. VIII i IX.

Z teorii równań różniczkowych wiadomo, iż przy stałych wartościach R, L oraz C całka powyższego równania wyraża się w postaci:

$$q = Ae^{x_1 t} + Be^{x_2 t} \dots \dots \dots (2)$$

przyчем A oraz B oznaczają stałe dowolne, x_1 zaś oraz x_2 są pierwiastkami równania

$$x^2 + \frac{R}{L}x + \frac{1}{LC} = 0 \dots \dots \dots (3)$$

Oczywiście:

$$\begin{aligned} x_1 &= -\frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}} \\ x_2 &= -\frac{R}{2L} - \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}} \end{aligned} \dots \dots \dots (4)$$

Całka (2) może przedstawiać trzy różne zjawiska fizyczne w zależności od tego, czy pierwiastki równania (3) są rzeczywiste ($\frac{R^2}{4L^2} > \frac{1}{LC}$), urojone ($\frac{R^2}{4L^2} < \frac{1}{LC}$) lub wreszcie równe ($\frac{R^2}{4L^2} = \frac{1}{LC}$). Poniżej rozpatrzemy wszystkie trzy powyższe przypadki, nadmieniając już tu, iż wyładowanie oscylacyjne odpowiada pierwiastkom urojonym.

§ 9. Wyładowanie, odpowiadające wartości rzeczywistej pierwiastków.

W przypadku pierwiastków rzeczywistych jest:

$$\begin{aligned} \frac{R^2}{4L^2} &> \frac{1}{LC} \text{ czyli} \\ R &> 2\sqrt{\frac{L}{C}} \dots \dots \dots (5) \end{aligned}$$

Zakładając $\sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}} = a$ oraz $\frac{R}{2L} = a,$

skąd wynika

$$a^2 - a^2 = \frac{1}{LC}, \dots \dots \dots (d)$$

otrzymujemy

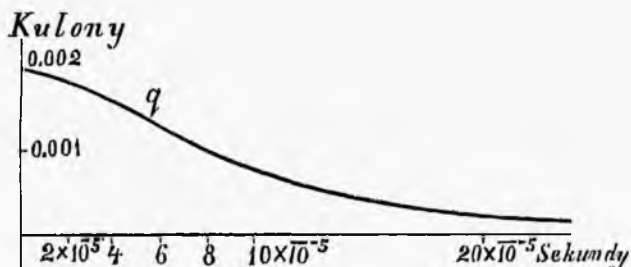
$$q = e^{-at} (Ae^{at} + Be^{-at}) \dots \dots \dots (e)$$

Dla wyznaczenia stałych zwracamy się do warunków fizycznych zjawiska: przy $t = 0$ ładunek q równa się początkowej wartości ładunku Q , prąd zaś $J = 0$.

Na zasadzie wzoru (c) z równania (e) wynika:

$$J = -\frac{dq}{dt} = -e^{-at} [A(\alpha - a)e^{at} - B(\alpha + a)e^{-at}] \quad (f)$$

Rys. 6.



Zakładając następnie w równaniu (e) i (f) przy $t = 0$, $q = Q$ oraz $J = 0$, otrzymujemy

$$\left. \begin{aligned} Q &= A + B \\ 0 &= A(\alpha - a) - B(\alpha + a) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (g)$$

Rozwiązujemy równanie (g) względem A oraz B :

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{\alpha + a}{2\alpha} Q = \left(\frac{1}{2} + \frac{a}{2\alpha}\right) Q \\ B &= \frac{\alpha - a}{2\alpha} Q = \left(\frac{1}{2} - \frac{a}{2\alpha}\right) Q \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (h)$$

Po podstawieniu wartości (h) do całek (e) oraz (f), posilując się wzorem (d), otrzymujemy:

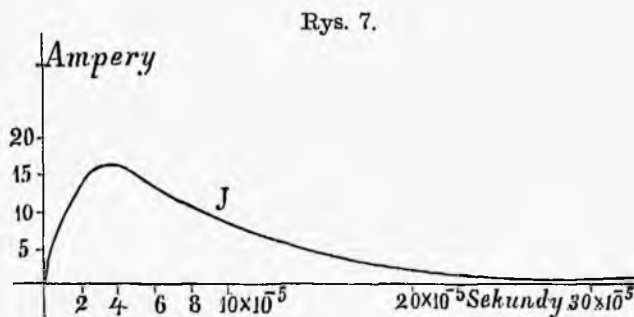
$$\left. \begin{aligned} q &= \frac{Q}{2} e^{-at} \left\{ \left(1 + \frac{a}{\alpha}\right) e^{at} + \left(1 - \frac{a}{\alpha}\right) e^{-at} \right\} \\ J &= -\frac{Q}{2} e^{-at} \left\{ \frac{\alpha^2 - a^2}{\alpha} e^{at} - \frac{\alpha^2 - a^2}{\alpha} e^{-at} \right\} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (i)$$

i ostatecznie

$$q = \frac{Q}{2\alpha} e^{-\frac{R}{2L}t} \left\{ \left(\alpha + \frac{R}{2L}\right) e^{at} + \left(\alpha - \frac{R}{2L}\right) e^{-at} \right\} \quad (6)$$

$$J = \frac{Q}{2\alpha LC} e^{-\frac{R}{2L}t} \left(e^{at} - e^{-at} \right) \quad (7)$$

Całka (7) przedstawia całkowite rozwiązanie zagadnienia. Nie trudno zauważyć, iż dla wartości $t = \infty$, J z natury rzeczy powinno zniknąć (wyładowanie kończy się), również przy $t = 0$, $J = 0$; wobec tego funkcja J osiąga maximum między $t = 0$ oraz $t = \infty$, czyli siła prądu podczas wyładowania początkowo wzrasta do pewnego maximum, następnie zaś spada do zera.



Ponieważ z drugiej strony siła prądu jest pochodną ładunku, różniącą się 0 dla wartości $t = 0$ oraz $t = \infty$, w pierwszym zatem przypadku mamy dla ładunku wartość maximum, w drugim — minimum; innymi słowy ładunek kondensatora spada bez przerwy od początkowej swej wartości Q do zera.

Diagramy 6 oraz 7 ¹⁾ odtwarzają całki (6) oraz (7) dla pewnego szczególnego przypadku; mianowicie przyjmujemy opór obwodu $R = 100$ ohmom, współczynnik samoindukcji $L = 0,0016$ henry, pojemność kondensatora $= 1$ mikrofaradzie, różnice potencjału na zbrojach kondensatora w chwili wyładowania $V_A - V_E = 2000$ volt (ładunek równa się $2000 \times 10^{-9} = 0,002$ kulona). Z diagramu 7, przedstawiającego całkę (7) wynika, iż siła prądu pierwotnie wzrasta do maximum, równającego się około 16 amperów i osiąga tę wartość po upływie $4/100000$ sek. od chwili początkowej wyładowania; następnie siła prądu szybko spada i już po upływie $1/3000$ sek. od chwili rozpoczęcia wyładowania jest mniejsza od 1 ampera. Krzywa (Rys. 6), przedstawiająca całkę (6), wskazuje, iż połowa ładunku całkowitego (0,002 kulona) czyli 0,001 kulona zużyta będzie przez wyładowanie po upływie $7/100000$ sekundy. Wszystkie zatem powyższe zjawiska powstają i przebiegają nader szybko i bez Analizy

¹⁾ Patrz Bedell i Crehore.

matematycznej byłyby prawdopodobnie na zawsze niedostępne do zbadania drogą czysto doświadczalną.

Oczywiście w uważanym przypadku warunek zasadniczy

$$R > 2 \sqrt{\frac{L}{C}}$$

został zachowany, gdyż

$$2 \sqrt{\frac{L}{C}} = 2 \sqrt{\frac{0,0016}{1 \cdot 10^{-8}}} = 2 \sqrt{1600} = 80,$$

R zaś równa się 100.

§ 10. Wyładowanie, odpowiadające pierwiastkom urojonym. Prąd oscylacyjny.

Jeżeli pierwiastki równania (3) są urojone, powstaje prąd, zmieniający nader szybko swój kierunek, czyli t. zw. wyładowanie oscylacyjne.

Warunek, odpowiadający temu zjawisku jest:

$$R < 2 \sqrt{\frac{L}{C}} \dots \dots \dots (8)$$

Oznaczając $\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} = \epsilon$, oraz zachowując pierwotne oznaczenie

$\frac{R}{2L} = a$, znajdujemy

$$\epsilon^2 + a^2 = \frac{1}{LC} \dots \dots \dots (k)$$

Oczywiście $\alpha = \epsilon i$, gdzie $i = \sqrt{-1}$

Wówczas

$$q = e^{-at} (Ae^{\epsilon it} + Be^{-\epsilon it}).$$

Na zasadzie wzoru Moivre'a jest:

$$\begin{aligned} q &= e^{-at} \{A [\cos \epsilon t + i \sin \epsilon t] + B [\cos \epsilon t - i \sin \epsilon t]\} \\ &= e^{-at} \{ \cos \epsilon t [A + B] + \sin \epsilon t [i(A - B)] \} \end{aligned}$$

Dla wartości $t = 0$, $q = Q$,

$$Q = A + B \dots \dots \dots (l)$$

Skądinąd $J = -\frac{dq}{dt}$, wskutek czego:

$$J = -e^{-at} \left\{ \cos \varepsilon t [\varepsilon i (A - B) - a (A + B)] \right. \\ \left. - \sin \varepsilon t [ai (A - B) + \varepsilon (A + B)] \right\}$$

Gdy $t = 0$, J również $= 0$, a zatem:

$$\varepsilon i (A - B) = a (A + B), \dots \dots \dots (m)$$

lub

$$i (A - B) = \frac{Q \cdot a}{\varepsilon} \dots \dots \dots (n)$$

Po podstawieniu (l) oraz (n) we wzory na q oraz J , otrzymamy:

$$q = Qe^{-at} \left\{ \cos \varepsilon t + \frac{a}{\varepsilon} \sin \varepsilon t \right\}, \\ J = Qe^{-at} \left\{ \frac{a^2}{\varepsilon} + \varepsilon \right\} \sin \varepsilon t,$$

Zaś po dokonaniu przekształceń oraz zamiany

$$a \text{ na } \frac{R}{2L}, \text{ zaś } \varepsilon^2 + a^2 \text{ na } \frac{1}{LC}, \text{ znajdziemy:}$$

$$q = \frac{Qe^{-\frac{R}{2L}t}}{\varepsilon L} \left\{ \varepsilon L \cos \varepsilon t + \frac{R}{2} \sin \varepsilon t \right\}, \dots \dots \dots (9)$$

$$J = \frac{Q}{\varepsilon LC} e^{-\frac{R}{2L}t} \sin \varepsilon t \dots \dots \dots (10)$$

Całka (10) pozwala nam uzasadnić teoretycznie nader ważny wniosek, iż w razie zachowania warunku (8), wyładowaniu kondensatora w obwodzie towarzyszy prąd, którego zmienność podlega prawu wstawy, t. j. prąd, przechodzący od wielkości dodatnich ku ujemnym i odwrotnie. Prąd jest zatem oscylacyjny. Okres, oddzielający dwie bezpośrednio po sobie następujące epoki czasu, w których prąd osiąga dwie kolejne wartości maximum lecz ze znakiem odwrotnym, równa się:

$$\tau = \frac{\pi}{\varepsilon}$$

Okres zupełny zmiany siły prądu T , czyli przeciąg czasu, oddzielający kolejne zmiany wstawy o 360° , równa się:

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}} \dots \dots \dots (11)$$

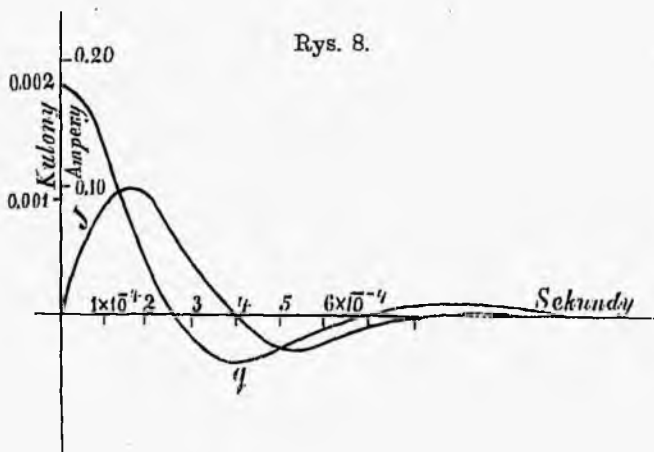
Jeśli $\left(\frac{R}{2L}\right)^2$ stanowi wielkość nieznaczną w porównaniu z $\frac{1}{LC}$, wówczas okres oscylacji (wahania) prądu będzie:

$$T = 2\pi\sqrt{LC}. \quad (12)$$

Wzór ten jest nader ważny przy badaniu fal Hertza i w teorii zakłóceń elektrycznych.

Niezależnie jednakże od zmiany kierunku prądu, uwarunkowanej przez wielkość okresu T , amplitudy siły prądu, jak wskazuje całka (10) maleją w postępie geometrycznym. Największa amplituda, odpowiadająca wartości $t = \frac{T}{2}$, jest równa $J_1 = \frac{Q}{\epsilon LC} e^{-\frac{R}{4L}T}$, następna zaś dla $t = \frac{3T}{2}$ spada o $e^{-\frac{R}{2L}T}$ i t. d.

Rysunek 8-y¹⁾ odtwarza całkę (10) w przypadku następującym: do obwodu o oporze $R = 100$ ohmom oraz $L = 0.0125$ henry włączamy



kondensator o pojemności 1 mikrofarady, zbroje zaś łączymy ze źródłem energii o napięciu 2000 volt, (ładunek zatem stanowi 0,002 kulona).

Ponieważ mamy tu $2\sqrt{\frac{L}{C}} = \infty 223,6 > R$, wyładowanie jest zatem oscylacyjne.

$$LC = \frac{1}{8.10^7}; \quad \frac{R}{2L} = 4000; \quad \frac{R^2}{4L^2} = 16.10^6,$$

¹⁾ Wzięty z Bedella i Crehore'a.

zaś
$$\frac{1}{LC} : \frac{R^2}{4L^2} = 5,$$

czyli pierwszy wyraz dwumianu, znajdującego się pod znakiem pierwiastku we wzorze (11), pięciokrotnie przewyższa drugi.

Po odrzuceniu drugiego wyrazu, otrzymamy według skróconego wzoru (12) następującą wartość trwania jednej oscylacji:

$$T' = \frac{\pi}{10^3 \sqrt{20}} = \frac{\pi}{4472} = \frac{1}{1420} \text{ sek.} = 7 \cdot 10^{-4} \text{ sek.}$$

Innemi słowy, w podobnych warunkach otrzymujemy prąd o liczbie wahań około 1500 na sekundę. Siła prądu słabnie również nader szybko. Choć pierwsze maximum osiąga 0,1 ampera, następne dodatnie jest już mniejsze od 0,01 ampera i t. d. prąd słabnie coraz bardziej.

Rys. 8 prócz krzywej siły prądu przedstawia również i krzywą zmiany ładunku (całka 9). Z wzoru, określającego całkę, wywnioskować możemy, iż ładunek również zmienia się peryodycznie, zmieniając swój znak, przyczem bezwzględne maxima odpowiadają chwili zaniku prądu, i odwrotnie: ładunek spada do zera, gdy prąd przebiega przez maximum. Tak więc, zjawisko odbywa się w ten sposób, jak gdyby początkowo cały np. ładunek dodatni przechodził z jednej zbroi kondensatora na drugą, następnie powracał i t. d. Fizycznie proces wyładowania oscylacyjnego możemy sobie uświadomić, przedstawiając sobie dwa połączone naczynia napełnione cieczą. Jeśli rura łącząca naczynia jest zamknięta za pomocą kranu, ciecz zaś znajduje się w obydwóch naczyniach na różnych poziomach, to za otwarciem kranu ciecz, jeśli tylko nie jest zbyt lepka, zostanie wprawiona w ruch oscylacyjny, podnosząc się i spadając kolejno w obu naczyniach, przyczem same amplitudy tych wahań (wysokości podjęcia i spadania poziomów cieczy) szybko maleją. Jeśli zaś ciecz będzie bardzo lepka (np. w rodzaju smoły), to opór stawiony jej wahaniom będzie zbyt wielki i zjawisko zmieni się w ten sposób, iż ciecz powoli dążyć będzie ku zrównaniu poziomów w obydwóch naczyniach.

Podobne zjawisko dałoby się dostrzegać, gdybyśmy w ośrodku bardzo lepkiem np. w smole, pomieścili zwykłą sprężynę i, skręciwszy ją za pomocą przywiązanego ciężaru, odczepili go następnie od niej. Wówczas równanie ruchu sprężyny będzie takie, jak równanie różniczkowe (1), ze zmianą tylko współczynników stałych.

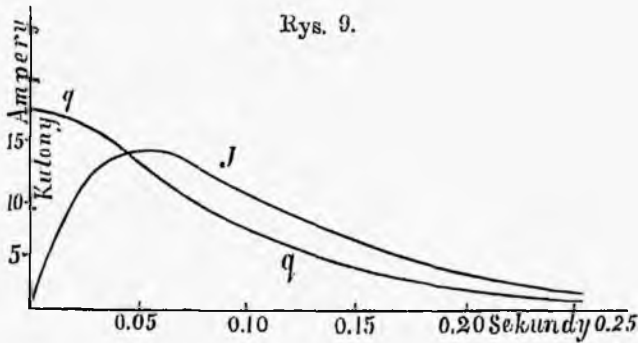
Sprężyna albo wahać się będzie naokoło pewnego położenia równowagi lub też w ośrodku bardzo lepkiem stopniowo będzie się zbliżała do położenia równowagi.

Wnioski niniejszego oraz poprzednich §§ stwierdzone zostały doświadczalnie w r. 1862 przez F e d d e r s e n a. Badając iskrę przebiegającą przy wyładowaniu butelek lejdejskich przez przewodnik o pewnym oporze oraz rzut jej na płytę fotograficzną, dokonany za pomocą szybko wirującego zwierciadła, F e d d e r s e n odkrył, iż odbicie iskry na płycie fotograficznej składa się z szeregu pasm kolejno jasnych i ciemnych; ostatnie odpowiadały momentom przebiegu prądu przez punkty zerowe.

Zmierzywszy odległości między owymi ciemnymi pasmami i znając szybkość ruchu wirowego zwierciadła, łatwo było wyznaczyć okres T' (wzór 12). Tak więc doświadczenie stwierdziło wnioski teoretyczne. Zwiększając stopniowo opór przewodnika, F e d d e r s e n osiągnął wyładowanie bez pasm ciemnych i jasnych. Oczywiście miało to miejsce, gdy wyładowanie z oscylacyjnego stawało się stopniowem (wzór 7). Tym sposobem widzimy, że iskra błyszcząca, towarzysząca wyładowaniu butelki lejdejskiej lub cewki R h u m k o r f f a, w pewnych warunkach jest nie pojedynczym wyładowaniem, lecz szeregiem oscylacyjnych wyładowań, które jedynie dla niezmierniey szybkości swych drgań są niedostrzegalne dla oka ludzkiego.

§ 11. Wyładowanie, odpowiadające przypadkowi, gdy pierwiastki są równe.

Analiza wyładowania w obwodzie, złożonym z samoindukcyi oraz kondensatora, obejmuje jeszcze jeden przypadek nader interesujący



z punktu matematycznego. Zachodzi on wtedy gdy obydwie pierwiastki równania (3) są sobie równe, t. j. gdy

$$R = 2 \sqrt{\frac{L}{C}} \dots \dots \dots (13)$$

Wówczas wyładowanie jest również stopniowe.

Na podstawie ogólnych zasad Analizy całka równania (1) przybiera postać:

$$q = Ae^{-at} + Bte^{-at}, \dots \dots \dots (a)$$

przyczem $a = \frac{L}{2R}$.

Wówczas $J = e^{-at} [Aa - B + aBt] \dots \dots \dots (b)$

dla $t = 0, q = Q, J = 0$.

