

Obliczenia dokonać można albo wykreślnie, albo arytmetycznie; w tym ostatnim wypadku ułatwiamy sobie pracę przez ułożenie odpowiedniego schematu obliczeń np. w formie tabeli jak w przykładzie poniższym.

Przykład.

Znajdźmy ugięcia betonowego wspornika obciążonego parciem wody i reakcją R korony. Wymiary wspornika i wielkości parcia wody podano na rys. 115. Reakcję korony przyjęto w wielkości $R = 5850$ kg, działającą w odległości $\xi = 2,00$ m od wierzchołka zapory /od zwierciadła wody/. Reakcję tę można też przedstawić w postaci parę jednostkowych ujemnych /t.zn. odwrotnie skierowanych niż parcie wody/, odciażających wspornik w części górnej na długości 3ξ /rozkład parę ujemnych jest trójkątny/.

Wspornik podzielono przekrojami 1- , 2- i 3- na jednakowe odcinki $\Delta h = 6,00$ m.

Momenty gnące, wywołane parciem wody, określają wzpry

$$M_1 = P_1 e_1 ;$$

$$M_2 = P_1 (e_1 + \Delta h) + P_2 e_2 = M_1 + P_1 \Delta h + P_2 e_2 ;$$

$$M_3 = P_1 (e_1 + 2\Delta h) + P_2 (e_2 + \Delta h) + P_3 e_3 = \\ = M_2 + (P_1 + P_2) \cdot \Delta h + P_3 e_3 ;$$

Gdyby było więcej przekrojów, wzory następne miałyby tę samą budowę

$$M_n = M_{n-1} + (P_1 + P_2 + \dots + P_{n-1}) \cdot \Delta h + P_n e_n ;$$

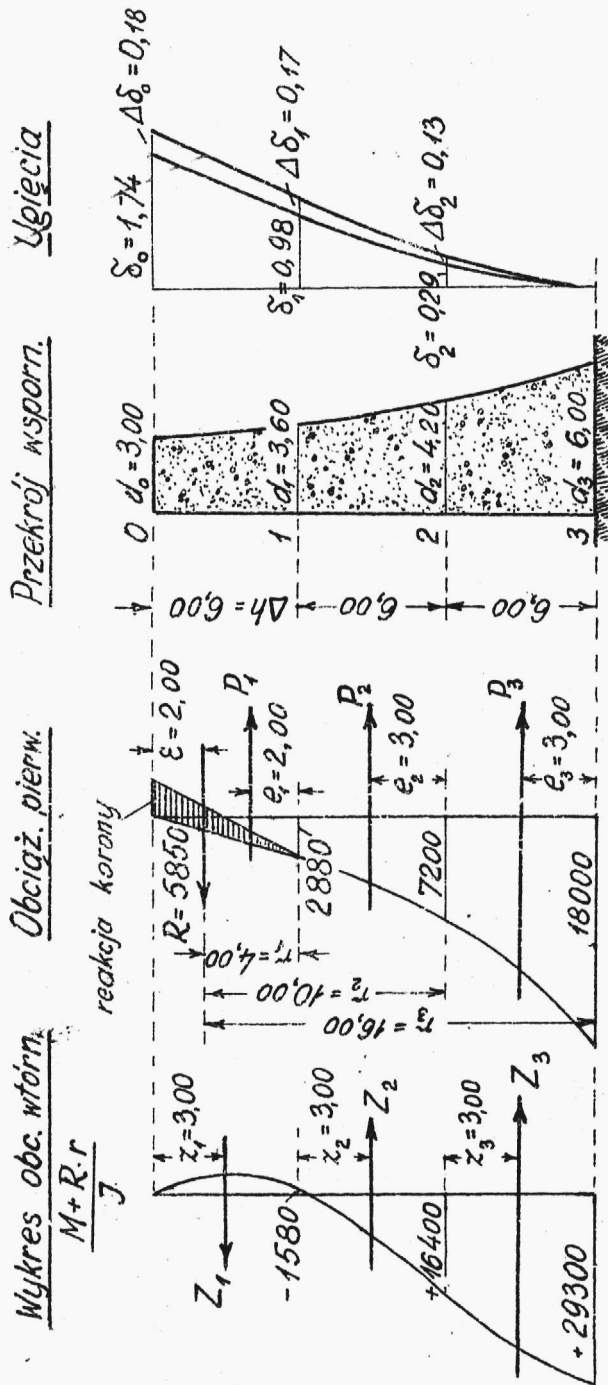
W obliczeniu podanym w tabelach na str. 268 i 269 oznaczono

