

raż można przedstawić w postaci

$$M_w = \gamma' (k_3 \delta)^2 l^2 f_1(\xi);$$

łatwo jest obliczyć przy pomocy tabeli wartości  $f_1(\xi)$ .

### Obliczenie naprężeń.

Naprężenia na krawędziach wynoszą

$$\sigma_{w1,2} = \frac{M_w}{\delta l} \pm \frac{\sigma \cdot M_w}{\delta^2 l^2};$$

znak górny dotyczy krawędzi od strony wody.

Gdy podstawimy w odpowiednie wzory  $\xi = \varphi$  lub  $\xi = 0$ , to otrzymamy moment gnący, siłę normalną i naprężenia w wezglowie lub w zworniku.

Porównując otrzymane wyniki ze wzorami, określającymi wpływ równomiernie rozłożonego parcia wody, należy zwrócić uwagę na następujące okoliczności.

Przedewszystkim naprężenia  $\sigma_w$  są wprost proporcjonalne do rozpiętości łuku i maleją wraz ze zmniejszającym się kątem środkowym /wprost przeciwnie, niż to ma miejsce przy równomiernym obciążeniu wodą, wtedy bowiem  $\sigma_{max}$  wypada przy  $\varphi = 90^\circ$ .

W wezłowiach niejednostajnie rozłożone parcie wody wywołuje naprężenia rozciągające od strony wody, a ściskające od strony powietrza. Naprężenia te sumując się z naprężeniami, spowodowanymi równomiernym parciem wody, powiększają naprężenia ściskające od strony powietrza, a zmniejszają od strony wody, o ile tam równomierne parcie hydrostatyczne nie wywoływało od razu naprężeń ujemnych. W tym ostatnim wypadku powiększą się naprężenia rozciągające od strony wody, zagrażając szczelności zapory.

Niejednostajne parcie wody przedstawia zatem w ogóle wpływ niekorzystny tym wyraźniejszy, im mniejszy jest wpływ równomiernego parcia wody.

O ile w większych głębokościach można pominąć naprężenia dodatkowe  $\sigma_H$ , o tyle w pobliżu korony, gdzie w dodatku łuki są najcieńsze, mają one bardzo silny wpływ. W sposób jaskrawy uwidocznia się to w podanym niżej przykładzie.

#### Przykład.

Sklepienie, którego wymiary obliczone zostały w poprzednim przykładzie /str.55/ jest pochyłone pod kątem  $\alpha = 40^\circ$  do pionu. Obliczamy wartość ~

ci pomocnicze dla przekroju najniższego w głębokości  $h = 40$  m

$$\sin \alpha = 0,643$$

$$k_4 = 0,044$$

$$\gamma' = 643 \text{ kg/m}^3$$

$$k_5 = 0,054$$

$$f_1(\xi = 90^\circ) = 0,215$$

$$k_6 = 0,036$$

$$y_o = 4,46 \text{ m}$$

$$M_{ow} = + 11900 \text{ kgm}$$

$$X_w = 6850 \text{ kg}$$

$$M_w = - 58100 \text{ kgm}$$

$$X_w = 8300 \text{ kg}$$

$$M_w = - 15700 \text{ kgm}$$

$$N_w = 8300 \text{ kg}$$

wszystko w odniesieniu do łuku o szerokości 1 m = 100 cm.

Teraz ze wzoru dla  $\tilde{\sigma}_w$  otrzymujemy:  
naprężenia od strony wody  $\tilde{\sigma}_{w1} = - 3,7 \text{ kg/cm}^2$

" " " powietrza  $\tilde{\sigma}_{w2} = + 4,8 \text{ kg/cm}^2$

Dodając do tego naprężenia wywołane równomiernie rozłożonym parciem wody /str. 56 i 57/, otrzymujemy w rezultacie takie naprężenia w wezłowie:  
od strony wody + 7,9 kg/cm<sup>2</sup>

od strony powietrza + 34,8 kg/cm<sup>2</sup>

Na wysokości korony, gdzie

$$\delta = \frac{d}{l} = \frac{0,40}{7,00} = 0,0572 ;$$

otrzymujemy  $k_3 = 18 ;$

$$M_{ow} = + 10300 \text{ kgm} \quad X_w = 6050 \text{ kg}$$

$$M_w = - 50300 \text{ kgm} \quad Y_w = 7180 \text{ kg}$$

$$M_w = - 13000 \text{ kgm} \quad N_w = 7180 \text{ kg}$$

Wszystko dla elementu łukowego szerokości 1 m.