Wskutek tego

$$\left. \begin{aligned} A &= Q \\ B &= Qa \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (c)$$

oraz

$$q = Q \left[1 + \frac{R}{2L} t \right] e^{-\frac{R}{2L} t} \dots \dots \dots (14)$$

$$J = \frac{QR^2}{4L^2} te^{-\frac{R}{2L} t} \dots \dots \dots (15)$$

Mając na uwadze, że

$$\frac{R^2}{4L^2} = \frac{1}{CL} \text{ oraz } \frac{Q}{C} = V_A - V_B = E,$$

otrzymamy zależność następującą:

$$J = \frac{E}{L} te^{-\frac{R}{2L} t} \dots \dots \dots (15a)$$

Rys 9 przedstawia całki (14) i (15a) w przypadku szczególnym dla następujących wartości R, L oraz C :

- $R = 100$ ohmom,
- $L = 2,5$ henry,
- $C = 1000$ mikrofaradom.

Analogiczną drogą rozwiązują się zagadnienia, dotyczące się procesów przy ładowaniu kondensatora, których tu jednak już rozpatrywać nie będziemy.

ROZDZIAŁ III.

Pole magnetyczne, wywołane przez prąd elektryczny.

§ 12. Równania różniczkowe Maxwella dla pola magnetycznego, wywołanego przez prąd elektryczny.

W poprzednich rozdziałach rozpatrzyliśmy główniejsze przypadki rozchodzenia się zakłóceń elektrycznych (prądu elektrycznego) w obwodach, składających się z przewodników i kondensatorów. Ponieważ prąd elektryczny wywołuje w otaczającym go ośrodku pole magnetyczne, t. j. zakłóceniom elektrycznym w przewodniku towarzyszą zawsze zakłócenia magnetyczne ośrodka, wypada zatem wyrazić zależność matematyczną między zmianą prądu i zmianą, zachodzącą w odpowiednim polu magnetycznym. Zagadnienie to w najogólniejszej postaci rozwiązał po raz pierwszy Maxwell.

Wiadomo, że prąd elektryczny ustalony, przechodzący przez przewodnik prostoliniowy, wywołuje pole magnetyczne, składające się z linii sił w kształcie kół spółśrodkowych, otaczających przewodnik i leżących w płaszczyznach do niego prostopadłych.

Wiemy również z Fizyki ogólnej, że jeżeli przez obwód przechodzi prąd o sile J , to by przesunąć jednostkę masy magnetycznej wzdłuż dowolnej zamkniętej drogi, otaczającej linię prądu, potrzebna jest praca, której wartość wyraża się wzorem $W = 4\pi J$. Z drugiej zaś strony wiadomo także, iż jeżeli liczba linii sił, przerywających powierzchnię, ograniczoną przez pewien obwód zamknięty, zmienia się, to w przewodniku powstaje siła elektromotoryczna

$$\epsilon = - \frac{\partial N}{\partial t},$$

gdzie N jest liczba linii sił, przerywających wspomnianą powierzchnię ¹⁾.

Powstawanie w tym przypadku siły elektromotorycznej w obwodzie rozszerza początkowe pojęcie o siłę elektromotorycznej, jako o różnicy potencjałów dwóch punktów przestrzeni, wywołującej prąd w przewodniku, gdy nim połączymy owe punkty. W tym ostatnim razie, na podstawie określenia potencjału, siła elektromotoryczna, jako pewna różnica potencjałów, wyraża również pracę, potrzebną do przesunięcia jednostki dodatniej masy elektrycznej z jednego punktu do drugiego. Przy powstawaniu siły elektromotorycznej w obwodzie, na skutek zmiany liczby linii sił, przerywających powierzchnię, ograniczoną przez obwód, pojęcie o różnicy potencjałów dwóch punktów ztraca się; lecz wobec drugiego określenia różnicy potencjałów przez pracę możemy sobie przedstawić siłę elektromotoryczną indukcji, jako pracę, potrzebną do przesunięcia wzdłuż całego obwodu dodatniej jednostki masy elektrycznej. Dlatego też, jeżeli F jest siłą, jaką układ dany wywiera na jednostkę masy elektrycznej, przy przesuwaniu jej wzdłuż przewodnika, to:

$$\epsilon = - \frac{\partial N}{\partial t} = \int F l ds,$$

gdzie ds jest element liniowy przewodnika.

Oczywiście F wyobraża też siłę elektromotoryczną na jednostkę biegnącą długości przewodnika; podobnie ϵ jest siłą elektromotoryczną, powstającą na całej długości przewodnika, a $F l ds$ — siłą elektromotoryczną, działającą na długości ds .

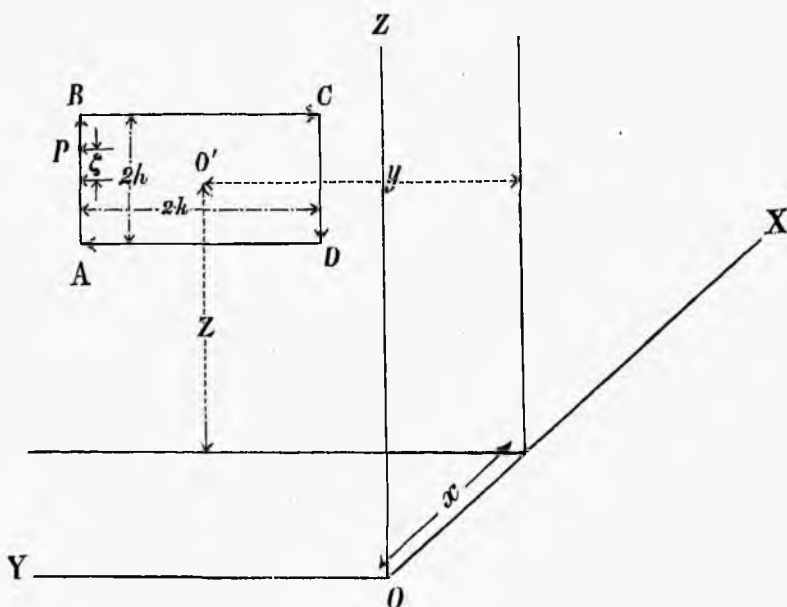
Oznaczmy przez u, v, w w prostokątnym układzie współrzędnych składowo siły prądu, działającego w danym punkcie przestrzeni i odniesionego do jednostki powierzchni poprzecznego przekroju przewodnika; przez X, Y, Z odpowiednie składowe siły elektromotorycznej F , przypadającej na jednostkę długości przewodnika, a przez α, β, γ takie same składowe siły pola magnetycznego N w tym samym punkcie, którego współrzędne niechaj będą x, y, z . Układ współrzędnych obierzemy tak, jak wskazuje rys. 10-y, i wyobraźmy sobie na płaszczyźnie, równoległej do YOZ , obwód prostokątny $ABCD$, którego boki są odpowiednio równoległe do osi współrzędnych OY i OZ i równają się odpowiednio $2k$ i $2h$.

¹⁾ Właściwie przez N powinniśmy pojmować $N = N' \cos \varphi$, gdzie N' liczba linii sił, przesywających powierzchnię obwodu płaskiego, a φ kąt utworzony przez kierunek linii sił z prostą padłą do płaszczyzny obwodu.

Przypuśćmy, że położenie środka prostokąta O' określają współrzędne x, y, z . Wówczas współrzędne dowolnego punktu P na boku AB będą $x, y + k$ i $z + \zeta$, gdzie ζ gdzie zmienna, której wartość waha się między kranicami $+k$ i $-k$.

Jak wyżej zaznaczono, pracę, wykonywaną przy przesuwaniu jednostki masy magnetycznej naokoło linii prądu, wyraża iloczyn 4π przez siłę prądu. Płaszczyzna figury $ABCD$ jest prostopadła do osi OX , więc przez rzeczoną płaszczyznę będzie przechodziła tylko składowa prądu, równoległa do osi OX ; ponieważ pole prostokąta równa się $2h \times 2k$, prze-

Rys. 10.



to siła prądu, przechodzącego przez prostokąt, wyniesie $4hku$, a odpowiedni iloczyn 4π ($4hku$). Praca, której wartość daje wzór dopiero co przytoczony, rozpada się na cztery części, odpowiednio do przesunięcia jednostki magnetyzmu wzdłuż AB, BC, CD i DA . (Kierunek przesuwania jednostki magnetyzmu winien być od A przez C do D , t. j. powinien być identyczny z przebiegiem linii sił, wywoływanych przez prąd, równoległy do osi OX . Według ogólnego prawidła przebieg linii sił, wywoływanych przez prąd, odpowiada kierunkowi obrotu śruby, wkręcającej w kierunku prądu).

Dla wyznaczenia pracy wzdłuż odcinka AB należy znać wartość składowej siły magnetycznej, równoległej do OZ w różnych punktach odcinka AB . W O' składowa ta jest γ , więc w P będzie ¹⁾:

$$\gamma + \frac{\partial \gamma}{\partial y} k + \frac{\partial \gamma}{\partial z} \zeta.$$

Dlatego też przy przesunięciu na $d\zeta$ wzdłuż AB praca wyniesie:

$$\left(\gamma + \frac{\partial \gamma}{\partial y} k + \frac{\partial \gamma}{\partial z} \zeta \right) d\zeta,$$

a całkowita praca wzdłuż AB , przy przesunięciu od A do B :

$$W_{AB} = \int_{-h}^{+h} \left(\gamma + \frac{\partial \gamma}{\partial y} k + \frac{\partial \gamma}{\partial z} \zeta \right) d\zeta = 2h\gamma + 2hk \frac{\partial \gamma}{\partial y}.$$

Wzdłuż odcinka BC należy rozważać składową siły magnetycznej, równoległą do osi OY . Składowa ta w O' równa się β , więc w dowolnym punkcie P' na odcinku BC wyniesie:

$$\beta + \frac{\partial \beta}{\partial z} h + \frac{\partial \beta}{\partial y} \eta,$$

gdzie η zmienia się między krańcami $+k$ i $-k$; dlatego praca wzdłuż odcinka BC będzie:

$$W_{BC} = \int_{+k}^{-k} \left(\beta + \frac{\partial \beta}{\partial z} h + \frac{\partial \beta}{\partial y} \eta \right) d\eta = -2k\beta - 2kh \frac{\partial \beta}{\partial z}$$

Wzdłuż odcinka CD składowa siły magnetycznej będzie:

$$\gamma - k \frac{\partial \gamma}{\partial y} + \frac{\partial \gamma}{\partial z} \zeta,$$

gdzie ζ zmienia się między krańcami $+h$ i $-h$. Praca wyniesie:

$$W_{CD} = \int_{+h}^{-h} \left(\gamma - k \frac{\partial \gamma}{\partial y} + \frac{\partial \gamma}{\partial z} \zeta \right) d\zeta = -2h\gamma + 2hk \frac{\partial \gamma}{\partial y}.$$

Nareszcie praca wzdłuż odcinka DA będzie:

$$W_{DA} = \int_{-k}^{+k} \left(\beta - h \frac{\partial \beta}{\partial z} + \frac{\partial \beta}{\partial y} \eta \right) d\eta = 2k\beta - 2hk \frac{\partial \beta}{\partial z}.$$

¹⁾ Na podstawie wzoru Taylora dla funkcji dwóch zmiennych niezależnych.

Całkowita praca przy przesuwaniu jednostki magnetyzmu wzdłuż całego prostokąta wyniesie przeto:

$$W = 4hk \left(\frac{\partial \gamma}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial z} \right) \dots \dots \dots (1)$$

Ponieważ z drugiej strony mamy wartość tej pracy, wyrażoną przez wzór $4\pi (4hku)$, będzie:

i analogicznie:

$$\left. \begin{aligned} 4\pi u &= \frac{\partial \gamma}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial z} \\ 4\pi v &= \frac{\partial \alpha}{\partial z} - \frac{\partial \gamma}{\partial x} \\ 4\pi w &= \frac{\partial \beta}{\partial x} - \frac{\partial \alpha}{\partial y} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (I)$$

Prócz układu równań różniczkowych (I), możemy jeszcze podać podobny układ, do którego będą wchodziły składowe siły elektromotorycznej X, Y, Z .

Na mocy prawa zasadniczego indukcji, przytoczonego na początku §, przyrost ujemny liczby linii sił, przerywających powierzchnię, ograniczoną przez pewien obwód, równa się pracy, wykonywanej przy przesuwaniu jednostki ładunku elektrycznego wzdłuż obwodu. Wzór na tę pracę otrzymamy odrazu z układu równań (I), jeżeli przyjmiemy, że teraz prąd przechodzi po obwodzie, i zastąpimy składowe siły magnetycznej α, β, γ przez odpowiednie składowe siły elektrycznej X, Y, Z .

Będzie:

$$W' = 4hk \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} \right) \dots \dots \dots (2)$$

Z drugiej zaś strony, ponieważ prąd przechodzi po obwodzie, leżącym w płaszczyźnie YOZ , to prostopadłe do płaszczyzny obwodu linie sił będą równoległe do osi OX , t. j. będą równoznaczne ze składowymi równoległymi do tej osi. Jeżeli odpowiednie składowe siły pola magnetycznego w O' , których zmianę wywołują siły elektromotoryczne X, Y, Z , będą a, b, c , to liczba linii sił, przerywających powierzchnię obwodu, będzie $4hka$, a ich przyrost ujemny wyniesie:

$$W' = -4hk \frac{\partial a}{\partial t} \dots \dots \dots (3)$$

Porównyując (2) i (3) i wykonywając skrócenia, otrzymamy:

$$i \text{ podobnie } \left. \begin{aligned} -\frac{\partial a}{\partial t} &= \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} \\ -\frac{\partial b}{\partial t} &= \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} \\ -\frac{\partial c}{\partial t} &= \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (II)$$

Pole magnetyczne, w którego obrębie znajduje się prąd, i którego składowe są a , b , c , wogóle, może powstać z dwóch części: z pola, niezależnego od danego prądu (np. wywołanego przez stałe magnesy lub inne prądy) i pola, wywołanego przez dany prąd X , Y , Z . Jeżeli pierwsza część pozostaje bez zmiany, to pochodne zależą tylko od zmian pola, wywołanego przez prąd. Jeżeli składowe tego ostatniego pola będą jak wyżej α , β , γ ; μ zaś przenikliwość magnetyczna ośrodka, przyczem zakładamy, iż ośrodek jest izotropowy, t. j. ma konsystencję masy we wszystkich kierunkach jednaką i przenikliwość magnetyczną stałą, to:

$$\frac{\partial a}{\partial t} = \mu \frac{\partial \alpha}{\partial t}; \frac{\partial b}{\partial t} = \mu \frac{\partial \beta}{\partial t}; \frac{\partial c}{\partial t} = \mu \frac{\partial \gamma}{\partial t} \dots \dots \dots (4)$$

Podstawiając ¹⁾ związki (4) do układu równań (I), wzięwszy ich po-

¹⁾ Przy porównaniu tworzenia układów równań (I) i (II), może się nam nasunąć pewna pozorna sprzeczność. Wyznaczając chwilową wartość siły elektromotorycznej w obwodzie, jako zmianę liczby linii sił, przerywających powierzchnię obwodu, wprowadziliśmy siłę magnetyczną, wywoływaną przez prąd a , β , γ , pomnożoną przez przenikliwość magnetyczną μ , t. j. wielkości a , b , c . Atoli wyznaczając pracę przy przesuwaniu bieguna magnetycznego w tymże ośrodku wzdłuż linii prądu, użyliśmy dla określenia wielkości siły magnetycznej nie a , b , c (odpowiadających liczbie linii sił na jednostkę poprzeczną powierzchni w ośrodku), lecz α , β , γ , odpowiadających liczbie linii sił czyli sile, wywoływanej przez prąd w powietrzu. Przyczyna tej pozornej sprzeczności tkwi w tem wyobrażeniu, jakie wytworzono sobie o działaniu ośrodka paramagnetycznego, i które założono jako podstawę teorii linii sił. Działanie paramagnetyczne ośrodka (t. j. zwiększenie siły działającej μ razy), na umieszczony w nim biegun magnetyczny, jest różne, zależnie od tego, jaką formę nadamy wydrążeniu, w którym należy umieścić biegun, by on nie dotykał ośrodka, z którego składają się właśnie ścianki owego wydrążenia. Jeżeli wydrążenie to przedstawimy sobie w kształcie nieskończenie cienkiej rurki z osią równoległą do linii sił, to zwiększenie wpływu magnetycznego przez istnienie ośrodka będzie się odczuwało tylko dlatego, że w końcach rurki, na jej podstawach (nie zaś na powierzchniach bocznych) wykaże się magnetyzm swobodny, który jest właśnie przyczyną zwiększającą μ ra-

chodne względem t i zważywszy, że

$$4\pi \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \gamma}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial \beta}{\partial t},$$

otrzymujemy:

$$4\pi\mu \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial c}{\partial t} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial b}{\partial t} \right) \dots \dots \dots (5)$$

Zastąpiwszy prawą część równania (5) przez wyrazy układu (II), otrzymujemy:

$$4\pi\mu \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 X}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 Y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 X}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial z},$$

a dodając i odejmując

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 X}{\partial x^2}$$

i oznaczając sumę drugich pochodnych funkcji względem spólrzędnych przez symbole Δ^2 , t. j. kładąc:

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 X}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 X}{\partial z^2} = \Delta^2 X,$$

mamy:

$$\left. \begin{aligned} 4\pi\mu \frac{\partial u}{\partial t} &= \Delta^2 X - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right) \\ 4\pi\mu \frac{\partial v}{\partial t} &= \Delta^2 Y - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right) \\ 4\pi\mu \frac{\partial w}{\partial t} &= \Delta^2 Z - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right) \end{aligned} \right\} \dots \dots (III)$$

zy siłę magnetyczną względem powietrza. Jeżeli zaś „wydrażenie“ będzie miało postać rurki zamkniętej nieskończonej cienkiej, t. j. nie będzie miało końców swobodnych, co rzeczywiście zachodzi przy przesuwaniu bieguna wzdłuż prądu i wracającego na poprzednie miejsce (w tym celu należy sobie przedstawić kanałik, nie posiadający końców, i biegnący wzdłuż $AB(D)$), natenczas działanie ośrodka nie może się ujawnić i siła, działająca w tych warunkach na biegun, wyniesie tylko α , β , γ , chociaż liczba linii sił w ośrodku, przypadająca na jednostkę poprzeczną powierzchni, będzie $\mu\alpha$, $\mu\beta$, $\mu\gamma$, t. j. a , b , c . Więcej szczegółów w tej kwestyi znajdzie czytelnik u W. Thomsona „Reprint of Papers, A mathematical Theory of Magnetism“ (1872 r.) i u Borgmana „Zjawiska elektryczne i magnetyczne“ tom II, str. 117 i nast. Prócz tego należy zauważyć, że kierunek namagnesowywania w ośrodku paramagnetycznym (t. j. a , b , c) tylko wtedy zlewa się z kierunkiem siły magnetyzującej, gdy ośrodek ten w znaczeniu magnetycznym jest jednorodny we wszystkich kierunkach, t. j. gdy jest izotropowy.

§ 13. Zastosowanie ogólnych równań Maxwella w przypadku prądów tylko w przewodnikach rzeczywistych.

Podstawą teorii Maxwella jest założenie, że siły elektryczne X , Y , Z , wywołują prąd nie tylko w przewodniku, jeżeli w nim działają, lecz także pewne przesunięcie elektryczne (polaryzację elektryczną) i w ośrodku (dielektryku), jeżeli ten ostatni znajduje się pod działaniem tych sił. Nie poruszając narazie związanego z tem szerszego pojęcia o prądzie elektrycznym, do którego wrócimy w następnym rozdziale, zauważymy tu tylko, że jedyne założenie, uczynione o naturze fizycznej prądów u , v , w , wywoływanych przez siły elektromotoryczne X , Y , Z , przy którym zachodzą równania (III), polegało na tem, iż prądy te wywoływały pole magnetyczne o wiadomych nam własnościach.

Ograniczając nasze roztrząsanie do przypadku, w którym mamy do czynienia wyłącznie z prądami w przewodnikach rzeczywistych, i oznaczając przez σ opór, obliczony na jednostkę objętości przewodnika (przytem ściany sześcianu należy sobie przedstawić postawionemi normalnie i równoległe do prądu), otrzymujemy:

$$X = \sigma u, \quad Y = \sigma v, \quad Z = \sigma w \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

[Na mocy założenia X jest to spadek potencjału, obliczony na jednostkę długości przewodnika, w razie przechodzenia przez jednostkę poprzecznego przekroju przewodnika prądu u ; ponieważ σ jest opór jednostki objętości przewodnika, więc na podstawie prawidła Ohma piszemy równania (6)].