$$P_1 + P_2 + \dots + P_{n-1} = \sum P ;$$

Moment gnący wywołany reakcją R korony oblicza się jako iloczyn $R \cdot r$ /porów. rys. 115 i tabelę poniżej/.

Dodając do momentu M , wywołanego parciem wody, moment $R \cdot r$, otrzymujemy całkowity moment zginający $M + R \cdot r$ w każdym przekroju oraz wielkości $\frac{M + R \cdot r}{J}$, które traktujemy jako rzędne wykresu obciążenia wtórnego. Linia ugięcia jest wykresem momentów zginających wtórnych, wywołanych obciążeniem wtórnym, zmniejszonych proporcjonalnie do współczynnika sprężystości E . Ponieważ w danym wypadku za obciążenie wtórne należy przyjąć wielkości $\frac{M + R \cdot r}{J}$ /gdyż J jest zmienne/, otrzymamy momenty wtórne wyrażone ilorazem $\frac{\mathcal{M}}{J}$; stąd ugięcie $\delta = \frac{\mathcal{M}}{EJ}$;

Obliczenie $\frac{\mathcal{M}}{J}$ przeprowadza się podobnie, jak obliczenie M, M_2, \dots . Jeśli oznaczymy przez Z, Z_2, Z_3



Wszystkie wymiary w kg i m z wyjątkiem ugięć, które podane są w mm.

rys. 115.

poszczególne pola wykresu $\frac{M+Rr}{J}$ oraz określimy z_1, z_2, z_3 /graficznie lub analitycznie/ miejsce zaczepienia tych sił obciążenia wtórnego /rys.115/, wówczas momenty wtórne będą określone wzorami

$$\frac{M_2}{J_2} = Z_3 \cdot z_3 ;$$

$$\frac{M_1}{J_1} = Z_3 (\Delta h + z_3) + Z_2 z_2 = \frac{M_2}{J_2} + Z_3 \Delta h + Z_2 z_2 ;$$

$$\frac{M_0}{J_0} = \frac{M_1}{J_1} + (Z_3 + Z_2) \cdot \Delta h + Z_1 z_1 ;$$

Ogólnie, jeśli w przekroju najbliższym fundamentu mamy

$$\frac{M_{n-1}}{J_{n-1}} = Z_n \cdot z_n ;$$

to w przekroju pośrednim

$$\frac{M_i}{J_i} = \frac{M_{i-1}}{J_{i-1}} + (Z_n + Z_{n-1} + \dots + Z_{i-3} + Z_{i-2}) \Delta h + Z_{i-1} z_{i-1} ;$$

a w przekroju najwyższym

$$\frac{M_0}{J_0} = \frac{M_1}{J_1} + (Z_n + Z_{n-1} + \dots + Z_3 + Z_2) \Delta h + Z_1 z_1 ;$$

W tabeli, obejmującej obliczenia, oznaczono

$$Z_n + Z_{n-1} + \dots + Z_{i-3} + Z_{i-2} = \sum Z ;$$

W przykładzie niniejszym przyjęto z pewnym prawdopodobieństwem

$$z_1 = z_2 = z_3 = \frac{\Delta h}{2} = 3,00 \text{ m}$$

Całość obliczeń ujęta jest w zestawienie /str.268 i 269/ a wyniki pokazane na rys.115.