Wypada więc

$$\sigma_{w1} = - 47,0 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_{w2} = + 50,2 \text{ kg/cm}^2$$

Wyniki okazują się wyjątkowo niekorzystne. Chcąc ich uniknąć próbowano zmniejszyć wpływ niejednostajnego parcia wody w koronie zapory prze-  
ważnie przez zmianę pochylenia sklepień w ich części górnej /rys.12 i 24/. Z tej też przyczyny stosuje się górną część zapory w postaci łuków pionowych. Przez takie jednak ukształtowanie nie osiąga się wiele, gdyż część pionowa może być stosunkowo niewysoka, a przy przejściu w część ukośną niekorzystny wpływ niejednostajnego parcia wody daje się od razu odczuć.

Są dwie możliwości zmniejszenia naprężeń od niejednostajnego parcia wody: zwiększenie grubości łuku lub zmniejszenie kąta środkowego w górnych przekrojach sklepienia. W stosowaniu tych środków nie należy jednak iść za daleko, gdyż zarówno pogrubianie łuku jak zmniejszanie jego kąta środkowego stwarza gorsze warunki

dla pracy łuku poddanego wpływom temperatury /porówn. odpow. ustęp poniżej/.

Wpływ pogrubienia łuku i zmniejszenia  $\alpha$   $\varphi$  na naprężenia, wywołane niejednostajnym parciem wody, jest bardzo duży. Przypuśćmy, że sklepienie ma w koronie grubość  $d' = 0,60$  m i  $\varphi = 70^\circ$ , wtedy

$$\begin{aligned} \delta &= 0,0857 & k_1 &= 0,096 \\ y_0 &= 3,18 \text{ m} & k_2 &= 1,543 \\ f_1 (\xi = 70^\circ) &= 0,084 & k_3 &= 12,92 \\ & & k_4 &= 0,017 \\ & & k_5 &= 0,01 \\ & & k_6 &= 0,02225 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{0N} &= + 4890 \text{ kgm} & X_N &= 3990 \text{ kg} \\ M_N &= - 24150 \text{ kgm} & N_N &= 3240 \text{ kg} \\ M_N &= - 6570 \text{ kgm} & N_N &= 4600 \text{ kg} \end{aligned}$$

$$\sigma_{N1} = - 10,2 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_{N2} = + 11,7 \text{ kg/cm}^2$$

Jak widać naprężenia zredukowane zostały niemal pięciokrotnie. Gdybyśmy tylko pogrubili sklepienie do 0,60 m pozostawiając  $\varphi = 90^\circ$  wówczas

$$\sigma_{N1} = - 20,9 \text{ kg/cm}^2 \quad \text{i} \quad \sigma_{N2} = + 23,4 \text{ kg/cm}^2$$

### Ciężar własny.

#### Siły zewnętrzne.

Ciężar elementu łuku o długości  $ds$ , grubości  $d$  i szerokości  $= 1$  /rys. 40/ wynosi

$$\gamma_0 \cdot d \cdot ds$$

$\gamma_0$  ciężar właściwy materiału, z którego wykonane jest sklepienie

Składowa normalna do płaszczyzny przechodzącej przez linie węzłowi sklepienia wyraża się

$$dQ = \gamma_0 \cdot d \cdot ds \cdot \sin \alpha = \gamma'_0 \cdot d \cdot ds ;$$

$$\gamma'_0 = \gamma_0 \cdot \sin \alpha ;$$

Moment gnący wywołany siłą  $dQ$  w układzie statycznie wyznaczalnym /wg rys. 33/ w odniesieniu do dowolnego punktu  $K$  /wyznaczonego  $\xi$ / wynosi