Wstawiając (6) do układu (III) otrzymujemy:

$$4\pi\mu \frac{\partial u}{\partial t} = \sigma \Delta^2 u - \sigma \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Łatwo zauważyć, że

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Istotnie biorąc pochodne względem x , y , z równań (I) otrzymujemy:

$$\begin{aligned} 4\pi \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \beta}{\partial x \partial z}, \\ 4\pi \frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{\partial^2 \alpha}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x \partial y}, \\ 4\pi \frac{\partial w}{\partial z} &= \frac{\partial^2 \beta}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 \alpha}{\partial y \partial z}. \end{aligned}$$

Dodając, otrzymujemy wyrażenie (8); zupełnie taki sam wzór mamy, jak wiadomo, i w Hydrodynamice; wyraża on tam twierdzenie o ciągłości płynącej strugi cieczy; to też podobny wniosek o ciągłości możemy uczynić dla prądu elektrycznego.

Na mocy (8), równanie (7) i cały układ równań (III) dla przypadku, kiedy rozważamy prądy w rzeczywistych przewodnikach, mogą być przekształcone na następujące:

$$\left. \begin{aligned} 4\pi\mu \frac{\partial u}{\partial t} &= \sigma\Delta^2 u \\ 4\pi\mu \frac{\partial v}{\partial t} &= \sigma\Delta^2 v \\ 4\pi\mu \frac{\partial w}{\partial t} &= \sigma\Delta^2 w \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (IV)$$

Podobnie otrzymamy układ równań:

$$\left. \begin{aligned} 4\pi\mu \frac{\partial a}{\partial t} &= \sigma\Delta^2 a \\ 4\pi\mu \frac{\partial b}{\partial t} &= \sigma\Delta^2 b \\ 4\pi\mu \frac{\partial c}{\partial t} &= \sigma\Delta^2 c \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (V)$$

Przytoczone układy równań formalnie są jednakże z równaniami przewodnictwa ciepła, podanemi przez F o u r i e r a ¹⁾. Jak przy pomocy równań F o u r i e r a można wyznaczyć prędkość przenikania ciepła do wnętrza bryły, której powierzchnia zewnętrzna utrzymuje się w danej temperaturze stałej lub zmiennej (np. w zagadnieniach, dotyczących przenikania w głąb ziemi ciepła słonecznego, zmieniającego się peryodycznie, stosownie do odmian dnia i pór roku), podobnie i równania M a x w e l l a pozwalają nam czynić wnioski o przenikaniu zakłóceń elektrycznych w głąb przewodników, jeżeli przyczyny, wywołujące je, działają na zewnętrznej powierzchni przewodnika.

Badania teoretyczne pozwalają przypuścić, iż jeżeli między dwoma punktami znajduje się pewna różnica potencjałów, wywołująca prąd w przewodniku, łączącym te punkty, to zakłócenia elektryczne powstają początkowo tylko w warstwach zewnętrznych przewodnika i dopiero później przenikają do wnętrza. Warstwa zewnętrzna przewodnika, bez-

¹⁾ Théorie de la chaleur.

pośrednio granicząca z dielektrykiem (izolatorem), jak gdyby wchłania w siebie zakłócenia elektryczne, istniejące w ośrodku dielektrycznym, tak że sposób przenikania prądu do wnętrza przewodnika zupełnie przypomina przenikanie ciepła w jądro bryły, ogrzewanej z zewnątrz. Rozważając powstawanie prądu stałego, zauważymy, że po pewnym bardzo krótkim okresie czasu cały przekrój przewodnika będzie zajęty przez prąd; lecz gdy wytwarzający się prąd jest zmienny, t. j. zewnętrzna warstwa przewodnika podlega ze strony dielektryku zakłóceniom, stale zmieniającym swój znak, to przy pewnej dość częstej zmianie znaku stać się może, iż prąd nie zdąży ustalić się w całym przekroju przewodnika wtedy, gdy już zacznie przenikać nowy prąd o innym kierunku, wzamian pierwszego. W takich warunkach pracować będzie nie cały przekrój przewodnika, i wogóle im częstsze są zmiany prądu, tem więcej pracują warstwy, sąsiadujące z zewnętrzną, i przez to cały opór przewodnika odpowiednio wzrasta, gdyż jądro wewnętrzne pozostaje prawie zupełnie bierne. Zjawisko to znane jest pod mianem *skin effect*—przewodnictwa „skórnego“.

Ostatnie założenia łatwo wyprowadzić z równań ogólnych Maxwella. Rozważymy przypadek najprostszy, gdy przewodnik nieskończony ograniczony jest z jednej tylko strony płaszczyzną; niechaj nią będzie płaszczyzna YZ ; przypuśćmy, iż prąd jest równoległy do osi ZZ i że we wszystkich punktach, jednakowo odległych od płaszczyzny YZ , prądy te są jednakowe. Założenie to, z fizycznego punktu widzenia, sprowadza się do rozpatrzenia zjawiska przenikania zakłóceń elektrycznych do przewodnika, równoległego do osi ZZ , przytem oś XX jest skierowana do środka przewodnika, a wzdłuż osi ZZ zakłócenia elektryczne wszędzie działają jednakowo. W takich warunkach, jeżeli μ oznacza przenikliwość magnetyczną, a σ opór jednostki objętości przewodnika (przytem zakładamy, że obie te wielkości są stałe), to składowe prądu u oraz v są $= 0$ (ponieważ wzdłuż XX i YY prądu niema). Zostaje do rozpatrzenia składowa w , mająca oznaczać prąd, równoległy do osi ZZ . Ze względu na to że układu równań (IV) zostanie tylko

$$4\pi\mu \frac{\partial w}{\partial t} = \sigma \Delta^2 w.$$

Lecz ponieważ wzdłuż ZZ i wzdłuż YY siła prądu jest stała (zmienia się tylko przy pogrążeniu w głąb przewodnika, t. j. w zależności od x), więc:

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

i

$$\Delta^2 w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2},$$

dlatego też

$$4\pi\mu \frac{\partial w}{\partial t} = \sigma \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \dots \dots \dots (9)$$

Równanie (9), przedstawiające przenikanie elektryczności do wnętrza przewodnika, jest równaniem o pochodnych cząstkowych, pod względem zewnętrznym jednakiem z równaniem (30) rozdziału I-go (str. 25). Z równania tego widać, że na pewnej głębokości stan elektryczny przewodnika zmienia się z biegiem czasu, i że naodwrot w pewnej określonej chwili stan ten różny jest na różnych głębokościach. Znając warunki, którym szukana funkcja $w = f(x, t)$ ma w pewnych punktach zadość czynić zgodnie z danymi fizycznymi zagadnienia, możemy, korzystając z równania (9), wyznaczyć jej wartość dla innych punktów przewodnika. Założmy, że $w = a \sin \omega t$ przy $x=0$, t. j. że siła prądu na powierzchni zmienia się według prawa wstaw, przytem $\omega = \frac{2\pi}{T}$, t. j. okres prądu $T = \frac{2\pi}{\omega}$; także założmy, że przy $x = \infty$ (t. j. w przewodniku, którego wymiary poprzeczne są nieskończenie wielkie) $w = 0$, czyli że prąd nie może przeniknąć na nieskończenie wielką głębokość. Przy takich założeniach łatwo dowieść, że funkcja

$$w = e^{-\alpha x} \sin(\omega t + \gamma x) \dots \dots \dots (10)$$

będzie całką równania (9), jeżeli α i γ będą odpowiednio dobrane.

Rzeczywiście:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \alpha e^{-\alpha x} \sin(\omega t + \gamma x) + \gamma e^{-\alpha x} \cos(\omega t + \gamma x),$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \alpha^2 e^{-\alpha x} \sin(\omega t + \gamma x) + 2\alpha\gamma e^{-\alpha x} \cos(\omega t + \gamma x) - \gamma^2 e^{-\alpha x} \sin(\omega t + \gamma x),$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \omega e^{-\alpha x} \cos(\omega t + \gamma x).$$

Wstawiając wyrażenia te w (9), otrzymamy:

$$\omega e^{-\alpha x} \cos(\omega t + \gamma x) = \frac{\sigma}{4\pi\mu} e^{-\alpha x} [(\alpha^2 - \gamma^2) \sin(\omega t + \gamma x) + 2\alpha\gamma \cos(\omega t + \gamma x)].$$

Ponieważ równanie to powinno zachodzić przy jakichkolwiek wartościach t i x , będzie to więc możliwe w razie, gdy:

$$\left. \begin{aligned} \alpha^2 - \gamma^2 &= 0 \\ \frac{\omega}{k} &= 2\alpha\gamma \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (11)$$

gdzie $k = \frac{\sigma}{4\pi\mu}$.

Jeżeli zadość uczyniono warunkom (11), to wyrażenie (10) jest całką równania (9).

Z wzoru (11) mamy $2\alpha^2 = \frac{\omega}{k}$, a stąd:

$$\alpha = \pm \sqrt{\frac{\omega}{2k}} \dots \dots \dots (12)$$

i dlatego całką równania (9) będzie:

$$w = Ae^{\alpha x} \sin(\omega t + \alpha x) + Be^{-\alpha x} \sin(\omega t - \alpha x), \dots (13)$$

gdzie A i B wielkości stałe, podlegające wyznaczeniu zgodnie z warunkami zagadnienia.

Ponieważ przy $x = \infty$, $w = 0$, to $A = 0$. Z drugiej zaś strony przy $x = 0$ (na powierzchni), $w = a \sin \omega t$, dlatego $B = a$. Wogóle więc:

$$w = ae^{-x \sqrt{\frac{\omega}{2k}}} \sin \left\{ \omega t - x \sqrt{\frac{\omega}{2k}} \right\} \dots \dots \dots (14)$$

Funkcja (14) przedstawia całkę równania (9).

Otrzymane wnioski zastosujemy do pewnego szczególnego przypadku: przypuścmy, że chcemy wyznaczyć przenikanie w głąb przewodnika miedzianego prądu zmiennego, o 100 okresach na sekundę, t. j. dla którego

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi \cdot 100.$$

Mamy dla miedzi $\mu = 1$, $\sigma = 1600$ (t. j. opór centymetra sześciennego miedzi równa się 1600 jednostkom elektromagnetycznym *CGS* oporu; chcąc ów opór wyrazić w ohmach, należy liczbę 1600 pomnożyć przez 10^{-9} , t. j. opór sześciennego centymetra miedzi równa się $1,6 \cdot 10^{-8}$ ohmom, czyli 1,6 mikroohmom, co zgadza się z rzeczywistością). Natenczas:

$$k = \frac{\sigma}{4\pi\mu} = \frac{400}{\pi}; \quad \sqrt{\frac{\omega}{2k}} = \sqrt{\frac{2\pi \cdot 100}{2 \cdot 400}} = \frac{\pi}{2}.$$

A dlatego największe wartości siły prądów na głębokościach 1, 2, 3 centymetrów odpowiednio wynoszą:

$$ae^{-\frac{\pi}{2}}; ae^{-\pi}; ae^{-\frac{3\pi}{2}};$$

czyli będą 0,208 a ; 0,043 a ; 0,008 a ; i t. d., t. j. już na głębokości 10 milimetrów prąd może osiągnąć zaledwie mniej więcej $\frac{1}{5}$ największej swej wartości na powierzchni; innymi słowy warstwy, leżące na głą-

bokości 10 milimetrów, dla prądu zmiennego wspomnianej częstotliwości zmian, przedstawiają faktycznie opór prawie 5 razy większy od normalnego oporu warstw na powierzchni. Na jeszcze większych głębokościach opór wzrasta do tego stopnia, że one praktycznie nie biorą udziału w przebiegu prądu i faktycznie tylko wierzchnie warstwy (skin effect) współdziałają w przesyłaniu zakłóceń elektrycznych

Wyparcie prądu zmiennego do warstw powierzchniowych, jak widać z całki (24), wzrasta z powiększeniem liczby zmian prądu ω i wartości przenikliwości magnetycznej μ . Dla miedzi, przy milionie zmian na sekundę, jest $\omega = 2\pi \cdot 10^6$,

$$\sqrt{\frac{\omega}{2k}} = \sqrt{\frac{2\pi^2 \cdot 10^6}{2 \cdot 400}} = \frac{\pi}{2} 10^3$$

i największe wartości siły prądów na głębokościach x będą $ae^{-50\pi x}$. Warstwy, w których największa siła prądu, przy tej częstotliwości zmian, będzie się równała np. $1/1000$ największej siły prądu na powierzchni, wyznacza się z zależności $e^{-50\pi x} = \frac{1}{1000}$, stąd $x = \infty \frac{1}{20}$ centymetra czyli $\frac{1}{2}$ milimetra.

Wpływ przenikliwości magnetycznej także dużo osłabia przenikanie prądów do wnętrza przewodnika. Jeżeli rozważony wyżej przypadek ($\omega = 2\pi \cdot 100$) odnieść do żelaza, kładąc $\mu = 1000$, $\sigma = 10000$, to

$$k = \frac{10}{4\pi}; \sqrt{\frac{\omega}{2k}} = \sqrt{\frac{2\pi \cdot 100}{\frac{20}{4\pi}}}$$

$= 2\pi \sqrt{10} = \infty 20$, i na głębokości jednego milimetra siła prądu stanowić będzie zaledwie 0,13 siły prądu na powierzchni.

Jeżeli przyjmiemy pod uwagę wartości przewodnictwa dla prądów zmiennych zależnie od grubości przewodnika i częstotliwości zmian prądu, to możemy obliczyć tablicę, ułatwiającą praktyczne zastosowanie i wykazującą faktyczne powiększenie oporu danego przekroju wobec prądu zmiennego.

Przytoczymy tutaj podobną tablicę, zaczerpniętą z dzieła L a c o u r a „Theorie der Wechselströme und Transformatoren“ (str. 369).

Wzrost procentowy oporu przewodników wskutek wypierania prądu w kierunku ku powierzchni (dla miedzi):

Średnica przewodnika	Liczba zmian na sekundę						
	25	50	75	100	200	500	1000
milimetry							
5	0,0027	0,0109	0,0246	0,0437	0,175	1,09	4,37
10	0,043	0,175	0,394	0,700	2,8	17,5	70
15	0,22	0,88	1,99	3,54	14,8	88,5	354
20	0,7	2,8	6,3	11,2	44,8	280	1120

Zgodnie z tablicą np. przy 1000-krotnych zmianach kierunku prądu na sekundę opór przewodnika o średnicy 10 milimetrów prawie podwaja się (70%) w stosunku do oporu, jaki ten sam przewodnik stawia prądowi stałemu.

Jednakże dla stosowanej w praktyce elektrotechnicznej częstości zmian (bardzo rzadko więcej od 100) i używanych średnic dla przewodników wpływ tego zjawiska nie daje się odczuwać w znaczniejszym stopniu. Na zasadzie powyższej teorii *M*ie dał wprost wyrażenie na rzeczywisty opór, stawiany przez przewodnik prądowi zmiennemu r_{eff} :

$$r_{eff} = r \left\{ 1 + 0,0833 \left(\frac{2\pi c}{r_1} \right)^2 - 0,00556 \left(\frac{2\pi c}{r_1} \right)^4 \right\} \dots (15)$$

Gdzie r opór dla prądu stałego, $c = \frac{1}{T}$, r_1 opór jednego bieżącego centymetra przewodnika dla prądu stałego w układzie jednostek *CGS*. Oczywiście, że $r = r_1 l$, gdzie l wyrażone w centymetrach.

Powracając do całki (14), zauważymy, że chociaż amplituda wahań prądów zmiennych słabnie z chwilą przenikania w głąb przewodnika lecz okres ich, jak widać z (14), nie zmienia się.

Prócz tego, ta sama całka wykazuje, że siła prądu osiąga maksimum, t. j. równa się $ae^x - \sqrt{\frac{\omega}{2k}}$ zawsze, gdy zachodzi równość

$$\omega t - x \sqrt{\frac{\omega}{2k}} = \frac{\pi}{2} (2M - 1),$$

¹⁾ Pogg. Ann. 1900.

lub kiedy

$$t = \frac{x}{V\sqrt{2\omega k}} + \frac{\pi_i}{2} (2M - 1) \dots \dots \dots (16)$$

gdzie M jest liczbą całkowitą dowolną.

Dlatego też, jeżeli w danej chwili t maximum prądu dosięgło głębokości x , natenczas to samo maximum posuwa się w głąb (t. j. kiedy x rośnie jednocześnie z t) z prędkością $\frac{x}{t} = V\sqrt{2\omega k}$.

ROZDZIAŁ IV.

Prądy dielektryczne Maxwella. Elektromagnetyczna teoria światła ¹⁾.

§ 14. Prądy dielektryczne w izolatorach.

Jak wyżej wykazaliśmy, ogólne równania różniczkowe prądów i pola, podane w § 12 poprzedniego rozdziału, zachodzą dla każdego zakłócenia elektrycznego, jeżeli tylko zachowane są dwa zasadnicze warunki, które służyły jako założenie do utworzenia tych równań: 1) że powstający wskutek zakłócenia „prąd“ wywołuje pole magnetyczne, w którym na przesunięcie jednostki masy magnetycznej wokół linii prądu zużywa się praca $4\pi J$ i 2) że, między wywołaną w obwodzie na jednostkę długości siłą elektromotoryczną i zmianą liczby linii sił, przerywających powierzchnię, ograniczoną obwodem, zachodzi pewien określony związek.

Dla zwyczajnych prądów, rozważanych w § 13, warunki te, oczywiście, istnieją; Maxwell przypuścił, że te same warunki stosują się także i do szczególnych prądów w dielektryku, uwarunkowanych przez tak zw. polaryzację dielektryczną i dielektryczne „przesunięcie“ („displacement“).

Jeżeli posiadamy kondensator np. ze zbrojami w kształcie dwóch płaszczyzn równoległych, przedzielonych warstwą izolacyjną, których potencjały równają się odpowiednio V_A i V_B , wówczas, oznaczywszy odległość między zbrojami przez Δ , i zważywszy, iż siła elektryczna R (t. j. siła, jaką wywiera pole na dodatnią jednostkę masy elektrycznej,

¹⁾ Elektromagnetyczna teoria światła, opracowana jest w klasycznych dziełach Maxwella, Hertz a, Helmholtza, Boltzmann a, oraz przystępnie w dziele Eberta: „Die Theorie des Elektromagnetismus“; sposobu wykładu stosowanego w tem dziele niejednokrotnie trzymaliśmy się w tym rozdziale. Popularny wykład elektromagnetycznej teorii światła autor niniejszego ogłosił w „Kosmosie“ lwowskim 1886 r.

znajdującej się w jednostajnej części pola pomiędzy przewodnikami) (rys. 11), będzie mniej więcej stała, to z określenia potencjału wynika równość $R\Delta = V_A - V_B$ i

$$R = \frac{V_A - V_B}{\Delta} \dots \dots \dots (1)$$

Gdy warstwą izolacyjną nie będzie powietrze, a jakaś inna substancja, wtedy, wogóle, pojemność kondensatora zmienia się wraz ze zmianą warstwy izolacyjnej.