Przekrój	d m	J m ⁴	p kg/m ²	p _{śred} kg/m ²	Δh m	1) p = p _{sr} · Δh	ΣP kg	e m	2) M kgm	Objaśnienia
0	3,00	2,25	0	1440	6,00	8640	8640	2,00	+17280	M ₁ = p ₁ · e ₁ ;
1	3,60	3,89	2880	5040	6,00	30240	38880	6,00	51840	(ΣP) · Δh = p ₁ · Δh ;
2	4,20	6,17	7200	12600	6,00	75600	114480	3,00	90720	p ₂ · e ₂ ;
3	6,00	18,00	18000						+159840	M ₂ ;
									233280	(ΣP) · Δh = (p ₁ + p ₂) Δh ;
									226800	p ₃ e ₃ ;
									+619920	M ₃ ;

- 1) obliczamy współnik o grubości = 1 m, mierzonej prostopadle do rysunku /115/;
- 2) sumowane od góry.

Przekrój	r m	Rr kgm	M+Rr kgm	$\frac{M+Rr}{J}$ kg/m ³	$\frac{(M+Rr)}{J} \frac{1}{s_r}$ kg/m ³	$Z = \left(\frac{M+Rr}{J} \right) \frac{\Delta h}{s_r}$ kg/m ²	ΣZ kg/m ²	z Δh m	$\frac{m}{J}$ kg/m	Objaśnienia	$\delta = \frac{m}{EJ}$; mm
0											
1	4,0	-23400	-6120	-1580		³⁾ -8000	173560	3,00	2432640 -24000	$= E \cdot \delta_0$ $= Z_1 \cdot z_1$; $= (\Sigma Z) \Delta h = (Z_1 + Z_2) \Delta h$ $= E \cdot \delta_1$	1,74
2	10,0	-58500	+101340	16400	7410	44460	181560	6,00	1089360 1367280	$= Z_2 \cdot z_2$; $= (\Sigma Z) \Delta h = Z_3 \Delta h$ $= Z_3 \cdot z_3 = E \cdot \delta_2$	0,98
3	16,0	-93600	+526320	29300	22850	437100	137100	3,00	133380 822600 411300		0,29

³⁾ rachunek przedstawiony tutaj nie pozwala na dokładne obliczenie Z_1 .

Przykład podany ma znaczenie tylko dydaktyczne. W normalnych obliczeniach rachunek powinien być dostatecznie dokładny.

⁴⁾ Sumowanie od dołu.

⁵⁾ Przyjęto $E = 160\ 000\ \text{kg/cm}^2 = 1\ 600\ 000\ 000\ \text{kg/m}^2$.

Gdy zależy nam na większej dokładności, należy jeszcze dodatkowo obliczyć ugięcia $\Delta\delta$ wywołane siłami tnącymi. Ugięcie $\Delta\delta$ jest sumą ugięć poszczególnych odcinków Δh , znajdujących się poniżej rozpatrywanego przekroju

$$\Delta\delta = \sum \frac{\tau_{sr} \cdot \Delta h}{G} ;$$

Ze wzoru tego widać, że ugięcie odcinka o długości Δh oblicza się, uwzględniając średnią wielkość naprężeń ścinających, wywołanych siłami poziomymi, t.j. parciem wody $P_1 P_2 P_3$ i reakcją korony R . Schemat obliczenia podaje tabela poniżej, rezultaty

Przekrój	d	$\sum P-R$	$\tau =$ $= \frac{\sum P-R}{d \cdot 1}$	τ_{sr}	Ugięcie poszcz. odcinków $\frac{\tau_{sr} \cdot \Delta h}{G}$	Ugięcie całkowite $\Delta\delta$ ¹⁾
	m	kg	kg/m ²	kg/m ²	mm	mm
0	3,00	0	0	390	0,01	0,18
1	3,60	2790	780	4320	0,04	0,17
2	4,20	33030	7860	12980	0,13	0,13
3	6,00	108630	18100	-	-	-

¹⁾ sumowane od dołu.

wkreślono na rys.115. Wielkość drugiego współczynnika sprężystości C przyjęto w obliczeniach równą $60\ 000\ \text{kg/cm}^2 = 600\ 000\ 000\ \text{kg/m}^2$.