$$dM_Q = - dQ \cdot \overline{KL} ;$$

gdzie odległość  $\overline{KL} = r (\sin \xi - \sin i) ;$

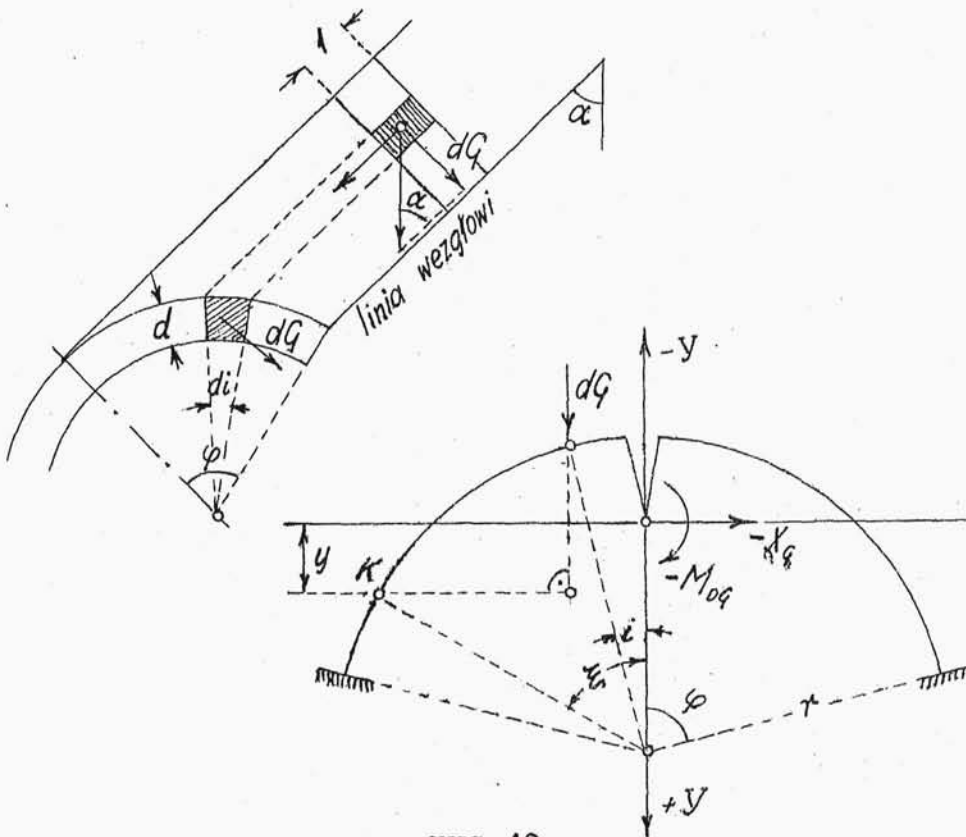
poza tym  $ds = r \cdot di ;$

więc  $dM_Q = - \gamma'_0 \cdot d \cdot r^2 (\sin \xi - \sin i) \cdot di ;$

Całkowity moment w punkcie  $K$  otrzymamy całkując powyższe wyrażenie w granicach od  $i = 0$  do  $i = \xi$

$$M_Q = - \gamma'_0 \cdot d \cdot r^2 (\xi \cdot \sin \xi + \cos \xi - 1) = - \gamma'_0 \cdot d \cdot r^2 f_2(\xi) ;$$

gdzie  $f_2(\xi) = \xi \cdot \sin \xi + \cos \xi - 1 ;$



rys. 40.

Siła normalna w układzie statycznie wyznaczalnym

$$dN_q = dQ \cdot \sin \xi = q'_0 \cdot d \cdot r \cdot \sin \xi \cdot di;$$

$$N_q = \int_0^{\xi} dN_q = q'_0 \cdot d \cdot r \cdot \sin \xi \int_0^{\xi} di = q'_0 \cdot d \cdot r \cdot \xi \cdot \sin \xi;$$

Wielkości statycznie niewyznaczalne.

Celem obliczenia wielkości  $M_{0q}$  obliczamy  
wpierw

$$\int N_q \cdot ds = r \int N_q d\xi = -q'_0 \cdot d \cdot r^3 \int_{-\varphi}^{+\varphi} f_2(\xi) \cdot d\xi;$$

$$\int \mathcal{M}_\varphi \cdot ds = - \gamma'_0 \cdot d \cdot r^3 \cdot 2 (2 \cdot \sin \varphi - \varphi \cdot \cos \varphi - \varphi) ;$$

Jeśli powyższe wyrażenie wstawimy do wzoru

$$M_{o\varphi} = - \frac{\int \mathcal{M}_\varphi \cdot ds}{\frac{2\varphi}{\sin \varphi} \cdot l} ;$$

i jeżeli następnie dokonamy uproszczeń i przeróbkę wstawiając

$$k_7 = 2 \frac{\sin \varphi}{\varphi} - \cos \varphi - 1 ;$$

$$r = \frac{l}{\sin \varphi} ;$$

$$d = \delta \cdot l ;$$

wtedy otrzymamy

$$M_{o\varphi} = \gamma'_0 \frac{\delta}{\sin^2 \varphi} \cdot k_7 \cdot l^3 ;$$

Dla określenia drugiej wielkości statycznie niewyznaczalnej:  $X_\xi$ , trzeba wpierw obliczyć całki

$$\int \mathcal{M}_\varphi \cdot y \cdot ds \quad \text{ i } \quad \int \mathcal{M}_\varphi \cdot \cos \xi \cdot ds ;$$