Oznaczmy przez K wielkość, wyrażającą, o ile powiększy się pojemność kondensatora, gdy powietrze zastąpimy innym ciałem; nazwiemy wielkość K współczynnikiem dielektrycznym danego ośrodka lub stałą dielektryczną. Wówczas staje się oczywistem, że jeżeli pojemność kondensatora powiększyła się K razy, to jedna i ta sama ilość masy elektrycznej, zużyta na naładowanie jednego i tego samego kondensatora, w przypadku, gdy warstwą izolacyjną jest powietrze, wywoła między przewodnikami różnicę potencjałów $V_A - V_B$, w razie zaś zastąpienia powietrza przez izolator, którego współczynnik dielektryczny jest K , tylko różnicę potencjałów $\frac{V_A - V_B}{K}$. Dlatego też siła elektryczna przy jednakowym ładunku kondensatora, lecz przy różnych dielektrykach, wyniesie dla powietrza, jak zaznaczono wyżej, $R = \frac{V_A - V_B}{\Delta}$, zaś dla nowego dielektryku

$$R' = \frac{V_A - V_B}{K} = \frac{R}{K} \dots \dots \dots (2)$$

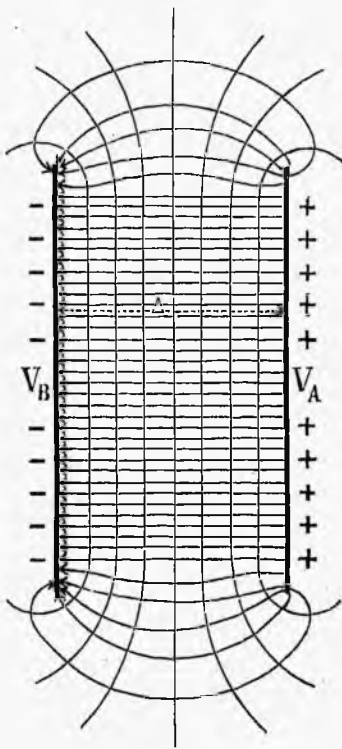
Max well w następujący sposób rysuje sobie obraz procesu fizycznego, zachodzącego w naładowanym kondensatorze i w jego warstwie izolacyjnej. Różnoimienne ładunki, znajdujące się na zbrojach kondensatora, przyciągają się wzajemnie poprzez dielektryk. Obraz przyciągania tego otrzymamy, gdy wyobrazimy sobie, że każda para różnoimennych jednostek elektryczności na zbrojach połączona jest sprężystym łącznikiem, starającym się ściągnąć w swym podłużnym kierunku, w rodzaju np. pręta kauczukowego lub rurki. Jeżeli wyobrazimy sobie całą warstwę dielektryku, podzieloną na podobne rurki siły, łączące wszystkie oddzielne jednostki ładunków, to, oczywiście, że kierunek siły elektrycznej będzie się zlewał z przebiegiem owych rurek sił¹⁾. Z drugiej

¹⁾ Dla odróżnienia od „linij“ sił magnetycznych dla sił elektrostatycznych wprowadzamy termin „rurki sił“.

zaś strony, jeżeli poprowadzimy prostopadle do rurek sił powierzchni jednakowego potencjału t. zw. izopotencjalne, na odległości jedności (t. j. takie, między którymi różnica potencjałów równa się jedności), to tym sposobem całą dziedzinę pola podzielimy na komórki, podobne do wskazanych na rys. 12.

Podobne jednostkowe komórki możemy sobie wyobrazić, jako składające się z jeszcze drobniejszych komórek molekularnych — małych walców, których podstawami są powierzchnie izopotencjalne, a tworzące boczne powierzchnie są równoległe do siły elektrycznej. Według Maxwella w każdej takiej komórce molekularnej pod wpływem elektrycznego ładunku kondensatora zachodzi rozłączenie ładunku dodatniego i ujemnego elektryczności wzdłuż działania siły elektrycznej (t. j. wzdłuż rurki siły), atoli nie w kształcie ciągłego prądu, jak w przewodniku, lecz pod postacią przesunięcia elektryczności dodatniej ku jednemu krańcowi komórki, ujemnej zaś — ku drugiemu. W taki sposób we wszystkich cząstkach dielektryku zachodzi polaryzacja dielektryczna i wszystkie te cząstki stają się spolaryzowanymi. Polaryzacja dielektryczna mierzy się momentem polaryzacji, który na jednostkę objętości równa się ilości masy elektrycznej, przesuniętej w obrębie tej objętości w kierunku działania siły i przypadającej na jednostkę powierzchni izopotencjalnej.

Rys. 11.



Maxwell przypuszcza, że między siłą elektryczną w dielektryku i polaryzacją dielektryku zachodzi proporcjonalność, podobnie jak w teorii sprężystości siły sprężyste są proporcjonalne do sił zewnętrznych, wywołujących odkształcenie. Im większa siła elektryczna, tem większa polaryzacja, t. j. tem większa ilość elektryczności bywa przesunięta między powierzchniami izopotencjalnymi wewnątrz dielektryku i naodwrot. Więć wogóle dla powietrza, jeśli D oznacza polaryzację (moment polaryzacji):

$$R = \alpha D, \dots \dots \dots (3)$$

gdzie α jest pewien współczynnik stały.

Oczywiście dla izolatora, którego współczynnik dielektryczny równa się K , na mocy (2) jest:

$$R' = \frac{\alpha D}{K} \dots \dots \dots (4)$$

Badania teoretyczne wykazują iż $\alpha = 4\pi$ ¹⁾, tak że wogóle

$$R' = \frac{4\pi}{K} D \dots \dots \dots (4a)$$

Przedstawmy sobie obecnie, iż wskutek jakichkolwiek przyczyn polaryzacya zmienia się, np.: kondensator wyładowuje się na skutek połączenia zbrój jego przewodnikami (wyładowywaczem). Natenczas, zgodnie z wnioskami, zamieszczonemi w poprzednich rozdziałach, różnica potencjałów między przewodnikami zanika, równocześnie zanika siła elektryczna w dielektryku, a więc i polaryzacya. Lecz jeżeli polaryzacya zmienia się (w danym przypadku zmniejsza się), to ilość elektryczności, rozszczepionej w komórkach, zmienia się również, i przy zmniejszaniu polaryzacyi zachodzi przesunięcie w kierunku odwrotnym do poprzedzającej polaryzacyi.

Jeżeli znaki ładunków są takie, jak wskazuje rys. 12 (minus na lewo), to przy wyładowaniu kondensatora powstaje w komórkach przesunięcie dodatnich ładunków z lewej strony ku prawej, dopóki zmniejszenie polaryzowanych mas elektrycznych nie doprowadzi do nowego stanu równowagi, odpowiedniej do nowej różnicy potencjałów, warunkującej nową wartość siły elektrycznej.

Jak wynika z powyższego, przesunięcie elektryczności w komórkach przy naruszeniu równowagi zachodzi w kierunku siły elektrycznej (t. j. wzdłuż rurek sił), więc Maxwell uczynił przypuszczenie, że owe prądy elementarne w komórkach posiadają wszystkie własności prądów w przewodnikach, t. j. że każdy poruszający się ładunek wywołuje pole magnetyczne, zupełnie jednakie ze względu na swe cechy z polem, wywołwanem prądami w przewodnikach.

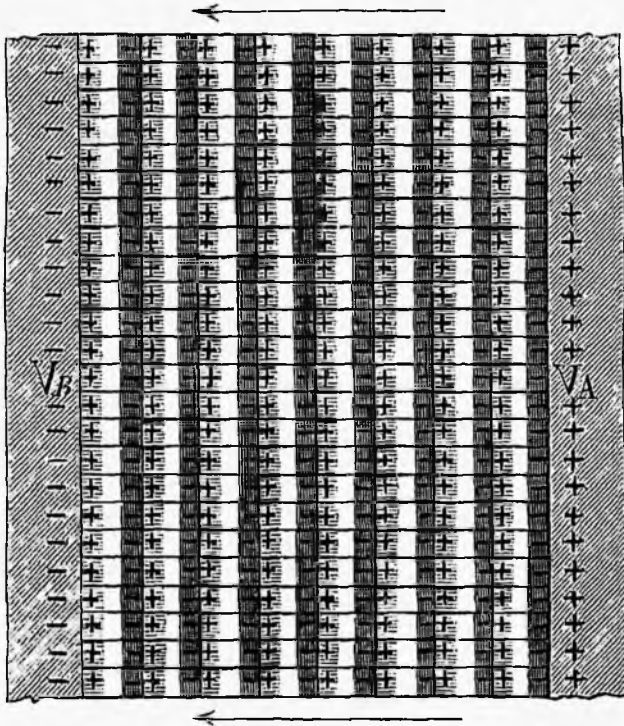
Ponieważ zmiana polaryzacyi wywołuje przesunięcie dielektryczne, więc jeżeli D jest polaryzacyą, przypadającą na jednostkę objętości, natenczas siła prądu (dielektrycznego) na jednostkę powierzchni poprzecznego przekroju będzie oczywiście

$$i' = \frac{\partial D}{\partial t} \dots \dots \dots (5)$$

¹⁾ Hertz przyjmuje $\alpha = 1$. Współczynnik 4π jest dogodniejszy pod względem formalnym we wzorach. Jeżeli przyjąć $\alpha = 4\pi$, to D staje się także ilością rurek siły na jednostkę kwadratową powierzchni zbroi, a zatem, na podstawie określenia rurek siły, ładunkiem na jednostkę kwadratową zbroi.

Odnosnie do znaku należy zauważyć, że, ponieważ D posiada ten sam kierunek, co i siła elektryczna, więc np. przy zmniejszeniu D ($\frac{\partial D}{\partial t} < 0$), prąd powinien być ujemny, i naodwrot. Właśnie to zauważymy na rys. 12: siła, skierowana od $+$ do $-$, t. j. z prawej strony

Rys. 12.



ku lewej, a prąd dielektryczny z lewej ku prawej (za przebieg prądu przyjmujemy kierunek przesunięcia ładunku dodatniego).

Na mocy (5) i (4) otrzymamy:

$$i' = \frac{K}{4\pi} \frac{\partial R'}{\partial t} \dots \dots \dots (6)$$

jeżeli K jest wielkość stała.

Wprowadzimy znakowanie poprzedniego rozdziału dla składowych siły prądu w prostokątnym układzie współrzędnych u, v, w i dla siły elek-

tromotorycznej X, Y, Z , gdzie u i X są odpowiednio rzutami i i R' na oś XX i t. d.: otrzymamy wtedy dla prądów dielektrycznych Maxwella:

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{K}{4\pi} \frac{\partial X}{\partial t} \\ v &= \frac{K}{4\pi} \frac{\partial Y}{\partial t} \\ w &= \frac{K}{4\pi} \frac{\partial Z}{\partial t} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (7)$$

Jeżeli siła elektryczna wywołuje nie tylko przesunięcia dielektryczne, lecz i zwyczajny prąd „metaliczny“, innymi słowy, jeżeli ośrodek w którym działa K , posiada (jak i wszystkie ciała w przyrodzie) tylko w pewnym stopniu własności izolatora, to całkowity prąd będzie przedstawiał sumę prądów: konwekcyjnego według (7) i metalicznego według (6) poprzedniego rozdziału. Wówczas składowe siły prądu będą:

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{X}{\sigma} + \frac{K}{4\pi} \frac{\partial X}{\partial t} \\ v &= \frac{Y}{\sigma} + \frac{K}{4\pi} \frac{\partial Y}{\partial t} \\ w &= \frac{Z}{\sigma} + \frac{K}{4\pi} \frac{\partial Z}{\partial t} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (8)$$

gdzie σ —opór jednostki objętości ośrodka, K jego współczynnik dielektryczny.

§ 15. Równania ogólne teorii elektromagnetycznej światła.

Podstawiając poprzednie wyrażenia na całkowitą siłę prądu do układu równań I rozdziału poprzedzającego, otrzymamy:

$$\left. \begin{aligned} 4\pi \left(\frac{X}{\sigma} + \frac{K}{4\pi} \frac{\partial X}{\partial t} \right) &= \frac{\partial \gamma}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial z} \\ 4\pi \left(\frac{Y}{\sigma} + \frac{K}{4\pi} \frac{\partial Y}{\partial t} \right) &= \frac{\partial \alpha}{\partial z} - \frac{\partial \gamma}{\partial x} \\ 4\pi \left(\frac{Z}{\sigma} + \frac{K}{4\pi} \frac{\partial Z}{\partial t} \right) &= \frac{\partial \beta}{\partial x} - \frac{\partial \alpha}{\partial y} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1)$$

Przypuśćmy, że w pewnym określonym miejscu ośrodka, pozbawionego własności przewodnictwa, siła elektryczna zmienia się peryodycznie, np.: jak to ma miejsce przy wyładowaniu kondensatorów,

w przypadku rozważonym w rozdziale II-m. Rozpatrzmy, jakim sposobem to peryodyczne zakłócenie rozchodzi się w przestrzeni.

Jeżeli ograniczymy nasze rozważanie do przypadku, gdy $\sigma = \infty$, t. j. jeśli ośrodek przedstawia zupełny izolator, natenczas:

$$\left. \begin{aligned} K \frac{\partial X}{\partial t} &= \frac{\partial \gamma}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial z} \\ K \frac{\partial Y}{\partial t} &= \frac{\partial \alpha}{\partial z} - \frac{\partial \gamma}{\partial x} \\ K \frac{\partial Z}{\partial t} &= \frac{\partial \beta}{\partial x} - \frac{\partial \alpha}{\partial y} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots \text{(II)}$$

Oprócz tego, podstawiając w równania (II) poprzedniego rozdziału $a = \alpha\mu$, $b = \beta\mu$, $c = \gamma\mu$, otrzymamy:

$$\left. \begin{aligned} -\mu \frac{\partial \alpha}{\partial t} &= \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} \\ -\mu \frac{\partial \beta}{\partial t} &= \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} \\ -\mu \frac{\partial \gamma}{\partial t} &= \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots \text{(III)}$$

Wziąwszy pochodne obu stron pierwszego równania z układu (II) względem t , mamy:

$$K \frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \gamma}{\partial t} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \beta}{\partial t} \right)$$

i zastąpiwszy wartości pochodnych według (III):

$$\begin{aligned} K \frac{\partial^2 X}{\partial t^2} &= \frac{1}{\mu} \left[\left(\frac{\partial^2 X}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 Y}{\partial x \partial y} \right) + \left(\frac{\partial^2 X}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial z} \right) \right] \\ &= \frac{1}{\mu} \left[\left(\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 X}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 X}{\partial z^2} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right) \right]. \end{aligned}$$

Uwzględniwszy wyżej podane oznaczenie sumy drugich pochodnych pewnej funkcji względem współrzędnych przez Δ^2 i wprowadziwszy jeszcze oznaczenie

$$J = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \dots \dots \dots \text{(9)}$$

otrzymujemy:

$$\left. \begin{aligned} \mu K \frac{\partial^2 X}{\partial t^2} &= \Delta^2 X - \frac{\partial J}{\partial x} \\ \mu K \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} &= \Delta^2 Y - \frac{\partial J}{\partial y} \\ \mu K \frac{\partial^2 Z}{\partial t^2} &= \Delta^2 Z - \frac{\partial J}{\partial z} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (IV)$$

Biorąc w każdym równaniu z układu (II) pochodne obu stron: względem x pierwszego, względem y drugiego, względem z trzeciego, i dodając, otrzymamy:

$$K \frac{\partial J}{\partial t} = 0 \dots \dots \dots (10)$$

t. j. J nie zależy od czasu.

Maxwell przypuszcza wogóle, iż $J=0$, t. j. że siła elektromotoryczna na jednostkę długości nie zmienia się wzdłuż przewodnika. Lecz, niezależnie od tego przypuszczenia, dla zakłóceń peryodycznych możemy przyjąć, iż $\frac{\partial J}{\partial x} = \frac{\partial J}{\partial y} = \frac{\partial J}{\partial z} = 0$. Rzeczywiście, jeżeli X, Y, Z są funkcjami peryodycznymi czasu, to J powinno być, wobec (IV), takąż funkcją peryodyczną czasu. Jeżeli zaś, w myśl (10), J od czasu nie zależy, to musi dla zadosyćczynienia tym dwóm warunkom być zerem. Więc:

$$\left. \begin{aligned} \mu K \frac{\partial^2 X}{\partial t^2} &= \Delta^2 X \\ \mu K \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} &= \Delta^2 Y \\ \mu K \frac{\partial^2 Z}{\partial t^2} &= \Delta^2 Z \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (V)$$

Zupełnie podobne związki otrzymamy dla zakłóceń magnetycznych: wzięwszy pochodne obu stron równań układu (III) względem t , wstawiwszy wartości pochodnych z (II) i uwzględnivszy oznaczenie

$$S = \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \gamma}{\partial z}, \dots \dots \dots (11)$$

miód będziemy

$$\left. \begin{aligned} \mu.K \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} &= \Delta^2 \alpha - \frac{\partial S}{\partial x} \\ \mu.K \frac{\partial^2 \beta}{\partial t^2} &= \Delta^2 \beta - \frac{\partial S}{\partial y} \\ \mu.K \frac{\partial^2 \gamma}{\partial t^2} &= \Delta^2 \gamma - \frac{\partial S}{\partial z} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (VI)$$

Biorąc w każdym równaniu układu (III) pochodne obu stron: względem x w pierwszym, względem y w drugim, względem z w trzecim, i dodając, otrzymamy:

$$\mu \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \dots \dots \dots (12)$$

t. j. S od czasu nie zależy, i dlatego ostatecznie:

$$\left. \begin{aligned} \mu.K \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} &= \Delta^2 \alpha \\ \mu.K \frac{\partial^2 \beta}{\partial t^2} &= \Delta^2 \beta \\ \mu.K \frac{\partial^2 \gamma}{\partial t^2} &= \Delta^2 \gamma \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (VII)$$

Układy równań (V) i (VII) przedstawiają ogólne równania różniczkowe rozchodzenia się zakłóceń elektrycznych i magnetycznych w ośrodku dielektrycznym.

§ 16. Przypadek szczególny: rozchodzenie się fali płaskiej. Równanie promienia.

Nie poruszając kwestyi całkowania równań (V) w przypadku ogólnym, rozważymy zastosowanie ich i znaczenie fizyczne w najprostszym przypadku, mianowicie, gdy siły elektryczne i magnetyczne pozostają stałymi wszędzie na płaszczyźnie np. XY normalnej do osi ZZ , t. j. gdy

$$\text{i również } \left. \begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{\partial Y}{\partial y} = \frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{\partial Z}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial \alpha}{\partial x} = \frac{\partial \alpha}{\partial y} = \frac{\partial \beta}{\partial x} = \frac{\partial \beta}{\partial y} = \frac{\partial \gamma}{\partial x} = \frac{\partial \gamma}{\partial y} = 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots (13)$$

Przypuszczenie to fizycznie może być zrealizowane w następujący sposób. Przedstawmy sobie w pewnym miejscu przestrzeni przewodnik prostoliniowy, służący za siedlisko wahającego się wyładowania, rozważonego już w rozdziale II, np. jak to ma miejsce w przypadku, gdy przewodnikiem tym połączymy obie zbroje kondensatora. Wtedy kie-

runek przewodnika przedstawia przebieg zakłóceń elektrycznych. Pobudzone w każdym punkcie przewodnika zakłócenie elektryczne rozchodzi się od niego promieniście we wszystkich kierunkach. Rozważając punkt, do którego doszło zakłócenie elektryczne, w znacznej odległości od przewodnika (wibratora), a przytem wyobraziwszy sobie, że ów punkt znajduje się na promieniu prostopadłym do wibratora, możemy z pewnem przybliżeniem, zależnem od odległości punktu do wibratora, założyć, że zakłócenia elektryczne i magnetyczne, pobudzone w danym punkcie przez wibrator, będą prawie takie same jak i w sąsiednich punktach, znajdujących się na płaszczyźnie prostopadłej do promienia. Oczywiście, iż, ze zbliżaniem się punktu do wibratora, założenie to upadnie. Biorąc kierunek promienia, t. j. przebieg rozchodzenia się zakłóceń, wzdłuż osi ZZ, otrzymamy równanie warunkowe (13).