Dla przekonania się, jakie występują naprężenia, można zastosować ogólny wzór /pamiętając, że rozpatrywany wspornik ma szerokość = 1 m/:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sum N}{d} \mp \frac{6 \cdot \sum M}{d^2} ;$$

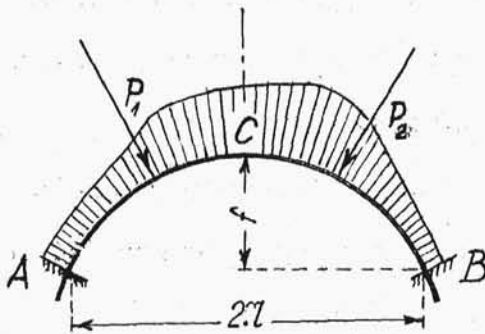
gdzie $\sum N$ jest sumą sił pionowych /ciężar wspornika, ewentualnie także składowa pionowa parcia wody/, zaś $\sum M$ - sumą momentów wszystkich sił zewnętrznych względem środka ciężkości rozpatrywanego poziomego przekroju wspornika. Zarówno $\sum N$ jak $\sum M$ obejmują siły działające powyżej rozpatrywanego przekroju. Znak minus dotyczy naprężeń na krawędzi od strony wody / σ_1 /.

Odkształcenie łuku.

Wstępne uwagi.

Obliczenie ugięć łuku jest bardziej skomplikowane, zwłaszcza gdy łuk jest niesymetryczny /rys.116/.

Sposób obliczenia przedstawiony poniżej, który z łatwością może być stosowany zarówno do obliczania łuków symetrycznych jak niesymetrycznych, podany został przez C.H.Howella /Transaction of the

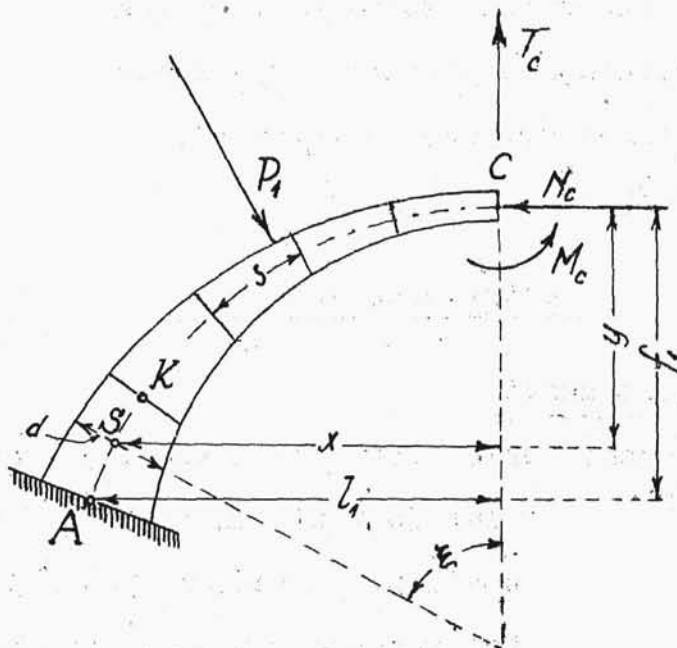


rys.116.

American Society of
Civil Engineers, New
York, 1929r. tom 93
str.1191 i n./.

Rozpatrywać bę-
dziemy jedną, lewą
stronę łuku /utwier-
dzonego na końcach/,

zastępując wpływ odrzuconej części łuku przez siłę
poziomą /osiową/ N_c , siłę tnącą T_c oraz moment M_c
/rys.117/. Łuk o szerokości = 1 /mierzonej prost-



rys.117.

padle do rysunku/ dzielimy na krótkie odcinki /kliny/ o długości s mierzonej na osi łuku.