Całki te obliczymy korzystając z wartości  $\mathcal{M}_\varphi$  i  $\mathcal{N}_\varphi$  podanych na str. 70 i 71 oraz wstawiając

$$y = r \left( \frac{\sin \varphi}{\varphi} - \cos \xi \right) ;$$



$$ds = r \cdot d\xi ;$$

Otrzymujemy wtedy

$$\int_0^\varphi M_q y \cdot ds = - r_0' \cdot d \cdot r^2 \cdot k_8 ;$$

$$\int_0^\varphi M_q \cos \xi \cdot ds = r_0' \cdot d \cdot r^2 \cdot k_9 ;$$

$$k_8 = \frac{1}{2} \varphi \cdot \cos 2\varphi + 4 \frac{\sin^2 \varphi}{\varphi} - \frac{7}{4} \sin 2\varphi - \varphi ;$$

$$k_9 = \frac{1}{4} \sin 2\varphi - \frac{1}{2} \varphi \cos 2\varphi ;$$

Wstawiając powyższe wartości do wzoru dla  $X$ ,  
dostajemy

$$X_q = \frac{\frac{12}{\delta^2} \cdot \frac{k_8}{\sin^2 \varphi} - k_9}{\frac{12}{\delta^2} \cdot \frac{k_1}{\sin^2 \varphi} + k_2} \cdot \frac{\delta}{\sin \varphi} \cdot r_0' \cdot l^2 ;$$

Momenty gnące, siły normalne i naprężenia.

Moment gnący w dowolnym punkcie  $K$  wynosi

$$M_q = M_q + M_{oq} + X_q \cdot y ;$$

gdzie  $M_q = - r_0' d \cdot r^2 f_2(\xi) ;$

lub  $M_q = - r_0' \cdot \frac{\delta}{\sin^2 \varphi} \cdot l^3 f_2(\xi) ;$

Siła normalna  $N_q = M_\xi + X_q \cdot \cos \xi ;$

gdzie  $M_\xi = r_0' d \cdot r \cdot \xi \cdot \sin \xi ;$

$$\text{lub } N_g = T'_0 \frac{\delta}{\sin \varphi} \cdot l^2 \xi \cdot \sin \xi ;$$

Naprężenia określa wzór

$$\sigma_{g1,2} = \frac{N_g}{\delta l} \pm \frac{6 \cdot M_g}{\delta^2 l^2} ;$$

znak górny dotyczy krawędzi odwodnej.

Przy obliczeniu naprężeń w wezłowie lub w zworniku należy w odpowiednie wzory wstawić  $\xi = \varphi$  lub  $\xi = 0$ . Dla ułatwienia obliczania momentów i sił normalnych podana jest poniżej tabela wartości  $f_2(\xi)$  dla różnych kątów  $\xi$  ;

Tabela wartości  $f_2(\xi)$ .

$\xi$	$f_2(\xi)$	$\xi$	$f_2(\xi)$
5°	0,003801	50°	0,311288
10°	0,015115	55°	0,359906
15°	0,033685	60°	0,406900
20°	0,059080	65°	0,450792
25°	0,090710	70°	0,490071
30°	0,127825	75°	0,523213
35°	0,169530	80°	0,548699
40°	0,214795	85°	0,565040
45°	0,262467	90°	0,570796

Napreżenia wywołane ciężarem własnym sklepienia są wprost proporcjonalne do rozpiętości łuku. Napreżenia od strony wody przeważnie wypadają dodatnie, od strony powietrza mogą być ujemne albo dodatnie. Zatem wpływ ciężaru własnego jest naogół korzystny na wielkość naprężeń w sklepieniu.

Przykład.