Wprowadziwszy zaś warunki te do układu równań (II) i (III), a również i do (V) i (VII), otrzymamy układy równań tych w postaci nieco uproszczonej:

$$\left. \begin{aligned} K \frac{\partial X}{\partial t} &= -\frac{\partial \beta}{\partial z} \\ K \frac{\partial Y}{\partial t} &= \frac{\partial \alpha}{\partial z} \\ K \frac{\partial Z}{\partial t} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \text{(VIII)} \quad \left. \begin{aligned} \mu \frac{\partial \alpha}{\partial t} &= \frac{\partial Y}{\partial z} \\ \mu \frac{\partial \beta}{\partial t} &= -\frac{\partial X}{\partial z} \\ \mu \frac{\partial \gamma}{\partial t} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \text{(IX)}$$

tudzież

$$\left. \begin{aligned} \mu K \frac{\partial^2 X}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 X}{\partial z^2} \\ \mu K \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 Y}{\partial z^2} \\ \mu K \frac{\partial^2 Z}{\partial t^2} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \text{(X)} \quad \left. \begin{aligned} \mu K \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 \alpha}{\partial z^2} \\ \mu K \frac{\partial^2 \beta}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 \beta}{\partial z^2} \\ \mu K \frac{\partial^2 \gamma}{\partial t^2} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \text{(XI)}$$

Prawe strony ostatnich równań układów (X) i (XI) równają się zeru, ponieważż

$$\Delta^2 Z = \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} \quad \text{i} \quad \Delta^2 \gamma = \frac{\partial^2 \gamma}{\partial z^2};$$

ze względu że $\frac{\partial J}{\partial t} = 0$ i $\frac{\partial S}{\partial t} = 0$, można, jak wyjaśniono wyżej, założyć w równaniach (X) i (XI):

$$\frac{\partial J}{\partial z} = \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = 0 \quad \text{i} \quad \frac{\partial S}{\partial z} = \frac{\partial^2 \gamma}{\partial z^2} = 0.$$

Ostatnie dwa równania układów (VIII) i (IX) wykazują, że Z i γ od czasu nie zależą, a więc, przy peryodycznym początkowem zakłóceniu, wielkości te jednakże charakteru peryodycznego nie posiadają; innymi słowy, zakłócenie peryodyczne, zachodzące w płaszczyźnie XY , nie daje składowych równoległych do ZZ , i dzięki temu przy rozchodzeniu się rozważanych zakłóceń pozostają tylko składowe w tej płaszczyźnie, t. j. zakłócenia elektryczne i magnetyczne są rozmieszczone tylko w płaszczyznach prostopadłych do promienia, czyli są poprzeczne. Na mocy tego wszystkie cztery ostatnie równania w układach (VIII) — (XI) mogą być opuszczone.

Jeżeli osi (XX) obierzemy równoległe do naszego prostoliniowego wibratora, to uwzględnwszy taki kierunek osi spólrzędnych, a także to, że pierwotne zakłócenie elektryczne (wahające się wyładowanie) zachodzi tylko wzdłuż wibratora, wnioskujemy, że z dwóch składowych zakłócenia elektrycznego X i Y tylko pierwsze różni się od zera, a $Y = 0$. Ze względu na równość

$$\mu \frac{\partial \alpha}{\partial t} = \frac{\partial Y}{\partial z} = 0,$$

wynika, że α od czasu nie zależy, a dlatego, przy zaznaczonym wyborze kierunku osi spólrzędnych, pole magnetyczne nie posiada peryodycznej składowej, równoległej do osi XX . Ponieważ przy rozchodzeniu się zakłóceń peryodycznych obchodzą nas głównie ich składowe peryodyczne, a więc możemy postawić wniosek, że zakłócenie elektryczne peryodyczne, wywołane przez wibrator prostoliniowy, przebiega wzdłuż promienia, prostopadłego do kierunku wibratora, w taki sposób, że w każdym punkcie promienia siła elektryczna jest równoległa do wibratora ($Y=0$), magnetyczna zaś jest równoległa do elektrycznej ($\alpha = 0$), i obie leżą w płaszczyźnie prostopadłej do kierunku promienia.

Gdy zestawimy właściwości rozważonego wyżej przebiegania zakłóceń elektromagnetycznych wzdłuż promienia ze zjawiskiem rozchodzenia się zakłóceń świetlnych, to między temi dwoma zjawiskami znajdujemy zupełne podobieństwo; rozważany promień elektromagnetyczny posiada własności wspólne z promieniem świetlnym, spolaryzowanym w płaszczyźnie. Drgania cząsteczek eteru według teorii światła, osnutej na własnościach eteru „światłonośnego”, zachodzą w płaszczyźnie polaryzacji (Neumann), lub w płaszczyźnie prostopadłej do niej (Fresnel). Jeżeli więc sposób rozchodzenia się zakłóceń elektromagnetycznych podobny jest do sposobu rozchodzenia się światła, to płaszczyzna polaryzacji w świetle odpowiada w zjawiskach elektromagnetycznych

płaszczyźnie drgań (zakłóceń) albo elektrycznych, albo magnetycznych. Kwestyę tę rozważymy niżej.

Ponieważ $Y = \alpha = 0$, zaś X i β przedstawiają całkowitą siłę elektryczną i magnetyczną, więc, jeżeli oznaczymy je: $X = E$ i $\beta = M$, wtenczas układy równań (VIII) — (XI), przy zachowaniu wspomnianego wyżej kierunku osi współrzędnych, zredukują się do układów:

$$\left. \begin{aligned} K \frac{\partial E}{\partial t} &= - \frac{\partial M}{\partial z} \\ \mu K \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots \text{(XII)}$$

$$\left. \begin{aligned} \mu \frac{\partial M}{\partial t} &= - \frac{\partial E}{\partial z} \\ \mu K \frac{\partial^2 M}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 M}{\partial z^2} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots \text{(XIII)}$$

§ 17. Prędkość rozchodzenia się zakłóceń elektrycznych i magnetycznych.

Równania drugie układów (XII) i (XIII) dają nam możność wyznaczenia prędkości rozchodzenia się zakłóceń elektrycznych i magnetycznych w ośrodku dielektrycznym. Jeżeli okaże się, że prędkość ta równa się prędkości rozchodzenia się światła, co rzeczywiście ma miejsce, to fakt ten upewni nas w nader prawdopodobnem przypuszczeniu, że światło jest niczem innym, jak właśnie zakłóceniem elektromagnetycznem.

Równanie

$$\mu K \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 E}{\partial z^2}$$

jest równaniem w pochodnych cząstkowych, więc całką równania powinna być wogóle funkcya E dwóch zmiennych t i z . Założmy ¹⁾:

$$E = \varphi(z - Vt) \dots \dots \dots \text{(14)}$$

gdzie φ jest funkcją zupełnie dowolną, a V pewną liczbą stałą. Wówczas możemy się przekonać, że (14) zadość czynić będzie naszemu równaniu przy pewnych warunkach co do stałej V .

¹⁾ Przy całkowaniu równań fali elektromagnetycznej postępowaliśmy według Eberta „Die Theorie des Elektromagnetismus“, którego wykład wydaje się nam najprostszym.

Biorąc pochodne (14) względem t i z i kładąc $z - Vt = \xi$, otrzymamy:

$$\frac{\partial E}{\partial t} = -V \frac{\partial \varphi(\xi)}{\partial \xi},$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = V^2 \frac{\partial^2 \varphi(\xi)}{\partial \xi^2},$$

$$\frac{\partial E}{\partial z} = \frac{\partial \varphi(\xi)}{\partial \xi},$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \varphi(\xi)}{\partial \xi^2}.$$

Podstawiając wyrazy te w równania różniczkowe, otrzymujemy:

$$\mu K V^2 \frac{\partial^2 \varphi(\xi)}{\partial \xi^2} = \frac{\partial^2 \varphi(\xi)}{\partial \xi^2}.$$

Ażeby równaniu temu zadość czyniły wszelkie wartości ξ , powinna zachodzić równość $\mu K V^2 = 1$, czyli

$$V = \frac{1}{\sqrt{\mu K}} \dots \dots \dots (15)$$

Rozważając zupełnie podobnie i założywszy

$$M = \psi(z - Vt), \dots \dots \dots (16)$$

otrzymamy z drugiego równania układu (XIII) również, że stała V wyraża się wzorem (15).

Łatwo określić znaczenie fizyczne stałej V . Przedstawmy sobie początek układu spórzędnych umieszczony na osi ZZ , w odległości z_0 poza wibratorem, wtenczas dla wibratora w chwili $t = 0$ jest:

$$E_0 = \varphi(z_0) \dots \dots \dots (a)$$

By znaleźć na promieniu drugi punkt, dla którego zakłócenie elektryczne posiadałoby tę samą wartość E_0 , jaką posiada na wibratorze w chwili $t = 0$, należy założyć:

$$E_0 = \varphi(z_0 + z_1 - Vt) \dots \dots \dots (b)$$

gdzie z_1 oznacza odległość tego punktu od wibratora.

Z porównania wzorów (a) i (b) wynika:

$$\varphi(z_0) = \varphi(z_0 + z_1 - Vt),$$

$$z_1 = Vt, \text{ czyli } V = \frac{z_1}{t},$$

t. j. zakłócenie będzie posiadało tę samą wartość, jak na wibratorze w chwili $t = 0$, we wszystkich punktach promienia, odległych od wibratora o Vt . Tym sposobem pewna określona wartość zakłócenia elektrycznego przenosi się wzdłuż promienia z prędkością V , wyznaczoną przez (15). Oczywiście, że towarzyszące elektrycznemu zakłóceniu magnetyczne posuwa się z taką samą prędkością V , która jest wogóle prędkością przebiegania promienia elektromagnetycznego.

Wyrażenie (15) daje nam bezpośrednio wartość liczebną tej prędkości. Okazuje się, że prędkość ta dla każdego ośrodka jest odwrotnie proporcjonalna do pierwiastka kwadratowego z iloczynu przenikliwości magnetycznej ośrodka przez jego współczynnik dielektryczny (stałą dielektryczną). Z teorii pomiarów elektrycznych wiadomo, że w układzie elektromagnetycznym jednostek, w którym właśnie prowadziliśmy nasze rozważania (twierdzenie o tem, że praca zużywana na przesunięcie bieguna, naokoło linii prądu o sile i , wynosi $4\pi i$, stosowaliśmy przy wyrażeniu i w jednostkach elektromagnetycznych), μ jest liczbą oderwaną. Współczynnik dielektryczny K , w układzie elektrostatycznym jednostek jest również liczbą oderwaną, lecz w układzie elektromagnetycznym, który znajduje zastosowanie w naszych równaniach, wymiar współczynnika dielektrycznego jest $L^{-2} T^2$, czyli, jest on wymiarem odwrotnym do wymiaru kwadratu prędkości. Z drugiej zaś strony wiemy również, że stosunek wymiaru ładunku elektrycznego w układzie elektrostatycznym jednostek do wymiaru tegoż ładunku w układzie elektromagnetycznym równa się pierwszej potędze tej samej prędkości. Innymi słowy, jeżeli zmierzymy jeden i ten sam ładunek najpierw w układzie elektrostatycznym, np. na zasadzie wzajemnych przyciągań i odpychań za pomocą elektrometru, później drogą elektromagnetyczną, wyładowując go np. przez galwanometr balistyczny, to otrzymamy dwie liczby (w razie zachowania tych samych jednostek długości, czasu i masy), których iloraz przedstawia liczbę, wyobrażającą z jednej strony stosunek tych wielkości w elektromagnetycznym i elektrostatycznym układzie jednostek, z drugiej zaś strony pewną prędkość, wyrażoną w tych samych jednostkach długości i czasu.

Bezpośrednie doświadczenie wykazało, że stosunek ten $v = 3 \cdot 10^{10}$ centymetrów na sekundę.

Na mocy powyższego, jeżeli posiadamy liczbę K , wyznaczoną na drodze elektrostatycznej, to dla otrzymania rezultatu liczebnego w układzie elektromagnetycznym należy przyjąć $\frac{K}{v^2}$.

Wiadomo, że dla powietrza przyjmujemy przenikliwość magnetyczną μ , równą jedności w układzie elektromagnetycznym; dla powietrza też współczynnik dielektryczny w układzie elektrostatycznym równa się jedności, a więc w układzie elektromagnetycznym wyniesie on

$$\frac{1}{v^2} = \frac{1}{9 \cdot 10^{20}}.$$

Z tego to względu, podstawiając $\mu = 1$ i $K = \frac{1}{v^2}$, otrzymamy prędkość rozchodzenia się zakłóceń elektromagnetycznych w powietrzu:

$$V = \frac{1}{\sqrt{\mu K}} = v \dots \dots \dots (17)$$

t. j. prędkość rozchodzenia się zakłóceń elektromagnetycznych w powietrzu wynosi $3 \cdot 10^{10}$ centymetrów na sekundę czyli, mniej więcej równa się 300 000 kilometrom na sekundę, t. j. równa się prędkości światła. Zauważmy, że przytoczony rezultat został otrzymany wyłącznie drogą elektryczną zapomocą porównania wartości, otrzymanych dla wielkości ładunku na drodze elektrostatycznej i elektromagnetycznej.

Ścisła zgodność tych dwóch liczb: prędkości światła i rozchodzenia się zakłóceń elektromagnetycznych przekonywa nas o tożsamości tych zjawisk. Przypuszczenie to znajduje potwierdzenie swe w całym szeregu innych faktów.

§ 18. Fale elektromagnetyczne, odbicie, załamania, drgania stojące.

Aby dokładniej przedstawić sobie procesy fizyczne, zachodzące w promieniu świetlnym elektromagnetycznym, można się uciec do pewnych analogij mechanicznych. W poglądach swych pierwotnych na istotę światła Fresnel przypuszczał, że cząsteczki eteru wzdłuż promienia świetlnego drgają w płaszczyźnie poprzecznej względem kierunku promienia i przyjmował nadto, że cząsteczki drgające pociągają za sobą inne sąsiednie, zmuszając je również do drgań podobnych. Jeżeli T oznacza trwanie całkowitego wahania cząsteczki eteru około położenia równowagi na promieniu, to odległość, na którą w tymże czasie przesunęły się drgania wzdłuż promienia, będzie przedstawiała długość fali świetlnej λ . Jeżeli V jest prędkość rozchodzenia się światła, to $\frac{\lambda}{T} = V$, czyli $\lambda = VT$. Z drugiej zaś strony, oczywiście, położenie dowolnej

cząsteczki eteru względem jej położenia równowagi może być wyrażone przez wzór ¹⁾

$$y = y_0 \sin \left(\frac{z}{\lambda} - \frac{t}{T} \right) 2\pi, \dots \dots \dots (18)$$

gdzie y jest odległość drgającej cząsteczki, liczona od punktu jej równowagi na promieniu w kierunku prostopadłym do niego, z odległość cząsteczki wzdłuż promienia od ośrodka rozchodzenia się falowania świetlnego (t. j. od ciała świecącego), wreszcie T i λ trwanie jednego wahanja i długość fali świetlnej. Oczywiście, że np. przy $t = 0$, odchylenie zależy tylko od położenia cząsteczki względem punktu pobudzenia (t. j. ośrodka rozchodzenia się fal) czyli od z , i równa się zeru dla wszystkich cząsteczek, dla których zachodzi stosunek $\frac{z}{\lambda} = k$, gdzie k jest dowolna

liczba całkowita. Oczywiście także, że wszystkie te punkty będą węzłami fali. We wszystkich zaś punktach, dla których $\frac{z}{\lambda} = k + \frac{1}{2}$, wiel-

kość y przybiera wartości największe.

Wniosek, jaki konsekwentnie należy postawić z wyników poprzedzających §§, prowadzi nas do tego, iż istotą światła nie są drgania eteru sprężystego według praw teorii sprężystości, jak przypuszczano dawniej, lecz że zjawiska świetlne polegają na rozchodzeniu się pownych zakłóceń elektrycznych i magnetycznych. Chcąc ułatwić sobie uzmysłowienie mechanizmu tych zakłóceń, rozważymy falę płaską, rozchodzącą się promieniście od wibratora prostoliniowego, i założmy, że wibrator ten (np. gdy nim będzie wyładowywacz cewki Ruhmkorfa lub butelki lejdejskiej) służy za siedlisko peryodycznego zakłócenia elektrycznego (peryodycznej siły elektromotorycznej), wywołującego w wibratorze prąd peryodyczny. Wtedy w płaszczyźnie prostopadłej do wibratora, w której leży rozważany promień, roztacza się pole magnetyczne o liniach sił w postaci kół współśrodkowych. Jeżeli będziemy rozpatrywali dowolną z tych linii w miejscu skrzyżowania się z promieniem, to zauważymy, że jest ona prostopadła do promienia i do płaszczyzny, poprowadzonej przez promień i przez wibrator, t. j. przez kierunek roz-

^{*)} Patrz między innymi w naszej pracy: „O metodach określenia długości fal światła“, nagrodzoną medalem złotym przez Uniwersytet Warszawski.

chodzenia się zakłóceń i przez przebieg zakłócenia elektrycznego. Pewne założenia hypotetyczne pozwalają przypuścić, że eter w polu magnetycznem znajduje się w stanie ruchów wirowych, których osiami są linie sił magnetycznych. Na tej podstawie można wytworzyć przypuszczalny obraz mechaniczny pola (model patrz rys. 13 str. 72). Wyobraźmy sobie, iż każda linia siły jest osią, na której osadzono szereg kół zębatach, obracających się około tejże osi, i że wytwarzanie wirów magnetycznych w przestrzeni t. j. rozchodzenie zakłóceń za pośrednictwem wirów zostało w modelu urzeczywistnione przez zaczepianie wzajemne szeregu kół zębatach wzdłuż promienia. Gdyby koła te nie obsuwały się (ślizgiwały) przy zaczepianiu o następujące, to zakłócenie rozeszłoby się w jednej chwili. Wytworzenie prądu w wibratorze wywołuje, że tak powiemy, „pierwszą“ linię siły, okalającą wibrator, ta zaś przez pośrednictwo wirów (kół zębatach w naszym modelu) wywołuje ruchy obrotowe na całym obszarze pola.