Parcie wody działa prostopadle do grzbietu łuku. Wypadkowa P parcia wody na rozpatrywaną część łuku powoduje jego odkształcenie: każdy przekrój łuku dozna przesunięcia i skręcenia, które sumując się wywołają przesunięcie zwornika C . Tak więc przesunięcie ptu K /rys. 118/ do położenia K' i obrót przekroju o kąt $\Delta\psi$ wywoła przesunięcie ptu C o wielkość

$$\overline{CC'} = \overline{CC''} + \overline{C''C'};$$

przy czym $\overline{CC''} = \overline{KK'}$;

$$\overline{C''C'} = \overline{K'C''} \cdot \Delta\psi;$$

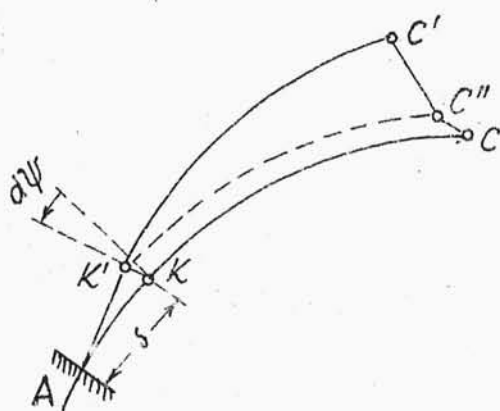
Jeśli kliny są krótkie, to z dostateczną dokładnością można przyjąć

$$\overline{KK'} = \frac{s}{2} \cdot \Delta\psi;$$

Wielkość kąta obrotu określa równanie statyki

$$\Delta\psi = \frac{M \cdot s}{EJ};$$

które jest ściśle gdy M i J są stałe na całej długości s



rys. 118.

klina, albo gdy S jest nieskończenie małe. W praktyce przyjmuje się z dostateczną dokładnością średnią wielkość M oraz J , albo - jeszcze prościej - oblicza się te wielkości dla środkowego przekroju klina.

Obrót o $\Delta\psi$ przyjmuje się za dodatni w kierunku rozwarcia kąta środkowego /jak na rys.118/. Moment M jest dodatni, gdy wywołuje naprężenia ściskające od strony grzbietu łuku.

Dla uniknięcia obliczania $\Delta\psi$ prościej jest rozpatrywać oddzielnie przesunięcia w dwóch kierunkach: osi X i Y .

Przesunięcie zwornika C wywołane jest przede wszystkim momentem zginającym /sił zewnętrznym/, następnie skróceniem się lub wydłużeniem osi łuku pod wpływem działania sił osiowych /normalnych do przekroju/ i wskutek zmian temperatury, wreszcie wywołane jest siłami tnącymi. Wpływ sił tnących pomijamy jako nieznaczny; wpływ pozostałych czynników omówiony jest poniżej.

Wpływ momentu zginającego.

Przesunięcia Δdy , i Δdx , ptu C , wywołane obrotem ptu S o $\Delta\psi$, będą w przybliżeniu równe prze -

sze za dodatnie.

Stosując powyższe równania do każdego klina, poczynając od A a kończąc w C, i sumując algebricznie wszystkie rezultaty, otrzymujemy przesunięcie całkowite

$$\Delta y_M = \sum_A^C x \cdot \frac{M_S}{EJ};$$

$$\Delta x_M = - \sum_A^C y \frac{M_S}{EJ};$$

Kąt obrotu przekroju w zworniku odpowiada sumie kątów obrotu wszystkich klinów od A do C, czyli

$$\psi = \sum_A^C \Delta \psi = \sum_A^C \frac{M_S}{EJ};$$

Moment gnący, występujący w powyższych równaniach, wywołany jest nie tylko parciem wody, lecz także reakcjami odrzuconej części łuku /reakcje te trzeba uważać jako siły zewnętrzne/. Zatem moment w pcie S /porów.rys.117/

$$M = M_c + N_c y + T_c x - M_{p_i}; \dots\dots\dots h/$$

M_{p_i} oznacza moment gnący w rozpatrywanym punkcie

wywołany tą częścią parcia wody, która działa na część łuku od zwornika do rozpatrywanego przekroju t.j. na $\cup SC$.