Dla sklepienia, o którym mowa była w przykładach poprzednich, przyjmując je jako wykonane z żelbetu /  $\gamma_o = 2400 \text{ kg/m}^3$  /, znajdujemy następujące dane dla wezglowia w głębokości 40 m

$$\gamma_o' = 1542 \text{ kg/m}^3 \quad k_7 = 0,273$$

$$f_2(\xi) = 0,571 \quad k_8 = 0,191$$

$$k_9 = 0,786$$

$$M_{o\varphi} = + 30700 \text{ kgm} \quad X_\varphi = 10000 \text{ kg}$$

$$M_\varphi = - 64200 \text{ kgm} \quad X_\varphi = 25300 \text{ kg}$$

$$M_\varphi = + 11100 \text{ kgm} \quad N_\varphi = 25300 \text{ kg}$$

$$\tilde{\sigma}_{\varphi 1} = + 4,7 \text{ kg/cm}^2$$

$$\tilde{\sigma}_{\varphi 2} = - 1,3 \text{ kg/cm}^2$$

Z powyższego rezultatu widać, że wpływ ciężaru własnego sklepienia jest nieznaczny.

Zmiany temperatury zewnętrznej.

Jeśli temperatura powietrza spada, to wpływ tego spadku jest podobny do wpływu jednostajnego parcia wody. Wskutek spadku temperatury o  $t^{\circ} \text{C}$  każdy element  $ds$  łuku dozna skrócenia o  $\Delta ds_t$ . Pod działaniem parcia wody występowało również pewne skrócenie  $\Delta ds$ , lecz było ono wynikiem działania siły normalnej  $N$  w przekroju. Porównując te odkształcenia, wnioskujemy, że są one w takim stosunku, jak siły, które je wywołują

$$\frac{\Delta ds_t}{\Delta ds} = \frac{X_t}{X};$$

ponieważ 
$$\frac{\Delta ds_t}{ds} = \omega \cdot t;$$

$\omega$  = współczynnik rozszerzalności cieplnej materiału, z którego wykonane jest sklepienie.

$$\frac{\Delta ds}{ds} = \frac{N}{E \cdot A};$$

oraz pamiętając, że

$$X = -K_x \gamma h l;$$

$$N = \gamma h k_3 \delta l;$$

$$A = \delta l;$$

otrzymujemy

$$X_t = K_x \cdot \frac{E \cdot \omega}{k_3} \cdot l \cdot t ;$$

W wypadku spadku temperatury należy wstawić  
 $-t$  , w przeciwnym razie  $+t$  .

Największy moment gnący - w węzłach /rys. 41/

$$M_{At} = X_t \cdot y_0 ;$$

a ponieważ

$$y_0 = l \left( \frac{1}{\varphi} - \operatorname{ctg} \varphi \right) ; \text{ str. 47}$$

zaś

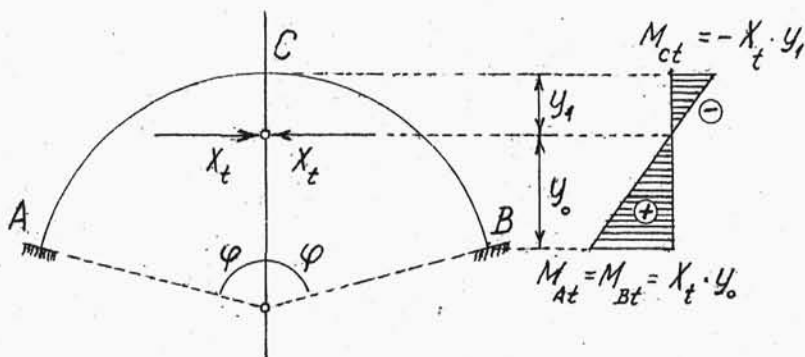
$$K_x \cdot \left( \frac{1}{\varphi} - \operatorname{ctg} \varphi \right) = K_M ; \text{ str. 53}$$

więc

$$M_{At} = K_M \cdot \frac{E \cdot \omega}{k_3} \cdot l^2 \cdot t ;$$

Siła normalna w węzłach

$$N_{At} = X_t \cdot \cos \varphi ;$$



rys. 41.

$$N_{At} = K_x \cdot \frac{E\omega}{k_3} \cdot \cos \varphi \cdot t \cdot l ;$$

Gdy  $t < 0$  wtedy  $N_{At}$  jest siłą rozciągającą.

Naprężenia w węzłowie

$$\sigma_t = \frac{N_{At}}{\delta l} \pm \frac{6 \cdot M_{At}}{\delta^2 l^2} ;$$

wstawiając wartości  $N_{At}$  i  $M_{At}$  wypada

$$\sigma_t = \left( \frac{K_x}{\delta} \cdot \cos \varphi \pm \frac{6 \cdot K_M}{\delta^2} \right) \cdot \frac{E\omega}{k_3} \cdot t ;$$

znak górny dotyczy krawędzi odwodnej.