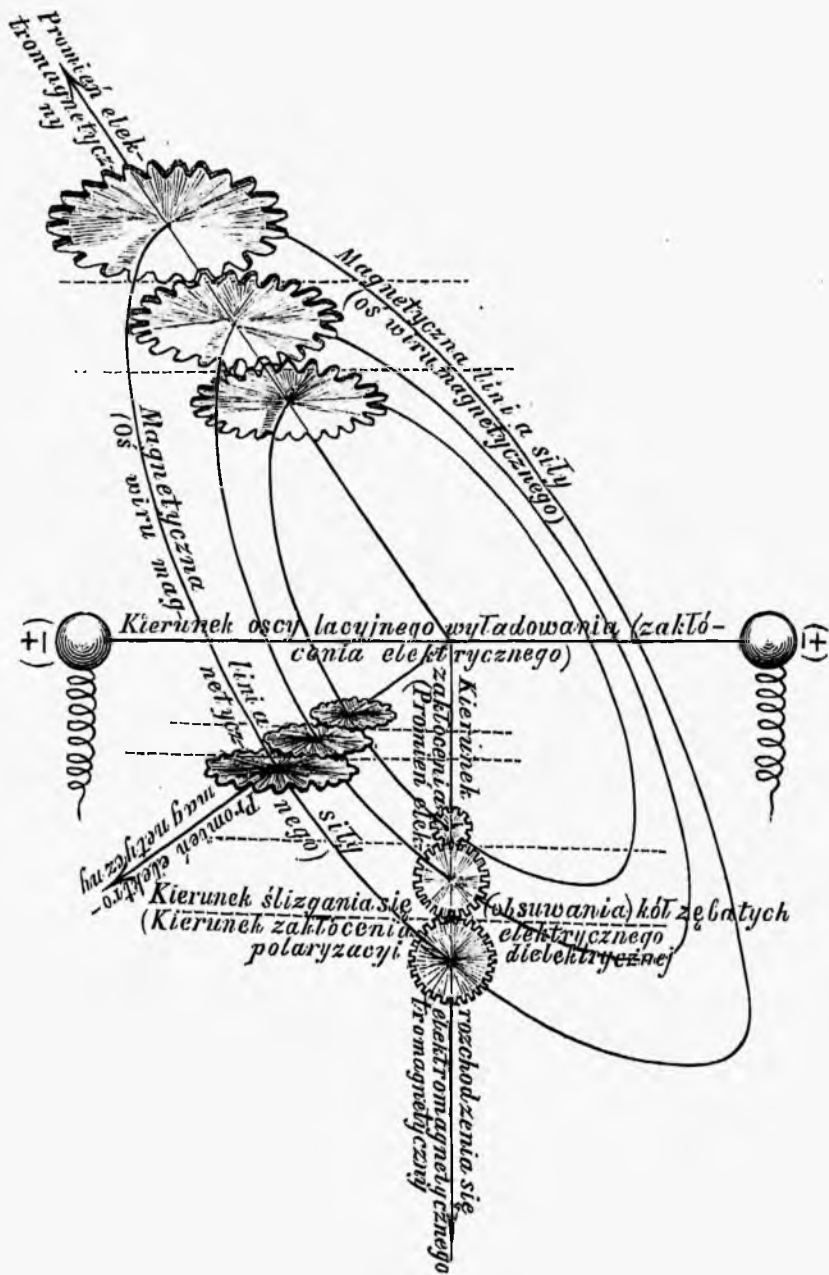
Ponieważ podana wyżej teoria wykazuje, że przenoszenie tych ruchów nie odbywa się w jednej chwili, lecz wymaga pewnego czasu, to należy przypuścić, że w modelu koła obsuwają się (ślizgają się) w pewnej mierze przy zaczepianiu następujących po sobie. To ślizganie się kół, oczywiście, będzie miało miejsce wzdłuż obwodu i będzie prostopadłe do osi kół, (t. j. do linii sił magnetycznych) i do promienia (t. j. do kierunku przebiegania zakłóceń). Kierunek tego ślizgania wskaże nam przebieg (w przestrzeni) zakłócenia elektrycznego i dielektrycznego przesunięcia (polaryzacyi) w dielektryku. Tym sposobem kierunki zakłócenia magnetycznego jak i elektrycznego są wzajemnie prostopadłe i znajdują się w płaszczyźnie prostopadłej do promienia. Cały proces zachodzi więc tak, jak gdyby najpierw zakłócenie elektryczne wywoływało magnetyczne, to zaś elektryczne i t. d. Oczywiście całkę (14) można przedstawić pod postacią (18). Długością fali w rozważanym przypadku będzie ta odległość λ , na której w naszym modelu będą wprowadzone w obrót koła zębata wzdłuż promienia (t. j. odległość, na którą przesunie się zakłócenie magnetyczne, a razem z niem i elektryczne), w tym czasie, gdy zakłócenie pierwotne elektryczne w wibratorze zakończy całkowity swój okres T . Ze względu na to, że:

$$\frac{\lambda}{V} = T, \dots \dots \dots (19)$$

mamy:

$$E = \varphi \left(z - \frac{\lambda}{T} t \right) \dots \dots \dots (20)$$

Rys. 13.



czyli

$$E = \varphi \left[\lambda \left(\frac{z}{\lambda} - \frac{t}{T} \right) \right] \dots \dots \dots (20')$$

Mnożąc argument funkcji przez wielkość stałą $\frac{2\pi}{\lambda}$, nie zmienimy przez to warunków, przy których funkcya (20') czyni zadość równaniu, którego jest całką. Dlatego też:

$$E = \varphi \left[2\pi \left(\frac{z}{\lambda} - \frac{t}{T} \right) \right].$$

Jeżeli założymy, że przy $z = 0$ (t. j. na wibratorze) zakłócenie elektryczne zmienia się według prawa:

$$E = E_0 \sin 2\pi \frac{t}{T}, \dots \dots \dots (21)$$

otrzymamy wyrażenie prawa rozchodzenia się zakłócenia tego wzdłuż promienia:

$$E = E_0 \sin \left[2\pi \left\{ \frac{z}{\lambda} - \frac{t}{T} \right\} \right] \dots \dots \dots (22)$$

Łatwo zauważyć, że wyrażenie (22) czyni zadość drugiemu równaniu różniczkowemu układu (XII), a więc jest jego całką. Przytem E_0 oczywiście wyraża największą wartość siły elektromotorycznej w wibratorze, t. j. przy $z = 0$ i przy $t = \frac{T}{4}$. Pierwsze równanie układu (XII) daje możność wyznaczenia funkcji M :

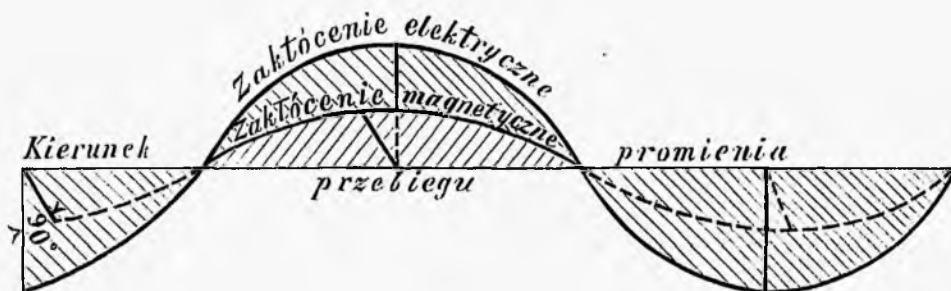
$$\begin{aligned} -\frac{\partial M}{\partial z} &= K \frac{\partial E}{\partial t}, \\ \frac{\partial E}{\partial t} &= -E_0 \cdot \frac{2\pi}{T} \cos \left[2\pi \left(\frac{z}{\lambda} - \frac{t}{T} \right) \right], \\ M &= E_0 K \cdot \frac{2\pi}{T} \int \cos \left[2\pi \left(\frac{z}{\lambda} - \frac{t}{T} \right) \right] dz \\ &= \frac{E_0 K \lambda}{T} \sin \left[2\pi \left(\frac{z}{\lambda} - \frac{t}{T} \right) \right] = M_0 \sin \left[2\pi \left(\frac{z}{\lambda} - \frac{t}{T} \right) \right]. \dots (23) \end{aligned}$$

Z tego wynika że zakłócenia magnetyczne, posiadają tę samą fazę, co i elektryczne. Przy rozchodzeniu się światła siła tak elektryczna, jak i magnetyczna jednocześnie przybiera wartość, równającą się zeru, i jednocześnie dosięga maximum (Rys. 14).

Załamania światła i prędkość rozchodzenia zakłóceń elektromagnetycznych.

Wiemy z teorii światła, że współczynnik załamania światła, gdy ono przechodzi z jednego ośrodka do drugiego, równa się ilorazowi

Rys. 14.



z prędkości światła w tych dwóch ośrodkach. Według elektromagnetycznej teorii światła, prędkość rozchodzenia się światła w pewnym ośrodku wynosi $v_1 = \frac{1}{\sqrt{\mu_1 K_1}}$, a zatem współczynnik załamania między ośrodkami 1 i 2 wyraża się tak:

$$n_{12} = \sqrt{\frac{\mu_2 K_2}{\mu_1 K_1}}.$$

Dla ośrodków niemagnetycznych, dla których $\mu_1 = \mu_2 = 1$, jest:

$$n_{12}^2 = \frac{K_2}{K_1} \dots \dots \dots (24)$$

t. j. współczynnik załamania podniesiony do kwadratu równa się ilorazowi współczynników dielektrycznych danych ośrodków.

Doświadczenie bezpośrednio wykazuje, że dla bardzo wielu ciał, szczególnie dla gazów, prawo to potwierdza się najzupełniej.

Zauważone niezgodności z tem prawem mogą być wytłómaczone prawdopodobnie przez zależność współczynnika polaryzacji od liczby drgań; rezultaty doświadczenia, z których korzystamy dla sprawdzenia zależności (24), oparte są na wyznaczeniach elektrycznych z stosunkowo ograniczoną liczbą drgań; współczynnik zaś polaryzacji dielektrycznej dla liczby drgań, odpowiadających falom świetlnym, dotąd jeszcze nie może być wyznaczony drogą elektryczną.

Jeżeli rozważamy przechodzenie światła z powietrza do drugiego ośrodka, to ponieważ dla powietrza $K = 1$, przeto, posługując się wzorem (24), otrzymamy:

$$n = \sqrt{K} \dots \dots \dots (25)$$

t. j. współczynnik załamania wyraża się przez pierwiastek drugiej potęgi ze współczynnika dielektrycznego.

Rezonatory elektryczne, odbicie fal, drgania stojące (fale spiętrzone). Ponieważ rozchodzenie się zakłóceń elektromagnetycznych związane jest z powstawaniem w różnych miejscach przestrzeni zakłóceń czysto elektrycznych, przeto, ustawiając na drodze promienia przewodniki prostopadłe do niego, powinniśmy w nich otrzymać prąd; doświadczenie wykazuje, że zjawisko to szczególnie wyraźnie daje się zauważyć, gdy długość wprowadzonego przewodnika wynosi mniej więcej połowę długości fali ¹⁾.

Prócz tego doświadczenie wykazuje, iż podobny „rezonans“ elektryczny uwidacznia się najwyraźniej wtedy, gdy rezonator postawimy równoległe do wibratora, i zanika prawie zupełnie w położeniu rezonatora, prostopadłym do poprzedniego: t. j. w fali płaskiej zakłócenia elektryczne są spolaryzowane w płaszczyźnie, poprowadzonej przez wibrator i promień. Stąd wynika również, że i zakłócenia magnetyczne są spolaryzowane w płaszczyźnie, prostopadłej do poprzedzającej.

Jeżeli szczegółowo zbadamy zjawisko rezonansu elektrycznego, to okazało się, iż przewodniki, tworzące rezonatory, wchłaniają w siebie energię zakłócenia elektromagnetycznego: jeżeli promień spotyka szereg równoległych prętów metalowych, prostopadłych do promienia, i róż-

¹⁾ W ostatnich czasach jako najlepszy „rezonator“, wykrywający zakłócenia elektromagnetyczne, służy koherer, używany w telegrafii bez drutu. Jak wykazał Branly ok. 1890 r. opilki pewnych metali, nie przewodzące prądu w zwykłych warunkach, stają się jednakowoż przewodnikami pod wpływem fal elektromagnetycznych. Rurka szklana, w której znajdują się podobne opilki, staje się przewodnikiem i zamyka prąd miejscowej baterii elektrycznej, gdy znajduje się w pętlicy fali elektromagnetycznej i przerywa prąd, będąc pomieszczoną w którymkolwiek z węzłów. Jeżeli zaś mamy do czynienia z falami nie stojącymi, lecz rozbieżnymi, nie tworzącymi zatem węzłów i pętlic, działanie falowania na koherer jest ciągłe, póki trwa falowanie, gdyż stale przez dany punkt przestrzeni (t. j. w danym przypadku przez koherer) przechodzą węzły i pętlice (maxima i minima) fali.

wnoległych do wibratora, to promień taki przez owe pręty już przejść nie może i energia jego będzie pochłonięta przez ową siatkę. Wynika to właściwie z zasadniczych równań różniczkowych (I), jeżeli przypuścimy, że σ nie równa się nieskończoności, t. j. że promień na drodze swej spotyka przewodnik; natenczas energia promienia rozprusza się w przewodniku. Stąd wypływa także, że zakłócenie elektromagnetyczne, a więc i światło jest w stanie rozchodzić się bez częściowego pochłaniania tylko w doskonałych izolatorach, co potwierdza się w rzeczywistości: ciała przezroczyste są dobrymi izolatorami (gazy, szkło); najlepsze przewodniki t. j. metale są nieprzezroczyste i światło przechodzi przez te ostatnie tylko wtedy, gdy one tworzą bardzo cionkie błony, t. j. jeżeli są w stanie pochłonąć zaledwie małą cząstkę energii elektromagnetycznej pod postacią prądu elektrycznego.

Jeżeli podobną siatkę przewodników równoległych obrócimy prostopadle do kierunku zakłócenia elektrycznego, wtenczas promień będzie przechodził zupełnie swobodnie. Pochłaniając atoli energię promienia, siatka metalowa, równoległa do zakłócenia elektrycznego, posiada własność odbijania fal elektromagnetycznych. Drogą doświadczalną dało się sprawdzić, że odbijanie takie zachodzi ściśle według praw optyki, t. j. że promień pierwotny i odbity znajdują się w jednej płaszczyźnie z linią prostopadłą do powierzchni odbijającej i że kąt padania równa się kątowi odbicia. Jeszcze łatwiej daje się zauważyć odbicie promieni elektromagnetycznych od ścianki metalowej, którą możemy sobie przedstawić jako siatkę odbijającą. Natenczas, podobnie jak i w każdej odbitej fali, powstają w fali elektromagnetycznej pętlice i węzły; odległość między sąsiednimi węzłami przedstawia połowę długości fali. Badając przestrzeń, w której powstają spiętrzone fale elektromagnetyczne (drżania stojące), za pomocą np. rezonatora, nie zauważymy w węzłach żadnego stanu elektrycznego, przez co będą określone ich położenia, a zatem i odległość między węzłami. Jeżeli wiadoma jest liczba zmian prądu w wibratorze, którą daje nam wyrażenie (12) rozdz. II-go (str. 36)

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi \sqrt{LC}},$$

gdzie L jest współczynnikiem samoindukcyi, C pojemnością wibratora, to ze związku $\frac{\lambda}{T} = V$, gdzie λ jest podwójna odległość między węzłami, może być bezpośrednio wyznaczona prędkość rozchodzenia się zakłóceń elektromagnetycznych. Doświadczenia takie były dokonane przez Her-

ta i innych badaczy, przytem długość fali udało się otrzymać mniejszą niż metr. Doświadczenia te wykazały, że prędkość ta ściśle zgadza się z prędkością światła.

Łatwo zauważyć, że dla otrzymania długości fali, wynoszącej 1 metr, trzeba, by w wibratorze prąd zmieniał się $\frac{v}{\lambda} = 3 \cdot 10^8$ razy, t. j. 300 milionów razy na sekundę; lecz nawet wówczas fale te będą znacznie większe od świetlnych. Np. długość fali światła żółtego wynosi $\frac{1}{1700}$ mm., dla otrzymania fali tej długości należałoby w wibratorze zmieniać prąd 1,7 miliona razy częściej, niż dla fali 1-metrowej, natenczas wibrator powinien wytwarzać światło żółte.

Jednakże takie experimentum crucis teorii elektromagnetycznej dotąd nie było możliwe, z tego powodu, że za pomocą istniejących przyrządów wytwarzanie tak częstych zmian prądu jest niemożliwe, chociaż w znaczeniu technicznym byłby to najdoskonalszy sposób otrzymywania światła bez żadnych strat na promienie cieplne i chemiczne. Atoli Rubens i Nichols wykonali inne doświadczenie, które ze względu na swe znaczenie nie ustępuje poprzedniemu i które ostatecznie przeważa szalę na korzyść teorii elektromagnetycznej. Badaczom tym udało się otrzymać spolaryzowane fale cieplne bardzo wielkiej długości (około $\frac{1}{500}$ mil.). Jeżeli promienie te padają na t. zw. siatkę dyfrakcyjną, utworzoną przez wyznaczenie za pomocą maszyny dzielniczej szeregu kresek równoległych na płycie srebrnej, których wzajemne odległości wynoszą około połowy długości fali, to odbicie ma miejsce przeważnie wtedy, gdy kierunek kresek jest równoległy do składowej elektrycznej zakłócenia elektromagnetycznego (t. j. do kierunku ślizgania się kół w naszym modelu mechanicznym). Jeżeli kierunek kresek obrócić na 90° , odbicie będzie znacznie słabsze.

Podobne doświadczenie z falami elektromagnetycznymi wykonali Aschkinas i Garbasso. Rama drewniana z naciągniętymi drutami, tworzącymi siatkę, odbijała promienie najsilniej, gdy kierunek drutów był równoległy do przebiegu zakłóceń elektrycznych.

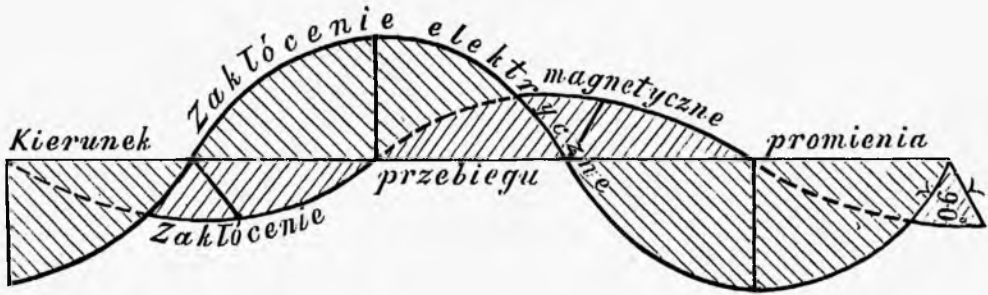
W ten sposób promieniowanie cieplne i świetlne posiadają te same własności, co i elektromagnetyczne. Składowa elektryczna drgań jest prostopadła do płaszczyzny polaryzacji.

Nie przytaczając tu dalszych wyników teorii elektromagnetycznej co do np. skręcania polaryzacji w polu magnetycznym, zjawiska Zeemana i innych, dodamy jeszcze tylko, że w odbitej fali elektromagnetycznej składowa magnetyczna nie posiada tej samej fazy co i elek-

tryczna, jak to ma miejsce przy zwykłym promieniowaniu; lecz wskutek odbicia zachodzi strata połowy długości fali względem węzłów magnetycznych (Rys. 15).

Zauważymy jeszcze, że, według obliczeń fizyków angielskich, siła elektryczna prostopadła do promienia słonecznego wynosi około 10 volt

Rys. 15.



(maximum) na centymetr bieżący, a maximum składowej magnetycznej stanowi około $\frac{1}{5}$ składowej poziomej magnetyzmu ziemskiego w naszych okolicach. Podstawę tego obliczenia podamy w § następnym.

§ 19. Drogi rozchodzenia się energii elektrycznej. Teoria Poyntinga. Wyznaczenie liczbowych wartości sił elektrycznych i magnetycznych w promieniu świetlnym słonecznym. Ciśnienie światła. Komety.

W § 7 niniejszej pracy przekonaliśmy się, że prędkość rozchodzenia się fal elektrycznych w przewodniku, posiadającym pojemność, zależy od wartości tej pojemności. Przytoczone w nocie na str. 32 ogólne równanie rozchodzenia się zakłóceń elektrycznych pokazuje, że owa prędkość powinna także zależeć od współczynnika samoindukcyi. Z drugiej zaś strony, każdy drut posiada współczynnik samoindukcyi, którego wartość zależy od materiału drutu i jest kilkaset razy większa dla drutu żelaznego, podlegającego namagnesowywaniu przez prąd, niż dla drutu miedzianego, dla którego współczynnik namagnesowania jest jednością. Należałoby się tedy spodziewać, że prędkość rozchodzenia się zakłóceń elektrycznych w drucie żelaznym i miedzianym powinna być znacznie różna. Tymczasem Hertz w Karlsruhe, badając ten przedmiot doświadczalnie dla prądów o nadzwyczaj wielkiej liczbie wahań, wywołanych przez wyładowania oscylacyjne, przekonał się, że wartość prędkości jest jednakowa w obu przypadkach. To zjawisko doprowadza do

wniosku i pozwala przypuszczać, że jądro poprzecznego przecięcia drutów mało lub wcale nie bierze udziału w przebiegu zakłóceń i że rozchodzenie się ich w przewodniku jest rezultatem oddziaływania okalającego drut izolatora na powierzchnię zewnętrzną drutu. Tym sposobem powierzchnia przewodnika służy jak gdyby do rozpraszania energii potencjalnej, znajdującej się w otaczającym izolatorze. Zgodnie z tem założeniem, przeprowadziliśmy w § 13, na podstawie równań Maxwella obliczenie grubości odpowiedniej warstwy przewodniczącej dla przewodników liniowych.

Wniosek o udziale wyłącznym izolującego ośrodka w przebiegu wysiłków elektrycznych — obecnie jak widzieliśmy potwierdzony doświadczalnie — był postawiony pierwotnie przez Poyntinga jeszcze w r. 1885 ¹⁾ drogą czysto teoretyczną. Teoria Poyntinga wskazuje nam drogę, po której w ośrodku rozbiega się energia elektryczna.

Jeżeli wyobrazimy sobie przewodnik prostoliniowy, po którym przechodzi prąd J , i jeżeli spadek potencjału na jednostkę długości przewodnika będzie E , to wydatek energii konieczny na podtrzymanie prądu jest EJ , a na długości L przewodnika jest EJL .