Wszystkie wielkości uważane są za dodatnie, gdy działają w kierunkach podanych na rys.117. Znak minus przy M_{pt} nie jest matematycznie udowodniony, lecz zgadza się z wynikami praktyki. Przyjęto obliczać M_{pt} bez zwracania uwagi na znak, później odejmując jedynie obliczone M_{pt} od pozostałych składników wzoru /1/

Wstawiając wielkość M do wzorów określających przesunięcia i obrót, otrzymujemy

$$\Delta y_M = \sum_A^c \frac{x \cdot s}{EJ} (M_c + N_c y + T_c x - M_{pt});$$

$$\Delta x_M = - \sum_A^c \frac{y \cdot s}{EJ} (M_c + N_c y + T_c x - M_{pt});$$

$$\psi = \sum_A^c \frac{s}{EJ} (M_c + N_c y + T_c x - M_{pt});$$

Wpływ sił normalnych.

Jeśli klin o długości s pod wpływem siły normalnej do przekroju / i osiowej / dozna wydłużenia lub skrócenia o Δs , wówczas pt K a z nim razem

pt C doznają przesunięć /rys. 120/

$$\delta y_N = \Delta s \cdot \sin \xi ;$$

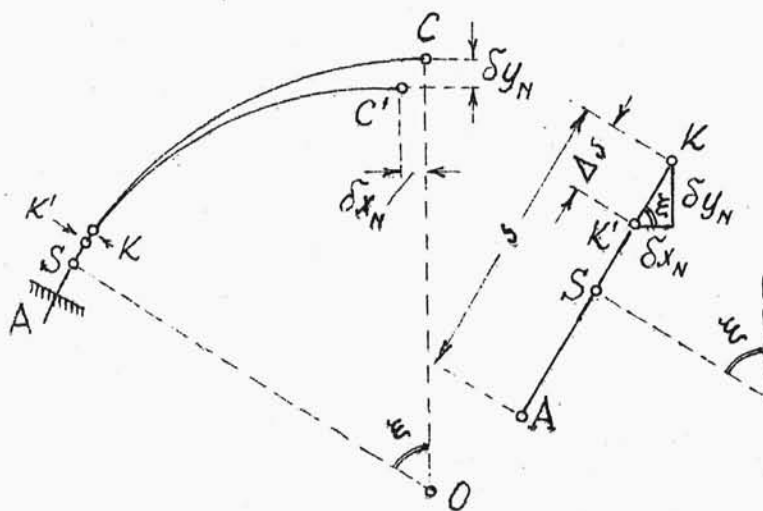
$$\delta x_N = \Delta s \cdot \cos \xi ;$$

ξ jest kątem środkowym $SO C$.

Pełne przesunięcie zwornika - wskutek sumowania się wpływów zmian długości poszczególnych klinów - wyniesie

$$\Delta y_N = \sum_A^C \Delta s \cdot \sin \xi ;$$

$$\Delta x_N = \sum_A^C \Delta s \cdot \cos \xi ;$$



rys. 120.

P_1' oznacza składową /normalną do przekroju w $S/$ wypadkowej tej części parcia wody, która działa na łuk SC .

Zatem skrócenie klina

$$\Delta s = -\frac{S}{Ed} \cdot (N_c \cos \xi - T_c \sin \xi + P_1');$$

Wstawiając tę wielkość do wzorów dla Δy_N i Δx_N , otrzymujemy

$$\Delta y_N = -\sum_A^C \frac{S \cdot \sin \xi}{Ed} (N_c \cos \xi - T_c \sin \xi + P_1');$$

$$\Delta x_N = -\sum_A^C \frac{S \cdot \cos \xi}{Ed} (N_c \cos \xi - T_c \sin \xi + P_1');$$

Wpływ temperatury.

Przesunięcie ptu C pod wpływem zmiany temperatury o t° określają wzory

$$\Delta y_t = f_t \omega t ;$$

$$\Delta x_t = l_t \omega t ;$$

ω - współczynnik rozszerzalności cieplnej betonu /w ogóle materiału, z którego wykonana jest zapora/,

f_t i l_t - strzałka i rozpiętość lewej części łuku

/porów.rys.117/. Jeśli rozpatrujemy wpływ spadku temperatury, to Δy_t oraz Δx_t są ujemne.