W zworniku

$$M_{ct} = - \frac{y_1}{y_0} M_{At} = - \frac{y_1}{y_0} K_M \frac{E\omega}{k_3} t l^2 ;$$

$$N_{ct} = X_t = K_x \frac{E\omega}{k_3} t l ;$$

$$\sigma_t' = \left( \frac{K_x}{\delta} \mp 6 \cdot \frac{y_1}{y_0} \cdot \frac{K_M}{\delta^2} \right) \frac{E\omega}{k_3} t ;$$

znak górny dotyczy krawędzi odwodnej, wartość  $t$  należy podstawiać z odpowiednim znakiem.

Z równań powyższych wynika, że  $\sigma_t$  nie zależy od rozpiętości łuku, lecz jest funkcją  $\varphi$  i względnej grubości łuku  $\delta$ .

Naprężenia  $\sigma_t$  są tym większe, im łuk jest

bardziej płaski /małe  $\varphi$  / i bardziej gruby /duże  $\delta$  / A więc najwłaściwsze byłoby wykonywanie cienkich sklepień półkolistych  $/2 \varphi = 180^\circ/$ .

Największe naprężenia /co do bezwzględnej wartości /wypadają zawsze od strony wody, gdyż  $K_x$  i  $K_M$  są zawsze dodatnie.

Jeśli w powyższych obliczeniach uwzględnimy spadek temperatury  $/-t/$ , wówczas na krawędzi odwodnej otrzymuje się naprężenia rozciągające, a na krawędzi od strony powietrza - ściskające /w węzłowi/. Odwrotnie wypada uwzględniając wzrost temperatury  $/+t/$ .

Sklepienia z zasady wykonywane są z żelbetu. Współczynnik sprężystości  $E$  betonu wynosi  $140\ 000\text{ kg/cm}^2$ /wykresy Kelena skonstruowane są dla  $E = 200\ 000\text{ kg/cm}^2$  /. Powyższa wartość  $E$  dotyczy betonu ściskanego. Przy rozrywaniu betonu, szczególnie gdy naprężenia rozciągające wypadają duże:  $\sigma_t = \dots - 20 \dots - 25\text{ kg/cm}^2$  i więcej, należałoby przyjąć wartość współczynnika sprężystości mniejszą:  $E = 56\ 000\text{ kg/cm}^2$ .

Współczynnik rozszerzalności cieplnej betonu wynosi  $0,00001$  na  $1^\circ$ .

Przykład liczbowy podany jest niżej

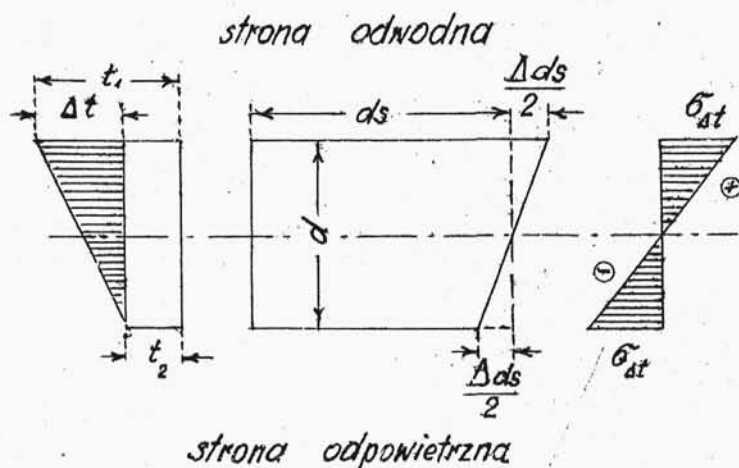
Skurcz betonu w myśl przepisów polskich u -  
względnia się jako spadek temperatury zewnętrznej  
o  $10^{\circ}$ .

Wpływ różnicy temperatur  
/innej z każdej strony łuku/.

Jeśli od strony wody panuje temperatura  $t_1$ ,  
a od strony powietrza  $t_2 < t_1$ , czyli gdy łuk pod-  
dany jest silnemu nagrzewaniu od strony wody, to  
jest on obciążony siłami odpowiadającymi różnicy  
tych temperatur

$$\Delta t = t_1 - t_2 ;$$

Zakładamy, że spadek temperatury w przekroju  
łuku następuje w sposób liniowy /rys.42/. W takim  
założeniu oś obojętna nie ulegnie żadnemu wydłuże-



rys. 42.