Z drugiej zaś strony nie trudno wyznaczyć siłę magnetyczną na powierzchni przewodnika M . Jeżeli promień przewodnika będzie r , to praca, jaką wykonać należy, by okrążyć przewodnik wzdłuż jego powierzchni zewnętrznej jednostkowym biegunem magnetycznym, będzie $2\pi r \cdot M$. Lecz ta praca, na podstawie zasadniczych praw elektromagnetyzmu (Rozdz. III, str. 40), będzie także $4\pi \cdot J$. A więc:

$$2\pi r \cdot M = 4\pi J,$$

i stąd:

$$M = \frac{2J}{r} \dots \dots \dots (26)$$

Wyrażenie energii prądu będzie przeto następujące:

$$EJL = \frac{1}{2} E \cdot M \cdot r \cdot L \dots \dots \dots (27)$$

Ponieważ, jakżeśmy widzieli, energia wstępuje do przewodnika z zewnątrz, zatem kierunek rozchodzenia się energii będzie normalny do powierzchni przewodnika. Że zaś siła elektryczna ma kierunek równoległy do osi przewodnika, magnetyczna zaś styczna do powierzchni,

¹⁾ On the transfer of energy in the electromagnetic field (Philosophical Transactions, v. 175).

energia przebiega więc normalnie do płaszczyzny, przechodzącej przez kierunek siły elektrycznej i magnetycznej. Łatwo wywnioskować stąd, iż kierunek rozchodzenia się energii jest zgodny z kierunkiem rozchodzenia się zakłóceń; promień światła jest jednocześnie promieniem energii.

Wobec tego energia prądu (27), mogąc wejść do przewodnika tylko przez jego powłokę zewnętrzną, wstępuje doń przez powierzchnię $2\pi r \cdot L$. A zatem w jednostce czasu przez jednostkę poprzecznego przecięcia w promieniu energii przechodzi ilość pracy

$$\mathfrak{B} = \frac{\frac{1}{2}EM \cdot r \cdot L}{2\pi \cdot r \cdot L} = \frac{1}{4\pi} EM \dots \dots \dots (28)$$

Wyrażenie (28) jest najprostszym przedstawieniem wartości prądu energii. Jeżeli wartości E i M są zmienne, to zamiast wyrazu energii na jednostkę czasu będziemy uważali przyrost energii $d\mathfrak{B}$ na element czasu dt :

$$d\mathfrak{B} = \frac{1}{4\pi} EMdt \dots \dots \dots (28 \text{ bis})$$

Wnioski poprzedzające dają nam możność przeprowadzenia nadzwyczaj interesującego wyznaczenia wartości liczbowych E_0 i M_0 (wzory (22) i (23) poprzedzającego paragrafu), t. j. wielkości siły elektrycznej i magnetycznej w promieniu świetlnym słonecznym na powierzchni ziemi.

Podług (22) i (23) mieliśmy:

$$E = E_0 \sin \left[2\pi \left\{ \frac{z}{\lambda} - \frac{t}{T} \right\} \right],$$

$$M = M_0 \sin \left[2\pi \left\{ \frac{z}{\lambda} - \frac{t}{T} \right\} \right],$$

przyczem

$$M_0 = \frac{E_0 K \cdot \lambda}{T} \dots \dots \dots (a)$$

Jeżeli — co zakładamy — wartości E_0 i M_0 wyrażamy w mierze elektromagnetycznej, to, jak to już wyżej wskazano, stała dielektryczna K , równa jedności, np. dla powietrza i próżni w mierze elektrostatycznej, powinna być wyrażona również w mierze elektromagnetycznej. Mając zaś na widoku wymiar tej wielkości, otrzymamy, dla powietrza i próżni:

$$K = \frac{1}{v^2}$$

w mierze elektromagnetycznej, przyczem v równa się szybkości rozchodzenia się światła, t. j. 300 000 kilometrów na sekundę. Jeżeli cały rachunek przeprowadzimy w układzie centymetro-gramo-sekundowym miar, to oczywiście $v = 3 \cdot 10^{10}$ centymetrów na sekundę.

Na podstawie wzorów (28 bis), (22) i (23) ilość energii, przebiegająca przez jednostkę przecięcia poprzecznego wzdłuż promienia świetlnego idącego falą płaską, w ciągu czasu T , t. j. jednego wahanja, będzie:

$$\mathfrak{E}_T = \frac{1}{4\pi} E_0 M_0 \int_0^T \sin^2 \left[2\pi \left\{ \frac{z}{\lambda} - \frac{t}{T} \right\} \right] dt$$

Ponieważ całka w oznaczonych granicach równa się $\frac{1}{2}T$, więc

$$\mathfrak{E}_T = \frac{1}{8\pi} E_0 M_0 T \dots \dots \dots (29)$$

Dla M_0 , wobec (a) mamy dla powietrza i próżni, w mierze elektromagnetycznej:

$$M_0 = \frac{E_0 \lambda}{T \cdot v^2} \dots \dots \dots (30)$$

Podstawiając (30) w (29) mamy:

$$\mathfrak{E}_T = \frac{1}{8\pi} \frac{E_0^2 \lambda}{v^2} \dots \dots \dots (31)$$

Ponieważ w sekundę mamy $\frac{1}{T}$ zakłóceń, więc ilość energii, przebiegająca wzdłuż promienia w sekundę, będzie:

$$\mathfrak{E} = \frac{1}{T} \mathfrak{E}_T = \frac{1}{8\pi} \cdot \frac{E_0^2 \lambda}{T v^2} \dots \dots \dots (b)$$

Pamiętając, że

$$\frac{\lambda}{T} = v \dots \dots \dots (c)$$

mamy ostatecznie:

$$\mathfrak{E} = \frac{1}{8\pi} \cdot \frac{E_0^2}{v} \dots \dots \dots (32)$$

Aby z wzoru (32) otrzymać E_0 , musimy z doświadczenia bezpośredniego znać \mathfrak{E} , t. j. energię promieni słonecznych, przechodzącą przez centymetr kwadratowy przecięcia prostopadłego do promienia w sekundę. Doświadczenia takie — wyznaczenie siły promieniowania słońca na powierzchni ziemi, były czynione przez różnych obserwatorów od cza-

sów Pouilleta; dały one w przybliżeniu średnio rezultat, iż promieniowanie słońca rozwija energię cieplną około 3 gramo-kaloryj w ciągu jednej minuty na centymetr kwadratowy. Ponieważ jedna gramo-kalorya jest równoważna 0,424 kilogramometrom pracy, a kilogramometr¹⁾ $981\,000 \times 10^2$ ergom, czyli $981 \cdot 10^5$ ergom, zatem jedna gramo-kalorya jest równoważna $4,2 \cdot 10^7$ ergom. Wobec tego ilość energii słonecznej, padającej na ziemi na każdy kwadratowy centymetr powierzchni prostopadłej do promienia w ciągu jednej sekundy, będzie:

$$\mathfrak{B} = \frac{3 \cdot 4,2 \cdot 10^7}{60} = \infty 2 \cdot 10^6 \text{ ergów.}$$

Podstawiając otrzymany rezultat doświadczalny na \mathfrak{B} w równanie (32), mamy, wobec $v = 3 \cdot 10^{10}$,

$$E_0 = \sqrt{8\pi \cdot \mathfrak{B} \cdot v} = \sqrt{8\pi \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 3 \cdot 10^{10}} = \sqrt{48\pi \cdot 10^6} = \infty 12 \cdot 10^3$$

Rezultat ten jest wyrażony w układzie elektromagnetycznym centymetro-gramo-sekundowym. Aby otrzymać go w voltach, należy liczbę $12 \cdot 10^3$ podzielić przez 10^8 . Tym sposobem ostateczny wynik rachunku wskazuje, iż w promieniu słonecznym na powierzchni ziemi siła elektromotoryczna zakłócenia elektrycznego prostopadłego do kierunku promienia wynosi 12 voltów na centymetr długości. Jaka jest jednak całkowita siła elektromotoryczna, wywoływana przez określony promień słoneczny, zupełnie nie wiemy, gdyż nieznana jest przestrzena rozciągłość zakłócenia elektrycznego prostopadłe do promienia. Jeżeli dla tej rozciągłości przyjmiemy wartość hypotetyczną, przyjętą przez lorda Kelvina²⁾ dla amplitudy poprzecznych wahań eteru, w przypuszczeniu, że fale światła polegają na przesunięciach cząsteczek owego eteru, t. j.

$\frac{1}{100}$ długości fali światła, to np. dla żółtego światła, gdzie $\lambda = \infty \frac{1}{20000}$ centymetra, owa rozciągłość będzie $\frac{1}{2} \cdot 10^{-6}$ centymetra. Przy sile elektromotorycznej 12 volt na centymetr, otrzymamy całkowitą siłę elektromotoryczną zakłócenia $12 \times \frac{1}{2} \cdot 10^{-6} = 600$ mikrovoltów,

¹⁾ Waga kilograma równa się 981 000 dyn.

²⁾ Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, vol XXI, p. 60, i Cyclopedia Britannica VIII, 570.

wartość blizką sił elektromotorycznych dostarczanych przez termostosy. Pozostaje nam jeszcze obecnie wyznaczenie siły magnetycznej M_0 .

Na podstawie (30) mamy:

$$M_0 = \frac{E_0}{v}, \dots \dots \dots (33)$$

czyli

$$M_0 = \frac{12 \cdot 10^8}{3 \cdot 10^{10}} = 0,04,$$

w układzie elektromagnetycznym *CGS*. Ponieważ np. u nas siła magnetyzmu ziemskiego (składowa pozioma) wynosi około $0,2 \text{ CGS}^1$), okazuje się, iż w promieniu słonecznym na centymetr bieżący siła magnetyczna stanowi około piątej części siły magnetyzmu ziemskiego w naszym kraju.

Pozostaje nam obecnie zwrócić się jeszcze do rozpatrzenia jednego ciekawego zjawiska, do którego poznania doprowadziła elektromagnetyczna teoria światła. Promienie światła wywierają ciśnienie równoległe do swego kierunku; otrzymane teoretycznie nadzwyczaj nieznaczne wartości tego ciśnienia udało się stwierdzić doświadczalnie. Zjawisko ciśnienia, wywieranego przez promienie światła na powierzchnie oświetlane, może być z punktu widzenia fizycznego łatwo wytłómaczone w sposób następujący. Jak już poprzednio widzieliśmy, na podstawie elektromagnetycznej teorii światła, musimy sobie przedstawić, że w promieniu świetlnym bezustannie powstają zakłócenia elektryczne, prostopadłe do kierunku promienia z okresem zmienności, zależnym od zabarwienia światła. Jeżeli dla zbadania przypadku najprostszego przypuścimy, że płaska fala świetlna pada normalnie na metalową, a więc przewodniczącą powierzchnię, to zmienne prądy elektryczne w promieniu wywołają drogą zwykłej indukcji w płycie metalowej lub wogóle przewodniczącej prądy także zmienne, pochłaniające energię promienia. Wskutek tego przewodnik, jako ciało nieprzezroczyste, promienia dalej nie przepuści, lecz zato powierzchnia przewodnika będzie oświetlona, t. j. będzie wytwarzała fale odbite. Ale przytem pomiędzy zmiennymi prądami w promieniu i indukowanymi przez nie prądami w metalu oświetlonym zachodzą będą reakcje mechaniczne, zupełnie podobne do tych, które Elihu Thomson zauważył między cewką, po której zwojach przechodzi prąd zmienny, i przewodnikiem umieszczonym u jej biegunów, t. j. od py-

¹⁾ Patrz mapę magnetyczną Polski w naszych „Zasadach Elektrotechniki“

chaniu. Rzeczywiście prąd zmienny w przewodniku wywołuje w sąsiednim przewodniku prąd również zmienny, którego siła elektromotoryczna spóźnia się o 90° względem fazy siły prądu wzbudzającego ¹⁾. Z drugiej zaś strony siła prądu wzbudzonego spóźnia się względem swej siły elektromotorycznej o kąt φ , który, jak widzieliśmy w Rozdz. I-ym (wzór 9-ty), zależy od współczynnika samoindukcji i oporu danego obwodu. Jeżeli obwód stanowi bardzo dobry przewodnik i R prawie $= 0$, to $\varphi = 90^\circ$, t. j. prąd wzbudzony względem swej siły elektromotorycznej spóźnia się o 90° . Ponieważ ta ostatnia względem siły prądu wzbudzającego jest także o 90° spóźniona, spóźnienie zatem wypadkowe fazy siły prądu wzbudzonego względem wzbudzającego stanowi 180° , t. j. jeżeli tylko przewodnik, w którym powstaje prąd wzbudzony, ma dostatecznie mały opór ohmiczny, to w każdej chwili kierunek prądu wzbudzającego jest wprost przeciwny (faza różni się o 180°) kierunkowi prądu wzbudzonego. Że zaś na podstawie prawa elektrodynamiki prądy przeciwnego kierunku odpychają się, pomiędzy zatem prądem pierwotnym zmiennym i dobrym przewodnikiem, znajdującym się w pobliżu tegoż prądu, stwierdzić można odpychanie. Zjawisko to rzeczywiście zauważył Elihu Thomson.

Zupełnie to samo ma miejsce, gdy promień światła oświetla nieprzezroczystą powierzchnię przewodnika (jak wiadomo, zgodnie z wymogami teorii prawie wszystkie przewodniki są nieprzezroczyste). Płytką srebrną, oświetloną przez słońce, jest odpychana od słońca, na podstawie tej samej jak przewodnik w zjawisku Elihu Thomsona, ponieważ prądy zmienne promienia słonecznego wzbudzają w niej prądy odpychające prądy promienia.

Odpychanie to jednak jest bardzo nieznaczne. Teoretycznie można dowieść ²⁾, że równa się ono w dynach na kwadratowy centymetr powierzchni prostopadłej do promienia ilości energii świetlnej w ergach,

¹⁾ Rzeczywiście podług znanego prawa indukcji $\varepsilon = -\frac{dN}{dt}$, gdzie ε siła elektromotoryczna prądu wzbudzonego, a N liczba linii sił, towarzyszących prądowi wzbudzającemu. Jeżeli zatem np. prąd wzbudzający zmienia się podług prawa wstawy, to podobnemuż prawu podlega i zmiana wywołanych przez prąd linii sił, siła elektromotoryczna zaś prądu wzbudzonego, jako pochodna wielkości N , będzie się zmieniała podług prawa dostawy, a zatem faza jej spóźni się o 90° wobec fazy siły prądu wzbudzającego.

²⁾ Patrz między innymi H. Poincaré, *Electricité et Optique*, I. Les théories de Maxwell, Paryż 1890, str. 228 i nast.

zawartej w centymetrze sześciennym. Ponieważ na każdy centymetr powierzchni ziemi pada w sekundę, jak już wyżej widzieliśmy $2 \cdot 10^6$ ergów energii, więc w jednym centymetrze sześciennym ilość zawartej energii wynosi $\frac{2 \cdot 10^6}{3 \cdot 10^{10}}$ ergów $= 0,66 \cdot 10^{-4}$ ergom, a zatem ciśnienie na

centymetr kwadratowy wynosi $\frac{2}{3} \cdot 10^{-4}$ dyn. Pamiętając, iż 981 000 dyn stanowi wagę jednego kilograma, wnioskujemy, że wypadkowa ciśnienia promieni słonecznych na część powierzchni ziemi stanowi wagę jednego kilograma dopiero wtedy, gdy rozpatrywana część powierzchni wynosi ok. $\frac{3}{2} \cdot 10^{10}$ kwadratowych centymetrów, lub $1,5 \cdot 10^6$ kwadratowych metrów, czyli ok. $1\frac{1}{2}$ kilometra kwadratowego. Tym sposobem ziemia i wszystkie ciała niebieskie są przez słońce jednocześnie przyciągane na podstawie prawa Newtona i odpychane w niezmiernie małej mierze, zgodnie z elektromagnetyczną teorią światła. Jak już wspomnieliśmy, pomimo nadzwyczaj nieznacznej wielkości tego odpychania, zostało ono potwierdzone doświadczalnie przez Liebiediewa w Moskwie.

Odpychaniem elektromagnetycznym promieni słonecznych starano się objaśnić fakt astronomiczny, iż komety, zbliżając się ku słońcu, zmieniają konfigurację swego ogona zawsze w ten sposób, iż jest on odwrócony od słońca. Ponieważ masa ogona komet, a zatem i siła przyciągania go przez słońce jest nadzwyczaj nieznaczna, więc jest rzeczą bardzo możliwą, że odpychanie świetlne przewyższa tu przyciąganie masowe i odwraca warkocze komet od gwiazdy dziennej.

ROZDZIAŁ V

(dodatkowy).

Zarys teorii elektronów w zastosowaniu do objaśnienia zjawisk elektrycznych.

W zakończeniu naszej pracy nie możemy pominąć milczeniem i nie uczynić choćby pobieżnej wzmianki o nowych poglądach na istotę elektryczności, jak się one wyraziły w tak zwanej teorii elektronów. Ze względu na nowość przedmiotu, którego dziedziną, dzięki nieustającym badaniom, z każdym dniem wzrasta, ograniczymy wykład nasz w tem miejscu do najelementarniejszych wskazówek ¹⁾.

Faraday już zauważył, że przy elektrolizie pewna ilość elektryczności wydziela zawsze stałą, określoną ilość danego elektrolitu. Ten równoważnik elektrochemiczny został ściśle określony dla różnych pierwiastków; tak np. dla wydzielenia 1 gramu wodoru potrzeba 96 500 kulonów elektryczności. Ponieważ przypuszczamy, że w wannie elektrolitycznej każdy wydzielony z połączenia atom, „jon“, jest obarczony odpowiednim ładunkiem elektrycznym, przeto, znając liczbę atomów materii np. w 1 gramie wodoru, jesteśmy w stanie określić ładunek atomu, innemi słowy — „atom elektryczności“, który w ostatnich czasach powszechnie przyjęto nazywać „elektronem“.

Wielkość molekuł (cząsteczek), a w gazach atomów materii bywa określana różnemi drogami, które wszystkie jednakże dają dość zgodne

¹⁾ Literatura elektronów obecnie jest już nadzwyczaj bogata. Klasyczne prace J. J. Thomsona znajdzie czytelnik w *Philosophical Magazine*, Kaufmanna i Nernsta w „*Physikalische Zeitschrift*“. Z więcej popularnych dzieł można wskazać na Mie: *Die neueren Forschungen über Ionen und Electronen*; Hofmanna: *Die radioactiven Stoffe* i wiele innych. Patrz także prace Crookesa, Lodge'a i in. W języku polskim w pracy pani Curie-Skłodowskiej, o ciałach radioaktywnych mamy także krótki wykład teorii elektronów. Objasnienie własności bezwładności materii na podstawie elektronów w dziele J. J. Thomsona, *Electricity and Matter*, 1904.

wyniki; możemy przyjąć, że w gramie wodoru znajduje się około $0,6 \cdot 10^{24}$ atomów. Ze względu na to najmniejsza ilość elektryczności, która może istnieć swobodnie — ładunek atomu wodoru wyniesie $\frac{96500}{0,6 \cdot 10^{24}}$ kulonów, czyli mniej więcej $16 \cdot 10^{-20}$ kulonów. Liczba ta właśnie wyraża wielkość elektronu.

Z drugiej zaś strony badanie zjawiska wyładowania elektrycznego przez bardzo rozrzedzone gazy, przez tak zw. próżnię Crookesa wykazało, że ona w tych warunkach staje się siedliskiem promieniowania prostoliniowego zupełnie specjalnych własności.

Promieniowanie to jest prostopadle do powierzchni ujemnego elektrodu (katodu); prócz tego posiada ono wszystkie cechy prądu prostoliniowego, złożonego z cząsteczek, posiadających masę materjalną fizyczną i naładowanych elektrycznością ujemną.

Takie własności promieni katodalnych zostały wykazane drogą doświadczenia. Można przekonać się, iż a) promienie katodalne wprowadzają w ruch i ogrzewają przegrody ruchome, spotykane na swej drodze, t. j. same posiadają pewną masę, b) obarczone są pewnym ujemnym ładunkiem elektrycznym, ponieważ: aa) promień katodálny przez dodatni elektrod (anod) bywa przyciągany, przez ujemny zaś odpychany, bb) pole magnetyczne, jeżeli w niem umieścimy promień katodálny, stara się okręcić go wokół linii sił, jak tego wymaga prawo Laplace'a dla przewodnika ruchomego, przez który przechodzi prąd w kierunku od katodu ku anodowi; i nareszcie cc) można bezpośrednio zebrać ładunek, niesiony przez promień katodálny, i zmierzyć go na elektrometrze. Na podstawie wszystkich tych danych zjawisko promienia katodálnego najzupełniej odpowiada przenoszeniu jonów w elektrolitach.

Wyszczególnione wyżej zjawiska pozwalają nam zmierzyć zarówno prędkość poruszania się owych naładowanych cząsteczek (elektronów), jak i mas ich.

Oznaczmy przez μ masę najdrobniejszych cząsteczek, unoszących ładunki w promieniu katodálnym (poniżej przekonamy się, iż są one znacznie mniejsze od atomu materji), przez ϵ ładunek elektryczny cząsteczki. Jeżeli ustawimy na drodze promienia katodálnego jakąkolwiek przegrodę, np.: błonę materjalną, to, jak zaznaczono wyżej, błona ta na skutek uderzenia w nią promieni będzie się ogrzewała. Jeżeli przez pewien odstęp czasu promienie katodálne swemi uderzeniami udzieliły błonie Q jednostek ciepła, to, mając na uwadze, iż ciepło powstaje kosz-

tem siły żywej uderzających cząsteczek, i przypuszczając że w określonym czasie w przegrodę uderzyło N cząsteczek, biegnących z prędkością V , mieć będziemy ¹⁾):

$$Q = N \cdot \frac{1}{2} \mu V^2 \dots \dots \dots (a)$$

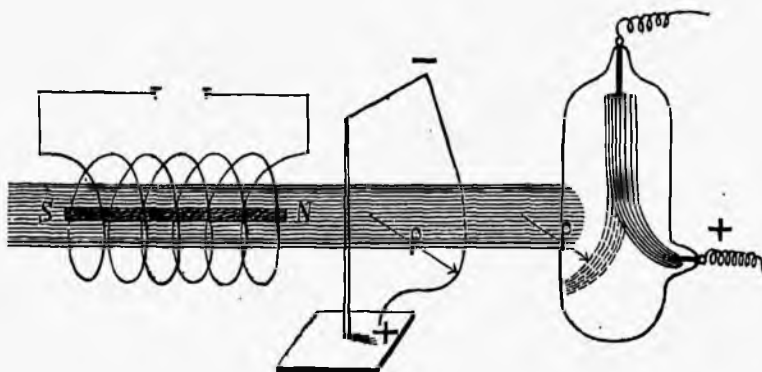
Z drugiej zaś strony, jeżeli zmierzmy ładunek, udzielony przez czas określony błonie od uderzających promieni i oznaczymy go przez E , przyczem $E = Ne$, natenczas będzie:

$$\frac{Q}{E} = \frac{1}{2} \frac{\mu}{e} \cdot V^2 \dots \dots \dots (b)$$

W wyrażeniu tem można wyznaczyć lewą stronę z bezpośredniego doświadczenia, pozostaje niewiadomym na stronie prawej iloczyn z $\frac{\mu}{e}$ przez V^2 .

Drugą zależność między temiż wielkościami może dać następujące doświadczenie, polegające na zmianie kierunku promienia w polu magnetycznym. Jak zaznaczono wyżej, promień wygina się łukiem koła, otaczającego linie sił (rys. 16). Gdybyśmy zamiast promienia rozważali

Rys. 16.



przewodnik giętki, zawieszony pionowo, przez który przechodzi prąd o sile i , to w jednostajnym polu magnetycznym, o natężeniu poziomem H , przewodnik ten również wygiąłby się w kształcie łuku koła; przytem

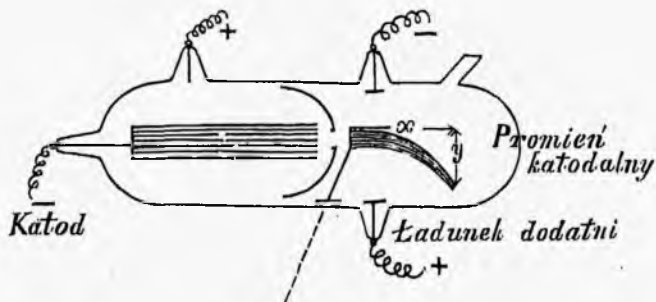
¹⁾ Oczywiście, że lewą część równania (a) należy uważać jako iloczyn jednostek ciepła przez mechaniczny równoważnik ciepła.

siła zginająca działałaby w każdym elemencie przewodnika prostopadle do płaszczyzny, poprowadzonej przez element i kierunek pola, t. j. ku środkowi krzywizny i równałaby się Hi . Jeżeli proces fizyczny powstawania prądu w przewodniku przedstawić sobie jako przenoszenie ładunków ϵ z prędkością V , t. j. założyć $i = V\epsilon$, to w każdym pojedynczym elemencie wygiętego promienia katodального działa w kierunku środka krzywizny siła $HV\epsilon$. Siła ta, gdy przypiszemy cząsteczkom katodalnym istotę materialną, równoważy się z siłą odśrodkową równą i wprost przeciwną sile $HV\epsilon$ i wyrażającą się przez $\frac{\mu V^2}{\rho}$, gdzie ρ jest promień krzywizny. Z porównania tych dwóch wielkości otrzymamy:

$$H\rho = \frac{\mu}{\epsilon} V \dots \dots \dots (c)$$

W równaniu (c) wielkości H i ρ można zmierzyć bezpośrednio ¹⁾, a dlatego z dwóch równań (b) i (c) można wyznaczyć wartości na $\frac{\mu}{\epsilon}$ i V .

Rys. 17.



Promień katodálny zgina się nie tylko w polu magnetycznem lecz i w elektrostatycznem.

Zjawisko to daje nam jeszcze jedną zależność między $\frac{\mu}{\epsilon}$ i V , która pozwala sprawdzić rezultaty liczebne, otrzymane z pierwszej pary równań. Jeżeli promień katodálny odchyła się przez przyciąganie do ładunku elektrycznego, jak wskazuje rys. 17, natenczas siła w każdym punkcie promienia nie będzie już prostopadła do kierunku promienia,

¹⁾ Postać krzywizny promienia katodального może być wyznaczona drogą bezpośredniego pomiaru.

jak to miało miejsce w przypadku odchylen magnetycznych, lecz natomiast będzie skierowana wzdłuż prostej, łączącej rozważany element promienia z dodatnim ładunkiem elektrycznym; w położeniu wskazanem na rysunku siła będzie skierowana ku dołowi i wyniesie, jeżeli H_1 stanowi natężenie pola, $H_1\varepsilon$. Jeżeli prędkość cząsteczek w promieniu będzie V , to po pewnym odstępie czasu cząsteczka na promieniu przesunęłaby się, gdyby nie było siły odpychającej, w kierunku poziomym na odległość $x = Vt$. Z drugiej zaś strony na tej odległości cząsteczka w rzeczywistości będzie odchyłona ku dołowi w kierunku ładunku na długość y , która może być bezpośrednio zmierzona. Ponieważ na cząsteczkę działa siła $H_1\varepsilon$, przyspieszenie, wywołane przez tę siłę, wyniesie $\frac{H_1\varepsilon}{\mu}$; zatem:

$$y = \frac{H_1\varepsilon}{\mu} \cdot \frac{t^2}{2}.$$

Podstawiając $t = \frac{x}{V}$, otrzymamy:

$$\frac{2}{H_1} \frac{y}{x^2} = \frac{\varepsilon}{\mu} \cdot \frac{1}{V^2} \dots \dots \dots (d)$$

Wielkości y , x i H_1 mogą być bezpośrednio zmierzone i równanie (d) daje nam nowy związek między $\frac{\varepsilon}{\mu}$ i V .

Rezultaty liczebne, otrzymane wskazaną wyżej drogą, mniej więcej zgadzają się ze sobą. Dla prędkości rozchodzenia się cząsteczek w promieniach katodalnych otrzymano wielkości równające się od $\frac{1}{5}$ do $\frac{1}{3}$ prędkości światła. Co się zaś tyczy stosunku $\frac{\varepsilon}{\mu}$, to na ten otrzymano około $2 \cdot 10^8 \left(\frac{\text{kulon.}}{\text{gram.}} \right)$, t. j. mniej więcej 2000 razy więcej (według innych obliczeń tylko 700 razy więcej), niż dla tego samego stosunku otrzymano z procesów elektrochemicznych dla wodoru (96500 kulonów na gram czyli około 10^5 kul. na gr.). Na podstawie powyższego musimy przypuścić jedno z dwojga: albo każdy atom substancji katodальной jest obarczony ładunkiem o 2000 razy większym od ładunku, znajdującego się na atomie zwykłej materji; albo też w jednym gramie substancji katodальной znajduje się 2000 razy więcej materialnych cząsteczek, niż w zwykłym wodorze; przytem sam przenoszony ładunek przedstawia

pierwotny elektron, t. j. ilość elektryczności połączonej ze zwykłym atomem materji. Ostatnie przypuszczenie konsekwentnie prowadzi do wniosku istnienia cząsteczek materji mniejszych od atomów, masa których stanowi $\frac{1}{2000}$ (według innych badaczy $\frac{1}{700}$) masy jednego atomu materji. Ponieważ nie możemy sobie przedstawić masy mniejszej od masy atomu materji, to powstała hipoteza, że właśnie te najdrobniejsze cząsteczki są elektrycznością, i że atom materji przedstawia całe skupienie z kilkuset lub kilku tysięcy elektronów ¹⁾.

To ostatnie przypuszczenie potwierdza się doświadczeniami J. J. Thomsona, któremu udało się wyznaczyć bezpośrednio ładunek ϵ cząsteczek katodalnych. Doświadczenie wykazało, iż promienie katodalne, przechodząc przez powietrze, nasycone parą wodną, wpływają na skraplanie pary, t. j. na utworzenie się mgły czyli najdrobniejszych płynnych cząsteczek; jako ośrodki przy powstaniu ich służą właśnie cząsteczki katodalne. J. J. Thomson zdołał wyznaczyć tak liczbę kropeł w mgłę, wywołanej przez promień katodalny w danej objętości, jak i ogólny ładunek elektryczny tych kropli, a zatem i ϵ ładunek elektryczny każdej oddzielnej kropli. Otrzymane wielkości, wprowadzone do poprzednio określonego stosunku $\frac{\mu}{\epsilon}$, dały na μ wartość także równą około $\frac{1}{2000}$ masy jednego atomu materji.

Niezmiernie wielka prędkość przenoszenia się elektronów, większa od wszystkich znanych dotąd prędkości cząsteczek materjalnych, przemawia również na korzyść tego, iż wymiary ich powinny być mniejsze od wymiarów atomów materjalnych. Należy zauważyć, iż wszystkie poprzednie obliczenia stosują się tylko do elektronów ujemnych; lecz niektórym badaczom udało się otrzymać i prądy elektronów dodatnich, które jednakowoż okazały się daleko większemi od ujemnych i poruszały się znacznie wolniej.

Ograniczając na powyższym pobieżnym rzucie oka nasz wykład o tej nowej bardzo ciekawej hipotezie, należy nam w końcu zauważyć: a) teo-

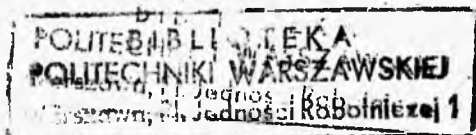
¹⁾ W tem przypuszczeniu J. J. Thomson tłumaczy bezwładność materji jako opór, który pole przedstawia ruchowi ładunku elektrycznego. W tej hipotezie masa powinna zależeć od prędkości ciała; fakt, że doświadczenie nam tego nie potwierdza, tłumaczy J. J. Thomson tem, iż największe znane prędkości ciał materjalnych są znikome w porównaniu z prędkością światła i elektronów. (Pocisk artyleryjski ok. 1 kilometra na sekundę; ziemia w obrocie około słońca ok. 30 kilom., niektóre gwiazdy stałe 100 — 200 kilom.). Patrz zresztą J. J. Thomson *Electricity and Matter*, 1904.

rya elektronów, być może, pozwoli objąć w jedną całość teorię elektryczności ze zjawiskami najróżnorodniejszych promieniowań, które w ostatnich czasach tak rozszerzyły horyzonty wiedzy fizycznej, szczególnie zaś z tak zagadkową do tej pory dziedziną zjawisk radioaktywnych; b) wyniki tej teorii są niezależne i nie zmieniają podanych w poprzednich rozdziałach wywodów o polu magnetycznym.

W każdym bądź razie, rozszerzając horyzont wiedzy, teoria elektronów nie osiągnęła jeszcze jednomyślnego uznania u wszystkich badaczy; niektórzy zajmują nawet wobec niej postawę wyczekującą.

Główne prace spożytkowane w niniejszem dziele.

- James Clark Maxwell, Treatise on Electricity and Magnetism, 1873.
Sir W. Thomson (Lord Kelvin) — oddzielne rozprawy z teorii elektryczności „Papers“.
J. J. Thomson, Elements of the mathematical Theory of Electricity and Magnetism, 1900. (Wyborne dzieło, znajdujące się w francuskim i niemieckim tłumaczeniu, mogące służyć jako przygotowanie do czytania Maxwella).
Vaschy, Traité d'Electricité et de Magnétisme. Paris 1890.
Bedell et Crehore, Courants alternatifs—francuskie tłumaczenie angielskiego oryginału — Paryż 1895.
Boltzmann, Vorlesungen über Maxwells Theorie der Electricität und des Lichtes 1893.
Ebert Die Theorie des Elektromagnetismus, Leipzig 1900.
Benischke. Die Grundgesetze der Wechselstromtechnik. Braunschweig 1903.
Borgmann. Zasady nauki o zjawiskach elektrycznych i magnetycznych (po ross.). Petersburg 1893—95.
H. Poincaré. Electricité et Optique, Paris 1890.



DZIEŁA MATEMATYCZNE

wydane

z zapomogi Kasy pomocy dla osób pracujących na polu naukowym
imienia D-ra Med. Józefa Mianowskiego

do nabycia we wszystkich księgarniach.

A. BIBLIOTEKA MATEMATYCZNO-FIZYCZNA,

wydawana pod redakcją

M. A. Baranieckiego i A. Czajewicza.

- Serya I, tom IV. *Witkowski A. W.* Wiadomości początkowe z Geografii fizycznej i Meteorologii. Warszawa, 1884, w 12-ce, str. X, 108, drzeworytów 22, lit. 4. W oprawie. Cena kop. 25.
- Serya III, tom V. *Baraniecki A. M.* Początkowy wykład syntetyczny własności przecięć stożkowych, na podstawie ich pokrewieństwa harmonicznego z kołem. Warszawa, 1885. w 8-ce, str. XVI, 151, drzeworytów 63. Cena kop. 40.
- Serya IV, tom II. *Sochocki J.* Rozwiązywanie równań liczebnych. Warszawa, 1884, w 8-ce. Lex. str. XII, 212. Cena kop. 60.
- Serya IV, tom X. *Franke J. N.* Mechanika teoretyczna. Warszawa, 1899, w 8-ce, str. XXVI, 645, drzeworytów 72. Cena rb. 1.

B. DZIEŁA I ROZPRAWY MATEMATYCZNO-FIZYCZNE,

wydawane przez

A. Czajewicza i S. Dicksteina.

1. *Badowski J.* Geometria elementarna. Warszawa, 1884, LVIII, 338, drzeworytów w tekście IX, 344. Cena rb. 1 kop. 35.
2. *Baraniecki M. A.* Arytmetyka, wykład szczegółowy. Wydanie drugie, znacznie zmienione. Warszawa, 1894, str. LXIV, 408. Cena rb. 1 kop. 35.
3. *Danielewicz A. B.* Podstawy matematyczne ubezpieczeń życiowych. Warszawa, 1896, str. 335. Tablic 10. Cena rb. 2.
8. *Danielewicz A. B.* Metoda najmniejszych kwadratów. Warszawa, 1904, str. X, 185, X. Cena rb. 1 kop. 20.
7. *Feldblum M.* Geometria wykreślna. Warszawa, 1902, str. XVI, 325, z 172-ma rysunkami w tekście. Cena rb. 2.
10. *Folkierski Wł.* Zasady rachunku różniczkowego i całkowego. Tom I. Wydanie drugie, znacznie zmienione. Warszawa, 1904, str. XII, 574 z 53-ma figurami w tekście. Cena rb. 2 kop. 40.
5. *Kowalczyk J.* O sposobach obliczania przeszkód biegu ciał niebieskich. Warszawa, 1891, str. 624. Tablic 3. Cena rb. 7 kop. 50.
12. *Merczyng H.* Teoria prądu elektrycznego. Warszawa, 1905, 8^o, str. IX, 92. Cena kop. 75.
6. *Schür E.* Podręcznik Geometrii analitycznej, przekład z niemieckiego przez *T. Łopuszańskiego*. Warszawa, 1901, str. 249, z licznymi rysunkami w tekście. Cena rb. 1.
- 11, 4, 9. *Witkowski A.* Zasady Fizyki. Tom I. Wydanie drugie. Warszawa, 1904, 8^o, str. 542. Cena rb. 2. Tom II, zeszyt pierwszy. Warszawa, 1897 (wyczerpany). Tom II, zeszyt drugi. Warszawa, 1904, w 8-ce, str. 302—571. Cena rb. 1 kop. 35.



Wyciąg z Ustawy Kasy pomocy dla osób, pracujących na polu nankowem, imienia Józefa Mianowskiego.

§ 1. Kasa pomocy Józefa Mianowskiego ma na celu udzielanie zapomóg pieniężnych, jednorazowych lub peryodycznych, oraz pożyczek osobom pracującym na polu naukowem, lub też osobom, które już poprzednio w tej dziedzinie dały się poznać ze swoich prac naukowych. Zadaniem Kasy może być również udzielanie takim osobom środków lub też pożyczek na cele naukowe.

§ 2. Pożyczki i zapomogi nie mogą być wydawane obcym poddanym, jak również poddanym rosyjskim, zamieszkującym zagranicą bez zezwolenia Rządu.

§ 3. Fundusze Kasy stanowią: a) wkłady założycieli, b) jednorazowe i coroczne wnioski członków Kasy, c) dobrowolne ofiary na zasilenie Kasy, d) wpływ z publicznych prelekcij, koncertów i widowisk, urządzanych w celu powiększenia funduszków Kasy.

§ 4. Członkowie Kasy dzielą się na honorowych i rzeczywistych. Za honorowych członków uważają się ci, którzy ofiarują jednorazowo dla Kasy przynajmniej sto rubli. Do rzeczywistych zaś członków zaliczają się osoby, wnoszące corocznie do Kasy przynajmniej pięć rubli.

§ 9. Członkami Komitetu mogą być tylko osoby, posiadające stopień naukowy.

§ 18. Komitet drukuje corocznie sprawozdanie z czynności Kasy.

§ 19. Kapitał obrotowy Kasy, przeznaczony na zapomogi jednorazowe i peryodyczne, oraz na pożyczki, składa się: a) z wniosków rzeczywistych członków Kasy, b) z połowy jednorazowych ofiar członków honorowych Kasy i jej założycieli, c) z procentów od wszystkich kapitałów Kasy i d) z wpływów z prelekcij publicznych, koncertów i widowisk.

§ 21. Sumy, wskazane w punkcie c § 3, zaliczają się do kapitału obrotowego lub zapasowego, zgodnie z życzeniem ofiarodawców.

§ 22. Wysokość zapomogi, jednorazowo lub też peryodycznie w ciągu roku do jednych rąk z kapitału obrotowego wydawanych, nie może przenieść $\frac{1}{2}$ części kapitału obrotowego z poprzedniego roku.

§ 23. Wysokość i terminy pożyczek, przez Kasę wydawanych, określa Komitet. W żadnym jednak razie termin pożyczki nie może przenosić lat czterech.

§ 26. Pożyczki tak procentowe, jak i bezprocentowe wydawane być mogą za poręczeniem dwóch osób, przedstawionych przez pożyczającego i przez Komitet przyjętych. Poręczycielami nie mogą być dłużnicy Kasy.

Biurowisko Kasy mieści się w domu Tow. Lekarskiego, Niecała № 7.

Wszyscy członkowie Komitetu przyjmują roczne wkłady od członków Kasy, jednorazowe, jak również podania o pożyczki i zapomogi.

W biurze Kasy lub od członków Komitetu można otrzymać ustawę Kasy, sprawozdania z czynności za lata ubiegłe.

